

Un exemple d'endomorphisme polynomial de \mathbb{C}^2 avec une composante de Fatou errante

M. Astorg¹ X. Buff¹ R. Dujardin² H. Peters³ J. Raissy¹

¹Université de Toulouse

²Université Paris Est de Marne-la-Vallée

³Université d'Amsterdam

17 février 2015

- 1 Présentation de la problématique
- 2 Mécanisme donnant le domaine errant
- 3 Implosion parabolique

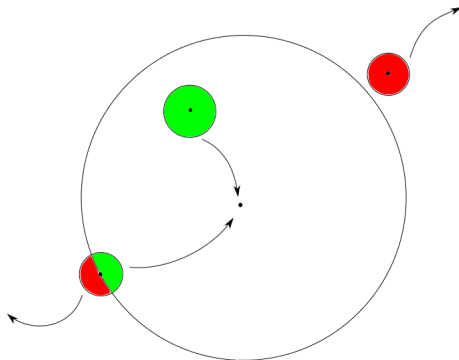
Cadre général

Soit M une variété complexe, et $f : M \rightarrow M$ une application holomorphe.

Définition

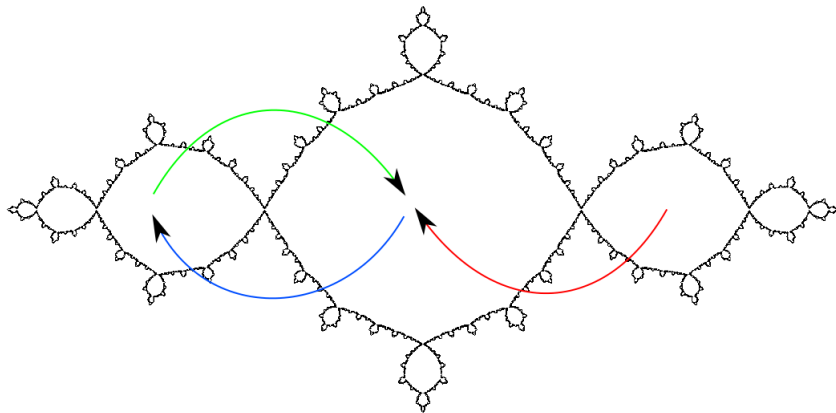
- L'ensemble de Fatou est le plus grand ouvert sur lequel $\{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue
- L'ensemble de Julia est le complémentaire de l'ensemble de Fatou
- Une composante connexe de l'ensemble de Fatou est appelée une composante de Fatou

Exemple 1 : Ensembles de Julia et Fatou de $z \mapsto z^2$



Ensemble de Julia : $J = S^1$

Exemple 2: Ensembles de Julia et Fatou de $z \mapsto z^2 - 1$

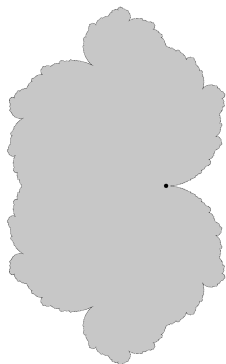


Théorème (Fatou)

Soit $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fraction rationnelle. Toute composante de Fatou invariante est de l'un des types suivants :

- attractive ($z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| < 1$)
- superattractive ($z \mapsto z^k$, $k \geq 2$)
- parabolique ($z \mapsto z + 1$, point fixe à l'infini)
- disque de Siegel ou anneau de Herman ($z \mapsto e^{2i\pi\alpha}z$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$)

Composante parabolique : $f(z) = z + z^2 + 0.95z^3$



Partie grise : bassin parabolique \mathcal{B}_f

Théorème (Sullivan, 1985)

Soit $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. Toute composante de Fatou de f est prépériodique.

Conséquence :

Avec le théorème de classification des composantes invariantes, on a une description complète de la dynamique dans l'ensemble de Fatou lorsque $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ est une fraction rationnelle.

