

ORSAY
N° d'ordre : 5130

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
Centre d'Orsay

THÈSE

présentée pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR EN SCIENCES
Spécialité Mathématiques

par

Athanassios BATAKIS

SUJET

Théorie du Potentiel : 1. Sur les domaines Poissoniens
2. Sur la mesure harmonique des
ensembles de Cantor

Soutenue le 19 décembre 1997 devant la commission d'examen composée de

M.	Jean-Pierre KAHANE	Président
M.	Terrens LYONS	Rapporteur
M.	Michel ZINSMEISTER	Rapporteur
M.	Alano ANCONA	Directeur
M.	Jean BERTOIN	Examinateur
M.	Yves GUIVARC'H	Examinateur
M.	Jacques PEYRIÈRE	Examinateur

A mon frère Tassos

Στον αδελφό μου Τάσο

REMERCIEMENTS

J'ai beaucoup de mal à trouver les mots justes pour remercier A. Ancona, mon directeur de thèse. Ce travail n'aurait pas été mené à terme sans ses conseils, ses encouragements et sa confiance. Il a su me faire progresser sur le plan mathématique ainsi que dans l'apprentissage de la langue, et ce avec beaucoup de patience. Son dynamisme et sa disponibilité m'ont été plus que précieux, surtout dans les moments difficiles. C'est pour tout cela que je ne pourrais jamais lui témoigner suffisamment ma gratitude.

Je tiens à remercier J.-P. Kahane d'avoir accepté de présider le jury de cette soutenance et de s'être intéressé à mon travail.

J. Peyrière et M. Zinsmeister ont suivi mon évolution pendant toute la durée de mes études en France. Je leur en suis très reconnaissant ainsi que d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Y. Guivarc'h et J. Bertoin ont également bien voulu être membres de mon jury ; j'en suis très honoré.

Je remercie vivement T. Lyons et M. Zinsmeister pour avoir accepté de rapporter ma thèse.

Dans cette page de remerciements, je ne peux pas oublier Y. Heurteaux et P. Massart. L'ambiance amicale et chaleureuse dont ils m'ont entouré et leurs conseils mathématiques m'ont beaucoup aidé.

Je pense enfin à tous ceux qui m'ont soutenu pendant ces années : mon frère Tassos, ma mère Maria, mon père Lambros ainsi que Kyriaki ont toujours été présents malgré la distance... Je pouvais aussi compter à tout moment sur mes amis Cécile, Dominique, Laurence, Ladom, Maja, Stéphane, Catherine, Dimitris, Olivier, Julien, Jean-Christophe, Renaud, Hervé, Stavros, Pavlos, Michael, Nikos, Anna, Joanna, Stavroula, Panagiotis... Mille merci à tous.

Abstract

This thesis consists in two disjoint parts. In the first part we are interested in characterising the Poissonian domains.

We say that a point x of the boundary of a domain Ω satisfy a CDF condition with respect to Ω if there is a full revolution cone C issued from x such that the series of capacities

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \operatorname{cap} \left[2^n \left\{ C \cap \left(B(x, 2^{-n}) \setminus B(x, 2^{-n-1}) \right) \setminus \Omega \right\} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{cap} \left[2^n \left\{ C' \cap \left(B(x, 2^{-n}) \setminus B(x, 2^{-n-1}) \right) \setminus \Omega \right\} \right] \right\} \end{aligned}$$

converge (we denote C' the cone $2x - C$). We show that in dimension $d \geq 2$ if the subset of the boundary of a domain, consisting of the points satisfying a CDF condition with respect to Ω , is non-negligible for the $(d-1)$ -dimensional Hausdorff measure, then Ω is not Poissonian. We also provide a partial reciprocal and propose some applications.

In second part we study the harmonique measure of a certain class of Cantor-type sets. We prove that for every Cantor set of this class (not necessarily self-similar ones) the harmonique measure is carried by a set of strictly smaller Hausdorff dimension than the dimension of the Cantor set. We also show that the inequality is valid when these sets are subjected to small perturbations. We propose an example of Cantor set (which does not belong to the studied class) for which the two dimensions are equals.

Finally, we are interested in the behaviour of the dimension of the harmonic measure of a Cantor set of the same classe under perturbation. We associate every Cantor set to a familly of parameters and we show the dimension of the harmonic measure is a continuous function of these parameters in the neighborhood of self-similar Cantor sets. We also give some examples illustrating the difficulties of the proof.

Table des matières

1	Introduction générale	3
2	Eléments de la théorie du potentiel	7
2.1	Problème de Dirichlet, théorie du potentiel classique	8
2.1.1	La méthode de Perron-Wiener-Brelot	9
2.1.2	Potentiels, domaines de Green, fonction de Green	10
2.1.3	Mesure harmonique	12
2.1.4	Réduite et capacité de Green	12
2.2	Théorie de Martin et applications	15
2.2.1	Compactifié de Martin	15
2.2.2	Frontière de Martin minimale	17
2.3	Domaines lipschitziens et domaines de Denjoy	21
3	Domaines de Poisson	27
3.1	Cadre, résultats liés	27
3.1.1	Définitions, propriétés des domaines de Poisson	28
3.1.2	La condition CDF	30
3.2	Une condition nécessaire pour qu'un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, soit Poissonien	30
3.2.1	Préliminaires	31
3.2.2	Démonstration du théorème 3.2.1	31
3.3	Une réciproque partielle	42
3.4	Mesure harmonique et ensembles irréguliers de \mathbb{R}^2	47
4	Mesure harmonique du complémentaire d'ensembles de Cantor	51
4.1	Cadre, résultats liés	51
4.2	Préliminaires	53
4.3	Harmonic measure of some Cantor type sets	57
4.3.1	Introduction	57
4.3.2	Preparatory lemmas	58
4.3.3	Proof of Theorem 4.3.1	63
4.3.4	A Counterexample	66
4.3.5	Conclusion - Further remarks	70
4.4	Une généralisation	72

5 Comparaisons des dimensions de deux mesures	81
5.1 Introduction, présentation du cadre	81
5.1.1 Entropie, dimension informatique et mesures de Bernoulli	81
5.1.2 Opérateur de décalage, théorème de Shannon-McMillan	83
5.1.3 Lien entre l'entropie et la dimension de Hausdorff	85
5.1.4 Ensembles de Cantor autosimilaires	88
5.2 Continuité de la dimension de la mesure harmonique des ensembles de Cantor	89
5.2.1 Lemmes préliminaires	89
5.2.2 Démonstration du théorème 5.2.1 et remarques	92
5.3 Exemples de non-continuité de la dimension de mesures	99
5.3.1 Premier exemple	100
5.3.2 Deuxième exemple	105
A Mesure et dimension de Hausdorff, fractals	113
A.1 Mesure et dimension de Hausdorff	113
A.2 Théorèmes de densité, ensembles réguliers au sens de Besicovitch	115
Bibliographie	117

Liste des figures

2.1 La configuration du principe de Harnack à la frontière	22
3.1 L'application ϕ de l'exemple 3.1.4	29
3.2 Le domaine \mathcal{D} et le graphe lipschitzien Γ	41
4.1 A Cantor set and its enumeration	58
4.2 The construction of proposition 3	69
4.3 Other Cantor type sets verifying $\dim \mathbb{K} > \dim \omega$	70

Chapitre 1

Introduction générale

Cette thèse est consacrée d'une part à l'étude des domaines Poissoniens et d'autre part à l'étude de la mesure harmonique des ensembles de Cantor. Les résultats obtenus sont présentés dans trois chapitres. Dans la première partie (chapitre 3) nous cherchons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un domaine de l'espace soit Poissonien. La deuxième partie (chapitre 4) est consacrée à l'étude de la mesure harmonique du complémentaire d'ensembles de Cantor dans le plan ou l'espace, tandis que dans le chapitre 5 nous nous intéressons à la continuité de la dimension de telles mesures comme fonction des ensembles de Cantor.

Le deuxième chapitre est consacré à un rappel de notions et de résultats de la théorie du potentiel, nécessaires pour la présentation des nos résultats, notamment les notions de mesure harmonique, de réduite, de fonction de Green, la théorie de Martin et la théorie du Potentiel dans les domaines lipschitziens. Nous y introduisons également les notations utilisées. Finalement, dans l'annexe nous rappelons les notions de mesure et de dimension de Hausdorff ainsi que celles d'ensembles régulier et irrégulier au sens de Besicovitch.

Domaines Poissoniens

Un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ est dit domaine Poissonien si toute fonction u harmonique bornée dans Ω s'écrit sous la forme $u(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)\omega_x(dy)$, où ω_x est la mesure harmonique de Ω évaluée en x et f est une fonction borélienne bornée sur la frontière de Ω .

Nous nous sommes inspirés d'un travail de C. Bishop [Bis91]. Dans cet article, Bishop propose des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un domaine soit Poissonien. En particulier, il montre qu'un domaine Ω est Poissonien si et seulement si pour tout couple de sous-domaines disjoints de Ω les mesures harmoniques correspondantes sont mutuellement singulières sur $\partial\Omega$.

Nous disons qu'un point x de la frontière d'un domaine Ω satisfait à une condition CDF par rapport à Ω s'il existe un cône de révolution C autour d'une demi-droite l issue

de x tel que la série de capacités

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \text{cap} \left[2^n \left\{ C \cap \left(B(x, 2^{-n}) \setminus B(x, 2^{-n-1}) \right) \setminus \Omega \right\} \right] + \\ & + \text{cap} \left[2^n \left\{ C' \cap \left(B(x, 2^{-n}) \setminus B(x, 2^{-n-1}) \right) \setminus \Omega \right\} \right] \end{aligned} \right\}$$

converge (C' désignant le cône $2x - C$).

Bishop a introduit la condition CDF pour les domaines du plan et a montré qu'un domaine Ω du plan est Poissonien si et seulement si l'ensemble des points de sa frontière qui satisfont à une condition CDF par rapport à Ω est de mesure de Hausdorff linéaire nulle.

Nous montrons que pour un domaine Ω de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, si la mesure de Hausdorff $(d-1)$ -dimensionnelle des points satisfaisant à une condition CDF par rapport à Ω est positive, alors Ω n'est pas Poissonien. La démonstration que nous proposons fait appel à la théorie de Martin ainsi qu'au principe de Harnack à la frontière d'un domaine lipschitzien [Anc78] ; cette approche nous a été proposée par A. Ancona. Ses principales articulations sont les suivantes.

En supposant que la mesure de Hausdorff $(d-1)$ -dimensionnelle des points satisfaisant à une condition CDF par rapport à Ω est positive, nous montrons d'abord que la frontière de Ω intersecte un graphe lipschitzien sur un ensemble de mesure de Hausdorff $(d-1)$ -dimensionnelle positive. Ensuite nous construisons deux sous-domaines de Ω en considérant l'intersection de Ω avec les "demi-espaces" définis par le graphe, et nous montrons que les frontières de ces sous-domaines sont effilées au sens minimal (pour la frontière de Martin) en presque tout point de l'intersection de $\partial\Omega$ avec le graphe (pour la mesure de Hausdorff $(d-1)$ -dimensionnelle). Nous en déduisons que leurs mesures harmoniques sont équivalentes à la mesure de Hausdorff $(d-1)$ -dimensionnelle sur un sous-ensemble de $\partial\Omega$. Nous utiliserons ensuite la caractérisation de Bishop mentionnée plus haut pour conclure que Ω n'est pas un domaine de Poisson.

Nous donnons également une réciproque partielle de ce résultat en faisant l'hypothèse supplémentaire que l'ensemble des points doubles (au sens de la frontière de Martin) du domaine est inclus dans un ensemble régulier au sens de Besicovitch.

Signalons également l'article de Mountford et Port [MP91] qui procure d'autres conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un domaine soit Poissonien, en termes de sa frontière de Martin. Les caractérisations d'un domaine Poissonien ne sont pas liées à la topologie du domaine : il s'agit en fait d'un problème de théorie de la mesure, lié aux propriétés géométriques de la frontière du domaine.

La question de savoir si la condition CDF est suffisante pour qu'un domaine de l'espace soit Poissonien est toujours ouverte. Elle est liée à la conjecture suivante . *Si les mesures harmoniques de deux domaines disjoints Ω_1 et Ω_2 de \mathbb{R}^d sont équivalentes et non-nulles sur un sous-ensemble de $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, alors elles sont équivalentes à la mesure de Hausdorff*

$d - 1$ -dimensionnelle sur un ensemble régulier au sens de Besicovitch de mesure positive. Cette conjecture a été démontré par Bishop, Carleson, Jones et Garnett dans [BCGJ89] quand $d = 2$. La preuve fait appel aux applications conformes du plan et aux résultats de Makarov [Mak85] et n'est donc pas adaptable en dimension supérieure à 2.

Finalement, en utilisant une méthode d'Ancona et Zinsmeister [AZ89] nous montrons que la mesure harmonique du complémentaire d'ensembles du plan irréguliers au sens de Besicovitch est singulière par rapport à la mesure de Hausdorff linéaire sur les points doubles du domaine considéré.

Ensembles de Cantor

Øksendal [Øks81] a proposé la conjecture suivante : *La mesure harmonique de tout domaine du plan est portée par un ensemble de dimension de Hausdorff égale à 1.* Il a également montré que la mesure harmonique de tout domaine est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Makarov a donné dans [Mak85] des estimations pour la mesure harmonique de domaines simplement connexes du plan conformes à la conjecture. Celle-ci a finalement été démontrée par Jones et Wolff dans [JW88].

Carleson dans [Car85] a montré que la mesure harmonique du complémentaire d'ensembles autosimilaires de type Cantor est portée par des ensembles de dimension inférieure à 1, en faisant appel aux outils de la théorie ergodique. Makarov et Volberg [MV86] ont ensuite exploité la méthode et ont montré que la mesure harmonique du complémentaire de certains ensembles de Cantor “autosimilaires” est portée par des ensembles de dimension strictement inférieure à la dimension des ensembles de Cantor, résultat que Volberg [Vol92], [Vol93] a étendu aux repulseurs de Cantor dynamiques.

En dimension supérieure, la situation est différente. Bourgain [Bou87] a montré que la mesure harmonique de domaines de \mathbb{R}^d est toujours portée par des ensembles de dimension de Hausdorff inférieure à $d - \epsilon(d)$, où $\epsilon(d) > 0$ ne dépend que de d . Parallèlement Wolff a donné dans [Wol95] un exemple de domaine dont la mesure harmonique n'est pas portée par les ensembles de dimension inférieure à $2 + \delta$, où δ est une constante strictement positive. La meilleure constante $\epsilon(d)$ du théorème de Bourgain reste inconnue.

En nous inspirant des idées de Bourgain nous avons donné une démonstration non-ergodique des résultats de Makarov et Volberg. Nous considérons des ensembles de Cantor d'une certaine classe (pas nécessairement autosimilaires) qui vérifient certaines conditions de symétrie et nous montrons que la mesure harmonique de leurs complémentaires est portée par des ensembles de dimensions de Hausdorff strictement inférieures aux dimensions des ensembles de Cantor.

Nous construisons également un exemple d'ensemble de Cantor (qui n'appartient pas à la classe considérée) dont la dimension est égale à la dimension de la mesure harmonique de son complémentaire (on appelle dimension d'une mesure la plus petite dimension des ensembles qui portent la mesure). A. Ancona a montré que la dimension de la mesure harmonique du complémentaire d'ensembles de Cantor autosimilaires de type 4-coins tend

vers 1 quand la dimension des ensembles tend vers 2. Ces résultats font partie de l'article [Bat96] que nous avons incorporé en section 4.3. A l'aide des résultats du chapitre 5 nous en déduisons que pour tout $d \in]0, 1[$ il existe un ensemble de Cantor de dimension d tel que la dimension de la mesure harmonique de son complémentaire soit également d .

Nous nous sommes également intéressé à la rigidité du phénomène : nous montrons que si on perturbe légèrement les rapports de construction des ensembles de Cantor de notre classe la dimension de la mesure harmonique du complémentaire du nouvel ensemble reste strictement inférieure à la dimension de l'ensemble. La question qui se pose est alors de savoir si la dimension de la mesure harmonique est fonction continue des ensembles de Cantor.

Continuité de la dimension des mesures

Dans le dernier chapitre nous répondons partiellement à la question posée ; nous montrons que la dimension de la mesure harmonique, vue comme fonction de certaines paramètres associés à ces ensembles, est continue au voisinage des ensembles de Cantor autosimilaires. Pour un ensemble de Cantor ces paramètres sont données à l'aide d'une filtration naturelle sur l'ensemble et sont liés aux diamètres des ensembles qui engendrent les tribus de la filtration.

Nous montrons dans un premier temps que si I et \widehat{I} sont deux éléments de deux tribus successives de la filtration, avec $I \subset \widehat{I}$, le rapport de la mesure harmonique de ces deux ensembles varie de façon continue quand on perturbe les ensembles I et \widehat{I} . Nous nous sommes alors demandés si la dimension d'une mesure varie de façon continue quand on perturbe sa répartition de masses sur les éléments des tribus de la filtration. Nous considérons comme espaces de mesure (munis d'une filtration) des ensembles de Cantor ou l'intervalle $[0, 1]$ muni des sous-intervalles dyadiques.

Si la mesure est de type Bernoulli (ou même quasi-Bernoulli) sa dimension varie effectivement de façon continue, ce qui n'est pas le cas en général, même quand la mesure sous considération est monodimensionnelle et doublante. Ceci est illustré avec deux exemples : le premier est construit sur $[0, 1]$ et nous a été proposé par A. Ancona. Nous montrons que les rapports des mesures de tout couple d'intervalles dyadiques successifs peuvent être arbitrairement proches pour deux mesures sur $[0, 1]$ dont les dimensions diffèrent de $\frac{1}{2}$. L'une des deux mesures est même absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

La deuxième construction est faite sur un ensemble de Cantor de type 4-coins. Nous construisons une suite de mesures de dimensions inférieures à $\frac{1}{2}$ qui converge vaguement vers une mesure fixe de dimension égale à 1.

Cependant la réponse complète à la question posée ci-dessus (notamment de savoir si la dimension de la mesure harmonique est fonction continue des ensembles de Cantor) reste ouverte. Les outils de la théorie ergodique et de l'analyse multifractale utilisés pour la preuve partielle ne sont pas adaptables aux ensembles de Cantor non-autosimilaires.

Chapitre 2

Eléments de la théorie du potentiel

Dans ce chapitre nous exposons rapidement les éléments de la théorie du potentiel qui sont nécessaires à la présentation de nos résultats. Le chapitre est divisé en deux sections. Dans la première, nous introduisons certaines notions de la théorie du Potentiel classique. Dans la deuxième nous présentons la théorie de Martin en nous appuyant sur l'exposé de A. Ancona [Anc90b].

Nous commençons par exposer la méthode de Perron-Wiener-Brelot (PWB) pour la résolution du problème de Dirichlet ainsi que les notions de mesure harmonique, de réduite, de domaine de Green et de fonction surharmonique (références : [Anc90b], [Bre69], [Doo84] et [Hel69]).

Le problème de Dirichlet, qui est à l'origine des notions présentées ici, est le suivant.

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$; nous notons $\partial\Omega$ la frontière Euclidienne de Ω et $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ sa fermeture dans \mathbb{R}^d . Soit $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$\alpha)$ u est harmonique ($\Delta u = 0$) dans Ω

$\beta)$ $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} u(y) = f(x)$ pour tout $x \in \partial\Omega$.

La méthode PWB présentée ci-dessous, donne la solution du problème de Dirichlet quand le domaine Ω est suffisamment régulier. De plus, si par exemple Ω est borné, la méthode PWB associe à toute fonction f borélienne bornée de $\partial\Omega$ une fonction harmonique bien déterminée. En général le problème de Dirichlet, tel que nous l'avons posé, n'a pas de solution. Cependant nous utilisons le terme “solution du problème de Dirichlet” pour la fonction harmonique u associée par la méthode PWB à la fonction frontière f même quand u ne coïncide pas avec f sur $\partial\Omega$.

La solution du problème de Dirichlet dans une boule est donnée par la formule intégrale de Poisson.

Exemple 2.0.1 Soient $\mathbb{B} = \mathbb{B}(0, r)$ une boule de \mathbb{R}^d centrée en 0 de rayon r et $f : \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Le problème de Dirichlet dans la boule pour la fonction frontière f admet comme unique solution la fonction harmonique

$$u(y) = \text{IP}(\mathbb{B}, f\sigma)(y) = \int_{\partial\mathbb{B}} K(x, y)f(x)\sigma(dx),$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur $\partial\mathbb{B}$ normalisée ($\sigma(\partial\mathbb{B}) = 1$) et $K(x, y) : \partial\mathbb{B} \times \mathbb{B} \rightarrow [0, +\infty[$ est le noyau de Poisson de \mathbb{B} donné par

$$K(x, y) = r^{d-2} \frac{r^2 - y^2}{||x - y||^d}$$

Toute fonction harmonique positive u de \mathbb{B} s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme

$$u(y) = \text{IP}(\mathbb{B}, \mu_u)(y) = \int_{\partial\mathbb{B}} K(x, y)\mu_u(dx),$$

où μ_u est une mesure positive (théorème de Herglotz, cf. [Hör94]).

Si u est bornée, il existe une mesure μ_u signée, absolument continue par rapport à la mesure de surface sur $\partial\mathbb{B}$, telle que $u(y) = \text{IP}(\mathbb{B}, \mu_u)(y)$. •

Les fonctions harmoniques positives sont donc en correspondance biunivoque avec les mesures boréliennes positives sur $\partial\mathbb{B}$. Cette correspondance sera généralisée par la théorie de Martin que nous présenterons en section 2.2.

2.1 Problème de Dirichlet, théorie du potentiel classique

Les notions introduites et les théorèmes énoncés dans cette section se trouvent dans [Bre69], [Doo84] et [Hel69]. Rappelons tout d'abord des résultats fondamentaux concernant les fonctions harmoniques d'un domaine Ω de \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, notamment le principe de Harnack, le principe du maximum et le théorème de Fatou pour les fonctions harmoniques d'une boule ou d'un demi-espace.

Soit Ω un domaine dans \mathbb{R}^d .

1. (Principe de Harnack) Soit K un sous-ensemble compact de Ω . Il existe alors une constante $c = c(K, \Omega)$ telle que pour toute fonction u harmonique positive sur Ω

$$\frac{1}{c}u(x) \leq u(y) \leq cu(x), \text{ pour tout } x, y \in K.$$

2. (Principe du maximum) Soit u une fonction harmonique dans Ω . Si u atteint son maximum (ou son minimum) en un point $\xi \in \Omega$ alors u est constante, égale à $u(\xi)$.

Les fonctions harmoniques positives (ou bornées) d'une boule admettent des limites non-tangentielles sur la frontière de la boule.

Théorème 2.1.1 (Théorème de Fatou) Soit \mathbb{B} une boule dans \mathbb{R}^d et σ la mesure de Lebesgue normalisée (de masse 1) sur $\partial\mathbb{B}$.

- a) Si u est une fonction harmonique positive (ou bornée) sur \mathbb{B} , alors u admet une limite non-tangentielle en σ -presque tout point de $\partial\mathbb{B}$.
- b) Si u est une fonction harmonique positive sur \mathbb{B} et si μ_u est la mesure associée à u (exemple 2.0.1), alors u admet une limite non-tangentielle finie en μ_u -presque tout point de $\partial\mathbb{B}$.

De plus, si u est la solution du problème de Dirichlet dans Ω pour une fonction frontière $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, mesurable, alors u converge non-tangentiellement vers f en σ -presque tout point de $\partial\mathbb{B}$.

Reciproquement, si u est une fonction harmonique bornée et si u admet la limite non-tangentielle f σ -presque partout, alors $u = \text{IP}(\mathbb{B}, f\sigma)$.

2.1.1 La méthode de Perron-Wiener-Brelot

La méthode PWB s'appuie sur l'emploi des fonctions surharmoniques et sousharmoniques d'un domaine Ω . Soit Ω est un domaine de \mathbb{R}^d . Pour une boule $\mathbb{B}(x, r)$ centrée en x et de rayon r , notons par σ la mesure de surface de $\partial\mathbb{B}(x, r)$, normalisée.

- a) Une fonction $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite surharmonique si
 - i) Pour tout $x \in \Omega$, $s(x) \geq \int_{\partial\mathbb{B}(x, r)} s(t)\sigma(dt)$, pour $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$.
 - ii) s est s.c.i., c'est-à-dire $\liminf_{y \rightarrow x} s(y) \geq s(x)$, pour tout $x \in \Omega$.
 - iii) $s > -\infty$ et s n'est pas identiquement égale à $+\infty$.
- b) Une fonction $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite sousharmonique si $-s$ est surharmonique.

Une fonction surharmonique et sousharmonique dans Ω est harmonique dans Ω . Nous notons \mathcal{S} l'ensemble des fonctions surharmoniques dans Ω et $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \{+\infty\}$. L'ensemble des fonctions sousharmoniques est noté \mathcal{L} et $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \cup \{-\infty\}$.

Soit $f : \partial\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Posons

$$\overline{H}_f^\Omega = \inf\{s \in \overline{\mathcal{S}} \text{ vérifiant } \liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} s(y) \geq f(x), \text{ pour tout } x \in \partial\Omega\}$$

$$\underline{H}_f^\Omega = \sup\{s \in \overline{\mathcal{L}} \text{ vérifiant } \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in \Omega}} s(y) \leq f(x), \text{ pour tout } x \in \partial\Omega\}$$

Les fonctions \overline{H}_f^Ω et \underline{H}_f^Ω sont soit $+\infty$ soit $-\infty$ soit harmoniques sur Ω . De plus, $\overline{H}_f^\Omega \geq \underline{H}_f^\Omega$.

Supposons $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si la solution u du problème de Dirichlet pour la fonction f existe, alors $u = \overline{H}_f^\Omega = \underline{H}_f^\Omega$.

Définition 2.1.2 Soit $f : \partial\Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Si \overline{H}_f^Ω égale \underline{H}_f^Ω et si \underline{H}_f^Ω est fini, alors la fonction $H_f^\Omega = \underline{H}_f^\Omega$ est appelée solution (généralisée) du problème de Dirichlet dans Ω pour la fonction frontière f .

2.1.2 Potentiels, domaines de Green, fonction de Green

Afin de présenter la méthode PWB dans sa généralité nous introduisons maintenant les domaines de Green. Ce sont des domaines avec une famille “riche” de fonctions surharmoniques.

Commençons par définir la notion de potentiel. Soit Ω un domaine dans \mathbb{R}^d .

Définition 2.1.3 Une fonction surharmonique p dans Ω dont la plus grande minorante sousharmonique est la fonction nulle est appelée un potentiel dans Ω .

