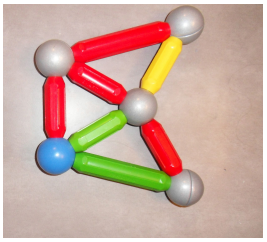
Percolation de la rigidité

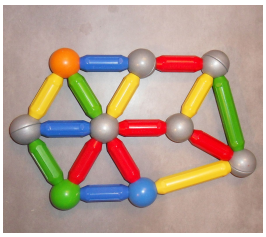
Contact: Julien Barré, Institut Denis Poisson (Université d'Orléans)
email: julien.barre@univ-orleans.fr

Type de stage : théorique, avec simulations numérique.

Niveau : peut être adapté aux niveaux L3, M1 ou M2 physique ou mathématique

Projet :
Considérons des boules reliées entre elles par des barres de longueurs fixées; les boules agissent comme des pivots autour desquels les barres peuvent tourner. Un jeu de construction magnétique fournit un exemple, comme le montrent les photos ci-dessous. La structure obtenue est-elle rigide ou déformable ? Il est assez facile de voir que la structure de gauche est rigide; mais qu'en est-il de celle de droite ?





Le premier objectif est de comprendre le problème, et comment il peut être reformulé dans le langage de la théorie des graphes. La référence historique est [1].

Le but est ensuite d'étudier de grandes structures, dans un cadre probabiliste. Prenons par exemple un réseau triangulaire, et enlevons chaque barre avec probabilité $1 - p$, indépendamment les unes des autres. Y a-t-il un sous ensemble rigide infini dans la structure obtenue ? C'est le problème de la "percolation de la rigidité", qui généralise en un sens la percolation "ordinaire"; néanmoins, il est beaucoup moins bien compris.

Plusieurs pistes de recherches sont possibles; l'une d'elles sera choisie en accord avec l'étudiant(e) :

- Il existe un algorithme performant pour étudier ce problème, appelé "pebble game". L'étudiant pourra réaliser des simulations numériques soigneuses, et analyser les données obtenues pour estimer les exposants critiques de la percolation de la rigidité. Les dernières simulations publiées ont environ 20 ans [2,3], et il doit donc être possible d'obtenir maintenant des résultats beaucoup plus précis. L'objectif serait de montrer que la percolation de la rigidité n'est pas dans la même classe d'universalité que la percolation standard.

- De nouveaux outils théoriques concernant les phénomènes critiques en 2D ont été développés, comme les processus SLE, et permettent de nouvelles analyses. Peut-on les utiliser dans le cas de la percolation de la rigidité ?

- On peut définir des modèles qui interpolent entre la percolation de la rigidité et la percolation standard. Dans quelle classe d'universalité sont-ils ? Il est peut-être possible de répondre numériquement à cette question.

- Il serait très intéressant de développer une stratégie de renormalisation pour ce problème. Une idée consiste à définir une "matrice de transfert", et à utiliser les idés de la "renormalisation phénoménologique", comme fait dans [4] pour la percolation standard. Cela fournirait une méthode semi-numérique pour calculer certains exposants critiques.

NB : Le code "pebble game" est disponible en FORTRAN, et probablement aussi en C si l'étudiant(e) le souhaite. Il faudra néanmoins programmer la simulation du réseau de percolation, et l'analyse des données.

Références:

[1] G. Laman, *J. Eng. Math.* **4**, 331 (1970).
[2] D.J. Jacobs et M.F. Thorpe, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4051 (1995).
[3] C. Moukarzel et P.M. Duxbury, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4055 (1995).
[4] B. Derrida et J. Vannimenus, *J. de Phys. Lettres* **41**, 473 (1980).