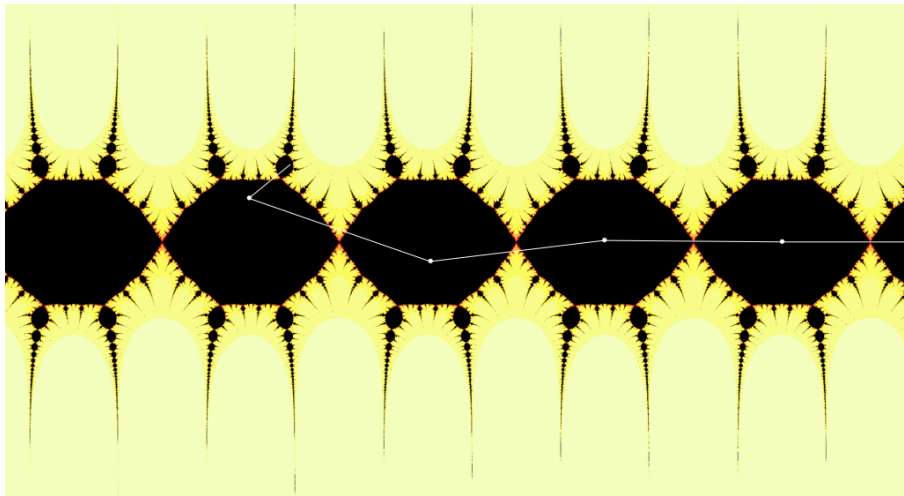
Question plus générale:

Si $f : M \rightarrow M$ est holomorphe, et M est une variété complexe, toute composante de Fatou est-elle nécessairement prépériodique ?

Réponse

- $M = \mathbb{C}$ et f application transcendante: non (Baker, 1976)
- $M = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$: oui (théorème de Sullivan, 1985)
- $M = \mathbb{C}$ et f transcendante: contre-exemples divers (Eremenko-Lyubich, 1987, 1992)
- $M = \mathbb{C}^2$, f biholomorphe transcendante : non (Fornaess-Sibony, 1998)
- $M = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, f polynomiale : non (A-Buff-Dujardin-Peters-Raissy, 2014).

Exemple transcendant: $z \mapsto z - \sin(z) + 2\pi$



Théorème Principal

Théorème (A.-Buff-Dujardin-Peters-Raissy)

Il existe une application polynomiale $P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ avec une composante de Fatou errante.

Un peu plus précisément:

Il existe des polynômes f de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ tel que pour tout polynôme g de la forme $g(w) = w - w^2 + O(w^3)$, l'application fibrée

$$P(z, w) = \left(f(z) + \frac{\pi^2}{4}w, g(w) \right)$$

a un domaine errant, qui s'accumule sur la droite complexe $\{w = 0\}$.

Remarque

On ne peut pas y arriver avec un produit trivial

$$P(z, w) = (f(z), g(w))$$

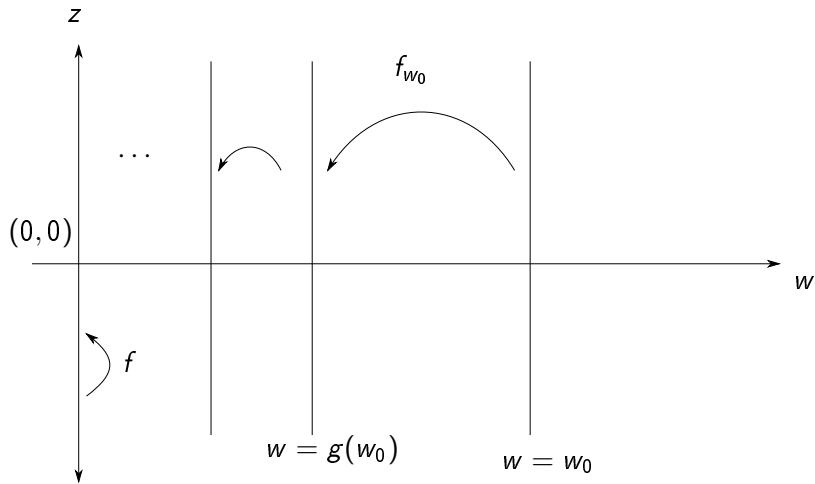
Remarque

Les exemples construits sont de la forme

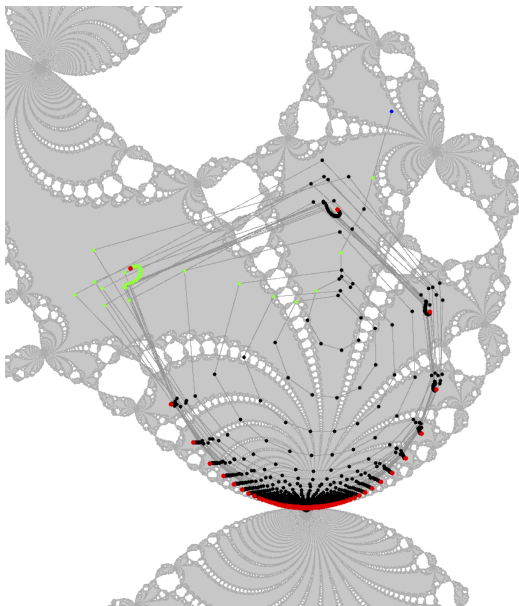
$$P(z, w) = (f_w(z), g(w))$$

Ils ont été étudiés notamment par Bedford, Boc-Thaler, Dujardin, Fornaess, Jonsson, Lilov, Lyubich, Peters, Smillie, Ueda, Vivas...