Si s est une fonction surharmonique sur Ω ayant une minorante sousharmonique, alors u admet une plus grande minorante sousharmonique qui est de plus harmonique dans Ω .

Un corollaire de cette propriété est le théorème suivant appelé théorème de décomposition de Riesz.

Théorème 2.1.4 Soit Ω un domaine. Si s est une fonction surharmonique dans Ω ayant une minorante sousharmonique, alors il existe un potentiel q dans Ω et une fonction harmonique h dans Ω tels que $s = q + h$.

Les domaines admettant au moins un potentiel positif jouent un rôle fondamental dans la théorie du potentiel.

Définition 2.1.5 Un domaine Ω est dit Greenien s'il existe un potentiel $p > 0$ dans Ω .

Dans \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, la solution fondamentale du Laplacien est la fonction

$$G : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad G(x, y) = \frac{1}{\|x - y\|^{d-2}} \quad (2.1)$$

Pour x fixé la fonction G est harmonique dans $\mathbb{R}^d \setminus \{x\}$ et un potentiel sur \mathbb{R}^d .

La solution fondamentale du Laplacien dans \mathbb{R}^2 est la fonction

$$G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad G(x, y) = \log \frac{1}{\|x - y\|}.$$

Remarquons que dans ce cas, pour $x \in \mathbb{R}^2$ fixé la fonction G est surharmonique sur \mathbb{R}^2 et harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$, mais elle n'est pas un potentiel.

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. Soit $\xi \in \Omega$. L'existence d'une minorante sousharmonique $\text{pgmh}G(\xi, .)$ de $G(\xi, .)$ pour un $\xi \in \Omega$ implique l'existence d'une minorante sousharmonique de $G(x, .)$ pour tout $x \in \Omega$. Nous pouvons maintenant définir la fonction de Green $G_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ de Ω .

Définition 2.1.6 Supposons que la plus grande minorante sousharmonique $\text{pgmh}G(\xi, .)$ de $G(\xi, .)$ existe. La fonction de Green $G_\Omega(\xi, .)$ de Ω est définie

$$G_\Omega(\xi, .) = G(\xi, .) - \text{pgmh}G(\xi, .).$$

Remarquons que, pour $x \in \Omega$ fixé, la fonction de Green $G_\Omega(x, .)$ d'un domaine Ω (si elle existe) est une fonction harmonique sur $\Omega \setminus \{x\}$ et un potentiel dans Ω . Il s'ensuit que \mathbb{R}^2 n'a pas de fonction de Green, tandis que dans l'espace \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ la fonction de Green coïncide avec la solution fondamentale du problème de Dirichlet.

Un domaine Ω est Greenien si et seulement si il admet une fonction de Green G . De plus, tout potentiel p d'un domaine Greenien s'écrit sous la forme $p(x) = \int_{\Omega} G(x, y)\mu(dy)$, où μ est une mesure positive sur Ω . Reciproquement, si pour une mesure μ positive, $p(x) = \int_{\Omega} G(x, y)\mu(dy)$ n'est pas identiquement égale à $+\infty$ (par exemple si μ est finie) alors p est un potentiel sur Ω .

Exemple 2.1.7 Fonction de Green d'une boule : soit $\mathbb{B} = \mathbb{B}(0, r)$ une boule centrée en 0 et de rayon $r > 0$. Notons, pour $x \in \mathbb{B}$, x' le point situé sur la demi-droite issue de 0 passant par x qui vérifie $\|x\| \cdot \|x'\| = r^2$. Pour $x, y \in \mathbb{B}$, la fonction de Green de \mathbb{B} est donnée par la formule

$$G(x, y) = \log \frac{\|x' - y\| \cdot \|x\|}{r \|x - y\|}, \text{ quand } d = 2$$

et par

$$G(x, y) = \|x - y\|^{2-d} - \left(\frac{r}{\|x\|} \right)^{d-2} \|x' - y\|^{2-d}, \text{ pour } d \geq 3.$$

Si $x = y$, nous posons $G(x, y) = +\infty$. •

2.1.3 Mesure harmonique

Revenons à la méthode de Peron-Wiener-Brelot. Une propriété fondamentale des domaines de Green est la suivante.

Théorème 2.1.8 *Soit Ω un domaine de Green de \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$. Alors, pour toute fonction $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue la solution généralisée H_f^Ω du problème de Dirichlet existe.*

Soit $x \in \Omega$. L'opérateur qui associe à toute fonction f continue de $\partial\Omega$ la valeur $H_f^\Omega(x)$ est linéaire et borné de norme 1. Par le théorème de représentation de Riesz il existe une mesure de probabilité ω_x telle que pour toute fonction $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, continue

$$H_f^\Omega(x) = \int_{\partial\Omega} f(t)\omega_x(dt) \quad (2.2)$$

Définition 2.1.9 *La mesure ω_x est appelée la mesure harmonique de Ω évaluée en x . Nous notons $\omega_x(\cdot) = \omega(x, \cdot, \Omega)$, ou même $\omega(x, \cdot)$ quand il n'y a pas d'ambiguité sur le domaine.*

Il est facile de voir que si F est un sous-ensemble mesurable de $\partial\Omega$ alors la fonction $u(x) = \omega(x, F, \Omega)$ est harmonique, $0 \leq u \leq 1$. Nous en déduisons à l'aide du principe de maximum que si F est un sous-ensemble de $\partial\Omega$ mesurable alors ou bien $\omega(x, F, \Omega) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, ou bien $\omega(x, F, \Omega) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. En d'autre termes la mesure harmonique d'un domaine Ω évaluée en un point $x \in \Omega$ est équivalente à la mesure harmonique de Ω évaluée en y , pour tout $y \in \Omega$.

Soit $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable par rapport à ω_x pour un $x \in \Omega$ (et donc pour tout $x \in \Omega$). Alors, la solution généralisée H_f^Ω du problème de Dirichlet dans Ω pour f existe et est donnée par

$$H_f^\Omega(x) = \int_{\partial\Omega} f(t)\omega_x(dt) \quad (2.3)$$

pour tout $x \in \Omega$ (cf. [Bre69]).

Exemple 2.1.10 Soit Ω un domaine de Jordan du plan et soit $\omega(x, \cdot, \Omega)$ sa mesure harmonique évaluée en $x \in \Omega$. Soit ϕ une application conforme qui envoie le domaine Ω sur la boule unité \mathbb{B} . La mesure $\omega(x, \cdot, \Omega)$ est la préimage par ϕ de la mesure harmonique de la boule évalué en $\phi(x)$. La mesure harmonique de la boule $\omega(x, \cdot, \mathbb{B})$ est équivalente à la mesure de Lebesgue pour tout $x \in \mathbb{B}$ (voir exemple 2.0.1). •

2.1.4 Réduite et capacité de Green

Une autre notion fondamentale de la théorie du potentiel est celle de la réduite.

Définition 2.1.11 Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d et soit $A \subset \Omega$. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction surharmonique, positive, on appelle réduite de la fonction f sur l'ensemble A la fonction \mathbf{R}_f^A

$$\mathbf{R}_f^A = \inf\{s \in \overline{\mathcal{S}} ; s \geq f \cdot \mathbf{1}_A\}. \quad (2.4)$$

La réduite régularisée $\widehat{\mathbf{R}}_f^A$ de la fonction f sur l'ensemble A est la régularisée semi-continue inférieurement de \mathbf{R}_f^A .

Pour toute fonction f surharmonique et tout ensemble $A \subset \Omega$, la réduite \mathbf{R}_f^A et la réduite régularisée $\widehat{\mathbf{R}}_f^A$ sont des fonctions harmoniques sur $\Omega \setminus \overline{A}$. De plus, $\widehat{\mathbf{R}}_u^A$ est une fonction surharmonique sur Ω et $\mathbf{R}_u^A = \widehat{\mathbf{R}}_u^A$ sur $\Omega \setminus \overline{A}$.

Propriétés 2.1.12 Soit f une fonction surharmonique d'un domaine Ω

- a) Si $A \subset \Omega$ est un ensemble ouvert alors $\mathbf{R}_f^A = \widehat{\mathbf{R}}_f^A$.
- b) Si $A \subset B$ sont deux sous-ensembles de Ω , alors $\mathbf{R}_f^A \leq \mathbf{R}_f^B$ et $\widehat{\mathbf{R}}_f^A \leq \widehat{\mathbf{R}}_f^B$.

La réduite est souvent liée à la solution du problème de Dirichlet. Le théorème suivant en donne un exemple.

Théorème 2.1.13 (cf. [Hel69], théorème 9.25) Soit E un sous-ensemble relativement fermé d'un domaine Ω . Si u est une fonction surharmonique positive de Ω , alors $\mathbf{R}_u^E = H_{u_0}^{\Omega \setminus E}$, où u_0 est la fonction

$$u_0(x) = \begin{cases} u(x), & x \in E \\ 0, & x \in \partial\Omega \cap \partial(\Omega \setminus E) \end{cases}$$

La proposition suivante a été démontrée par Brelot. Elle procure une relation entre les solutions du problème de Dirichlet pour deux domaines dont l'un est inclus dans l'autre.

Proposition 2.1.14 Soit f une fonction bornée sur le bord de Ω , et soit $H_f^\Omega(\cdot)$ la solution du problème de Dirichlet pour la fonction f . Alors, si $\Omega' \subset \Omega$, la solution du problème de Dirichlet dans Ω' pour f se donne par la formule :

$$H_f^{\Omega'} = H_f^\Omega - H_{H_f^\Omega}^{\Omega'}. \quad (2.5)$$

Le corollaire de cette proposition qui suit donne une propriété fondamentale de la mesure harmonique.

Corollaire 2.1.15 Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines avec $\Omega_1 \subset \Omega_2$ et soient ω_1 et ω_2 leurs mesures harmoniques évaluées en un point x de Ω_1 . Alors, pour tout $F \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, $\omega_1(F) \leq \omega_2(F)$.

Nous terminons cette section par la définition de la capacité Greenienne et par un critère d'existence de la fonction de Green d'un domaine Ω de \mathbb{R}^2 .

Définition 2.1.16 Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, est appelé polaire s'il existe un ouvert $U \supset S$ et une fonction $s \in \mathcal{S}(U)$ telle que $s = +\infty$ sur S .

On a le critère, pour qu'un domaine du plan soit Greenien, suivant :

Théorème 2.1.17 (Myrberg) Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\alpha)$ Ω est Greenien.
- $\beta)$ $\partial\Omega$ n'est pas polaire.
- $\gamma)$ $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ n'est pas polaire.
- $\delta)$ Il existe une fonction surharmonique positive dans Ω non-constante.

Pour les domaines de \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, la situation est plus simple : tout domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, est Greenien.

Soit Ω un domaine de Green et soit K un sous-ensemble compact de Ω . La réduite $\widehat{\mathbf{R}}_1^K$ est alors un potentiel ou la fonction nulle. Il existe donc une mesure μ positive ou nulle, portée par K , telle que

$$\widehat{\mathbf{R}}_1^K(x) = G\mu = \int_K G(x, y)\mu(dy).$$

Définition 2.1.18 Nous appelons μ la mesure d'équilibre de K ; la masse totale de μ est appelée la capacité de Green de K dans Ω

$$\text{cap}_\Omega K = ||\mu|| = \mu(K).$$

Dans \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ un ensemble K compact est polaire si et seulement si $\text{cap}_{\mathbb{R}^d} K = 0$. Il existe des définitions équivalentes de la capacité qui sont utiles dans un grand nombre de problèmes. En voici un exemple.

Théorème 2.1.19 Soit Ω un domaine Greenien de \mathbb{R}^d et soit G sa fonction de Green. Si K est un sous-ensemble compact de Ω alors

$$\begin{aligned}\text{cap}_\Omega K &= \sup \left\{ \int_K G\mu \, d\mu, \mu \text{ portée par } K, G\mu \leq 1 \right\} \\ &= \sup \{ \mu(K), \mu \text{ portée par } K, G\mu \leq 1 \} \\ &= \frac{1}{\inf \left\{ \int_K G\mu \, d\mu, \mu \text{ portée par } K, \mu(K) = 1 \right\}}\end{aligned}$$

La notion de capacité ainsi que le théorème précédent peuvent être étendus à des ensembles plus généraux notamment aux ensembles analytiques, cf. [Doo84]. Signalons également le théorème suivant dû à Cartan.

Théorème 2.1.20 Soit Ω un domaine Greenien et soit A un sous-ensemble de Ω . Si f est une fonction surharmonique positive, alors $\mathbf{R}_f^A = \widehat{\mathbf{R}}_f^A$ sur $\Omega \setminus P$, où P est un ensemble polaire. De plus, $\mathbf{R}_f^A = \widehat{\mathbf{R}}_f^A$ sur $\Omega \setminus A$.

2.2 Théorie de Martin et applications.

Comme nous l'avons vu, deux propriétés fondamentales des fonctions harmoniques (positives ou bornées) d'une boule \mathbb{B} de \mathbb{R}^d sont données par le théorème de Fatou et la représentation intégrale de toute fonction harmonique positive (ou bornée) de \mathbb{B} . Martin, a généralisé la représentation intégrale de Poisson des fonctions harmoniques positives dans une boule aux domaines Greeniens, c'est-à-dire des domaines admettant une fonction de Green (cf. 2.1.5).

Dans cette section, nous exposons la théorie de Martin et nous donnons parallèlement quelques applications. Nous proposons, à titre de référence pour ces notions, les livres de Doob ([Doo84]), Helms ([Hel69]) et l'exposé d'Ancona ([Anc90b]) que nous suivons dans cette présentation.

2.2.1 Compactifié de Martin

Dorénavant, nous notons $\widehat{\mathbb{R}}^d$ le compactifié d'Alexandroff de l'espace \mathbb{R}^d .

Soit Ω un domaine Greenien (cf. définition 2.1.5) dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Notons \mathbf{H}_+ l'ensemble des fonctions harmoniques positives sur Ω . Soit G la fonction de Green de Ω et soit $X_0 \in \Omega$ un point fixé. Pour $\zeta \in \Omega \setminus \{X_0\}$ nous définissons le noyau de Martin $K_\zeta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ associé à ζ :

$$K_\zeta(x) = \frac{G(\zeta, x)}{G(\zeta, X_0)} \tag{2.6}$$

Remarquons que K_ζ est une fonction surharmonique sur Ω , harmonique sur $\Omega \setminus \{\zeta\}$, pour tout $\zeta \in \Omega \setminus \{X_0\}$ et que $K_\zeta(X_0) = 1$.

Notation 2.2.1 Soit $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de Ω . Nous disons que (ζ_n) tend vers l'infini dans Ω et nous notons $\zeta \rightarrow \infty_\Omega$ si pour tout compact K de Ω il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\zeta_n \notin K$ pour tout $n \geq n_0$.

Définition 2.2.2 Nous disons qu'une suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de Ω , tendant vers l'infini dans Ω , converge vers un point de Martin de Ω si K_{ζ_n} converge simplement sur Ω .

Remarquons que la définition ne dépend pas du choix de X_0 . De plus,

- a) Une telle limite $u = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\zeta_n}$ est nécessairement une fonction harmonique positive sur Ω , normalisée en X_0 , $u(X_0) = 1$.
- β) D'après le principe de Harnack, toute suite tendant vers l'infini dans Ω admet une sous-suite convergeant vers un point de Martin.

Il existe alors une compactification $\widehat{\Omega} = \Omega \cup \partial\widehat{\Omega}$ de Ω , métrisable, ayant les propriétés suivantes :

- α) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de Ω converge vers un point de $\partial\widehat{\Omega}$ si et seulement si elle converge vers un point de Martin.
- β) Deux suites de points de Ω convergent vers le même point de $\partial\widehat{\Omega}$ si et seulement si elles définissent la même fonction harmonique.

La compactification ne dépend pas du choix de point de normalisation X_0 . La topologie induite par cette compactification, appelée *topologie de Martin*, coïncide sur Ω avec la topologie Euclidienne. La frontière $\partial\widehat{\Omega}$ du compactifié de Ω est appelé *frontière de Martin de Ω* .

Notation 2.2.3 Pour un point de normalisation $X_0 \in \Omega$ et si $\zeta \in \partial\widehat{\Omega}$ nous notons K_ζ la fonction harmonique attachée au point de la frontière de Martin ζ .

Le théorème suivant est l'analogue, dans le cadre de la théorie de Martin, de la représentation intégrale de Poisson des fonctions harmoniques positives dans une boule.

Théorème 2.2.4 (Martin) Pour toute fonction harmonique $u \in \mathbf{H}_+$, il existe une mesure ν , borélienne, positive sur $\partial\widehat{\Omega}$ telle que

$$u(x) = \int_{\partial\widehat{\Omega}} K_\xi(x) \nu(d\xi) \quad (2.7)$$

La mesure ν , pour une fonction harmonique positive donné u , n'est pas nécessairement unique. On a l'unicité en se restreignant aux mesures portées par la frontière de Martin minimale.

2.2.2 Frontière de Martin minimale

Nous introduisons les fonctions harmoniques minimales.

Définition 2.2.5 Une fonction h harmonique positive sur Ω est dite minimale si toute fonction harmonique positive sur Ω , majorée par h , est proportionnelle à h .

Les fonctions harmoniques minimales forment un sous-ensemble des fonctions harmoniques attachées aux points de $\partial\widehat{\Omega}$.

Théorème 2.2.6 (Martin) Soit h une fonction harmonique minimale de Ω , telle que $h(X_0) = 1$. Il existe une suite $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de Ω tendant vers l'infini dans Ω qui converge vers h dans le compactifié de Martin,

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\zeta_n}.$$

Définition 2.2.7 Nous notons $\partial\Omega^M$ l'ensemble des points $\zeta \in \partial\widehat{\Omega}$ tels que K_ζ est une fonction harmonique minimale, appelé frontière de Martin minimale.

Martin a montré que $\partial\Omega^M$ est un sous-ensemble G_δ de $\partial\widehat{\Omega}$. Une autre propriété importante de la frontière de Martin minimale c'est que tout point de $\partial\Omega^M$ admet un système de voisinages à intersection avec Ω connexe.

Pour une fonction harmonique donnée $u \in \mathbf{H}_+$ il existe une unique mesure ν_u portée par $\partial\Omega^M$, associée à u au sens du théorème 2.2.4. La mesure ν_u est appelée mesure de Martin de Ω associée à u (relativement au point de normalisation X_0).

Pour les fonctions harmoniques bornées de Ω il existe la version suivante du théorème 2.2.4.

Théorème 2.2.8 Pour toute fonction u harmonique bornée, il existe une fonction f borélienne bornée sur $\partial\widehat{\Omega}$ vérifiant

$$u(x) = \int_{\partial\widehat{\Omega}} f(\xi) K_\xi(x) \nu_1(d\xi) \quad (2.8)$$

La mesure $\nu = \nu_1$ est appellée mesure harmonique de Martin de Ω relativement à X_0 .

Soient X_0 et X'_0 deux points de normalisation dans Ω et soient K_ζ et K'_ζ les fonctions harmoniques minimales attachées au point $\zeta \in \partial\Omega^M$, normalisées en X_0 et en X'_0 respectivement. Si ν et ν' sont les mesures harmoniques de Martin de Ω relativement à X_0 et X'_0 respectivement alors

$$\nu(d\zeta) = K'_\zeta(X_0) \nu'(d\zeta).$$

Pour présenter le théorème de Fatou pour le compactifié de Martin on a besoin de la notion d'ensemble effilé au sens minimal. Nous notons par \mathbf{R}_h^E la réduite d'une fonction surharmonique positive h sur un ensemble E , et par $\widehat{\mathbf{R}}_h^E$ la réduite regularisée (voir définition 2.1.11).

Définition 2.2.9 Soit $\zeta \in \partial\Omega^M$. Un ensemble $E \subset \Omega$ est dit effilé au sens minimal en ζ (ou ζ -effilé) si $\mathbf{R}_{K_\zeta}^E \neq K_\zeta$.

Brelot a remarqué que pour toute fonction harmonique minimale h et tout sous-ensemble E de Ω , $\mathbf{R}_h^E \neq h$ si et seulement si $\widehat{\mathbf{R}}_h^E$ est un potentiel (pour la notion du potentiel voir définition 2.1.3).

Propriétés 2.2.10 Soit ζ un point de $\partial\Omega^M$.

- α) Tout ensemble effilé au sens minimal en ζ est contenu dans un ensemble ouvert, effilé au sens minimal en ζ .
- β) La réunion d'un nombre fini d'ensembles effilés au sens minimal en ζ est effilée au sens minimal en ζ .

Définition 2.2.11 Nous disons que la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ admet la limite fine l en $\zeta \in \partial\Omega^M$ si f admet la limite l le long du filtre des sous-ensembles de Ω de complémentaire ζ -effilé.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème de Fatou classique (théorème 2.1.1).

Théorème 2.2.12 (Fatou, Doob, Naïm) Si u est une fonction surharmonique positive sur Ω et v une fonction harmonique positive sur Ω , alors $\frac{u}{v}$ admet une limite fine en ν_v -presque tout point de la frontière de Martin minimale $\partial\Omega^M$. Cette limite coïncide ν_v -presque partout avec $\frac{d\nu_w}{d\nu_v}$, où w est la partie harmonique de u dans sa décomposition de Riesz.

Remarquons que d'après ce théorème, si $\int_{\partial\Omega^M} f(\xi)K_\xi(x)\nu(d\xi)$ est la représentation intégrale de Martin d'un fonction harmonique $u(x)$ (où ν la mesure harmonique de Martin de Ω relativement à un point $X_0 \in \Omega$ et $f \in L^\infty(\nu)$) alors u admet une limite fine en ν -presque tout point de $\partial\Omega^M$ et cette limite coïncide ν -presque partout avec la fonction f . Notons également que pour un potentiel p de Ω , le théorème de Fatou implique que p admet la limite fine 0 ν -presque partout sur $\partial\widehat{\Omega}$.

Applications

Nous présentons quelques conditions d'effillement au sens minimal d'un ensemble $E \subset \Omega$. Les résultats suivants sont connus; cependant nous rappelons quelques démonstrations qui nous permettent d'illustrer les techniques utilisées au cours du chapitre suivant.

Proposition 2.2.13 *L'ensemble $E \subset \Omega$ est non-effilé au sens minimale en ν -presque tout point de la frontière de Martin minimale $\partial\Omega^M$ de Ω si et seulement si $\widehat{\mathbf{R}}_1^E = \mathbf{1}$.*

Démonstration On utilise le lemme clef suivant (cf. [Anc90b]).

Lemme 2.2.14 *Soit X un espace compact, métrisable, et μ une mesure de probabilité, borélienne sur X . Soit $\xi : X \rightarrow \mathbf{H}_+$ une application continue de X sur l'espace des fonctions harmoniques positives de Ω . La fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$u(z) = \int_X \xi(x)(z) \mu(dx)$$

est harmonique positive sur Ω . De plus, pour tout ensemble $E \subset \Omega$,

$$\widehat{\mathbf{R}}_u^E = \int_X \widehat{\mathbf{R}}_{\xi(x)}^E \mu(dx).$$

D'après le lemme et la représentation intégrale de Martin, pour $X = \partial\widehat{\Omega}$ et $\mu = \nu$ la mesure harmonique de Martin relativement à un point $X_0 \in \Omega$,

$$\widehat{\mathbf{R}}_1^E = \int_{\partial\widehat{\Omega}} \widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^E \nu(d\zeta) = \int_F \widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^E \nu(d\zeta) + \int_N \widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^E \nu(d\zeta)$$

où F est le sous-ensemble des points de $\partial\Omega^M$ en lesquels E est effilé au sens minimal et $N = \partial\Omega^M \setminus F$. Les ensembles N et F sont mesurables, et $\widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^E = K_\zeta$ pour $\zeta \in N$. D'autre part, pour $\zeta \in F$, $\widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^E < K_\zeta$ sur $\Omega \setminus \overline{E}$. Or,

$$\int_{\partial\Omega^M} K_\zeta \nu(d\zeta) = \mathbf{1}$$

et le résultat s'ensuit. •

Dans certains domaines Ω il existe une application continue, prolongeant l'identité de Ω , du compactifié de Martin de Ω sur la fermeture euclidienne de Ω . Pour un domaine Ω nous notons $\overline{\Omega}$ la fermeture de Ω dans $\widehat{\mathbb{R}}^d$.

Proposition 2.2.15 Soient Ω un domaine de Green. Notons ν la mesure harmonique de Martin de Ω relativement à un point $X_0 \in \Omega$. Supposons qu'il existe une application $\pi : \widehat{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$, continue, prolongeant l'identité de Ω . Soit $x \in \Omega$. Si ω_x est la mesure de Ω évaluée en x alors pour tout ensemble $F \subset \partial\Omega$ mesurable

$$\omega_x(F) = \int_{\pi^{-1}(F)} K_\zeta(x) \nu(d\zeta) \quad (2.9)$$

La démonstration de la proposition s'appuie essentiellement sur l'emploi de la méthode Perron-Wiener-Brelot pour la solution du problème de Dirichlet dans le compactifié de Martin (cf. [Nai57]).

Remarque 2.2.16 En fait, pour tout domaine de Green Ω , il existe une fonction mesurable $\pi : \partial\widehat{\Omega} \rightarrow \partial\overline{\Omega}$ vérifiant la relation (2.9) (voir par exemple [MP91]). Deux fonctions de ce type coïncident au dehors d'un ensemble de mesure harmonique de Martin nulle.

Corollaire 2.2.17 Soient Ω' un domaine de Green, $\Omega' \subset \Omega$. Notons ω' la mesure harmonique de Ω' . Sous les hypothèses de la proposition 2.2.15, pour tout ensemble $F \subset \partial\Omega \cap \partial\Omega'$ on a l'équivalence suivante :

$$\omega'(F) = 0 \text{ si et seulement si } \Omega \setminus \Omega' \text{ est non-effilé en } \nu\text{-presque tout point de } \pi^{-1}(F).$$

Démonstration D'après les formules (2.5), (2.8) et (2.9), si $g = \mathbf{1}_F$

$$\begin{aligned} H_g^{\Omega'}(x) &= H_g^\Omega(x) - \int_{\partial\Omega' \cap \Omega} H_g^\Omega(z) \omega'(x, dz) \\ &= \omega(x, F, \Omega) - \int_{\partial\Omega' \cap \Omega} \int_{\pi^{-1}(F)} K_\zeta(z) \nu(d\zeta) \omega'(x, dz) \end{aligned}$$

D'autre part, par le théorème 2.1.13

$$\int_{\partial\Omega' \cap \Omega} K_\zeta(z) \omega'(x, dz) = \widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^{\Omega \setminus \Omega'}(x)$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned} H_g^{\Omega'}(x) &= \omega(x, F, \Omega) - \int_{\pi^{-1}(F)} \int_{\partial\Omega' \cap \Omega} K_\zeta(z) \omega'(x, dz) \nu(d\zeta) \\ &= \omega(x, F, \Omega) - \int_{\pi^{-1}(F)} \widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^{\Omega \setminus \Omega'}(x) \nu(d\zeta) \\ &= \int_{\pi^{-1}(F)} \left(K_\zeta(x) - \widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^{\Omega \setminus \Omega'}(x) \right) \nu(d\zeta) \end{aligned}$$

Or, $K_\zeta > \widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^{\Omega \setminus \Omega'}$ sur Ω' , pour les points ζ de $\pi^{-1}(F)$ en lesquels $\Omega \setminus \Omega'$ est effilé au sens minimal. Le résultat s'ensuit. •

2.3 Domaines lipschitziens et domaines de Denjoy

Donnons tout d'abord la définition d'un domaine lipschitzien. Dans \mathbb{R}^d nous appelons cylindre centré en 0 tout cylindre de révolution autour de l'axe des x_d délimité par deux hyperplans $\{(z_1, \dots, z_d) ; z_d = a\}$ et $\{(z_1, \dots, z_d) ; z_d = b\}$, avec $a < 0 < b$.

Définition 2.3.1 *Un domaine Ω de \mathbb{R}^d est dit lipschitzien si pour tout $x \in \partial\Omega$ il existe une similitude ψ de \mathbb{R}^d avec $\psi(x) = 0$, un cylindre U centré en 0 et une fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$\psi(\Omega) \cap U = U \cap \{(z_1, \dots, z_d) ; z_d > f(z_1, \dots, z_{d-1})\}$$

Les domaines lipschitziens ont la particularité de étendre plusieurs propriétés de théorie du potentiel des demi-espaces. Une de ces propriétés est l'identification de la frontière de Martin avec la frontière Euclidienne. Cette particularité est illustrée avec les théorèmes qui suivent. Pour faciliter la lecture nous proposons la notation suivante :

Notation 2.3.2 Nous écrivons $a \sim b$ s'il existe une constante $c > 0$ ne dépendant pas des quantités a et b , telle que $\frac{1}{c}a \leq b \leq cb$. Pour un domaine Ω de \mathbb{R}^d nous notons $\overline{\Omega}$ la fermeture de Ω dans $\widehat{\mathbb{R}}^d$.

Théorème 2.3.3 ([HW70], théorème 4.2) *Si Ω est un domaine lipschitzien borné, alors il existe une application bicontinue, prolongeant l'identité de Ω , $\pi : \widehat{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$. La topologie de Martin sur $\widehat{\Omega}$ coïncide avec la topologie euclidienne sur $\overline{\Omega}$ et la frontière de Martin $\partial\widehat{\Omega}$ est égale à la frontière de Martin minimale $\partial\Omega^M$.*

Remarquons que sous les conditions du théorème, la proposition 2.2.15 implique que la mesure harmonique ω de Ω évaluée en un point $x \in \Omega$ est l'image par l'application π de la mesure harmonique de Martin ν relativement à x .

Théorème 2.3.4 ([Dah77]) *La mesure harmonique d'un domaine lipschitzien de \mathbb{R}^d évaluée en un point quelconque du domaine est équivalente à \mathcal{H}_{d-1} sur la frontière du domaine, \mathcal{H}_{d-1} étant la mesure de Hausdorff $(d-1)$ -dimensionnelle (voir définition A.1.1).*

Dans le cadre des domaines lipschitziens on retrouve le théorème de Fatou classique (cf. [Anc78] et [HW70]) :

Théorème 2.3.5 *Sous les hypothèses du théorème 2.3.3, si u est une fonction harmonique positive sur Ω , alors u admet une limite non-tangentielle en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de $\partial\Omega$.*

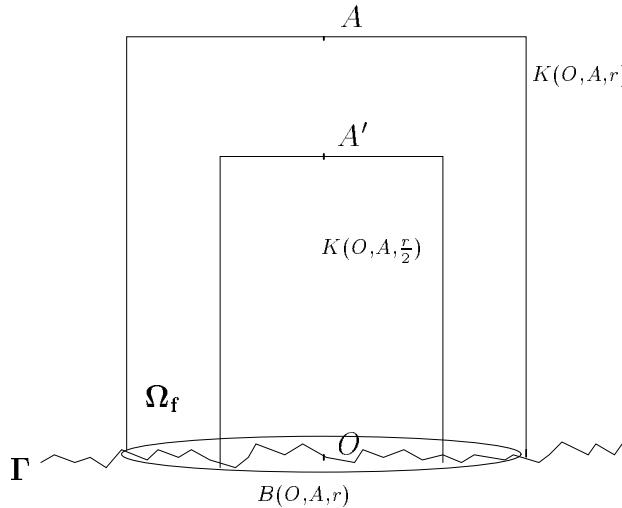


Figure 2.1: La configuration du principe de Harnack à la frontière

Nous appelons domaine de Denjoy tout domaine $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus F$, où F est un sous-ensemble fermé d'un graphe lipschitzien. Le théorème présenté ci-dessous, dû à Alano Ancona ([Anc84]), énonce un principe de Harnack à la frontière d'un domaine de Denjoy. A l'aide de ce principe il est possible d'étendre un peu le théorème 2.3.3.

Soient Γ le graphe d'une fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ de constante de lipschitz L et F un sous-ensemble fermé de Γ , avec $0 \in F$. Soit $A = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ avec $a_1 = \dots = a_{d-1} = 0$, $a_d > 0$. Considérons le cylindre de révolution $K(0, A, r)$ d'axe OA et de rayon $r > 0$, délimité par les demi-espaces $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d ; x_d = a_d\}$ et $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d ; x_d = -a_d\}$. Notons $A^+ = \frac{A}{2}$ et $A^- = \frac{-A}{2}$. Supposons que $\frac{a_d}{r}$ soit strictement supérieur à $8L$.

CONVENTION : *dans la suite nous dirons qu'une fonction harmonique u dans un domaine Ω est nulle sur un ensemble $F \subset \partial\Omega$ si pour tout $x \in F$ u est bornée dans un voisinage de x et si $\lim_{y \rightarrow x} u(y) = 0$ pour tout $x \in F \setminus P$, P étant un ensemble polaire.*

Théorème 2.3.6 ([Anc84]) *Soient u, v, w trois fonctions harmoniques positives sur $K(0, A, r) \setminus F$ nulles sur $F \cap K(0, A, r)$. Alors pour tout $z \in \partial T(0, A^+, \frac{r}{2}) \setminus F$*

$$u(z) \leq c \left\{ \frac{u(A^+)}{v(A^+)} v(z) + \frac{u(A^-)}{w(A^-)} w(z) \right\},$$

où la constante $c > 0$ ne dépend que de $\frac{a_d}{r}$.

Le théorème 2.3.6 contient le principe de Harnack à la frontière pour un domaine lipschitzien, donné par le théorème 2.3.7.

Théorème 2.3.7 ([Anc78]) *Sous les mêmes hypothèses, considérons le domaine (voir fig. 2.1)*

$$\Omega_f = \{(x_1, \dots, x_d) \in K(0, A, r) ; x_d > f(x_1, \dots, x_{d-1})\}.$$

Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de $\frac{a_d}{r}$ telle que pour tout couple (u, v) de fonctions harmoniques positives sur Ω_f , nulles sur $\partial\Omega_f \cap \left(K(0, A, r) \setminus K(0, A, \frac{r}{4})\right)$ on ait :

$$\frac{u(x)}{u(A^+)} \leq C \frac{v(x)}{v(A^+)}, \quad \text{pour tout } x \in \partial K(O, A^+, \frac{r}{2}) \cap \Omega_f$$

Le principe de Harnack à la frontière permet de contrôler le rapport de deux fonctions harmoniques positives de façon uniforme, comme le suggère le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.8 *Sous les mêmes hypothèses et si les fonctions harmoniques u, v s'annulent sur $\Gamma \setminus K(0, A^+, \frac{r}{4})$, alors pour tout point $P \in \mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ n'appartenant pas à $K(0, A^+, \frac{r}{2})$, on a*

$$\frac{u(P)}{v(P)} \sim \frac{u(A^+)}{v(A^+)}.$$

Démonstration Soit $\tau = \sup\{\frac{u(x)}{v(x)}, x \in K(0, A^+, \frac{r}{2}) \cap \Omega_f\}$. D'après le théorème précédent

$$\tau \leq C \frac{u(A^+)}{v(A^+)} \leq C\tau.$$

Or, $u(x) \leq \tau v(x)$ sur le bord $\partial(\Gamma \cup K(0, A^+, \frac{r}{2}))$, et par le principe de maximum, partout dans $\mathbb{R}^d \setminus (\Gamma \cup K(0, A^+, \frac{r}{2}))$. Il s'ensuit que $\frac{u(x)}{v(x)} \leq C \frac{u(A^+)}{v(A^+)}$, et symétriquement, en mettant u à la place de v , on obtient l'inégalité opposée. •

Le théorème 2.3.3 se généralise pour des domaines non-bornées de la manière suivante (cf. par exemple [Anc78]).

Théorème 2.3.9 *Soit Γ le graphe d'une fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$, et soit Ω le domaine*

$$\Omega = \mathbb{H}_f^+ = \{(x_1, \dots, x_d) ; f(x_1, \dots, x_{d-1}) < x_d\}.$$

Il existe une application $\pi : \widehat{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega}$ bicontinue, prolongeant l'identité de Ω .

De plus, par la proposition 2.2.15, sous les hypothèses du théorème pour tout $x \in \Omega$ la mesure harmonique ω de Ω évaluée en x et la mesure harmonique de Martin ν relativement

à x coïncident. La preuve du théorème est similaire à celle du lemme 3.4.3 et utilise le principe de Harnack au bord d'un domaine lipschitzien (théorème 2.3.7).

Pour les domaines de type Denjoy, c'est-à-dire les domaines $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus F$, où F est un sous-ensemble fermé d'un graphe lipschitzien, on a le théorème suivant, dû à A. Ancona ([Anc84]).

Théorème 2.3.10 (*[Anc84]*) *Soit Γ un graphe lipschitzien et F une partie fermée de Γ . Alors, il existe une application π continue, prolongeant l'identité de $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus F$, du compactifié de Martin de Ω sur $\widehat{\mathbb{R}}^d$. De plus, pour tout $x \in F$, il existe au moins un et au plus deux points de $\partial\Omega^M$ projetés par π sur x ; les fonctions harmoniques minimales attachées à ces points engendrent le cône $\mathbf{H}_x = \left\{ u \in \mathbf{H}_+ ; u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \{x\} \right\}$ (où $u = 0$ doit être interprété selon la convention).*

Remarquons que dans ce cas, l'image par l'application π de la mesure harmonique de Martin de Ω relativement à un point $x \in \Omega$ est égale à la mesure harmonique de Ω évaluée en x .

Pour un domaine Greenien si π est une application comme donnée par la remarque 2.2.16 nous disons qu'un point $x \in \partial\Omega$ est simple (relativement à π) pour Ω s'il est l'image par π d'un seul point de $\partial\Omega^M$ et que x est double (relativement à π) pour Ω s'il est l'image par π de deux points de $\partial\Omega^M$. Un point $x \in \partial\Omega$ est au moins triple (pour π) s'il est l'image par π d'au moins trois points de la frontière minimale de Martin de Ω .

Si π et π' sont deux fonctions comme données par la remarque 2.2.16 pour un domaine Ω , alors l'ensemble des points simples (doubles, au moins triples) relativement à π pour Ω diffère de l'ensemble des points simples (doubles, au moins triples) relativement à π' pour Ω d'un ensemble de mesure harmonique nulle près. La définition ne dépend donc pas du choix de π qu'à des ensembles de mesure harmonique nulle près.

Sous les mêmes conditions nous dirons qu'un ensemble $E \subset \Omega$ est effilé au sens minimal (relativement à π) pour Ω en un point $x \in \partial\Omega$ s'il est effilé en tout point $\zeta \in \partial\Omega^M$ tel que $\pi(\zeta) = x$.

Dans le cas des domaines de Denjoy la fonction π sera toujours la fonction bien déterminée donnée par le théorème 2.3.10. Cette application est surjective et donc tout point de $\partial\Omega$ peut être caractérisé comme étant simple ou double.

Pour tout domaine Greenien du plan l'ensemble des points au moins triples de $\partial\Omega$ (pour une fonction π comme donnée par la remarque 2.2.16) est de mesure harmonique nulle dans Ω . Si, de plus, la fonction π est continue et prolonge l'identité de Ω , alors l'ensemble (bien défini) des points au moins triples est au plus dénombrable, remarques que nous devons à A. Ancona.

Pour les domaines de Denjoy, Chevallier a montré le théorème suivant.

Théorème 2.3.11 ([Che89]) Si Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne f et si F est un sous-ensemble fermé de Γ , alors \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de F est double dans le domaine $\mathbb{R}^d \setminus F$.

Notons aussi le lemme suivant, dû également à Chevallier, qui nous sera utile par la suite.

Lemme 2.3.12 ([Che89]) Sous les conditions du théorème précédent, supposons que $0 \in F$ et soit $A = (a_1, \dots, a_d)$ un point de

$$\mathbb{H}_f^+ = \{(x_1, \dots, x_d) ; f(x_1, \dots, x_{d-1}) < x_d\}$$

avec $a_1 = 0, \dots, a_{d-1} = 0, a_d = 1$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points du segment OA convergeant vers 0 et soit $\epsilon > 0$. Alors la réunion des boules

$$\cup\{B(A_n, \epsilon \|A_n\|), n \in \mathbb{N}\} \cup \cup\{B(-A_n, \epsilon \|A_n\|), n \in \mathbb{N}\}$$

est non-éfilée en 0 .

Chevallier a en fait montré en peu plus. Pour tout point $x \in F$ double dans $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus F$ la réunion des boules $x + \cup\{B(A_n, \epsilon \|A_n\|), n \in \mathbb{N}\}$ est éfilé au sens minimal en l'un des deux points de $\partial\Omega^M$ projetés sur x et la réunion des boules $x + \cup\{B(-A_n, \epsilon \|A_n\|), n \in \mathbb{N}\}$ est éfilé en l'autre. Signalons que le théorème de Chevallier peut également être démontré par la proposition 3.2.14 et le lemme 3.2.17, établis au chapitre suivant.

Chapitre 3

Domaines de Poisson

L'objectif de ce chapitre est de donner une condition nécessaire pour qu'un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, soit Poissonien. Cette condition (voir définition 3.1.6) que nous noterons CDF (condition faible de cône double) a été proposée par Bishop dans [Bis91] pour les domaines du plan et est semblable à la condition d'effilement de Wiener. Nous proposons en outre quelques exemples de situations où cette condition est également suffisante.

3.1 Cadre, résultats liés.

Bishop [Bis91] a introduit la condition CDF et il a montré qu'un domaine du plan est Poissonien si et seulement si l'ensemble des points satisfaisant à une condition CDF est de mesure de Hausdorff linéaire nulle. D'autres conditions pour qu'un domaine soit Poissonien ont également été énoncées par Mountford et Port [MP91]. Mountford et Port font appel à la théorie de probabilités, tandis que Bishop s'appuie sur la théorie du Potentiel classique.

En dimension 2, Bishop utilise une caractérisation de deux domaines disjoints dont les mesures harmoniques ne sont pas mutuellement singulières, pour montrer que la condition CDF est suffisante pour qu'un domaine soit Poissonien. Cette caractérisation est énoncée par Bishop, Carleson, Garnett et Jones dans [BCGJ89] pour les domaines du plan. La preuve s'appuie sur un résultat de Makarov [Mak85], amélioré par Pommerenke [Pom86], qui fournit une comparaison de la mesure harmonique des domaines simplement connexes du plan et de la mesure de Hausdorff linéaire. La démonstration de Makarov exploitant les propriétés des fonctions conformes du plan, ne peut pas être appliquée en dimension supérieure. En outre, Wolff [Wol95] a montré que les résultats de Makarov ne sont pas adaptables en dimension supérieure à deux. Ainsi, la question de savoir si la condition CDF est suffisante pour qu'un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, soit Poissonien reste-t-elle ouverte.

La démonstration de la nécessité de la condition CDF que nous proposons pour les domaines de \mathbb{R}^d , $d \geq 3$ utilise la théorie de Martin. La voie suivie nous a été proposée

par A. Ancona.

Les notions de la théorie du potentiel classique utilisées sont données en section 2.1 et les éléments essentiels de la théorie de Martin ont été rappelés en section 2.2.

3.1.1 Définitions, propriétés des domaines de Poisson

Donnons tout d'abord la définition d'un domaine de Poisson.

Définition 3.1.1 *Un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est appelé domaine de Poisson, ou domaine Poissonien, si pour toute fonction u harmonique bornée dans Ω il existe une fonction mesurable $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :*

$$u(x) = H_f^\Omega = \int_{\partial\Omega} f(z)\omega(x, dz) \quad (3.1)$$

où ω est la mesure harmonique de Ω .

Donnons l'interprétation de la définition en termes de frontière de Martin ([MP91], théorème 9).

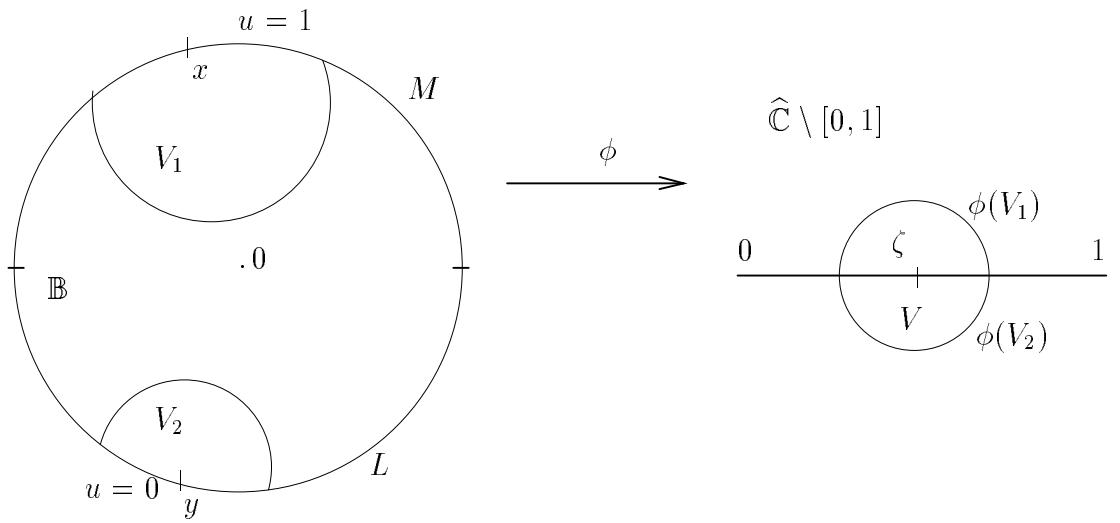
Théorème 3.1.2 ([MP91]) *Un domaine de Green $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est Poissonien si et seulement s'il existe un sous-ensemble Δ de la frontière de Martin minimale $\partial\Omega^M$ de Ω , un sous-ensemble E de la frontière $\partial\overline{\Omega}$ de Ω dans $\widehat{\mathbb{R}}^d$ et une application $\pi : \Delta \rightarrow E$ vérifiant :*

- i) π est bijective et bimesurable.
- ii) $\nu(\Delta) = 1$, où ν est la mesure harmonique de Martin relativement à un point $X_0 \in \Omega$.
- iii) $\omega(E) = 1$, où ω est la mesure harmonique de Ω évaluée en X_0 .
- iv) Pour tout ensemble mesurable $F \subset E$ et pour tout $X_0 \in \Omega$, si ν est la mesure harmonique de Martin relativement à X_0 et ω la mesure harmonique de Ω évaluée en X_0 , alors $\omega(F) = \nu(\pi^{-1}(F))$.

Les propriétés suivantes des domaines de Poisson ont également été démontrées dans [MP91].

- α) Toute composante connexe de l'intersection de deux domaines de Poisson est un domaine de Poisson.
- β) Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines Poissoniens de \mathbb{R}^d tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ soit connexe. Soit ω la mesure harmonique de Ω . Si $\omega(\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2) = 0$, alors Ω est Poissonien.

Donnons quelques exemples :

Figure 3.1: L'application ϕ de l'exemple 3.1.4.

Exemple 3.1.3 Par le théorème de Herglotz-Riesz (cf. exemple 2.0.1) les boules de \mathbb{R}^d sont des domaines de Poisson. •

Exemple 3.1.4 Donnons un exemple de domaine non-Poissonien. Soit $\widehat{\mathbb{C}}$ le compactifié du plan complexe avec le point à l'infini. Dans $\widehat{\mathbb{C}}$ considérons le complémentaire du segment $[0, 1]$. Le domaine $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus [0, 1]$ est simplement connexe et est l'image par l'application conforme

$$\phi(z) = \frac{(1-z)^2}{(1-z)^2 - (1+z)^2}$$

du disque unité \mathbb{B} . L'application ϕ se prolonge de manière continue sur $\partial\mathbb{B}$. On peut également vérifier que les arcs L et M du cercle unité $\partial\mathbb{B}$ définis par

$$M = \partial\mathbb{B} \cap \{z \in \widehat{\mathbb{C}} ; \operatorname{Im} z > 0\} \text{ et } L = \partial\mathbb{B} \cap \{z \in \widehat{\mathbb{C}} ; \operatorname{Im} z < 0\}$$

vérifient $\phi(L) = \phi(M) =]0, 1[$.

Soit $u = H_{\mathbf{1}_M}^{\partial\mathbb{B}}$ la solution du problème de Dirichlet dans \mathbb{B} pour la fonction indicatrice $\mathbf{1}_M$ de M et soit v l'image par l'application conforme ϕ de la fonction u . Montrons que v est une fonction harmonique bornée qui ne s'écrit pas sous la forme (3.1) ce qui montrera que Ω n'est pas Poissonien.

Si $x \in M$ et $y \in L$ sont deux points de $\partial\mathbb{B}$ avec $\zeta = \phi(x) = \phi(y)$ et si V est un voisinage de ζ suffisamment petit alors $\phi^{-1}(V)$ est la réunion d'un voisinage V_1 de x et d'un voisinage V_2 de y dans $\overline{\mathbb{B}}$, V_1 et V_2 disjoints (voir fig. 3.1).

Remarquons que u converge vers 1 en tout point de M et vers 0 en tout point de L . Par symétrie, si v est la solution du problème de Dirichlet (généralisé) pour une fonction

frontière $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, alors $v(z)$ converge vers la même valeur quand z tend vers ζ , $\text{Im}z < 0$ et quand z tend vers ζ , $\text{Im}z > 0$. Or, ceci n'est pas le cas.

Une autre façon de procéder est en utilisant le théorème 2.3.3. Si z_n tend vers ζ non-tangentielle alors $v(z_n)$ converge vers $f(\zeta)$, pour \mathcal{H}_1 -presque tout ζ in $]0, 1[$. Or, la limite inférieure non-tangentielle de v est 0 tandis que sa limite supérieure est 1 en tout point de $]0, 1[$. Il est donc clair qu'il n'existe pas de fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $v = H_f^\Omega$. •

3.1.2 La condition CDF

Nous introduisons à présent la condition CDF, proposée par Bishop.

Notation 3.1.5 Notons \mathbb{S}_d la sphère unité de \mathbb{R}^d . Pour $x \in \mathbb{R}^d$, $\epsilon > 0$ et $\theta \in \mathbb{S}_d$ nous notons $C(x, r, \epsilon, \theta)$ le cône

$$C(x, r, \epsilon, \theta) = \{y ; y = x + r'\theta' , \theta' \in \mathbb{S}_d , ||\theta - \theta'|| < \epsilon , 0 < r' < r\}.$$

Nous écrivons $W(x, r, \epsilon, \theta) = C(x, r, \epsilon, \theta) \setminus \mathbb{B}(x, r/2)$ et nous notons $\theta_d = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}_d$.

Définition 3.1.6 Soit Ω un domaine dans \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. On dit que le point $x \in \partial\Omega$ satisfait à une condition CDF par rapport à Ω s'il existe $\theta = \theta(x) \in \mathbb{S}_d$ et $\epsilon = \epsilon(x) > 0$ tels que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \text{cap} \left\{ 2^n (W(x, 2^{-n}, \epsilon, \theta) \setminus \Omega) \right\} + \text{cap} \left\{ 2^n (W(x, 2^{-n}, \epsilon, -\theta) \setminus \Omega) \right\} \right\} < +\infty, \quad (3.2)$$

cap signifiant la capacité de Green dans \mathbb{R}^d , pour $d \geq 3$ et la capacité de Green dans la boule $\mathbb{B}(x, 1)$ centrée en x et de rayon 1, quand $d = 2$.

Dans la suite nous supposons $d \geq 3$; le cas $d = 2$ peut être traité de manière similaire, en se ramenant à des ensembles contenus dans une boule.

Remarque 3.1.7 Si $\Omega' \subset \Omega$ sont deux domaines de \mathbb{R}^d , avec $\partial\Omega \subset \partial\Omega'$ et si un point $x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega'$ satisfait à une condition CDF par rapport à Ω' , alors x satisfait à une condition CDF par rapport à Ω .

3.2 Une condition nécessaire pour qu'un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, soit Poissonien

C.J. Bishop a proposé la condition CDF et a montré que, dans \mathbb{R}^2 , un domaine Ω est Poissonien si et seulement si l'ensemble des points de $\partial\Omega$ satisfaisant à une condition CDF par rapport à Ω est de \mathcal{H}_1 -mesure nulle [Bis91]. Le théorème suivant étend partiellement le résultat de Bishop en dimension supérieure.

Théorème 3.2.1 *Soit Ω un domaine dans \mathbb{R}^d et supposons que la \mathcal{H}_{d-1} -mesure des points de sa frontière qui satisfont à une condition CDF par rapport à Ω est strictement positive. Alors Ω n'est pas Poissonien.*

Le reste de la section est consacré à la démonstration de ce théorème.