Schéma de la dynamique de $P(z, w) = (f(z) + \frac{\pi^2}{4}w, g(w))$



Projection d'une orbite errante sur $\{w = 0\}$



Mécanisme de la construction (idée : M. Lyubich)

Propriété voulue pour $P(z, w) = (f(z) + \frac{\pi^2}{4}w, g(w))$

En choisissant f correctement, on peut trouver une sous-suite m_k et un ouvert U tel que pour tout $(z, w) \in U$,

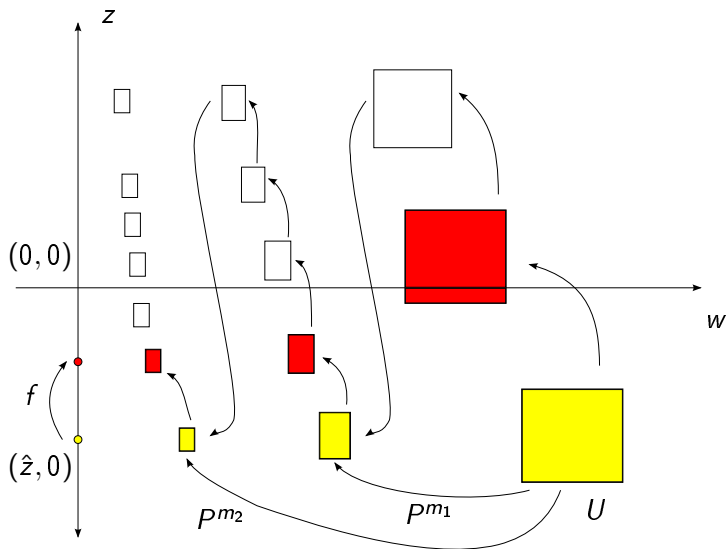
$$P^{m_k}(z, w) \rightarrow (\hat{z}, 0)$$

et $(\hat{z}, 0)$ n'est pas prépériodique pour P .

Proposition

Si P vérifie cette propriété, P a un domaine errant.

Schéma de la dynamique



Soit U un ouvert connexe tel que $\forall (z, w) \in U, P^{m_k}(z, w) \rightarrow (\hat{z}, 0) (*)$

- U est inclus dans une composante de Fatou Ω_0
- On a $(*)$ sur tout Ω_0 par prolongement analytique
- Si $\Omega_i = P^i(\Omega_0)$, alors pour tout $(z, w) \in \Omega_i$, $P^{m_k}(z, w)$ converge vers $(f^i(\hat{z}), 0)$
- Si $i \neq j$, on a $f^i(\hat{z}) \neq f^j(\hat{z})$
- Donc si $i \neq j$, $\Omega_i \neq \Omega_j$ et donc $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est errante.

Notation

Notons $f_w(z) = f(z) + \frac{\pi^2}{4}w$. Alors :

$$P(z, w) = (f(z) + \frac{\pi^2}{4}w, g(w)) = (f_w(z), g(w))$$

$$P^n(z, w_0) = (f_{w_{n-1}} \circ \dots \circ f_{w_0}(z), g^n(w_0))$$

avec $w_k = g^k(w_0) \sim \frac{1}{k}$.