3.2.1 Préliminaires

La démonstration du théorème s'effectue en 4 étapes :

- A) Nous montrons dans un premier temps que si l'ensemble des points de $\partial\Omega$ satisfaisant à une condition CDF est de mesure \mathcal{H}_{d-1} positive, alors il existe un sous-ensemble de la frontière de Ω , de mesure \mathcal{H}_{d-1} positive, inclus dans une surface lipschitzienne dont tous les points satisfont à une condition CDF.
- B) Dans un deuxième temps, nous affirmons que si Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne si $x \in \Gamma$ et si B est une partie d'un cône de sommet x disjoint de Γ , alors l'effilement au sens minimal en x relativement à $\mathbb{R}^d \setminus \Gamma$ de B est équivalent à une condition de type CDF.
- C) Ensuite nous construisons deux sous-domaines de Ω dont les frontières intersectent une surface lipschitzienne sur un ensemble K de mesure \mathcal{H}_{d-1} positive et qui sont effilées au sens minimal relativement à $\mathbb{R}^d \setminus K$ en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de K .
- D) Finalement, en utilisant l'effilement au sens minimal des frontières de ces domaines en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de K , nous montrons que leurs mesures harmoniques sont équivalentes à \mathcal{H}_{d-1} sur K . La preuve est complétée par la proposition suivante :

Proposition 3.2.2 ([Bis91]) *Un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ est Poissonien si et seulement si pour tous sous-domaines disjoints Ω_1 et Ω_2 de Ω , les mesures harmoniques ω_1 et ω_2 correspondantes sont mutuellement singulières sur $\partial\Omega$.*

3.2.2 Démonstration du théorème 3.2.1

- A) Nous proposons quelques lemmes géométriques pour démontrer la première étape de la preuve du théorème. Les notions d'ensembles régulier et irrégulier au sens de Besicovitch sont définies en appendice A.2.2.

Nous considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Proposition 3.2.3 *Soit $E \subset \partial\Omega$ un ensemble qui vérifie $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < \infty$. Supposons que \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de E satisfait à une condition CDF par rapport à Ω . Alors E est régulier au sens de Besicovitch.*

La démonstration de la proposition que nous proposons est comparable à celle du lemme 4.3 de [Bis91].

Lemme 3.2.4 *Sous les hypothèses de la proposition 3.2.3, il existe $\epsilon_0 > 0$ et $\theta_0 \in \mathbb{S}_d$ tels que l'ensemble F des points qui satisfont une condition CDF par rapport à Ω avec $\epsilon = \epsilon_0$ et $\theta = \theta_0$ soit de \mathcal{H}_{d-1} -mesure positive.*

Démonstration Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$S_n = \{x \in E ; x \text{ satisfait à une condition CDF avec } \frac{1}{n+1} \leq \epsilon < \frac{1}{n}\}.$$

Clairement, $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ et donc il existe S_m tel que $\mathcal{H}_{d-1}(S_m) > 0$.

Considérons une partition de \mathbb{S}_d en un nombre fini d'ensembles $\{S^k\}_{k=1}^n$ de diamètre inférieur à $\frac{1}{100m}$. Pour $k = 1, \dots, n$, soit S_m^k l'ensemble des points de S_m satisfaisant à une condition CDF par rapport à Ω avec $\theta \in S^k$.

Il est clair que $\bigcup_{1 \leq k \leq n} S_m^k = S_m$. Il existe donc un ensemble $S_m^{k_0}$ parmi ceux-ci, avec $\mathcal{H}_{d-1}(S_m^{k_0}) > 0$. Posons $F = S_m^{k_0}$ et soit $\theta_0 \in S^{k_0}$. Alors, tout $x \in F$ satisfait la condition CDF par rapport à Ω avec $\theta(x) = \theta_0$ et $\epsilon = \frac{1}{100m}$ car le cône $C(x, r, \frac{1}{100m}, \theta_0)$ est inclus dans le cône $C(x, r, \epsilon(x), \theta(x))$. •

Lemme 3.2.5 *Soit E un ensemble irrégulier au sens de Besicovitch et supposons que $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$. Alors il existe un sous-ensemble $F \subset E$ avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(F) < +\infty$ et une constante $C > 0$ tels que*

$$\alpha) \quad \frac{\mathcal{H}_{d-1}(B(x, r) \cap E)}{r^{d-1}} \leq C, \quad \forall x \in F, 0 < r < 1 \quad (3.3)$$

$$\beta) \quad \text{Pour tout } \epsilon > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{S}_d \quad (3.4)$$

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{d-1}(F \cap C(x, r, \epsilon, \theta))}{r^{d-1}} + \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{d-1}(F \cap C(x, r, \epsilon, -\theta))}{r^{d-1}} > 0$$

pour \mathcal{H}_{d-1} -presque tout $x \in F$.

Démonstration Ce lemme est un corollaire de deux résultats classiques de la théorie de la mesure géométrique (cf. [Mat95]) :

Théorème 3.2.6 *Soit $E \in \mathbb{R}^d$, avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$. Si E est irrégulier au sens de Besicovitch alors, pour tout $\epsilon > 0$, tout $\theta \in \mathbb{S}_d$ et pour \mathcal{H}_{d-1} -presque tout $x \in E$*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{d-1}(E \cap C(x, r, \epsilon, \theta))}{r^{d-1}} + \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{d-1}(E \cap C(x, r, \epsilon, -\theta))}{r^{d-1}} > 0$$

D'autre part, par la relation (A.4), pour tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{d-1}(E \cap B(x, r))}{r^{d-1}} \leq 1 \text{ pour } \mathcal{H}_{d-1} \text{ presque tout } x \in E$$

Il existe alors un sous-ensemble F de E , de \mathcal{H}_{d-1} -mesure positive, sur lequel la condition (3.3) soit satisfaite pour une constante $C > 0$. L'ensemble F est également irrégulier au sens de Besicovitch et donc, par le théorème précédent, la relation (3.4) est valable sur F . •

Démonstration de la proposition 3.2.3. D'après la proposition A.2.4, nous pouvons écrire E comme $E = E_1 \cup E_2$ avec E_1 rectifiable, E_2 purement non-rectifiable. Raisonnons par l'absurde et supposons que E_2 soit de \mathcal{H}_{d-1} mesure strictement positive, $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E_2) < +\infty$. Quitte à diminuer E , nous pouvons donc supposer que E est irrégulier au sens de Besicovitch et la condition CDF est satisfaite \mathcal{H}_{d-1} -presque partout sur ce nouveau E , $\mathcal{H}_{d-1}(E) > 0$.

Nous utilisons les lemmes 3.2.4 et 3.2.5 pour faire une estimation de la capacité des anneaux coniques $W(x, 2^{-n}, \epsilon, \theta) \setminus \Omega$ qui, à son tour, aboutira à une contradiction du fait que la condition CDF est satisfaite sur E .

D'après le lemme 3.2.4, il existe $\epsilon > 0$ et $\theta \in \mathbb{S}_d$ tels que l'ensemble F des points $x \in E$ satisfaisant à une condition CDF avec $\epsilon(x) = \epsilon$ et $\theta(x) = \theta$ soit de mesure \mathcal{H}_{d-1} strictement positive. L'ensemble F est irrégulier au sens de Besicovitch donc, quitte à se restreindre à un sous-ensemble de F , nous pouvons supposer qu'il vérifie les relations (3.3) et (3.4).

Nous montrons que pour \mathcal{H}_{d-1} -presque tout $x \in F$, il existe un nombre infini de tranches $W(x, 2^{-n}, \epsilon, \theta)$ du cône $C(x, r, \epsilon, \theta)$, notées W_n , telles que

$$\mathcal{H}_{d-1}(2^n(F \cap W(x, 2^{-n}, \epsilon, \theta))) \geq c_1 \quad (3.5)$$

où $c_1 = c_1(x)$ est une constante positive.

Fixons $x \in F$. Quitte à remplacer eventuellement θ par $-\theta$ nous pouvons supposer que x vérifie

$$1 \geq c_0 = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{d-1}(F \cap C(x, r, \epsilon, \theta))}{r^{d-1}} > 0.$$

Prenons $0 < r < 1$ tel que $\frac{\mathcal{H}_{d-1}(F \cap C(x, r, \epsilon, \theta))}{r^{d-1}} > \frac{c_0}{2}$. Or, par la relation (3.3), pour $\tilde{r} < r$

$$\mathcal{H}_{d-1}(F \cap C(x, r, \epsilon, \theta) \setminus C(x, \tilde{r}, \epsilon, \theta)) \geq \frac{c_0}{2}r^{d-1} - C\tilde{r}^{d-1}.$$

Posons $\tilde{r} = \left(\frac{c_0}{2}\right)^{\frac{1}{d-1}} \frac{r}{4C}$. Nous avons

$$\mathcal{H}_{d-1}(F \cap C(x, r, \epsilon, \theta) \setminus C(x, \tilde{r}, \epsilon, \theta)) \geq cr^{d-1},$$

pour une constante $c = c(c_0) > 0$. Soit $N_0 = \log_2 \frac{r}{\tilde{r}}$. Remarquons que $N_0 > 0$ ne dépend que de c_0 et de C . Il existe, alors, une tranche

$$W_n = W(x, 2^{-n}, \epsilon, \theta) \subset C(x, r, \epsilon, \theta) \setminus C(x, \tilde{r}, \epsilon, \theta)$$

telle que $\mathcal{H}_{d-1}(2^n(W_n \cap F)) > c_1 = 2^{-N_0(d-1)} \frac{c_0}{N_0}$.

L'itération de l'argument montre qu'il existe un nombre infini d'anneaux coniques $W_n = W(x, 2^{-n}, \epsilon, \theta)$ vérifiant (3.5). Pour ces anneaux nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.2.7 *Il existe une constante $c_2 = c_2(c_1, c_0)$ telle que*

$$\text{cap}(W_n \cap F) \geq c_2 > 0 \quad (3.6)$$

Démonstration La capacité d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}^d$ est donnée par

$$\text{cap}F = \sup\{I^{-1}(\mu) ; \|\mu\| = 1 ; \text{supp}\mu \subset F\},$$

où $I(\mu) = \int_F \int_F \frac{1}{|x-y|^{d-2}} \mu(dx) \mu(dy)$, cf. théorème 2.1.19.

Pour W_n vérifiant (3.5), posons $\tilde{F}_n = 2^n(W_n \setminus F)$ et soit $\lambda = \frac{1}{\mathcal{H}_{d-1}(2^n F_n)} \mathcal{H}_{d-1}$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\tilde{F}_n} \int_{\tilde{F}_n} \frac{1}{\|x-y\|^{d-2}} \lambda(dx) \lambda(dy) \\ &= \frac{1}{\mathcal{H}_{d-1}(\tilde{F}_n)^2} \int_{\tilde{F}_n} \int_{\tilde{F}_n} \frac{1}{\|x-y\|^{d-2}} \mathcal{H}_{d-1}(dx) \mathcal{H}_{d-1}(dy). \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.3), nous montrons que l'intégrale est uniformément majorée par $c_2^{-1} < +\infty$, $c_2 > 0$ étant une constante indépendante de n :

$$\begin{aligned} &\int_{\tilde{F}_n} \int_{\tilde{F}_n} \frac{1}{\|x-y\|^{d-2}} \lambda(dx) \lambda(dy) \leq \\ &\leq \int_{\tilde{F}_n} \sum_{s=0}^{+\infty} 2^{-s(d-2)} \lambda(\tilde{F}_n \cap \{y \in \tilde{F}_n ; 2^{-s-1} \leq \text{dist}(y, x) \leq 2^{-s}\}) \lambda(dx) \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{H}_{d-1}(W_n \cap F)} \int_{\tilde{F}_n} 2C \lambda(dx) \leq 2c_1^{-1} C = c_2^{-1} \end{aligned}$$

et donc $\text{cap}(\tilde{F}_n) \geq c_2$. •

Ce lemme étant démontré, nous en déduisons que la série des capacités $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{cap}(\tilde{F}_n)$ diverge. Or, $\sum_{n=1}^{+\infty} \text{cap}[2^n(W(x, 2^{-n}, \epsilon, \theta) \setminus \Omega)] \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \text{cap}(\tilde{F}_n) = +\infty$.

Il est clair que le même raisonnement donne, pour \mathcal{H}_{d-1} -presque tout $x \in F$, un nombre infini d'anneaux coniques $W_n(x) = W(x, 2^{-n}, \epsilon, \theta)$ vérifiant (3.6), ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. •

Soient Ω un domaine Greenien de \mathbb{R}^d et E l'ensemble des points de la frontière de Ω satisfaisant à une condition CDF par rapport à Ω . Supposons que $\mathcal{H}_{d-1}(E)$ soit strictement positive. Il existe, alors, un sous-ensemble F de E de mesure positive, finie (voir théorème A.1.5). La proposition 3.2.3, montre alors que l'ensemble F est régulier au sens de Besicovitch. Par le théorème A.2.3, il existe un graphe lipschitzien Γ tel que $\mathcal{H}_{d-1}(F \cap \Gamma) > 0$.

Nous pouvons améliorer la proposition 3.2.3 de la manière suivante.

Remarque 3.2.8 Il existe un sous-ensemble F de E inclus dans une surface lipschitzienne Γ tel que $0 < \mathcal{H}_{d-1}(F)$ et pour tout $x \in F$ le double cône

$$C(x, 1, \epsilon(x), \theta(x)) \cup C(x, 1, \epsilon(x), -\theta(x))$$

n'intersecte pas Γ . Pour montrer ceci il suffit de remplacer les conditions 3.3 et 3.4 du lemme 3.2.5 par la condition de densité suivante : pour \mathcal{H}_{d-1} -presque tout $x \in F$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_{d-1}(E \cap B(x, r))}{(2r)^{d-1}} = 1.$$

B) La démonstration de la deuxième étape s'effectue par une suite de lemmes, concernant les domaines lipschitziens, qui sont bien connus. Pour la notion d'ensemble effilé au sens minimal en un point de la frontière d'un domaine de Denjoy, nous renvoyons à la section 2.2.

Il existe un autre type d'effillement équivalent, dans certains cas, à l'effillement au sens minimal.

Définition 3.2.9 Soit $x \in \mathbb{R}^d$. L'ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit effilé au sens interne en x si $x \notin \overline{E \setminus \{x\}}$ ou s'il existe une fonction s , surharmonique dans un voisinage euclidien de x , vérifiant

$$\liminf_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in E \setminus \{x\}}} s(y) > s(x).$$

Nous utilisons le lemme suivant dû à Y. Zhang [Zha87], pour montrer l'équivalence des deux types d'effilement, dans le cadre d'un domaine lipschitzien, et ensuite nous faisons appel au critère d'effilement au sens interne de Wiener pour lier l'effilement minimal à la condition CDF. Pour ces résultats voir aussi [Aik85].

Soit Γ le graphe d'une fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Posons

$$\mathbb{H}_f^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d ; f(x_1, \dots, x_{d-1}) > x_d\}.$$

Soit $C(x, r, \epsilon, \theta)$ un cône contenu dans \mathbb{H}_f^+ .

Lemme 3.2.10 ([Zha87], théorème 1) *Un ensemble $B \subset C(x, 1, \epsilon, \theta)$ est effilé au sens minimal en x dans \mathbb{H}_f^+ si et seulement s'il est effilé au sens interne en x .*

Le théorème suivant propose une condition équivalente à l'effilement au sens interne (cf. [Doo84]).

Théorème 3.2.11 (*Critère de Wiener*) *Un ensemble B est effilé au sens interne en $x \in \mathbb{R}^d$ si et seulement si*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{cap}\{2^n(B \cap B(x, 2^{-n}) \setminus B(x, 2^{-n-1}))\} < +\infty.$$

Résumons la situation :

Lemme 3.2.12 *Soient Γ et \mathbb{H}_f^+ comme ci-dessus et $B \subset \mathbb{H}_f^+$ un ensemble quelconque. Soit $C(x)$ un cône de révolution, de sommet $x \in \Gamma$, contenu dans \mathbb{H}_f^+ . Alors $B \cap C(x)$ est effilé au sens minimal en x dans \mathbb{H}_f^+ si et seulement si*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \text{cap}\{2^n\{B \cap C(x) \cap (B(x, 2^{-n}) \setminus B(x, 2^{-n-1}))\}\} < +\infty. \quad (3.7)$$

C) Cette étape consiste à lier l'effilement au sens minimal et la mesure harmonique. La proposition suivante en donne un premier résultat. Soit f , Γ et \mathbb{H}_f^+ comme ci-dessus.

Proposition 3.2.13 *Soit Ω un domaine inclus dans \mathbb{H}_f^+ . Alors, si ω est la mesure harmonique du domaine Ω , pour tout ensemble $E \subset \Gamma$ on a $\omega(E) = 0$ si et seulement si $\mathbb{H}_f^+ \setminus \Omega$ est non-effilé au sens minimal dans \mathbb{H}_f^+ en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de E .*

Démonstration Un résultat de Dahlberg (théorème 2.3.4) affirme que la mesure harmonique de \mathbb{H}_f^+ est équivalente à la mesure de Hausdorff \mathcal{H}_{d-1} . D'après le lemme 2.2.17, il suffit alors de montrer que la frontière de Martin s'identifie à la frontière euclidienne de \mathbb{H}_f^+ . Or, ceci est affirmé par le théorème 2.3.9 et le résultat s'en déduit. •

La proposition suivante affine le théorème 2.3.11 et nous permettra de trouver deux sous-domaines disjoints de Ω inclus dans deux demi-espaces complémentaires dont les mesures harmoniques ne sont pas mutuellement singulières. La démonstration nous a été suggérée par A. Ancona.

Proposition 3.2.14 *Soit $F \subset \Gamma$ fermé et posons $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus F$. Alors, $\Gamma \setminus F$ est effilé au sens minimal (relativement à $\mathbb{R}^d \setminus F$) en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de F .*

N. Chevallier [Che89] a donné un exemple d'un ensemble F fermé contenu dans un graphe lipschitzien Γ et d'un point $x \in F$ de densité (pour la mesure \mathcal{H}_{d-1} restreinte sur F) qui est un point simple pour $\mathbb{R}^d \setminus F$ et tel que $\Gamma \setminus F$ soit effilé en x dans $\mathbb{R}^2 \setminus F$. A. Ancona a montré dans [Anc90a] (en répondant par la négative à une question de Chevallier) que si F est un sous-ensemble fermé d'un graphe lipschitzien Γ et si $x \in F$ est un point double pour $\mathbb{R}^d \setminus F$, alors $\Gamma \setminus F$ n'est pas nécessairement effilé en x dans $\mathbb{R}^d \setminus F$. De ce point de vue le théorème 2.3.11 est indépendant de la proposition 3.2.14.

Le lemme suivant est un lemme classique de la théorie de Martin (cf. [Anc84]).

Lemme 3.2.15 *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine de Green, $\widehat{\Omega}$ son compactifié de Martin et ν sa mesure harmonique de Martin relativement à un point $X_0 \in \Omega$. Si K est un sous-ensemble compact de $\partial\widehat{\Omega}$ avec $\nu(K) = 0$ alors il existe une fonction s surharmonique dans Ω , positive, vérifiant*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x \in \Omega}} s(x) = +\infty \quad , \quad \text{pour tout } \zeta \in K \quad (3.8)$$

et telle que $s(X_0) = 1$.

Démonstration Soit K un compact de $\partial\widehat{\Omega}$ de mesure ν nulle. Soit U un voisinage de K dans $\widehat{\Omega}$. Montrons tout d'abord que $\mathbf{R}_1^U = \int_{\partial\Omega^M} \mathbf{R}_{K_\zeta}^U \nu(d\zeta)$ décroît vers 0 lorsque U décroît vers K . En écrivant

$$\mathbf{R}_1^U = \int_U \mathbf{R}_{K_\zeta}^U \nu(d\zeta) + \int_{\partial\Omega^M \setminus U} \mathbf{R}_{K_\zeta}^U \nu(d\zeta)$$

et en utilisant le théorème de convergence dominée on obtient qu'il suffit de montrer que $\mathbf{R}_{K_\zeta}^U$ décroît vers 0 pour tout $\zeta \notin K$. Soit $\zeta \notin K$ et supposons qu'il existe une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de voisinages de K décroissant vers K et un point $x \in \Omega$ tels que $q_n(x) = \mathbf{R}_{K_\zeta}^{U_n}(x) > c > 0$. Pour n assez grand, les ensembles U_n sont effilés au sens minimal en x et donc $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de potentiels. Pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction q_n est harmonique dans $\Omega \setminus \overline{U}_n$. Si $u = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$, alors u est harmonique non-nulle dans Ω , ce qui est absurde.

Choisissons une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de voisinages de K tels que $\mathbf{R}_1^{U_n}(X_0) \leq 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La fonction $s' = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{R}_1^{U_n}$ est surharmonique et $0 < s'(X_0) \leq 1$. D'autre part,

$\lim_{x \rightarrow \zeta} s(x) = +\infty$, pour tout $\zeta \in K$. En posant $s = \frac{1}{s'(X_0)}s'$ nous trouvons la fonction surharmonique cherchée. •

Démonstration de la proposition 3.2.14 Notons encore $\partial\Omega^M$ la frontière de Martin minimale de Ω . Soit $\Sigma = \Gamma \setminus F$ et posons

$$E = \{\zeta \in \partial\Omega^M ; \Sigma \text{ est effilé en } \zeta\} \text{ et } N = \{\zeta \in \partial\Omega^M ; \Sigma \text{ est non-effilé en } \zeta\}.$$

Soit $\mathbf{1}$ la fonction harmonique constante égale à 1. Si ν est la mesure harmonique de Martin relativement à un point X_0 de Ω , on a la formule suivante :

$$\widehat{\mathbf{R}}_1^\Sigma = \widehat{\mathbf{R}}_{f_{\partial\Omega^M} K_\zeta \nu(d\zeta)}^\Sigma = \widehat{\mathbf{R}}_{f_N K_\zeta \nu(d\zeta)}^\Sigma + \widehat{\mathbf{R}}_{f_E K_\zeta \nu(d\zeta)}^\Sigma = u + p,$$

où u est la fonction $u = \widehat{\mathbf{R}}_{f_N K_\zeta \nu(d\zeta)}^\Sigma \leq 1$ et $p = \widehat{\mathbf{R}}_{f_E K_\zeta \nu(d\zeta)}^\Sigma$. Remarquons que u est une fonction harmonique dans Ω car $\widehat{\mathbf{R}}_{f_N K_\zeta \nu(d\zeta)}^\Sigma = \int_N \widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^\Sigma \nu(d\zeta) = \int_N K_\zeta \nu(d\zeta)$ et que p est un potentiel puisque $\widehat{\mathbf{R}}_{K_\zeta}^\Sigma$ est un potentiel dans Ω pour tout $\zeta \in E$.

D'après le théorème de Fatou pour la compactification de Martin (théorème 2.2.12), u admet une limite fine ν -presque partout sur $\partial\Omega^M$; cette limite est nulle en dehors de N et vaut 1 sur N (ν -presque partout).

Soit L la constante de lipschitz de la fonction f dont le graphe est Γ et soit $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2} - \arctan L$. Notons N^+ l'ensemble des points $x \in N$ en lesquels $C(x, 1, \epsilon, \theta_d)$ est non-effilé et N^- l'ensemble des points $x \in N$ en lesquels $C(x, 1, \epsilon, -\theta_d)$ est non-effilé. Par les propriétés 2.2.10 des ensembles effilés au sens minimal et en utilisant le lemme 2.3.12, on a $N = N^+ \cup N^-$.

Par le théorème de Fatou (théorème 2.2.12) u admet la limite fine 1 ν -presque partout sur N . Donc, pour ν -presque tout point ζ de N^+ , il existe une suite de points $x_n \in \Omega$ qui tend vers ζ dans la topologie de Martin telle que $u(x_n) \rightarrow 1$.

Soit ϕ l'application qui envoie le compactifié de Martin $\widehat{\Omega}$ de Ω sur la fermeture $\overline{\Omega} \cup \{\infty\}$ de Ω dans $\widehat{\mathbb{R}}^d$ donnée par le théorème 2.3.10. Pour ν -presque tout point $\zeta \in N^+$, si $\xi = \phi(\zeta)$, nous pouvons choisir la suite x_n parmi les points du cône $C(\xi, 1, \epsilon, \theta_d)$, celui-ci n'étant pas effilé au sens minimal en ζ (lemme 2.3.12).

D'autre part, la fonction u est harmonique dans \mathbb{H}_f^+ . Par le théorème 2.1.13, nous avons

$$H_{\mathbf{1}_\Sigma \mathbf{u}}^{\mathbb{H}_f^+} = \widehat{\mathbf{R}}_u^\Sigma = u,$$

la réduite étant considérée dans Ω . Or $u \leq 1$ donc $u = H_{\mathbf{1}_\Sigma \mathbf{u}}^{\mathbb{H}_f^+} \leq H_{\mathbf{1}_\Sigma}^{\mathbb{H}_f^+}$.

En d'autre termes, u est majorée par la mesure harmonique de Σ dans \mathbb{H}_f^+ . Le théorème 2.3.3 affirme qu'alors u converge non-tangentiellement vers 0, \mathcal{H}_{d-1} -presque partout sur

$\Gamma \setminus \Sigma$ et donc sur $\phi(N^+)$. Or, pour ν -presque tout ζ de N^+ il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $\phi(\zeta)$ non-tangentiellelement telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} u(x_n) = 1$. En notant ν^+ la mesure ν restreinte à N^+ , nous obtenons que $\phi\nu^+$ est singulière par rapport à \mathcal{H}_{d-1} sur $\phi(N^+)$. Montrons maintenant que ceci est impossible si $\mathcal{H}_{d-1}(\phi(N^+))$ est positif.

Supposons que $\mathcal{H}_{d-1}(\phi(N^+))$ soit positif. Dans ce cas, il existe un sous-ensemble K de $\phi(N^+)$ compact avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(K) < +\infty$ et $\phi\nu^+(K) = 0$. Par le lemme 3.2.15, il existe alors une fonction s surharmonique positive sur Ω telle que $\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x \in \Omega}} s(x) = +\infty$ pour tout $\zeta \in K$ et $s(X_0) = 1$ pour un point $X_0 \in \mathbb{H}_f^+$.

Or, la fonction s admet une limite non-tangentielle finie \mathcal{H}_{d-1} -presque partout sur F , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Il s'ensuit que $\mathcal{H}_{d-1}(\phi(N^+)) = 0$. De même, $\mathcal{H}_{d-1}(\phi(N^-)) = 0$ et donc Σ est effilé au sens minimal en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de F . •

D) Si Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne f de constante de lipschitz L notons, pour $x \in \Gamma$ et $a > 2L$, $C_a(x)$ le cône de révolution $C(x, 10, \frac{\pi}{2} - \arctan a, \theta_d)$. Pour $z \in \mathbb{H}_f^+$ et pour un ensemble $E \subset \Gamma$, nous notons $B_a(z) = \{x \in \Gamma ; z \in C_a(x)\}$ et $T_a^E(z) = B_a(z) \cap E$.

Lemme 3.2.16 Soit E un sous-ensemble de Γ , $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$. Alors pour tout a, a' avec $2L < a' < a$ et tout $\epsilon > 0$ il existe un sous-ensemble F de E vérifiant

$$\alpha) \quad \mathcal{H}_{d-1}(F) > (1 - \epsilon)\mathcal{H}_{d-1}(E)$$

$$\beta) \quad \omega(z, T_{a'}^E(z)) \geq c \text{ pour tout } z \in \bigcup \{C_a(x) ; x \in F\} \text{ avec } \text{dist}(z, \Gamma) < 4(L + 1),$$

où ω est la mesure harmonique de \mathbb{H}_f^+ et c est une constante strictement positive ne dépendant pas de z .

Démonstration Fixons un point X_0 dans \mathbb{H}_f^+ avec $\text{dist}(X_0, \Gamma) > 20$. Par le théorème de Dahlberg (théorème 2.3.4) la mesure harmonique de \mathbb{H}_f^+ est équivalente à \mathcal{H}_{d-1} sur Γ . Nous pouvons donc, pour tout $\epsilon > 0$, choisir un ensemble compact $F \subset E$ tel que $\mathcal{H}_{d-1}(F) > (1 - \epsilon)\mathcal{H}_{d-1}(E)$ et

$$\omega(X_0, B(x, r) \cap E) \geq c_1 r^{d-1}, \text{ pour tout } x \in F, 0 < r < 1 \quad (3.9)$$

$$\omega(X_0, B(x, r)) \leq c_2 r^{d-1}, \text{ pour tout } x \in F, 0 < r < 1 \quad (3.10)$$

où les constantes strictement positives c_1 et c_2 ne dépendent pas de x et de r .

Soit $z = (z_1, \dots, z_d) \in \bigcup \{C_a(x) ; x \in F\}$ et notons $T(z) = T_{a'}^E(z)$. Quitte à effectuer une translation, nous pouvons supposer que $z_1 = \dots = z_{d-1} = 0$ et que 0 appartient à Γ .

Notons $K(z)$ le cylindre de révolution autour de l'axe des x_d de rayon $3\text{diam}T(z)$, délimité par les “demi-espaces” $\{x = (x_1, \dots, x_d) ; x_d = 2z_d\}$ et $\{x = (x_1, \dots, x_d) ; x_d = -2z_d\}$.

En appliquant le principe de Harnack au bord (théorème 2.3.7) nous obtenons l'existence d'une constante $c > 0$ telle que

$$\omega(z, T(z)) \geq c \omega(z', T(z)) , \text{ pour tout } z' \notin K(z),$$

la constante c ne dépendant pas de z et de z' .

Montrons maintenant qu'il existe une constante c_0 telle que pour tout $z \in \mathbb{H}_f^+$ on ait $\omega(z, B_{a'}(z)) \geq c_0$. Considérons le domaine $K(z) \setminus \tilde{C}_{a'}(0)$, où $\tilde{C}_{a'}(0) = \{x = \in \mathbb{R}^d ; -x \in C_{a'}(0)\}$. La solution du problème de Dirichlet dans ce domaine pour la fonction de la frontière $\mathbf{1}_{\tilde{C}_{a'}(0)}$ est une fonction harmonique positive, inférieure à $\omega(., B_{a'}(z))$ par le principe de maximum et minorée par une constante strictement positive au point z (car la mesure harmonique d'un domaine est invariante par dilatation du domaine).

Par le corollaire 2.3.8 nous avons

$$\frac{\omega(z', T(z))}{\omega(z', B_{a'}(z))} \sim \frac{\omega(z, T(z))}{\omega(z, B_{a'}(z))} , \text{ pour tout } z' \notin K(z).$$

En posant $z' = X_0$ et en appliquant les formules (3.9) et (3.10) nous obtenons $\omega(z, T_{a'}(z)) \geq c > 0$ pour tout $z \in \bigcup \{C_a(x) ; x \in F\}$, avec $\text{dist}(z, \Gamma) < 4$. La constante $c > 0$ est indépendante de z . •

Le théorème suivant est dû à Naïm.

Théorème 3.2.17 ([Naï57], théorème 15) *Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d et F un fermé de Ω . Si h est une fonction harmonique minimale de Ω et si F est effilé en h alors*

- 1) $h' = h - \widehat{\mathbf{R}}_h^F$ est une fonction harmonique minimale de $\Omega \setminus F$ et
- 2) l'ensemble $A \subset \Omega \setminus F$ est effilé en h si et seulement s'il est effilé en h' .

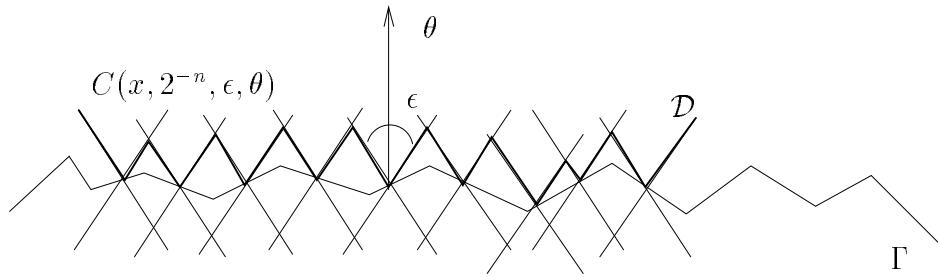
Procédons maintenant à la démonstration du théorème.

Démonstration du théorème 3.2.1 : Soit K un sous-ensemble de $\partial\Omega$, tel que tout point de K satisfait à une condition CDF et $0 < \mathcal{H}_{d-1}(K) < +\infty$. Par la proposition 3.2.3, il existe un sous-ensemble E de K et un graphe lipschitzien Γ tels que

$$\mathcal{H}_{d-1}(E) > 0 \text{ et } E \subset \Gamma \tag{3.11}$$

D'après le lemme 3.2.4 nous pouvons supposer que tout $x \in E$ satisfait la condition CDF avec la même angle $\theta = \theta_0 \in \mathbb{S}_d$ et la même ouverture $\epsilon = \epsilon_0$. De plus, par la remarque 3.2.8, nous pouvons choisir E fermé vérifiant :

$$\text{Il existe } r_0 > 0 \text{ tel que } (C(x, r_0, \epsilon_0, \theta_0) \cup C(x, r_0, \epsilon_0, -\theta_0)) \cap \Gamma = \emptyset , \forall x \in E \tag{3.12}$$

Figure 3.2: Le domaine \mathcal{D} et le graphe lipschitzien Γ

Quitte à effectuer une rotation nous pouvons également supposer que $\theta_0 = \theta_d$. Notons f la fonction de Lipschitz dont le graphe est Γ et posons encore

$$\mathbb{H}_f^+ = \{z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d ; z_d > f(z_1, \dots, z_{d-1})\}$$

$$\mathbb{H}_f^- = \{z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^d ; z_d < f(z_1, \dots, z_{d-1})\}.$$

Nous montrons dans un premier temps que si ω_1 est la mesure harmonique de $\Omega_1 = \Omega \cap \mathbb{H}_f^+$ alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble $F \subset E$ tel que $\mathcal{H}_{d-1}(F) > (1 - \epsilon)\mathcal{H}_{d-1}(E)$ et ω_1 soit équivalente avec \mathcal{H}_{d-1} sur F . Remarquons que par le théorème 2.3.4 la mesure harmonique ω de \mathbb{H}_f^+ est équivalente à \mathcal{H}_{d-1} sur Γ , et donc, par le corollaire 2.1.15, la mesure ω_1 est absolument continue par rapport à \mathcal{H}_{d-1} sur Γ . Il suffit donc de démontrer que \mathcal{H}_{d-1} est absolument continu par rapport à ω_1 sur un sous-ensemble F de Γ de \mathcal{H}_{d-1} mesure positive.

Lemme 3.2.18 *Pour $\epsilon > 0$, soit $F \subset E$ l'ensemble donné par le lemme 3.2.16, pour $a = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon_0}{2})$ et cet ϵ . Alors, pour tout $S \subset F$*

$$\mathcal{H}_{d-1}(S) > 0 \implies \omega_1(S) > 0.$$

En d'autres termes, la mesure \mathcal{H}_{d-1} est absolument continue par rapport à ω_1 sur F .

Démonstration Soit $S \subset F$ avec $\mathcal{H}_{d-1}(S) > 0$. Pour le domaine lipschitzien \mathbb{H}_f^+ la mesure harmonique de Martin ν s'identifie naturellement à la mesure harmonique ω de \mathbb{H}_f^+ qui est équivalente à \mathcal{H}_{d-1} (théorème 2.3.4). Nous montrons que $\mathbb{H}_f^+ \setminus \Omega$ est effilé au sens minimal en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de F . Par la proposition 3.2.13 la mesure harmonique de S dans Ω_1 est alors positive, ce qui donne l'énoncé du lemme.

Soit $\mathcal{D} = \bigcup \{C_a(x), x \in F\}$. \mathcal{D} est un domaine lipschitzien, car l'enveloppe inférieure de fonctions lipschitziennes uniformément minorées est une fonction lipschitzienne, voir fig. 3.2.

Par la proposition 3.2.14, $\partial\mathcal{D} \setminus F$ est effilé au sens minimal en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de F (dans le compactifié de Martin de $\mathbb{R}^d \setminus F$). Une deuxième application de la

proposition 3.2.14 et le lemme 3.2.17 donnent alors que $\mathbb{H}_f^+ \setminus \mathcal{D}$ est effilé au sens minimal dans \mathbb{H}_f^+ , en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout x de F . Puisque la réunion de deux ensemble effilés au sens minimal en un point x est effilé au sens minimal en x (propriétés 2.2.10), il reste à montrer que $\mathcal{D} \setminus \Omega$ est effilé au sens minimal, dans \mathbb{H}_f^+ , en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de F .

Posons $a' = \tan(\frac{\pi}{2} - \epsilon_0)$. Les cônes $C_{a'}(x)$ contiennent les cônes $C_a(x)$, $x \in E$. Notons, pour $x \in E$, K_x la fonction de la frontière de Martin de \mathbb{H}_f^+ attachée à x (relativement à un point $X_0 \in \Omega_1$ (théorème 2.3.3) et considérons les fonctions $\widehat{\mathbf{R}}_{K_x}^{C_{a'}(x) \setminus \Omega}$, la réduite étant considérée dans \mathbb{H}_f^+ . Ces fonctions sont des potentiels par le lemme 3.2.12 et la condition CDF.

Par les propriétés 2.2.10 nous pouvons, pour chaque $x \in E$, substituer $C_{a'}(x) \setminus \Omega$ par un ensemble U_x ouvert, contenant $C_{a'}(x) \setminus \Omega$, tel que $p_x = \mathbf{R}_{K_x}^{U_x}$ soit un potentiel. Posons $p(z) = \int_E p_x(z) \nu(dx)$, ν étant la mesure harmonique de Martin relativement à X_0 ; il est facile de vérifier que $p(z)$ est un potentiel comme intégrale de potentiels.

D'autre part, lemme 3.2.16, pour $z \in \mathcal{D}$ si $T(z) = \{x \in E ; z \in C_{a'}(x)\}$, la mesure $\omega(z, T(z), \mathbb{H}_f^+)$ est minorée par une constante c dépendant du graphe lipschitzien Γ , de ϵ_0 et de ϵ .

Soit $z \in \bigcup\{C_a(x) \setminus \Omega, x \in F\} = \mathcal{D} \setminus \Omega$. Remarquons que $p_x = K_x$ sur U_x . En appliquant le lemme 3.2.16, nous obtenons

$$p(z) = \int_E \mathbf{R}_{K_x}^{U_x}(z) \nu(dx) \geq \int_{T(z) \cap F} K_x(z) \nu(dx) = \omega(z, T(z)) > c.$$

D'autre part, p admet la limite fine 0 sur Γ , \mathcal{H}_{d-1} -presque partout (théorème 2.2.12) et donc $\{z \in \mathbb{H}_f^+ ; p(z) > c\}$ est un ensemble effilé en K_x , pour \mathcal{H}_{d-1} -presque tout $x \in E$. Or, $\mathcal{D} \setminus \Omega = \bigcup\{C_a(x) \cap \mathcal{D} \setminus \Omega, x \in E\} \subset \{x \in \mathbb{H}_f^+ ; p(x) > c\}$. Il s'ensuit que $\mathcal{D} \setminus \Omega$ est effilé au sens minimal en \mathcal{H}_{d-1} presque tout point de F . •

Les mêmes arguments sont valables pour la mesure harmonique ω_2 de $\Omega_2 = \mathbb{H}_f^- \cap \Omega$. En appliquant le lemme précédent pour $\epsilon < 1/2$, nous obtenons que les mesures ω_j sont équivalentes à \mathcal{H}_{d-1} sur un ensemble $F \subset E$ de mesure \mathcal{H}_{d-1} positive. Les mesures ω_1 et ω_2 sont alors équivalentes sur F et la proposition 3.2.2 affirme que dans ce cas Ω n'est pas Poissonien. •

3.3 Une réciproque partielle

Dans le cadre bidimensionnel, C.J. Bishop [Bis91] a montré qu'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est Poissonien si et seulement si l'ensemble des points du bord de Ω satisfaisant à une

condition CDF par rapport à Ω est de mesure \mathcal{H}_1 -nulle. La preuve de ce résultat dépend de façon essentielle du résultat de Bishop, Carleson, Garnett et Jones [BCGJ89] suivant.

Théorème 3.3.1 ([BCGJ89]) *Soient Ω_1, Ω_2 deux domaines disjoints de \mathbb{R}^2 et soient ω_1 et ω_2 leurs mesures harmoniques. Si ω_1 est équivalente à ω_2 sur un ensemble E de mesure ω_1 positive, alors il existe un ensemble $R \subset E$ régulier au sens de Besicovitch sur lequel les mesures ω_1 et ω_2 sont équivalentes à \mathcal{H}_1 et $\mathcal{H}_1(R) > 0$.*

La preuve de ce résultat fait appel aux applications conformes et au théorème de Makarov sur le support de la mesure harmonique des domaines simplement connexes dans \mathbb{R}^2 et n'est donc pas adaptable aux espaces de dimension supérieure à 2.

Nous donnons une réciproque du théorème 3.2.1 sous l'hypothèse supplémentaire sur le domaine Ω suivante (on renvoie également à la remarque 3.3.11).

HYPOTHÈSE : *si Ω_1 et Ω_2 sont deux sous-domaines disjoints de Ω et si les mesures harmoniques correspondantes ω_1 et ω_2 sont équivalentes sur un sous-ensemble de $\partial\Omega$ de mesure ω_1 strictement positive alors elles sont équivalentes sur un sous-ensemble de $\partial\Omega$ régulier au sens de Besicovitch de mesure ω_1 strictement positive.*

Nous énonçons la réciproque dans un cas spécial. Cependant la preuve s'adapte facilement à un cas plus général.

Théorème 3.3.2 *Soit Γ le graphe d'une fonction lipschitzienne f et soit $F \subset \Gamma$ fermé. Si \mathcal{B} est une collection de boules fermées disjointes contenues dans $\mathbb{R}^d \setminus F$ telles que $E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \cup F$ soit fermé, alors le domaine $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus E$ est Poissonien si et seulement si l'ensemble des points du bord de Ω satisfaisant une condition CDF par rapport à Ω est de mesure \mathcal{H}_{d-1} -nulle.*

Pour la preuve nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 3.3.3 *Soit $F \subset \mathbb{R}^d$ avec $\mathcal{H}_{d-1}(F) = 0$. Alors, le domaine $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus F$ est Poissonien.*

La démonstration de la proposition utilise un théorème, essentiellement contenu dans un article de Friedland et Hayman [FH76], qui donne une majoration du produit des mesures harmoniques de deux domaines disjoints (pour une preuve complète voir aussi [Bis92]). En utilisant ce résultat, nous montrons que pour tout couple de sous-domaines disjoints de $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus F$ les mesures harmoniques correspondantes sont singulières sur F .

Théorème 3.3.4 ([FH76]) *Si Ω_1, Ω_2 sont deux domaines disjoints de \mathbb{R}^d et si ω_1, ω_2 sont leurs mesures harmoniques, évaluées en deux points fixés $x_1 \in \Omega_1$ et $x_2 \in \Omega_2$ respectivement, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$,*

$$\omega_1(B(x, r)) \omega_2(B(x, r)) \leq C^2 r^{2(d-1)}.$$

Démonstration de la proposition 3.3.3 Soient Ω_1 et Ω_2 deux sous-domaines disjoints de Ω , et soient ω_1 et ω_2 leurs mesures harmoniques, évaluées en $x_1 \in \Omega_1$ et $x_2 \in \Omega_2$ respectivement. Par le théorème 3.3.4 il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ nous ayons

$$\omega_1(B(x, r))\omega_2(B(x, r)) \leq C^2r^{2(d-1)}. \quad (3.13)$$

Soit $\epsilon > 0$ et \mathcal{F} un recouvrement de $\partial\Omega$ par des boules telles que $\sum_{B \in \mathcal{F}} (\text{diam } B)^{d-1} < \epsilon$.

Soient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{B = B(x, r) \in \mathcal{F} ; \omega_1(B) > Cr^{d-1}\} \text{ et} \\ \mathcal{F}_2 &= \{B = B(x, r) \in \mathcal{F} ; \omega_2(B) > Cr^{d-1}\}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.3.4, $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset$, et

$$\omega_j \left(\bigcup \{B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_j\} \right) < 2^{d-1}C\epsilon, \quad j = 1, 2.$$

Par conséquent, $\omega_1 \left(\bigcup \{B \in \mathcal{F}_1\} \right) > \omega_1(\partial\Omega) - 2^{d-1}C\epsilon$ et $\omega_2 \left(\bigcup \{B \in \mathcal{F}_1\} \right) < 2^{d-1}C\epsilon$.

Puisque ϵ est arbitraire, nous pouvons trouver une suite d'ensembles $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\omega_1(F_n) > \omega_1(\partial\Omega) - 2^{-n}$ et $\omega_2(F_n) < 2^{-n}$. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, si $F_\infty = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n$, nous obtenons $\omega_1(F_\infty) = \omega_1(\partial\Omega)$ et $\omega_2(F_\infty) = 0$, donc $\omega_1 \perp \omega_2$. Le résultat étant valable pour tout couple de sous-domaines disjoints de Ω , nous en déduisons, après application de la proposition 3.2.2, que Ω est Poissonien. •

Corollaire 3.3.5 Si Ω_1 et Ω_2 sont deux domaines disjoints dont les mesures harmoniques sont strictement positives et équivalentes sur un ensemble E de mesure \mathcal{H}_{d-1} σ -finie, alors elles sont équivalentes à \mathcal{H}_{d-1} sur un sous-ensemble de E de \mathcal{H}_{d-1} mesure strictement positive.

Démonstration Si les deux mesures étaient singulières par rapport à \mathcal{H}_{d-1} , il existerait un ensemble F de \mathcal{H}_{d-1} -mesure nulle qui porterait les deux mesures. Une application du théorème 3.3.4 aboutit alors à une contradiction. •

De la même façon nous pouvons montrer le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.6 Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines de \mathbb{R}^d tels que la mesure \mathcal{H}_{d-1} soit σ -finie sur $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. Soient ω_1 , ω_2 leurs mesures harmoniques. Alors nous avons l'alternative suivante :

- ou bien $\omega_1 \perp \omega_2$
- ou il existe un ensemble $F \subset \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ sur lequel les mesures ω_1 et ω_2 sont équivalentes à \mathcal{H}_{d-1} et non-nulles.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé.

Démonstration du théorème 3.3.2 Supposons que Ω ne soit pas Poissonien. Il existe alors deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 de Ω , disjoints tels que les mesures harmoniques correspondantes ω_1 et ω_2 soient équivalentes sur un ensemble $K \subset \partial\Omega$.

Montrons d'abord que $\cup\{B \in \mathcal{B}\} \cap K = \emptyset$. Remarquons que le complémentaire d'une boule fermée est un domaine de Poisson. Pour ceci il suffit d'appliquer une transformation de Kelvin pour se ramener à l'intérieur d'une boule et appliquer le théorème de Herglotz-Riesz de représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées dans une boule.

Supposons que les mesures harmoniques ω_1 et ω_2 soient équivalentes et non-nulles sur le bord de la boule $B_0 \in \mathcal{B}$. Selon la proposition 3.2.2, ceci implique que le complémentaire de la boule n'est pas un domaine Poissonien, ce qui est absurde.

Le reste de la preuve s'applique également à la preuve du théorème 3.3.7.

Supposons maintenant que les mesures harmoniques des deux domaines soient équivalentes sur $K \subset \Gamma$. Par le corollaire 3.3.5, nous pouvons supposer que K est de \mathcal{H}_{d-1} mesure positive et que les mesures harmoniques sont équivalentes à \mathcal{H}_{d-1} sur K . D'après la proposition 3.2.14, $\Gamma \setminus K$ est effilé au sens minimal en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de K . Or, dans le domaine $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^d \setminus K$, \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de K est double (théorème 2.3.11), c'est-à-dire qu'à presque tout point de K sont associés (au sens du théorème 2.3.10) deux points de la frontière de Martin minimale de $\tilde{\Omega}$.

La frontière de Martin considérée est dorénavant celle du domaine $\tilde{\Omega}$; nous notons ν la mesure harmonique de Martin de ce domaine relativement à un point $X_0 \in \Omega$ et π la projection de la frontière de Martin de $\tilde{\Omega}$ sur $\partial\tilde{\Omega} \cup \{+\infty\}$, donnée par le théorème 2.3.10. La mesure ν est projetée par π sur la mesure harmonique $\tilde{\omega}$ de $\partial\tilde{\Omega}$ évaluée en X_0 qui est équivalente à \mathcal{H}_{d-1} sur un sous-ensemble de K de mesure \mathcal{H}_{d-1} strictement positive (puisque ω_1 est absolument continue par rapport à $\tilde{\omega}$). Quitte à diminuer K , nous pouvons supposer que $\mathcal{H}_{d-1}(K)$ est positive et que les mesures ω_1 , ω_2 , $\tilde{\omega}$ et \mathcal{H}_{d-1} sont équivalentes sur K .

Soient \mathbb{H}_f^+ , \mathbb{H}_f^- les “demi-espaces” $\mathbb{H}_f^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d ; f(x_1, \dots, x_{d-1}) < x_d\}$ et $\mathbb{H}_f^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d ; f(x_1, \dots, x_{d-1}) > x_d\}$ et $A \subset K$ l'ensemble des points associés à deux points de la frontière de Martin. Par le théorème 2.3.11, quitte à se restreindre à un sous-ensemble A' de A de mesure \mathcal{H}_{d-1} égale à $\mathcal{H}_{d-1}(A)$, nous pouvons supposer qu'à chaque point ζ de la frontière de Martin minimale $\partial\tilde{\Omega}^M$ de $\tilde{\Omega}$ avec $\pi(\zeta) \in A'$, un et un seul “demi-espace” parmi les \mathbb{H}_f^+ , \mathbb{H}_f^- est effilé au sens minimal en ζ . Soient

$$\tilde{\Omega}_+ = \{\zeta \in \pi^{-1}(A') ; \mathbb{H}_f^- \text{ est effilé au sens minimal en } \zeta\}$$

$$\tilde{\Omega}_- = \{\zeta \in \pi^{-1}(A') ; \mathbb{H}_f^+ \text{ est effilé au sens minimal en } \zeta\}.$$

Clairement,

$$\tilde{\Omega}_+ \cap \tilde{\Omega}_- = \emptyset, \text{ et } \tilde{\Omega}_+ \cup \tilde{\Omega}_- = \{\zeta \in \partial\tilde{\Omega}^M ; \pi(\zeta) \in A'\}. \quad (3.14)$$

Le corollaire 2.2.17 montre que $\tilde{\Omega} \setminus \Omega_1$ ne peut pas être non-effilé au sens minimal en ν -presque tout point de $\pi^{-1}(A')$, car A' est de mesure harmonique positive dans Ω_1 . Or, $\pi(\nu) = \tilde{\omega}$ est équivalente à la mesure de Hausdorff \mathcal{H}_{d-1} , et donc il existe un ensemble $O \subset A'$ avec $\mathcal{H}_{d-1}(O) > 0$, tel que pour tout $x \in O$ l'ensemble $\tilde{\Omega} \setminus \Omega_1$ soit effilé en au moins un point de $\pi^{-1}(x)$.

Par la relation (3.14), quitte à permuter \mathbb{H}_f^+ et \mathbb{H}_f^- , nous pouvons supposer qu'il existe $Z \subset \pi^{-1}(O)$ tel que

1. \mathbb{H}_f^- soit effilé au sens minimal en tout point de Z .

2. $\nu(Z) > 0$.

3. $\tilde{\Omega} \setminus \Omega_1$ soit effilé en tout point de Z .

Nous en déduisons, à l'aide du théorème 3.2.17, que $\mathbb{H}_f^+ \setminus \Omega_1$ est effilé au sens minimale dans \mathbb{H}_f^+ en tout point de $\pi(Z)$. Or, $\nu(Z)$ est positive donc, $\tilde{\omega}(\pi(Z)) > 0$. D'autre part, $\tilde{\omega}$ est équivalente à \mathcal{H}_{d-1} sur A' et donc, par le théorème 2.3.4, est équivalente à la mesure harmonique de \mathbb{H}_f^+ . Par le corollaire 2.2.17 nous obtenons $\omega(\pi(Z), \mathbb{H}_f^+ \cap \Omega_1) > 0$.

Remarquons que $\tilde{\Omega} \setminus \Omega_2 \supset \Omega_1$ est non-effilé au sens minimal en tout point de Z (dans $\tilde{\Omega}$). Puisque $\omega_2(\pi(Z))$ est équivalente à \mathcal{H}_{d-1} sur $\pi(Z)$, l'ensemble $\tilde{\Omega} \setminus \Omega_2$ est effilé au sens minimal dans \mathbb{H}_f^- en \mathcal{H}_{d-1} -presque tout point de $\pi(Z)$.

Le lemme 3.2.12 montre qu'alors \mathcal{H}_{d-1} -p.t. $x \in \pi(Z)$ satisfait à une CDF, ce qui achève la preuve du théorème. •

Le théorème 3.3.2 se généralise de la façon suivante :

Théorème 3.3.7 *Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ et soit π une application comme donnée par la remarque 2.2.16. Soit $C \subset \partial\Omega$ l'ensemble des points qui satisfont à une condition CDF par rapport à Ω et $D \subset \partial\Omega$ l'ensemble des points au moins doubles (relativement à π) de $\partial\Omega$. Supposons que D est un ensemble régulier au sens de Besicovitch. Alors Ω est Poissonien si et seulement si $\mathcal{H}_{d-1}(C) = 0$.*

La preuve repose sur le lemme suivant.