Principe

Comprendre la dynamique de P près de $\{w = 0\}$ revient à étudier les compositions "non-autonomes" $f_{w_n} \circ \dots \circ f_{w_k}$, avec $f_{w_i}(z) \simeq f(z)$

Notations

- $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ a un point fixe parabolique en 0
- \mathcal{B}_f est son bassin parabolique
- ϕ_f est sa coordonnée de Fatou attractive :

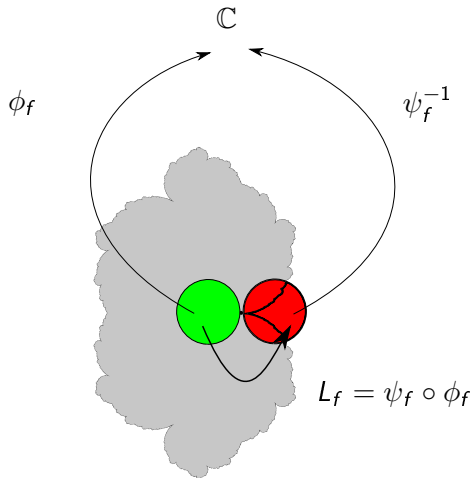
$$\phi_f \circ f = \phi_f + 1$$

- ψ_f est sa paramétrisation de Fatou répulsive :

$$f \circ \psi_f(Z) = \psi_f(Z + 1)$$

- $L_f = \psi_f \circ \phi_f$ est son application de Lavaurs (de phase 0)

Application de Lavaurs



Implosion parabolique

Théorème (Lavaurs)

Soit $\epsilon_k \rightarrow 0$ et $n_k \rightarrow +\infty$, tels que $\frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_k}} - n_k \rightarrow 0$. Alors $(f + \epsilon_k)^{\circ n_k}$ converge vers l'application de Lavaurs L_f uniformément sur tout compact de \mathcal{B}_f .

Conséquence

Avec $\epsilon_k = \frac{\pi^2}{4} w_{k^2} \sim \frac{\pi^2}{4k^2}$ et $n_k = 2k$, la suite $\underbrace{f_{w_{k^2}} \circ \dots \circ f_{w_{k^2}}}_{2k}$ converge localement uniformément vers L_f (avec uniformité locale en w également).

Proposition clé (A.-Buff-Dujardin-Peters-Raissy)

Pour tout $w \in \mathcal{B}_g$, la suite $\underbrace{f_{w_{(k+1)^2-1}} \circ \dots \circ f_{w_{k^2}}}_{2k+1}$ converge localement uniformément vers L_f (avec uniformité locale en w également).

Théorème (A-Buff-Dujardin-Peters-Raissy, 2014)

Soit $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ tel que L_f ait un point fixe attractif. Soit $g(w) = w - w^2 + O(w^3)$. Alors

$$P(z, w) = \left(f(z) + \frac{\pi^2}{4} w, g(w) \right)$$

a un domaine errant.

Exemple (numérique)

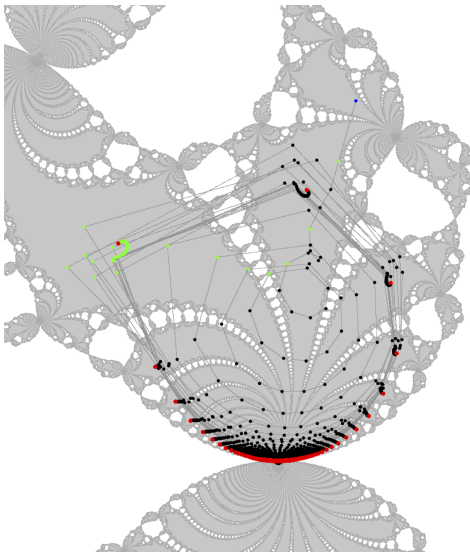
$$P(z, w) = \left(z + z^2 + 0.95z^3 + \frac{\pi^2}{4} w, w - w^2 \right)$$

Proposition

Il existe des polynômes f de la forme $f(z) = z + z^2 + O(z^3)$ dont l'application de Lavaurs a un point fixe attractif.

Idée de la preuve

On cherche sous la forme $f_b(z) = z + z^2 + bz^4$, $b \in \mathbb{R}$. On applique le TVI à $b \mapsto L_{f_b}(c_b) - c_b$, où c_b est un point critique réel de f_b .



Points rouges : points fixes attractifs de L_f
Partie grise : points ne s'échappant par $\langle f, L_f \rangle$

Obtention de la propriété (*)

Propriété (*)

$\exists U$ ouvert tel que $P|_U^{\circ m_k} \rightarrow (\hat{z}, 0)$ où $(\hat{z}, 0)$ n'est pas prépériodique.