Lemme 3.3.8 *Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ et soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines disjoints inclus dans Ω . Soient ω_1 et ω_2 les mesures harmoniques de Ω_1 et Ω_2 respectivement. Si $S \subset \partial\Omega$ est l'ensemble des points simples pour Ω (relativement à une application π comme donnée par la remarque 2.2.16), alors ω_1 est singulière par rapport à ω_2 sur S .*

Démonstration Soient ω la mesure harmonique de Ω évaluée en un point $X_0 \in \Omega$ et ν la mesure harmonique du compactifié de Martin $\widehat{\Omega}$ de Ω relativement à X_0 . Considérons la fermeture $\overline{\Omega}$ dans $\widehat{\mathbb{R}}^d$. Remarquons également que la fonction π est injective sur S .

Soit $\Phi \subset S$ l'ensemble des points $x \in S$ tels que $\Omega \setminus \Omega_1$ soit non-effilé au sens minimal en $\pi^{-1}(x)$. Alors,

$$\begin{aligned}\omega_1(., \Phi) &= \omega(., \Phi) - \int_{\partial\Omega_1 \cap \Omega} \omega(z, \Phi) \omega_1(., dz) = \omega(., \Phi) - \int_{\partial\Omega_1 \cap \Omega} \int_{\pi^{-1}(\Phi)} K_x(z) \nu(dx) \omega_1(., dz) \\ &= \omega(., \Phi) - \int_{\pi^{-1}(\Phi)} \mathbf{R}_{K_x}^{\partial\Omega_1 \cap \Omega}(z) \nu(dx) = \omega(., \Phi) - \int_{\pi^{-1}(\Phi)} K_x(z) \nu(dx) = 0.\end{aligned}$$

Les ensembles Φ et $S \setminus \Phi$ sont mesurables et $\omega_1(\Phi) = \omega_2(S \setminus \Phi) = 0$. Il s'ensuit que ω_1 est singulière par rapport à ω_2 sur S . •

Démonstration du théorème 3.3.7 Supposons que Ω ne soit pas Poissonien. Alors il existe deux domaines disjoints Ω_1 et Ω_2 inclus dans Ω , dont les mesures harmoniques sont équivalentes et non-nulles sur un ensemble $K \subset \partial\Omega$. Par le lemme précédent nous obtenons que les mesures ω_1 et ω_2 sont équivalentes et non-nulles sur un sous-ensemble de D et par conséquent sur un sous-ensemble d'un graphe lipschitzien. Le reste de la preuve est le même que pour le théorème 3.3.2. •

Donnons quelques exemples d'applications des théorèmes précédents :

Exemple 3.3.9 Si Γ est un graphe lipschitzien dans \mathbb{R}^d et si $E \subset \Gamma$ est fermé , alors trivialement $\mathcal{H}_{d-1}(E) > 0$ si et seulement si $\mathbb{R}^d \setminus E$ n'est pas Poissonien. •

Exemple 3.3.10 Reciproquement, si F est un ensemble de mesure \mathcal{H}_{d-1} nulle, alors par la proposition 3.3.3, $\mathbb{R}^d \setminus F$ est Poissonien. •

Remarque 3.3.11 Pour généraliser le théorème 3.3.7 il nous suffirait de savoir que les mesures harmoniques de deux domaines disjoints sont équivalentes sur un ensemble régulier au sens de Besicovitch. Ce résultat (connu dans le cadre bidimensionnel, voir théorème 3.3.1), n'est malheureusement pas connu en dimension ≥ 3 .

3.4 Mesure harmonique et ensembles irréguliers de \mathbb{R}^2

Nous nous plaçons dans \mathbb{R}^2 . Dans [Bis92], Bishop propose le problème suivant : Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 et E est un ensemble irrégulier au sens de Besicovitch, $E \subset \partial\Omega$. Alors, si ω est la mesure harmonique du domaine Ω , est-il vrai que ω est singulière à \mathcal{H}_1 sur E ?

Peter Jones a donné une preuve de la conjecture sous une condition de capacité uniforme, et le théorème de Makarov [Mak85], amélioré par Pommerenke [Pom86], permet de la démontrer si le domaine Ω est simplement connexe. En s'inspirant de la méthode de A. Ancona et M. Zinsmeister de [AZ89] nous montrons que si Ω est le complémentaire d'un ensemble E compact irrégulier au sens de Besicovitch, alors ω est singulière par rapport à \mathcal{H}_1 sur l'ensemble des points doubles de E . Rappelons (voir section 2.3) que l'ensemble des points au moins triples d'un domaine du plan est de mesure harmonique nulle, remarque que nous devons à A. Ancona.

Le théorème de Pommerenke mentionné est le suivant.

Théorème 3.4.1 ([Pom86], corollaire 2) *Soit Ω un domaine simplement connexe et soit ω sa mesure harmonique. Il existe une partition de $\partial\Omega$, $\partial\Omega = E_0 \cup E_1 \cup E_2$ avec les propriétés suivantes :*

- 1) $\mathcal{H}_1(E_0) = 0$
- 2) la mesure ω est équivalente à \mathcal{H}_1 sur E_1
- 3) E_1 est de mesure \mathcal{H}_1 σ -finie, et $\partial\Omega$ a une tangente en tout point de E_1
- 4) $\omega(E_2) = 0$

Rappelons-nous qu'un ensemble compact irrégulier au sens de Besicovitch n'a pas de tangentes \mathcal{H}_1 -presque sûrement; on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.4.2 *Soient E un ensemble compact irrégulier au sens de Besicovitch, Ω un domaine simplement connexe tel que $E \subset \partial\Omega$ et soit ω la mesure harmonique de Ω . Alors, ω est singulière à \mathcal{H}_1 sur E .*

Le lemme suivant est bien connu. Cependant nous présentons la démonstration pour des raisons de commodité.

Lemme 3.4.3 *Si E est un ensemble compact, totalement discontinu, et si $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus E$, alors il existe une projection continue π , du compactifié de Martin $\widehat{\Omega}$ sur la fermeture $\overline{\Omega}$ de Ω dans $\widehat{\mathbb{R}}^2$, prolongeant l'identité qui projette la mesure harmonique de Martin de Ω sur la mesure harmonique du domaine Ω .*

Démonstration Soit h une fonction harmonique minimale attachée à un point de la frontière de Martin $\partial\widehat{\Omega}$ de Ω . D'après la théorie de Martin, il existe $x \in E$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tel que $h = \lim_{x_n \rightarrow x} K_{x_n}$. Soit $x' \in E$ et soit \mathcal{V} est une base de voisinages de x' dans $\mathbb{R}^2 = \overline{\Omega}$ telle que pour tout $V \in \mathcal{V}$ la frontière ∂V de V soit une courbe de Jordan fermée, $\partial V \subset \Omega$ et $x \notin V$. Montrons que $\widehat{\mathbf{R}}_h^V$ est un potentiel et donc V est effilé en h , pour tout $V \in \mathcal{V}$.

Soit $x' \in E$, $x' \neq x$, et soit $\gamma \subset \Omega$ une courbe de Jordan fermée qui sépare x, x' . Soit V la composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ qui contient x' . Soit X_0 le point de normalisation de $\widehat{\Omega}$, $K_{x_n}(X_0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Du principe de Harnack on obtient qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\frac{1}{C} \leq K_{x_n} \leq C$ sur γ , pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part K_{x_n} tend vers h uniformément sur tout compact de Ω . Il s'ensuit que $C\widehat{\mathbf{R}}_{K_{x_n}}^V \geq \widehat{\mathbf{R}}_h^V$ et donc $\widehat{\mathbf{R}}_h^V$ est un potentiel.

Soit $\pi : \widehat{\Omega} \rightarrow \widehat{\mathbb{R}^2}$ l'application qui prolonge l'identité de Ω en associant à chaque fonction $h \in \partial\widehat{\Omega}$ l'unique point $x \in \partial\Omega$ tel que pour tout voisinage V de x dans \mathbb{R}^2 , $\widehat{\mathbf{R}}_h^V$ n'est pas un potentiel. L'application est clairement bijective. Montrons maintenant que π est continue. En effet, si $h_i \subset \widehat{\Omega}$ converge finement vers un point $h \in \partial\widehat{\Omega}$, alors le filtre $x_i \subset \overline{\Omega}$ correspondant tend vers le point x associé à h (s'il existait un deuxième point d'accumulation on pourrait trouver comme ci-dessus un voisinage de h effilé en h , absurde).

Finalement, par la proposition 2.2.15, la mesure harmonique de Martin de Ω est projetée sur la mesure harmonique de Ω . •

Proposition 3.4.4 *Soit E un ensemble compact irrégulier au sens de Besicovitch et soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus E$. Si ω est la mesure harmonique du domaine Ω évaluée à l'infini, alors ω est singulière à \mathcal{H}_1 sur l'ensemble Δ des points doubles de E (relativement à la fonction π donnée par le lemme précédent) .*

Démonstration Posons $L = \pi^{-1}(\Delta)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que ω n'est pas singulière à \mathcal{H}_1 sur Δ . T. Wolff a montré dans [Wol93], que les mesures harmoniques des domaines du plan sont portées par des ensembles de mesure \mathcal{H}_1 σ -finie. Nous pouvons donc supposer que ω est équivalente à \mathcal{H}_1 sur un sous-ensemble Δ' de Δ .

Quitte à diminuer Δ' , nous pouvons trouver deux compacts L_1 et L_2 dans L disjoints, tels que $\pi(L_1) = \pi(L_2) = \Delta'$ et $\nu(L_2) > 0$, ν étant la mesure harmonique de Martin, relativement à l'infini, projetée par π sur ω .

Soient V_1 et V_2 deux voisinages de L_1 et L_2 respectivement. Rappelons que tout point de la frontière de Martin minimale de Ω admet un système de voisinages à intersection avec Ω connexe. Nous pouvons alors supposer, en diminuant éventuellement L_1 , que $V_1 \cap \Omega$ est un ensemble ouvert connexe. En posant $F = \overline{V_1 \cap \Omega}$, nous en déduisons que chaque composante de $\widehat{\mathbb{R}^2} \setminus F$ est donc simplement connexe. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la collection des composantes connexes de $\widehat{\mathbb{R}^2} \setminus F$ et soit, pour $n \in \mathbb{N}$, ω_n la mesure harmonique de U_n . Posons $\tilde{\omega} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \omega_n$.

Remarquons que par construction F est effilé à chaque point de L_2 . Soit $S \subset L_2$. Posons $u = \int_S K_x \nu(dx)$ et considérons la fonction $u - \mathbf{R}_u^F$. Si $\nu(S) > 0$, alors la fonction $u - \mathbf{R}_u^F$ est harmonique non-nulle dans $\Omega \setminus F$ (puisque F est effilé à chaque point de L_2). Il

s'ensuit que $\pi(S)$ est de mesure harmonique positive dans une de composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus F$. On conclut que si $\tilde{\nu}$ est la restriction de ν sur L_2 , la projection de la mesure $\tilde{\nu}$ sur Δ' est absolument continue par rapport à $\tilde{\omega}$.

Or, d'après le corollaire 3.4.2, la mesure $\tilde{\omega}$ est singulière par rapport à \mathcal{H}_1 sur Δ' . D'autre part la mesure $\tilde{\nu}$ est absolument continue par rapport à ω et donc ω n'est pas équivalente à \mathcal{H}_1 sur Δ' , ce qui est absurde. •

Chapitre 4

Mesure harmonique du complémentaire d'ensembles de Cantor

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la dimension de la mesure harmonique de certains domaines de \mathbb{R}^d , $d \geq 2$. La frontière des domaines étudiés, est un ensemble compact de type fractal totalement discontinu.

4.1 Cadre, résultats liés

Donnons d'abord la définition de dimension d'une mesure de probabilité; la notion de dimension de Hausdorff d'un ensemble E $\dim_{\mathcal{H}} E$ est donnée en section A.1.

Définition 4.1.1 Soit μ une mesure de probabilité dans \mathbb{R}^d (ou dans un espace métrique). La dimension au sens de Hausdorff de μ , ou simplement la dimension de μ , $\dim \mu$ est définie comme suit :

$$\dim \mu = \inf \{\dim_{\mathcal{H}} E ; \mu(E) = 1\} \quad (4.1)$$

L'histoire du problème commence en 1981. Øksendal [Øks81], a proposé la conjecture suivante : *La mesure harmonique de tout domaine de \mathbb{R}^2 est portée par un ensemble de dimension inférieure ou égale à 1.*

Par la définition 4.1.1, nous pouvons donner la conjecture d'Øksendal sous la forme suivante : “la dimension de la mesure harmonique de domaines de \mathbb{R}^2 est toujours inférieure à 1”. Le premier résultat lié à la conjecture a été celui de Carleson [Car85]. Il a montré que pour certains ensembles de Cantor de \mathbb{R}^2 la dimension de la mesure harmonique de leur complémentaire est strictement inférieure à 1. Sa méthode fait appel aux outils de la théorie ergodique, et implique une estimation de l'entropie de la mesure harmonique (pour une définition de l'entropie, voir chapitre 4). En même temps, N.

Makarov dans [Mak85] montrait que la conjecture est juste pour la mesure harmonique de domaines du plan simplement connexes. En effet, il montre bien plus : il trouve une fonction ϕ croissante telle qu'il existe deux fonctions $\phi_1(t) = t \exp\{c_1 \sqrt{\log t^{-1} \log \log \log t^{-1}}\}$ et $\phi_2(t) = t \exp\{c_2 \sqrt{\log t^{-1} \log \log \log t^{-1}}\}$ (où c_1 et c_2 sont deux constantes positives) vérifiant :

- i) la mesure harmonique de tout domaine simplement connexe est absolument continue par rapport à la mesure de Hausdorff généralisée \mathcal{H}_{ϕ_1} , et
- ii) la mesure de Hausdorff généralisée \mathcal{H}_{ϕ_2} est absolument continue par rapport à la mesure harmonique de tout domaine simplement connexe.

Comme corollaire de son théorème nous obtenons que la dimension de la mesure harmonique de tout domaine simplement connexe du plan est égale à 1.

P. Jones et T. Wolff [JW88] ont montré que la dimension de la mesure harmonique de tout domaine de \mathbb{R}^2 est inférieure ou égale à 1. T. Wolff [Wol93] a ensuite montré que dans le plan la mesure harmonique est toujours portée par un ensemble de mesure \mathcal{H}_1 σ -finie.

En dimension supérieure la situation est différente. J. Bourgain [Bou87] a montré que la dimension de la mesure harmonique dans les domaines de \mathbb{R}^d , $d > 2$ est inférieure à $d - \epsilon(d)$, où $\epsilon(d)$ est une constante qui ne dépend que de la dimension de l'espace, d . En même temps, T. Wolff [Wol95] a donné l'exemple d'un domaine de \mathbb{R}^d dont la mesure harmonique est de dimension strictement supérieur à 2. La meilleure constante $\epsilon(d)$ du théorème de Bourgain reste à préciser.

Cependant, les résultats de L. Carleson ont leur propre intérêt, surtout à cause de la technique remarquable utilisée. N. Makarov et A. Volberg dans un preprint joint [MV86] ont exploité la méthode de Carleson et ont obtenu que la dimension de la mesure harmonique du complémentaire de certains ensembles de Cantor est strictement inférieure à la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor, dans le cadre bidimensionnel. Ensuite A. Volberg [Vol92], [Vol93] étendra ces résultats pour la mesure harmonique d'ensembles “dynamiques”, c'est-à-dire d'ensembles de Julia de fonctions holomorphes.

Inspirés par l'idée de Bourgain [Bou87] nous avons voulu démontrer les résultats de L. Carleson et de N. Makarov-A. Volberg sans faire appel aux outils de la théorie ergodique. Nous avons pu affaiblir les hypothèses (les ensembles de Cantor ne sont pas autosimilaires) et nous montrons que la généralisation est optimale en construisant des ensembles de Cantor dont la dimension de Hausdorff et la dimension de la mesure harmonique de leurs complémentaires sont égales.

Nous montrons finalement, que si d est la dimension de la mesure harmonique d'un ensemble de Cantor, il existe un autre ensemble de Cantor \mathbb{K} , tel que la dimension de la mesure harmonique de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ soit égale à $d = \dim_{\mathcal{H}} \mathbb{K}$. Un théorème de A. Ancona montre que la dimension de la mesure harmonique d'ensembles de Cantor peut être arbitrairement proche de 1.

Cependant, une condition de symétrie nous est toujours indispensable. Par ailleurs, la preuve s'applique à des ensembles de Cantor en dimension supérieure, ainsi qu'au “Sierpinski gasket”.

4.2 Préliminaires

Soit Ω un domaine quelconque et ω_z sa mesure harmonique en $z \in \Omega$. Pour tout ensemble $E \subset \partial\Omega$ et tous deux points $z, z' \in \Omega$ nous avons $\omega_z(E) > 0$ si et seulement si $\omega_{z'}(E) > 0$, par le principe de Harnack. *Ainsi, la dimension de la mesure harmonique d'un domaine ne dépend pas du point $z \in \Omega$ auquel la mesure est considérée.* Dorenavant, la mesure d'un domaine contenant ∞ sera évaluée à l'infini, si nous ne précisons pas autrement.

Nous présentons d'abord un résultat qui sera très utile dans la suite de ce chapitre ainsi que dans le chapitre suivant. Il nous permettra de comparer la mesure harmonique de deux ensembles voisins bien “cachés” dans la frontière d'un domaine. Il a été démontré et utilisé par Carleson dans [Car85], puis amélioré par Makarov et Volberg dans [MV86]. Les travaux de Makarov et Volberg n'existant qu'en prépublication, nous rappelons la preuve en suivant celle de [MV86].

Théorème 4.2.1 (*Carleson [Car85], Makarov-Volberg [MV86]*) *Soit Ω un domaine contenant ∞ , et soient $A_1 \subset B_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset B_n \subset \Omega$ des disques conformes tels que $B_i \setminus A_i \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$. Si les modules des anneaux $B_i \setminus A_i$ sont minorés par une constante $c > 0$ et si $\infty \in \Omega \setminus B_n$, alors il existe deux constantes C, q avec $q < 1$, ne dépendant que de c , telles que pour toute paire de fonctions harmoniques positives u, v s'annulant sur $\partial\Omega \setminus A_1$ et pour tout $x \in \Omega \setminus B_n$ nous ayons :*

$$\left| \frac{u(x)}{v(x)} : \frac{u(\infty)}{v(\infty)} - 1 \right| < Cq^n \quad (4.2)$$

Démonstration Soient $B_1 \setminus A_1, \dots, B_n \setminus A_n$ les anneaux introduits dans le théorème et soit u, v deux fonctions harmoniques positives s'annulant sur $\partial\Omega \setminus A_1$. Considérons les applications conformes qui envoient les anneaux $B_i \setminus A_i$ sur les anneaux $D_i = \{z \in \mathbb{R}^2 ; 1 < |z| < 1 + c_i\}$. Par hypothèse, $c_i \geq c$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Soient γ_i^1 les images inverses de $\{z \in \mathbb{R}^2 ; |z| = 1 + \frac{c}{3}\}$ et γ_i^2 celles de $\{z \in \mathbb{R}^2 ; |z| < 1 + \frac{2c}{3}\}$, pour $i = 1, \dots, n$. Notons

$$\begin{aligned} M_i^j &= \max\left\{\frac{u(z)}{v(z)} ; z \in \gamma_i^j\right\}, \quad m_i^j = \min\left\{\frac{u(z)}{v(z)} ; z \in \gamma_i^j\right\} \quad \text{et} \\ Q_i^j &= \frac{M_i^j}{m_i^j} \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.3)$$

Par les inégalités de Harnack, pour tout $1 \leq i \leq n$ et $j = 1, 2$, $Q_i^j \leq c_1$, où c_1 est une constante qui ne dépend que de c .

Montrons, d'abord, qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$Q_i^2 \leq Q_i^1 (1 - \delta(Q_i^1 - 1)) \quad (4.4)$$

Fixons $i \in \{1, \dots, n\}$ et considérons la composante connexe U de $\Omega \setminus \gamma_i^1$ contenant ∞ . Soit μ la mesure harmonique de U . Les fonctions u et v vérifient alors,

$$u(z) = \int_{\gamma_i^1} u(x)\mu(z, dx) \quad v(z) = \int_{\gamma_i^1} u(x)\mu(z, dx) ,$$

pour $z \in U$ par le principe de maximum pour les fonctions harmoniques. Or, sur γ_i^1 par (4.3), nous avons $m_i^1 v(x) \leq u(x) \leq M_i^1 v(x)$. Soient $F = \{x \in \gamma_i^1 ; u(x) \geq \frac{m_i^1 + M_i^1}{2} v(x)\}$ et $E = \{x \in \gamma_i^1 ; u(x) < \frac{m_i^1 + M_i^1}{2} v(x)\}$. Alors, pour $z \in \gamma_i^2$, nous avons

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_F u(x)\mu(z, dx) + \int_E u(x)\mu(z, dx) \leq \int_F M_i^1 v(x)\mu(z, dx) + \int_E \frac{m_i^1 + M_i^1}{2} v(x)\mu(z, dx) \\ &\leq M_i^1 \int_{\gamma_i^1} v(x)\mu(z, dx) + \left(\frac{m_i^1 + M_i^1}{2} - M_i^1 \right) \int_E v(x)\mu(z, dx) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Or, par le principe de Harnack appliqué au domaine D_i , il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $\frac{1}{c_2} \inf_{\zeta \in \gamma_i^1} v(\zeta) \leq v(x) \leq \sup_{\zeta \in \gamma_i^1} v(\zeta)$, pour tout $x \in \gamma_i^1$. De cette remarque et de (4.5) nous déduisons

$$u(z) \leq v(z) \left(M_i^1 + c_2 \mu(z, E) \frac{m_i^1 - M_i^1}{2} \right) \quad (4.6)$$

De la même façon nous obtenons

$$u(z) \geq v(z) \left(m_i^1 + c_2 \frac{M_i^1 - m_i^1}{2} \mu(z, F) \right) \quad (4.7)$$

Par ailleurs $\mu(F) + \mu(E) = \mu(\gamma_i^1)$ et $\mu(\gamma_i^1)$ est minorée par la mesure harmonique de γ_i^1 dans D_i , c'est-à-dire minorée par une constante c_3 qui ne dépend que de la constante c . Donc, ou bien $\mu(z, F) \geq \frac{c_3}{2}$ ou $\mu(z, E) \geq \frac{c_3}{2}$. Or, encore par le principe de Harnack appliqué au domaine $\Omega \setminus \gamma_i^1$, il existe une constante c_4 telle que pour tout ensemble $S \subset \gamma_i^1$ nous ayons $c_4^{-1} \inf_{z' \in \gamma_i^2} \mu(z', S) \leq \mu(z, S) \leq c_4 \sup_{z' \in \gamma_i^2} \mu(z', S)$. Donc la mesure harmonique d'un

de deux ensembles E et F est uniformément minorée. Par les relations (4.6) et (4.7) nous obtenons qu'alors il existe $\epsilon > 0$ tel que : ou bien $M_i^2 < M_i^1(1 - \epsilon)$ ou bien $m_i^2 > m_i^1(1 + \epsilon)$. Or, clairement $M_i^1 \geq M_i^2$ et $m_i^1 \leq m_i^2$. La relation (4.4) s'en déduit.

Montrons maintenant le théorème. Pour $z \in \Omega \setminus B_n$ nous avons

$$\frac{1}{Q_n^2} \leq \frac{u(x)}{v(x)} : \frac{u(\infty)}{v(\infty)} \leq Q_n^2 \quad (4.8)$$

Remarquons que par le principe de maximum, $Q_1^1 \geq Q_1^2 \geq Q_2^1 \geq \dots \geq Q_n^1 \geq Q_n^2$. En utilisant ceci et l'équation (4.4) nous obtenons que pour tout $i = 1, \dots, n$

$$Q_n^2 - 1 \leq (1 - \delta)(Q_n^1 - 1) \leq (1 - \delta)(Q_{n-1}^2 - 1) \leq (1 - \delta)^2(Q_{n-1}^1 - 1) \leq \dots \leq (1 - \delta)^n(Q_1^1 - 1) \quad (4.9)$$

La constante K sera donc $Q_1^1 \leq c_1$ et $q = \max\{1 - \delta, \frac{1}{1 - \delta}\}$. •

Introduisons les ensembles de Cantor étudiés : soit $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle qu'il existe deux constantes $\underline{A}, \overline{A}$ avec

$$0 < \underline{A} \leq a_j \leq \overline{A} < \frac{1}{2}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad (4.10)$$

A partir de la suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ nous construisons un ensemble de Cantor de la manière suivante (voir fig. 4.1) :

Soit $I = [0, 1]^2$. Dans une première étape de la construction nous remplaçons I par quatre carrés de longueur a_1 situés aux quatre coins de I . Ensuite, dans une deuxième étape, nous replaçons chacun de ces carrés par quatre carrés de longueur $a_1 a_2$ situés au quatre coins du carré remplacé. Dans une n -ième étape nous remplaçons chaque carré existant J par quatre carrés de longueur $a_1 \dots a_n$ situés au quatre coins de J .

Dorénavant les “étapes” seront appelées “générations” et nous noterons les carrés de la n -ième génération par $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}$, avec $i_j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$. Les carrés $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}$ sont contenus dans le carré $\tilde{I}_{i_1 \dots i_{n-1}}$, pour tout $i_n = 1, 2, 3, 4$, et la numérotation des carrés se fait de la façon illustrée dans la figure 4.1. Remarquons que tout ensemble de Cantor défini de cette façon est compact et totalement discontinu. Enonçons toute de suite le théorème principal de cette section :

Théorème 4.2.2 Soit \mathbb{K} un ensemble de Cantor construit à partir d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme ci-dessus, et posons $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$. Alors, la dimension de la mesure harmonique de Ω est strictement inférieure à la dimension de l'ensemble \mathbb{K} .

Notation 4.2.3 Pour un carré Q , nous notons sa longueur par $l(Q)$ et la mesure harmonique du domaine Ω évaluée à l'infini sera notée simplement ω . Nous écrirons encore $a \sim b$ s'il existe deux constantes $c, C > 0$ indépendantes des paramètres a et b telles que $ca \leq b \leq Ca$.

Nous allons également utiliser le corollaire d'un théorème général de Beardon [Bea65] suivant, qui affirme que pour estimer la dimension Hausdorff d'un ensemble de Cantor, il suffit de considérer des recouvrements avec les carrés de la construction du Cantor.

Corollaire 4.2.4 *Pour les ensembles de Cantor définis ci-dessus (ainsi que pour les ensembles de Cantor définis en section 4.4) les familles de carrés $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où*

$$\mathcal{F}_n = \{I_{i_1 \dots i_n}, (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, 4\}^n\} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

sont suffisantes pour le calcul des dimensions de Hausdorff de leurs sous-ensembles.

Finalement nous rappelons un résultat dû à Carleson [Car85] qui procure une formule utile pour calculer la dimension de la mesure harmonique du complémentaire d'ensembles de Cantor autosimilaires.

Théorème 4.2.5 *Soit \mathbb{K} un ensemble de Cantor comme ci-dessus, défini à partir d'une suite constante égale à $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$. Soit ω la mesure harmonique de son complémentaire évaluée à l'infini. Alors*

$$\dim \omega = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n |\log \alpha|} \sum_{c \in \mathcal{C}_n} g_n(c),$$

où g_n est la fonction de Green du domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup \{I_{i_1, \dots, i_n}, (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, 4\}^n\}$ et \mathcal{C}_n est l'ensemble des points critiques de g_n , $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration utilise une expression de la mesure harmonique en termes de la dérivée de la fonction de Green ainsi qu'une propriété d'invariance par l'opérateur décalage de la mesure harmonique du complémentaire d'ensembles de Cantor autosimilaires, voir aussi section 5.2. Pour la définition d'un ensemble de Cantor autosimilaire nous renvoyons au chapitre suivant.

La section 4.3 suivante est une reproduction de l'article [Bat96]. L'énumération des équations est indépendante de celle des autres sections.

4.3 Harmonic measure of some Cantor type sets

4.3.1 Introduction.

In [MV86] Makarov and Volberg show that the Hausdorff dimension of the harmonic measure of the complement of a particular kind of Cantor set is strictly smaller than the dimension of the set, i.e. that there exists a subset of the Cantor set of full harmonic measure but of strictly smaller dimension. Furthermore, Volberg in [Vol92], [Vol93] has extended this result to cover a large class of Cantor sets on the real axis. In [Car85], Carleson has shown that techniques and tools of the Ergodic theory could be used to study the harmonic measure of “classical” Cantor sets and [MV86], [Vol92], [Vol93], [Zdu90] are some of the results that strongly rely on this idea. Carleson prove that the dimension of the harmonic measure of these Cantor sets in the plane is always strictly smaller than 1. A similar but more general result is proved in [JW86], under the assumption of the “capacity density condition”.

The purpose of this work is to prove the inequality between the dimension of the harmonic measure and the dimension of the set for a larger class of Cantor sets in the plane (or the space) without using Ergodic theory. We have been motivated by an idea of Bourgain which has appeared in [Bou87], and we are also making use of some lemmas and results of the works mentionned above. Further information regarding the Hausdorff dimension and measure of Cantor type sets is provided for example in [Bea65], [Fal90].

This paper is organized in five sections : first we present the main theorem and introduce some notation. In the second section we prove a number of lemmas and in the third we prove the theorem. Two examples are given in the fourth section and in the final section we make some remarks and investigate the possibilities of the method.

Let $\{a_j\}$ be a sequence of real numbers such that there exist two constants $\underline{A}, \overline{A}$, $0 < \underline{A} \leq \overline{A} < \frac{1}{2}$ with $\overline{A} \geq a_i \geq \underline{A}$, for all $i \in \mathbb{N}$. We construct a Cantor set \mathbb{K} in the following way: we replace the square $[0, 1]^2$ with four equal squares of side-length a_1 situated in the four corners, and each one of them with four new ones of side-length $a_1 a_2$ and so on, see fig. 4.1. We denote by $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$, where $i_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ for $1 \leq j \leq n$, the 4^n squares of the n th generation constructed in this way with the enumeration shown in the figure and the usual condition that $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$ is the “father” of the sets $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}^{n+1}$, $i_{n+1} \in \{1, 2, 3, 4\}$. It is clear that $\overline{A} \geq \frac{\text{diam } \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^{n+1}}{\text{diam } \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n} = a_{n+1} \geq \underline{A}$, $i = 1, \dots, 4$. We will denote by $I_{i_1 \dots i_n}^n$ the intersection of $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$ with \mathbb{K} . We will say that a set $F \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ is of full harmonic measure for the domaine $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ if $\omega(F) = 1$, where ω is the harmonic measure of $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ (see Notation 4.3.2).

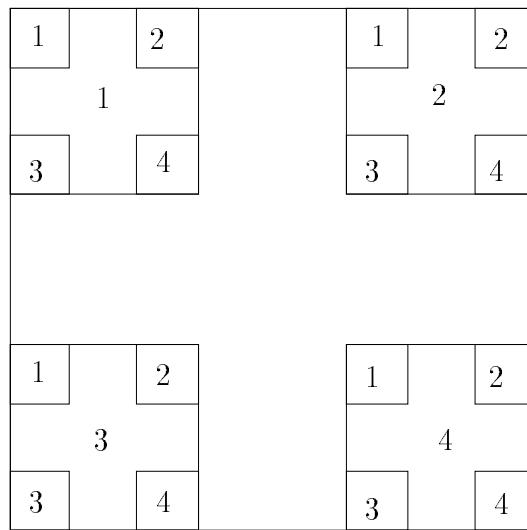


Figure 4.1: A Cantor set and its enumeration

Theorem 4.3.1 For a Cantor set \mathbb{K} as above there exists a subset F of \mathbb{K} of full harmonic measure such that $\dim F < \dim \mathbb{K}$.

Notation 4.3.2 If there is a constant c independent of the parameters α, β such that $\frac{1}{c}\alpha \leq \beta \leq c\alpha$ we will write $\alpha \sim \beta$ (in what follows the symbols c and C will be used to denote the constants). Suppose that Ω is a domain in \mathbb{R}^2 and that $F \subset \partial\Omega$. For $x \in \Omega$ we denote by $\omega(x, F, \Omega)$ the harmonic measure of F in Ω evaluated at x . We denote by $\omega(F, \Omega)$ the harmonic measure of F in Ω evaluated at infinity. If $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ we will write $\omega(F)$ instead of $\omega(F, \Omega)$. For a square F we note $l(F)$ its side-length and, finally, h_ρ is the ρ -dimensional Hausdorff measure.

4.3.2 Preparatory lemmas.

The proof of the theorem will be based on a number of lemmas some of which are already well known.

We first remark that there exists a constant $c_0 > 1$ depending only on A, \bar{A} such that, if $c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$ denotes the square of side-length c_0 -times the side-length of $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$ with the same center, then $c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \cap \mathbb{K} = I_{i_1 \dots i_n}^n$. For this c_0 (not depending on $i_1 \dots i_n$) we have the following classical lemma:

Lemma 4.3.3 There exists a $\delta > 0$ not depending neither on n , nor on the choice of $i_1 \dots i_n$ such that for all $x \in \frac{1 + c_0}{2} \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n}^n, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) > \delta. \quad (1)$$

Remark 4.3.4 If δ_n is the side-length of the square $I_{i_1 \dots i_n}^n$, the Green's function G of the square $c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$ satisfies

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{C^{-1}\delta_n}{|x - y|} \leq G(x, y) \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{C\delta_n}{|x - y|}$$

for $x, y \in \frac{1+c_0}{2} \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$ where the constant C depends only on c_0 . Furthermore we have

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n}^n, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus \mathbb{K}) = {}^{c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n} \mathbf{R}_1^{I_{i_1 \dots i_n}^n}(x) = G\mu(x)$$

where ${}^\Omega \mathbf{R}_1^F$ the capacitary potential of the set F in the domain Ω and μ is the capacitary measure of $I_{i_1 \dots i_n}^n$ in $c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$, $\|\mu\| = \text{cap}_{c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n}(I_{i_1 \dots i_n}^n)$.

Proof We first show that there exists a constant $c_1 > 0$ such that for $x \in \frac{1+c_0}{2} \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n$

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n}^n, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus \mathbb{K}) > c_1. \quad (2)$$

If μ is the probability measure on \mathbb{K} charging every square of the n th generation with mass 4^{-n} , let $\mu_n = 4^n \mu|_{I_{i_1 \dots i_n}^n}$ the restriction of the renormalized measure μ on the square $I_{i_1 \dots i_n}^n$.

Let us calculate the potential of μ_n for $y \in I_{i_1 \dots i_n}^n$

$$\begin{aligned} G\mu_n(y) &\leq 4^n \sum_{\kappa > n} 3 \cdot 4^{-\kappa} \log \left(\frac{C \prod_{i=1}^n a_i}{\prod_{i=1}^{\kappa} a_i} \right) \\ &= 3 \cdot 4^n \sum_{\kappa > n} 4^{-\kappa} \log(C \prod_{i=n+1}^{\kappa} a_i^{-1}) = 3 \sum_{\kappa=1}^{\infty} 4^{-\kappa} \log(C \prod_{i=1}^{\kappa} a_{i+n}^{-1}) \leq \tilde{C}(\underline{A}, \overline{A}) < \infty. \end{aligned}$$

The same reasoning provides a constant $c_2 > 0$ such that

$$\frac{1}{c_2} \leq G\mu_n(y) \leq c_2, \quad \text{for all } y \in I_{i_1 \dots i_n}^n.$$

By the maximum principle we get

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n}^n, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus \mathbb{K}) \sim G\mu_n(x), \quad \text{for } x \in c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n. \quad (3)$$

We can easily see that

$$G\mu_n(x) \geq c_3 \quad , \quad \text{for } x \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \right\}.$$

On the other hand the harmonic measure is non-decreasing as a function of the domain; hence

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n}^n, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus \mathbb{K}) \leq \omega(x, I_{i_1 \dots i_n}^n, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K})$$

and the lemma is proved . •

Lemma 4.3.5 *There exists a $\delta > 0$ not depending on n , such that for the squares of the n th generation $I_{1 \dots 11}^n$ and $I_{1 \dots 14}^n$ we have*

$$\omega(I_{1 \dots 11}^n) > (1 + \delta) \omega(I_{1 \dots 14}^n). \quad (4)$$

Remark 4.3.6 This lemma has been proved in [MV86] in the case of standard planar Cantor sets. The proof given below is similar.

We will make repeated use of the following well-known formula (see for instance [Bre69]): If $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ are two domains and if $F \subset \partial\Omega \cap \partial\tilde{\Omega}$ then the harmonic measures of the domains, ω and $\tilde{\omega}$ are associated in the following way

$$\omega(x, F) = \tilde{\omega}(x, F) - \int_{\partial\Omega \cap \tilde{\Omega}} \tilde{\omega}(y) \omega(x, dy).$$

Proof To begin with, let us point out that the symmetry of the set implies

$$\omega(I_{1 \dots 11}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1 \dots 1}^{n-1}) = \omega(I_{1 \dots 14}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1 \dots 1}^{n-1}). \quad (5)$$

For the same reason if x lies on the $I_{1 \dots 1}^{n-1}$ square's diagonal separating $I_{1 \dots 11}^n$ and $I_{1 \dots 14}^n$ we have

$$\omega(x, I_{1 \dots 11}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1 \dots 1}^{n-1}) = \omega(x, I_{1 \dots 14}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1 \dots 1}^{n-1}). \quad (6)$$

Let \mathbb{H}^- be the half-plane limited by the line containing this diagonal, such that the square $I_{1 \dots 14}^n$ is contained in \mathbb{H}^- . Using (2), the monotony of the harmonic measure, and Harnack's inequalities, one can verify the existence of a constant $c_4 > 0$ such that

$$\omega(x, I_{1 \dots 14}^n, \mathbb{H}^- \setminus I_{1 \dots 1}^{n-1}) \geq c_4, \quad \text{for all } x \in I_{1 \dots 4}^{n-1}. \quad (7)$$

By the maximum principle and (6) we obtain

$$\omega(x, I_{1 \dots 14}^n, \mathbb{H}^- \setminus I_{1 \dots 1}^{n-1}) = \omega(x, I_{1 \dots 14}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1 \dots 1}^{n-1}) - \omega(x, I_{1 \dots 11}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1 \dots 1}^{n-1}), \quad \text{for all } x \in \mathbb{H}^-.$$

Combining with (7)

$$\omega(x, I_{1\dots 14}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1\dots 1}^{n-1}) - \omega(x, I_{1\dots 11}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1\dots 1}^{n-1}) \geq c_4, \quad \text{for all } x \in I_{1\dots 4}^{n-1} \quad (8)$$

and (5),(8) imply that

$$\begin{aligned} & \omega(I_{1\dots 11}^n, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) - \omega(I_{1\dots 14}^n, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) = \\ &= \int_{\mathbb{K} \setminus I_{1\dots 1}^{n-1}} \left(\omega(y, I_{1\dots 14}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1\dots 1}^{n-1}) - \omega(y, I_{1\dots 11}^n, \mathbb{R}^2 \setminus I_{1\dots 1}^{n-1}) \right) \omega(dy, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) \\ &\geq c_4 \omega(I_{1\dots 4}^{n-1}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}). \end{aligned} \quad (9)$$

Finally, using again Harnack's principle and (7) we obtain a constant $c_5 > 0$ not depending on n , verifying

$$\omega(I_{1\dots 4}^{n-1}) \geq c_5 \omega(I_{1\dots 14}^n).$$

Hence, (9) turns into

$$\omega(I_{1\dots 11}^n) - \omega(I_{1\dots 14}^n) \geq c_4 c_5 \omega(I_{1\dots 14}^n)$$

and the lemma is proved. •

Lemma 4.3.7 ([Car85], [MV86]) *Let Ω be a domain containing ∞ and let $A_1 \subset B_1 \subset A_2 \subset B_2 \subset \dots \subset A_n \subset B_n \subset \Omega$ be conformal discs such that the annuli $B_i \setminus A_i$ are contained in Ω , for $1 \leq i \leq n$. If the modules of the annuli are uniformly bounded away from zero and if $\infty \in \Omega \setminus B_n$ then, for all pairs of positive harmonic functions u, v vanishing on $\partial\Omega \setminus A_1$ and for all $x \in \Omega \setminus B_n$ we have*

$$\left| \frac{u(x)}{v(x)} : \frac{u(\infty)}{v(\infty)} - 1 \right| \leq K q^n \quad (10)$$

where $q < 1$ and K are two constants that depend only on the lower bound of the modules of the annuli.

Lemma 4.3.8 *There exists a $N_0 = N_0(\delta, \underline{A}, \overline{A})$ large enough such that for all $n \in \mathbb{N}$ and all squares $I_{i_1\dots i_n}^n$,*

$$\omega(I_{i_1\dots i_n 11\dots 1}^{n+N_0}) > (1 + \frac{\delta}{2}) \omega(I_{i_1\dots i_n 11\dots 4}^{n+N_0}), \quad (11)$$

where δ is the positive constant defined in lemma 4.3.5.

Proof Let us show first the following estimate for $x \in \frac{1+c_0}{2} \tilde{I}_{i_1\dots i_n}^n$:

$$\omega(x, I_{i_1\dots i_n 11\dots 1}^{n+N_0}, c_0 \tilde{I}_{i_1\dots i_n}^n \setminus I_{i_1\dots i_n}^n) \sim \omega(x, I_{i_1\dots i_n 11\dots 1}^{n+N_0}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}). \quad (12a)$$

For $N \in \mathbb{N}$ we choose x such that

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) = \sup \left\{ \omega(y, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) ; y \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \right\} \right\}.$$

Then,

$$\begin{aligned} & \omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) \geq \omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N} c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus I_{i_1 \dots i_n}^n) \\ & \geq \omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) - \int_{\partial \{c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n\}} \omega(y, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) \omega(x, dy, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus I_{i_1 \dots i_n}^n) \\ & \geq \omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) - \left(1 - \omega(x, I_{i_1 \dots i_n}^n, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus I_{i_1 \dots i_n}^n)\right) \omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) \\ & \geq c_1 \omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) \end{aligned}$$

because of (2).

Then (12a) follows on our using again Harnack's inequalities.

We have, of course the same estimate for $I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 4}^{n+N_0}$:

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 4}^{n+N_0} c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus I_{i_1 \dots i_n}^n) \sim \omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 4}^{n+N_0}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}). \quad (12b)$$

To simplify the notation in what follows we will write $\omega_1(x)(\tilde{\omega}_1(x))$ and $\omega_4(x)(\tilde{\omega}_4(x))$ instead of

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N_0}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) \left(\omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 1}^{n+N_0}, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus I_{i_1 \dots i_n}^n) \right)$$

and

$$\omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 4}^{n+N_0}, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}) \left(\omega(x, I_{i_1 \dots i_n 11 \dots 4}^{n+N_0}, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus I_{i_1 \dots i_n}^n) \right)$$

respectively.

By the relation (10) in lemma 4.3.7 for $z \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \right\}$

$$\frac{\omega_1(\infty)}{\omega_4(\infty)} \sim_{q^{N_0}} \frac{\omega_1(z)}{\omega_4(z)} \sim_{q^{N_0}} \frac{\omega_1(y)}{\omega_4(y)}, \quad \text{for all } y \notin \mathbb{K} \cup c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n. \quad (13)$$

From (13) it follows that

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\tilde{\omega}_1(z)}{\tilde{\omega}_4(z)} : \frac{\omega_1(\infty)}{\omega_4(\infty)} - 1 \right| \sim \left| \frac{\tilde{\omega}_1(z)}{\tilde{\omega}_4(z)} : \frac{\omega_1(z)}{\omega_4(z)} - 1 \right| = \frac{\omega_4(z)}{\tilde{\omega}_4(z)} \left| \frac{\tilde{\omega}_1(z)}{\omega_1(z)} - \frac{\tilde{\omega}_4(z)}{\omega_4(z)} \right| \\ & = \frac{\omega_4(z)}{\tilde{\omega}_4(z)} \int_{\partial \{c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n\}} \left| \frac{\omega_4(y)}{\omega_4(z)} - \frac{\omega_1(y)}{\omega_1(z)} \right| \omega(z, dy, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus I_{i_1 \dots i_n}^n) \leq \\ & \leq \frac{1}{c_1} \int_{\partial \{c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n\}} \frac{\omega_4(y)}{\omega_4(z)} \left| \frac{\omega_1(y)}{\omega_1(z)} : \frac{\omega_4(y)}{\omega_4(z)} - 1 \right| \omega(z, dy, c_0 \tilde{I}_{i_1 \dots i_n}^n \setminus I_{i_1 \dots i_n}^n) \leq C q^{N_0}. \quad (14) \end{aligned}$$

If we take $i_1 = \dots = i_n = 1$, lemma 4.3.5 implies $\frac{\omega_1(\infty)}{\omega_4(\infty)} > 1 + \delta$. Then (14) shows that there exists a N_0 large enough such that $\frac{\tilde{\omega}_1(z)}{\tilde{\omega}_4(z)} > 1 + \frac{3}{4}\delta$. On the other hand, $\frac{\tilde{\omega}_1(z)}{\tilde{\omega}_4(z)}$ does not depend on the choice of i_1, \dots, i_n . It follows that $\frac{\omega_1(\infty)}{\omega_4(\infty)} > 1 + \frac{\delta}{2}$ for all the possible choices of i_1, \dots, i_n . •

Lemma 4.3.9 *There exists a $N_1 \in \mathbb{N}$ independent of n and of $i_1 \dots i_n$ such that for all the squares $I_{i_1 \dots i_n}^n$ there is a square $J_m = I_{i_1 \dots i_n \dots i_{n+N_1}}^{n+N_1} \subset I_{i_1 \dots i_n}^n$ of the $(n + N_1)$ th generation such that*

$$\omega(J_m) < \frac{1}{4} \frac{\omega(I_{i_1 \dots i_n}^n)}{4^{N_1}}.$$

(In fact, $\frac{1}{4}$ could be replaced with any constant $\epsilon > 0$.)

Proof Choose a square $I_{i_1 \dots i_n}^n$. According to the preceding lemma there exists an $\alpha < 1$ independent of the choice of i_1, \dots, i_n and a $J_1 = I_{i_1 \dots i_n \dots i_{n+N_0}}^{n+N_0}$ such that

$$\omega(J_1) < \alpha \frac{\omega(I_{i_1 \dots i_n}^n)}{4^{N_0}}.$$

Similarly there exists a $J_2 = I_{i_1 \dots i_n \dots i_{n+2N_0}}^{n+2N_0} \subset J_1$ with

$$\omega(J_2) < \alpha \frac{\omega(J_1)}{4^{N_0}} < \alpha^2 \frac{\omega(I_{i_1 \dots i_n}^n)}{4^{2N_0}}$$

and after k steps, we obtain a square J_k verifying

$$\omega(J_k) < \alpha^k \frac{\omega(I_{i_1 \dots i_n}^n)}{4^{kN_0}}.$$

To finish the proof take $k = m$ such that $\alpha^k < 1/4$ and let $N_1 = kN_0$. •

4.3.3 Proof of Theorem 4.3.1

The theory of large deviations provides a well known technique to prove the inequality between the dimensions of the two measures by using lemma 4.3.9. However we propose here a different path which does not involve Probabilistic tools and is inspired by [Bou87].

We introduce some more notation. For $n \in \mathbb{N}$ we will denote by \mathcal{E}_n the collection of squares $\left\{ I_{i_1 \dots i_n}^n; i_j = 1, \dots, 4, j = 1, \dots, n \right\}$ and for $I \in \mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_{n+s}(I)$ will represent those squares $J \in \mathcal{E}_{n+s}$ that are contained in I .

It can be shown (see for instance lemma 2 of [Bea65]) that if ρ is the Hausdorff dimension of \mathbb{K} , then

$$\rho = \sup \{s > 0; \liminf_{n \rightarrow \infty} 4^n \prod_{i=1}^n a_i^s = \infty\} = \inf \{s > 0; \liminf_{n \rightarrow \infty} 4^n \prod_{i=1}^n a_i^s = 0\}.$$

simply because in order to obtain the Hausdorff dimension of the Cantor set \mathbb{K} it suffices to consider coverings of \mathbb{K} with the squares of construction $I_{i_1 \dots i_n}^n$. However, the ρ -Hausdorff measure of the Cantor sets considered here could be infinite.

It easily follows that for $\epsilon > 0$ there exists a strictly increasing sequence of integers $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ such that

$$4^{n_j} \prod_{i=1}^{n_j} a_i^{\rho+\epsilon} > 4^{n_{j+1}} \prod_{i=1}^{n_{j+1}} a_i^{\rho+\epsilon}. \quad (15)$$

We will also assume that $n_{j+1} - n_j > 2N_1$.

Lemma 4.3.10 *There exists a $\beta < 1$ such that the following inequality holds for $\epsilon > 0$ and $I \in \mathcal{E}_{n_j}$:*

$$\sum_{J \in \mathcal{E}_{n_{j+1}}(I)} \omega(J)^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} \leq \beta^{n_{j+1}-n_j} \omega(I)^{\frac{1}{2}} l(I)^{\frac{\rho+\epsilon}{2}}. \quad (16)$$

where n_j is the sequence corresponding to ϵ given by (15).

Proof Let us start by showing that there is a $\tilde{\beta}$ such that for $I \in \mathcal{E}_n$

$$\sum_{J \in \mathcal{E}_{n+N_1}(I)} \omega(J)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+N_1}{2}} \leq \tilde{\beta} \omega(I)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}. \quad (17)$$

Take $J_m \in \mathcal{E}_{n+N_1}(I)$ to be the square provided by lemma 4.3.9, i.e. a square such that $\omega(J_m) < \frac{1}{4} \frac{\omega(I)}{4^{N_1}}$. We have

$$\omega(J_m)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+N_1}{2}} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{4^{N_1}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \omega(I)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{J \in \mathcal{E}_{n+N_1}(I), J \neq J_m} \omega(J)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+N_1}{2}} \leq \omega(I)^{\frac{1}{2}} (4^{N_1} - 1)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+N_1}{2}}$$

by the Cauchy-Schwarz inequalities. Summing up we get

$$\sum_{J \in \mathcal{E}_{n+N_1}(I)} \omega(J)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+N_1}{2}} \leq \omega(I)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{4^{N_1}} + \left(\frac{4^{N_1}-1}{4^{N_1}}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (18)$$

and we may let $\tilde{\beta} = \frac{1}{2} \frac{1}{4^{N_1}} + \left(\frac{4^{N_1}-1}{4^{N_1}}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$.

Choose $\epsilon > 0$ and let $\{n_j\}$ be a corresponding sequence given by (15). Then by (17)

$$\sum_{J \in \mathcal{E}_{n_{j+1}}(I)} \omega(J)^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} \leq 4^{\frac{n_j}{2}} \tilde{\beta} \left(\prod_{i=1}^{n_j} a_i^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} \right) \sum_{J \in \mathcal{E}_{n_{j+1}-N_1}(I)} \omega(J)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4^{n_{j+1}-N_1}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

We repeat the procedure and we apply the Cauchy-Schwarz inequalities. We then get

$$\sum_{J \in \mathcal{E}_{n_{j+1}}(I)} \omega(J)^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} \leq 4^{\frac{n_j}{2}} \tilde{\beta}^{\frac{n_{j+1}-n_j}{2N_1}} \left(\prod_{i=1}^{n_j} a_i^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} \right) \left(\frac{\omega(I)}{4^{n_j}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

The existence of β is now obvious. For instance, one may take $\beta = \tilde{\beta}^{\frac{1}{2N_1}}$. •

Proof of Theorem 4.3.1 Let $\mathcal{L}_j = \left\{ J \in \mathcal{E}_{n_j} \mid \omega(J) > l(J)^{\rho-\epsilon} \right\}$ and $\mathcal{L}'_j = \mathcal{E}_{n_j} \setminus \mathcal{L}_j$, where $\epsilon > 0$ is to be chosen later and let $\{n_j\}$ be a sequence corresponding to ϵ as above. It is clear that

$$\sum_{J \in \mathcal{L}_j} l(J)^{\rho-\epsilon} < \sum_{J \in \mathcal{L}_j} \omega(J) \leq 1. \quad (19)$$

But, we can also estimate

$$\begin{aligned} \sum_{J \notin \mathcal{L}_j} \omega(J) &= \sum_{J \notin \mathcal{L}_j} \omega(J)^{\frac{1}{2}} \omega(J)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{J \in \mathcal{E}_{n_j}} \omega(J)^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho+\epsilon}{2}-\epsilon} \\ &\leq \prod_{i=1}^{n_j} a_i^{-\epsilon} \beta^{n_j-n_{j-1}} \sum_{J \in \mathcal{E}_{n_{j-1}}} \omega(J)^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho+\epsilon}{2}} \end{aligned}$$

because of (16). By iterating the procedure we get

$$\sum_{J \notin \mathcal{L}_j} \omega(J) \leq \beta^{n_j} \prod_{i=1}^{n_j} a_i^{-\epsilon} \leq \beta^{n_j} \underline{A}^{-\epsilon n_j}.$$

Let $\epsilon > 0$ be such that $\beta < \underline{A}^\epsilon$. It is then immediate from the above that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{J \notin \mathcal{L}_j} \omega(J) = 0. \quad (20)$$

Clearly, (19) and (20) allow us to construct a subset of \mathbb{K} of Hausdorff dimension $< \rho$ but of full harmonic measure and the proof is completed. •

4.3.4 A Counterexample.

We state the following simple result:

Proposition 4.3.11 *For a Cantor set \mathbb{K} as described in the introduction, the harmonic measure ω of its complement is “monodimensional”, i.e. there is a dimension σ (the dimension of the harmonic measure) such that there exist a subset $F \subset \mathbb{K}$ of Hausdorff dimension σ with $\omega(F) = 1$, and for every set $F' \subset \mathbb{K}$ of dimension smaller than σ , $\omega(F') = 0$.*

The proof given below applies to all self-similar Cantor sets and therefore the proposition remains valid even for “general” Cantor sets.