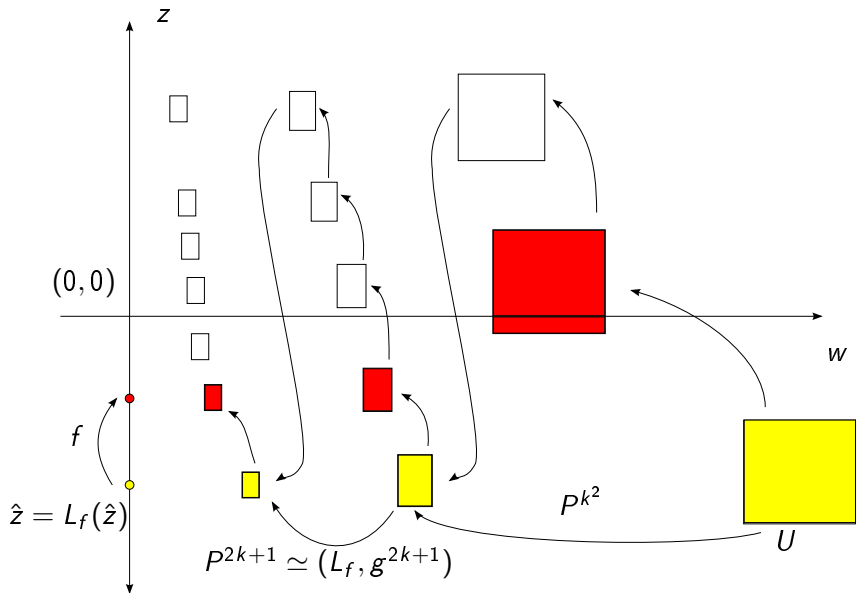
Proposition

Si L_f a un point fixe attractif \hat{z} , alors $P(z, w) = (f(z) + \frac{\pi^2}{4}w, g(w))$ a la propriété

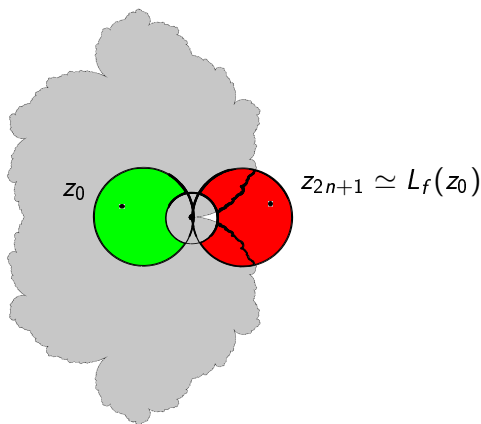
$$\exists U \text{ ouvert tel que } P|_U^{\circ k^2} \rightarrow (\hat{z}, 0) \quad (1)$$

Corollaire

Si L_f a un point fixe attractif, P a la propriété (*) et donc a un domaine errant.



Les trois étapes de la preuve de la proposition clé



Notation : $P^k(z, g^{n^2}(w)) = (z_k, g^{n^2+k}(w))$

Partie 1: avant le batteur à oeufs

Lemme 1

On a :

$$\phi_f(z_{k_n}) \simeq \phi_f(f^{k_n}(z_0)) = \phi_f(z_0) + k_n$$

pour $k_n = E(n^\alpha)$, où α est une constante universelle soigneusement choisie. De plus, z_{k_n} est à l'entrée du batteur à oeufs.

Ingrédients

Estimation de ϕ_f près de 0

Partie 2: dans le batteur à oeufs

Lemme 2

Sachant que z_{k_n} est à l'entrée du batteur à oeufs et connaissant $\phi_f(z_{k_n})$, on a une bonne estimation de $\psi_f^{-1}(z_{2n+1-k_n})$, et on sait que z_{2n+1-k_n} est à la sortie du batteur à oeufs.

Ingrédients

- coordonnées de Fatou approchées ϕ_w pour P :
 $\phi_{g(w)} \circ f_w \circ \phi_w^{-1} \simeq \text{translation de } +\frac{1}{2}\sqrt{w}$
- comparaisons de ϕ_w avec ϕ_f à l'entrée du batteur à oeufs et avec ψ_f^{-1} à la sortie

Partie 3: après le batteur à oeufs

Lemme 3

Sachant que z_{2n+1-k_n} est la sortie du batteur à oeufs et connaissant $\psi_f^{-1}(z_{2n+1-k_n})$, on a

$$\psi_f^{-1}(z_{2n+1}) \simeq \phi_f(z_0)$$

Ingrédients

Estimation de ψ_f^{-1} près de 0

Conclusion

On a donc :

$$z_{2n+1} \simeq \psi_f \circ \phi_f(z_0) = L_f(z_0)$$

Merci pour votre attention!