Proof Suppose that the proposition is false. Then, there is a dimension σ and a real number $0 < \alpha < 1$ such that

$$\sup\{\omega(F) ; F \subset \mathbb{K}, \dim(F) \leq \sigma\} = \alpha$$

or equivalently, there exist a dimension σ and a $\gamma > 0$ such that

$$\sup\left\{\inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}[0,1]^2} \omega(x, F, c_0[0,1]^2 \setminus \mathbb{K}) ; F \text{ compact}, F \subset \mathbb{K}, \dim(F) \leq \sigma\right\} = \gamma$$

$$\text{and } \gamma < \inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}[0,1]^2} \omega(x, \mathbb{K}, c_0[0,1]^2 \setminus \mathbb{K}),$$

where c_0 is the constant defined in section 2.

For every real number τ , $0 < \tau < 1$ there is a compact set $F \subset \mathbb{K}$ of Hausdorff dimension σ with

$$\tau\gamma < \inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}[0,1]^2} \omega(x, F, c_0[0,1]^2 \setminus \mathbb{K}) < \frac{1}{\tau}\gamma.$$

Moreover we can find a covering $\mathcal{F} = \{I_j\}_{j \in J}$ of F with squares I_j of the same generation of the construction of \mathbb{K} , satisfying

$$\tau\gamma < \inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}[0,1]^2} \omega(x, \cup_{I \in \mathcal{F}} I, c_0[0,1]^2 \setminus \mathbb{K}) < \frac{1}{\tau}\gamma.$$

There exists at least one $I_j \in \mathcal{F}$ with the following property:

“There is a compact set $F_j \subset I_j \cap \mathbb{K}$ of Hausdorff dimension σ with

$$\inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}I_j} \omega(x, F_j, c_0 I_j \setminus \mathbb{K}) > c\tau\gamma \inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}I_j} \omega(x, \mathbb{K}, c_0 I_j \setminus \mathbb{K})$$

where c is a Harnack constant depending only on \mathbb{K} .”

We say then, that F_j is a γ -subset of I_j .

To prove this claim we first remark the existence of at least one I_j satisfying

$$\inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}[0,1]^2} \omega(x, F_j, c_0[0,1]^2 \setminus \mathbb{K}) > \tau\gamma \inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}[0,1]^2} \omega(x, \mathbb{K} \cap I_j, c_0[0,1]^2 \setminus \mathbb{K})$$

and then proceed with standard arguments, using the Brelot formula.

Recall that all squares of the same generation of the construction of \mathbb{K} are identical, and therefore the preceding property is valid for any square of the generation of I_j , i.e. every such square has a γ -subset. Let $\tilde{\mathcal{F}}$ be the collection of all squares of the same generation with I_j that do not belong to \mathcal{F} , and let S be the union of F with the γ -subsets of the squares in $\tilde{\mathcal{F}}$. Thus S is a subset of \mathbb{K} of Hausdorff dimension σ . By the above it is clear that

$$\inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}[0,1]^2} \omega(x, S, c_0[0,1]^2 \setminus \mathbb{K}) > \tau\gamma + c\tau\gamma \left(\inf_{x \in \frac{1+c_0}{2}[0,1]^2} \omega(x, \mathbb{K}, c_0[0,1]^2 \setminus \mathbb{K}) - \frac{1}{\tau}\gamma \right),$$

which is greater than γ if τ is close enough to one; since γ is taken to be the maximal value of harmonic measure for subsets of \mathbb{K} of Hausdorff dimension equal to σ we have reached a contradiction. The proof is now complete. •

We will now construct a Cantor set \mathbb{K}' as in the introduction, except that here we replace a square J of the k th generation, $k \geq 1$, by four equal squares, J_1, \dots, J_4 whose size depends not only on the generation k but also on the square J ; we still require $\underline{A} \leq \frac{l(J_i)}{l(J)} \leq \bar{A}$ with $0 < \underline{A} \leq \bar{A} < 1/2$. We will show that for an appropriate choice of the sizes of the squares the Hausdorff dimension of \mathbb{K}' will be equal to the dimension of its harmonic measure. The idea of the construction was suggested to us by a remark of A. Ancona. Let us begin with the standard planar Cantor set $\mathbb{K}_{1/4}$ of dimension 1, i.e. a Cantor set as defined in the introduction with $\underline{A} = \bar{A} = 1/4$. Let D be the dimension of its harmonic measure; if F is a compact subset of $\mathbb{K}_{1/4}$ such that $\omega(F) > 1/2$, it follows from Proposition 4.0 that its dimension will be at least D . We may therefore find such a subset F of $\mathbb{K}_{1/4}$ of Hausdorff dimension D . We then construct the desired Cantor set in the following way: In each generation we replace every square J that does not intersect F by squares of size 4^{-M} times the size of J , where M is a fixed integer with $M > 1/D$, and every square J' that intersects F is replaced by four squares of size $1/4$ times the

size of J' . Let \mathbb{K}' be the Cantor set constructed in this way. Observe that $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}_{1/4}$ by construction and that $\dim \mathbb{K}' = D$ because of the choice of M . It is clear (by the monotonicity of the harmonic measure as a function of the domain) that the dimension of the harmonic measure of \mathbb{K}' is also D , and the construction is complete.

We should remark here that the preceding process gives us Cantor sets whose Hausdorff dimension is equal to their harmonic measure dimension for every possible value of the dimension of the harmonic measure of a Cantor set as described in the introduction. Also, a result of [JW88] implies that we cannot have $\dim \omega = 1$ for Cantor sets of this type. It is therefore natural to ask if we can have dimensions arbitrarily close to one. The following proposition answers the question.

Proposition 4.3.12 *For the self-similar Cantor set \mathbb{K}_δ , $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$, as defined in the introduction with $\frac{1}{2} - \delta = \underline{A}$ and $\underline{A} = \overline{A}$, the dimension of the harmonic measure $\dim \omega$ is greater than $1 - C\delta$, for some constant $C > 0$.*

This proposition as well as the proof given below is due to professor A. Ancona (compare with [MV86], pages 15-22, 28).

Proof We will need some more notation. Let \mathbb{K}_n be the n th approximation of \mathbb{K}_δ by squares of the n th generation, let g_n be the Green function of the complement of \mathbb{K}_n and \mathcal{C}_n its critical points. We shall rely on the following formula :

$$\dim \omega = 1 - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{c_n} g_n(c)}{\chi_\mu},$$

where $\chi_\mu = \log(\frac{2}{1-2\delta})$ and the critical points in the sum are counted with their multiplicity.

This formula is a simple variant of the Carleson formula given in [MV86], page 15 (see also [Car85]); here we consider the sum over the critical points of g_n instead of those of the Green's function of the complement of \mathbb{K}_δ .

It remains to prove that the limit in the previous formula is $O(\delta)$ as δ tends to 0.

We extend g_n on \mathbb{K}_n by the value 0 and consider the critical domains of g_n , i.e. any region U which is a connected component of $\{g_n < \beta\}$ for some $\beta > 0$ and with a critical point $c \in \partial U$. Let \mathcal{U} be the collection of all critical domains.

Note that if $U \in \mathcal{U}$ and if $\tau = \max\{g_n(z); z \in \mathcal{C}_n \cap U\}$, the number of critical domains $U' \subset U$ associated to τ is exactly equal to the number of critical points $z \in U$ with $g_n(z) = \tau$ (counted with their multiplicity) plus one.

To each $U \in \mathcal{U}$ we attach a square $I = I_U$ of some stage k of the construction of the Cantor set, $k \leq n$, with the following property:

(PI) We have $I \cap \mathbb{K}_n \subset U$ and if \tilde{I} denotes the “father” of I then there exists a square $I' \subset \tilde{I}$ of the k th generation such that $I' \cap \mathbb{K}_n \cap U = \emptyset$ and I and I' lie on the same side of \tilde{I} .

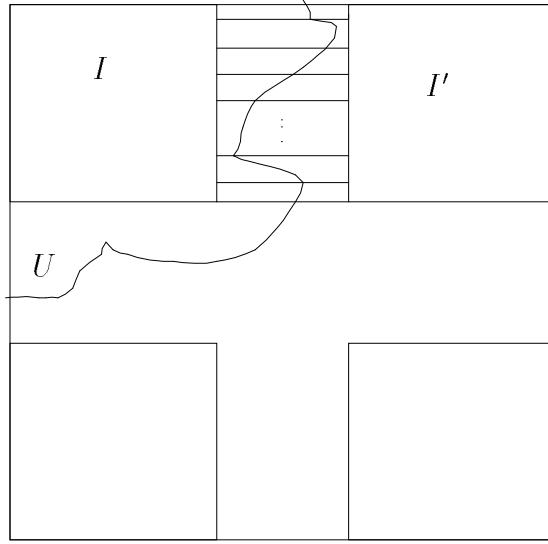


Figure 4.2: The construction of proposition 3

The existence of I_U is easily checked. For instance one may take for \tilde{I} a minimal square such that $\tilde{I} \cap \mathbb{K}_n \cap U^c \neq \emptyset$ and $\tilde{I} \cap \mathbb{K}_n \cap U \neq \emptyset$, and then easily verify the existence an $I \subset \tilde{I}$ with the property (PI).

We now proceed with the following simple algorithm which leads to the construction of a subcollection $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$, (the “nice” domains) and to the choice of some square $c_U \subset I_U$ of the n th generation (the last generation for \mathbb{K}_n), for every $U \in \mathcal{U}_0$.

Each domain $U \in \mathcal{U}$ which is maximal is “nice” and we choose the square c_U arbitrarily in I_U . For $U \in \mathcal{U}$, if the construction has been achieved for all $U' \supset U$, $U \neq U'$ then we decide that $U \notin \mathcal{U}_0$ if there exists $c_{U'} \subset U$ for some $U' \supset U$, $U \neq U'$. Otherwise we say that $U \in \mathcal{U}_0$ and we associate to it some square $c_U \subset I_U$ of the n th generation.

At the end of the procedure every critical domain $U \in \mathcal{U}$ contains exactly one $c_{U'}$ for some U' , $U \subset U'$, and for $U, U' \in \mathcal{U}_0$ we have $I_U = I_{U'}$ if and only if $U = U'$. Hence we have

$$\frac{1}{n} \sum_{c_n} g_n(c) = \frac{1}{n} \left(\sum_{U \in \mathcal{U}_0} g_U - g_{max} \right)$$

where g_U is the value of g_n on ∂U and g_{max} is the maximal critical value of g_n .

If $U \in \mathcal{U}_0$, let $I = I_U$ be the square attached to it, \tilde{I} its “father”, and I' as in (PI) (see fig. 4.2). There are at least $s = [\frac{1}{4\delta}]$ parallel segments, l_1, \dots, l_s joining points of $\mathbb{K}_n \cap I$ with points of $\mathbb{K}_n \cap I'$, the distance between any two segments being $\geq \delta l(I)$. Necessarily, ∂U cuts through all these segments and therefore $\sup\{g_n(t) ; t \in l_i\} \geq g_U$, $1 \leq i \leq s$.

For every $l_i, i = 1, \dots, s$ let z_i^1, z_i^2 be the endpoints of l_i , $z_i^1 \in \mathbb{K}_n \cap I$, $z_i^2 \in \mathbb{K}_n \cap I'$. It is clear that the set $B(z_i^1, \delta l(I)/2) \cap \mathbb{K}_n \cap I$ has capacity $\geq C_0 > 0$ in the domain

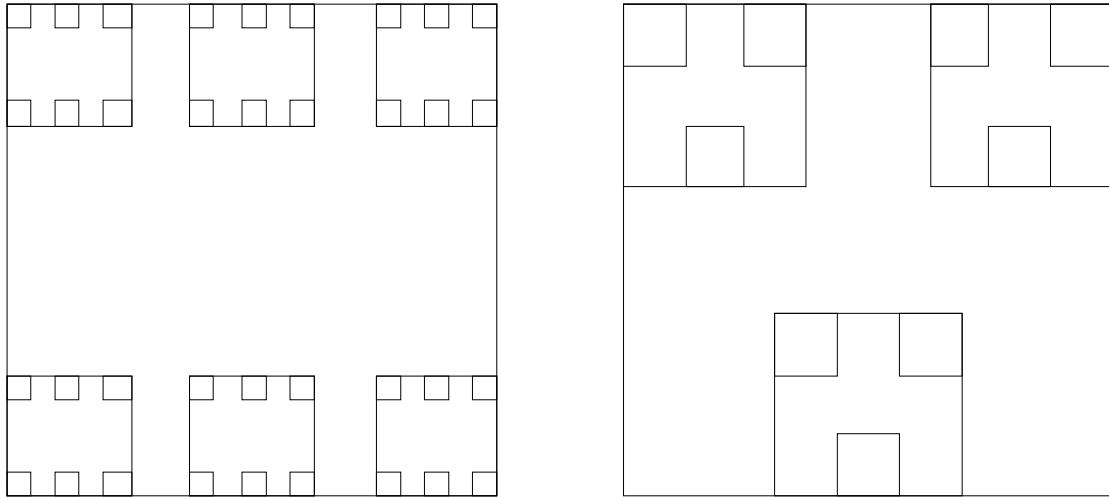


Figure 4.3: Other Cantor type sets verifying $\dim \mathbb{K} > \dim \omega$

$B(z^1, \delta l(I))$, with C_0 independent of $\delta \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. By standard arguments, it follows that

$$g_n(t) \leq C \omega(B(z_i^1, \delta l(I)/2), \mathbb{R}^2 \setminus K_n)$$

on the segment l_i with a constant C indepent of δ .

The above finally yields

$$\frac{1}{4\delta} g_U \leq \sum_i \sup\{g_n(t) ; t \in l_i\} \leq C \omega(I, \mathbb{R}^2 \setminus K_n).$$

Summing up we find

$$\frac{1}{n} \sum_{C_n} g_n(c) \leq \frac{1}{n} \sum_{U \in \mathcal{U}_0} g_U \leq C \delta \frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} \omega(I, \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}_n) \leq C \delta ,$$

where \mathcal{F}_n is the collection of all squares of some stage k , $k \leq n$, of the construction of \mathbb{K}_δ . The proof of the proposition is complete. •

4.3.5 Conclusion - Further remarks.

It is clear that the method we developped in sections 2,3 does not apply only to the Cantor sets described above but also to other Cantor sets, for example those indicated by fig. 4.3. The proof can also be applied to some Cantor sets in higher dimensions.

For a general Cantor set $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^d$, a sufficient condition to conclude that $\dim(\omega) < \rho = \dim(\mathbb{K})$ is the following: if $I_{i_1 \dots i_n}^n$ is a square of the n th generation and if $I_{i_1 \dots 1}^{n+1}, \dots, I_{i_1 \dots s}^{n+1}$

are the squares of the next generation contained in $I_{i_1 \dots i_n}^n$ then there exist $0 < \alpha < 1$, $1 \leq \tau \leq s$, and constants $a_j^n > 0$ such that

$$\omega(I_{i_1 \dots i_n \tau}^{n+1}) < \alpha \frac{\text{diam}(I_{i_1 \dots i_n \tau}^{n+1})^\rho}{\sum_{j=1}^s \text{diam}(I_{i_1 \dots i_n j}^{n+1})^\rho} \omega(I_{i_1 \dots i_n}^n), \quad (*)$$

and

$$\text{diam}(I_{i_1 \dots i_n j}^{n+1}) = a_j^n \text{diam}(I_{i_1 \dots i_n}^n), \quad 2^{-d} < \underline{A} \leq a_j^n \leq \overline{A} < 1, \quad \text{for all } j \in \{1, \dots, s\}$$

where a_j^n depends only on j, n but not on the square $I_{i_1 \dots i_n}^n$ and $\underline{A}, \overline{A}$ are two constants not depending on n . Lemmas 4.3.9 and 4.3.10 can both be applied to prove a formula similar to (16) and the theorem's proof may be completed in the same way.

In general $(*)$ seems hard to check; however under certain assumptions of symmetry on the Cantor set \mathbb{K} one may verify it by proving some lemmas similar to those presented above. Even though the method presented here seems rather general, we haven't been able to get rid of these assumptions of symmetry, and the proof of lemma 4.3.5 strongly depends on them.

Added in proof. It is perhaps interesting to point out that the result of theorem 4.3.1 can also be proved under some weaker assumptions on the size of the squares:

For a sequence $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ as in the introduction we construct a Cantor set in a similar way. We allow the squares of the n th generation $I_{i_1 \dots i_n}^n$ to have sidelengths $l_{i_1 \dots i_n}$ not necessarily equal but we require that $a_n(1 - \epsilon)l_{i_1 \dots i_{n-1}} \leq l_{i_1 \dots i_n} \leq a_n(1 + \epsilon)l_{i_1 \dots i_{n-1}}$, where $\epsilon > 0$ and $l_{i_1 \dots i_{n-1}}$ is the sidelength of the “father” of $I_{i_1 \dots i_n}^n$. For such a Cantor set the dimension of the harmonic measure is smaller than the dimension of the set provided ϵ is small enough (the proof is slightly different).

Acknowledgement. The author would like to express his deep gratitude to Professor A. Ancona for all the help and the encouragement he kindly provided. He is also very grateful to the referee for requesting the counterexample given in Section 4.3.4. Thanks are also due to Y. Heurteaux for his helpful criticism.

4.4 Une généralisation

Nous pouvons affaiblir les hypothèses du théorème 4.3.1, comme indiqué dans la conclusion de la section précédente.

Soit $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant l'hypothèse suivante :

- Il existe \overline{A} , \underline{A} deux constantes, telles que

$$0 < \underline{A} \leq a_j \leq \overline{A} < \frac{1}{2}, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Soit $\delta > 0$, fixé. Considérons l'ensemble de Cantor défini comme dans la section précédente, mais dont les carrés de chaque génération ne sont pas égaux : si $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}$ est un carré construit à la n -ème génération, les “sous-carrés” de $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}$, $\tilde{I}_{i_1 \dots i_n j}$, $j = 1, 2, 3, 4$ sont de longueur $l(\tilde{I}_{i_1 \dots i_n}) = a_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}$, avec $a_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}$ comprise entre $a_{n+1}(1 - \delta)$ et $a_{n+1}(1 + \delta)$.

Soit $\mathbb{K}_\delta(\{a_{i_1 \dots i_n}\})$ l'ensemble de Cantor ainsi construit; *nous dirons que \mathbb{K} est construit à partir de $\{a_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}\}$, $1 \leq i_j \leq 4$, $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}\}$. Si $a_{i_1 \dots i_n}$ ne dépend que de n , ce qui était le cas jusqu'à présent, nous notons simplement $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Par abus de langage nous appellerons suite, toute famille $\{a_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}\}$, $1 \leq i_j \leq 4$, $j = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}\}$. Les résultats suivants ne dépendant que de δ et de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nous noterons $\mathbb{K}_\delta(\{a_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}\}) = \mathbb{K}_\delta$. Soit ω_δ la mesure harmonique de $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}_\delta$.*

Théorème 4.4.1 *Il existe $\delta_0 = \delta_0(\overline{A}, \underline{A})$ tel que si $\delta < \delta_0$ alors $\dim \mathbb{K}_\delta > \dim \omega_\delta$.*

Introduisons des notations : Pour deux carrés \tilde{I} et \tilde{I}' de la construction des ensembles \mathbb{K} et \mathbb{K}' respectivement, construits avec les même algorithme mais pas nécessairement à partir de la même suite, nous écrirons $\tilde{I} \approx \tilde{I}'$ si \tilde{I} et \tilde{I}' ont le même codage dans les ensembles de Cantor \mathbb{K} , \mathbb{K}' .

Si \tilde{I} est un carré de la n -ième génération de la construction d'un ensemble de Cantor \mathbb{K} , nous notons \hat{I} le père de \tilde{I} , c'est-à-dire l'unique carré de la $(n-1)$ -ième génération contenant \tilde{I} . Nous notons aussi $P_k(\tilde{I})$ l'unique carré de la $(n-k)$ -ième génération contenant \tilde{I} . D'après cette notation, $P_1(\tilde{I}) = \hat{I}$. Finalement, si \tilde{I} est un carré de construction de \mathbb{K} , notons $I = \tilde{I} \cap \mathbb{K}$. Clairement, si ω est la mesure harmonique de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$, alors $\omega(I) = \omega(\tilde{I})$.

Le théorème suivant nous servira dans la suite (voir prochain chapitre) pour étudier le comportement de la dimension de la mesure harmonique en fonction de perturbations de la suite, à partir de laquelle l'ensemble est construit. Il est cependant aussi nécessaire pour la démonstration du théorème 4.4.1.

Théorème 4.4.2 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(a_{i_1 \dots i_n i_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq i_j \leq 4}$ deux suites de nombres réels comprises entre deux constantes $0 < \underline{A}, \bar{A} < \frac{1}{2}$ et soit \mathbb{K} , \mathbb{K}' les ensembles de Cantor construits à partir des ces suites. Notons ω et ω' les mesures harmoniques des domaines $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}'$ évaluées à l'infini. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $\delta = \delta(\epsilon, \bar{A}, \underline{A}) > 0$ tel que si $|a_{i_1 \dots i_n} - a_n| < \delta$ pour tout $(i_1 \dots i_n) \in \{1, \dots, 4\}^n$ et tout $n \in \mathbb{N}$ alors, pour tout carré I de la construction de \mathbb{K} nous avons

$$\left| \frac{\omega(I)}{\omega(\tilde{I})} : \frac{\omega'(I')}{\omega'(\tilde{I}')} - 1 \right| < \epsilon \quad (4.11)$$

où I' est l'unique carré de la construction de \mathbb{K}' tel que $I \overset{\text{cod}}{\sim} I'$

Remarque 4.4.3 Sous les hypothèses du théorème 4.4.2 il existe une constante $c_0 > 1$ qui ne dépend que de (\underline{A}, \bar{A}) , telle que pour tout carré \tilde{I} de la construction de \mathbb{K} (ou de \mathbb{K}'), $c_0 \tilde{I} \cap \mathbb{K} = I$ (respectivement $c_0 \tilde{I}' \cap \mathbb{K}' = I'$).

Nous aurons besoin du lemme suivant qui affirme que nous pouvons remplacer les mesures harmoniques ω et ω' par les mesures harmoniques des domaines $\mathbb{R}^2 \setminus (P_k(\tilde{I}) \cap \mathbb{K})$ et $\mathbb{R}^2 \setminus (P_k(\tilde{I}')) \cap \mathbb{K}'$, pour k assez grand, sans que les rapports de la relation (4.11) changent beaucoup. La démonstration de ce lemme existe dans les travaux de N. Makarov et A. Volberg [MV86]. Il s'agit en fait d'un corollaire du théorème 4.2.1.

Lemme 4.4.4 Soit $\epsilon > 0$. Sous les hypothèses du théorème 4.4.2, il existe $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout carré \tilde{I} de la construction de \mathbb{K} si $Q = c_0 P_k(\tilde{I})$, alors

$$\left| \frac{\omega(x, I, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(x, \tilde{I}, Q \setminus \mathbb{K})} : \frac{\omega(I)}{\omega(\tilde{I})} - 1 \right| < \epsilon \text{ pour tout } x \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I}). \quad (4.12)$$

La constante k ne dépend que de \underline{A}, \bar{A} et de ϵ . Le résultat s'applique également à l'ensemble de Cantor \mathbb{K}' .

Démonstration D'après le théorème 4.2.1, nous avons que si $k = k(\bar{A}, \underline{A})$ est assez grand (tel que $Cq^k < \epsilon$, où C, q sont les constantes données par le théorème), alors

$$\left| \frac{\omega(x, I)}{\omega(x, \tilde{I})} : \frac{\omega(y, I)}{\omega(y, \tilde{I})} - 1 \right| < \epsilon, \text{ pour } x, y \notin \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I}) \quad (4.13)$$

Notons $A = \frac{\omega(I)}{\omega(\tilde{I})}$. Par la formule (2.5), pour $x \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I})$

$$\omega(x, I, Q \setminus \mathbb{K}) = \omega(x, I) - \int_{\partial Q} \omega(z, I) \omega(x, dz, Q \setminus \mathbb{K})$$

Or, par l'équation (4.13),

$$A\omega(x, \widehat{I}) - \epsilon A\omega(x, \widehat{I}) \leq \omega(x, I) \leq A\omega(x, \widehat{I}) + \epsilon A\omega(x, \widehat{I}).$$

En utilisant encore la formule (2.5) nous obtenons

$$\begin{aligned} \omega(x, I, Q \setminus \mathbb{K}) &\leq A\omega(x, \widehat{I}) + \epsilon A\omega(x, \widehat{I}) - \int_{\partial Q} (A\omega(z, \widehat{I}) - \epsilon A\omega(z, \widehat{I})) \omega(x, dz, Q \setminus \mathbb{K}) \\ &= A\omega(x, \widehat{I}) - \int_{\partial Q} A\omega(z, \widehat{I}) \omega(x, dz, Q \setminus \mathbb{K}) + \\ &\quad + \epsilon \left(A\omega(x, \widehat{I}) + \int_{\partial Q} A\omega(z, \widehat{I}) \omega(x, dz, Q \setminus \mathbb{K}) \right) \\ &= A\omega(x, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K}) + \epsilon \left(A\omega(x, \widehat{I}) + \int_{\partial Q} A\omega(z, \widehat{I}) \omega(x, dz, Q \setminus \mathbb{K}) \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\omega(x, I, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(x, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K})} \leq A + \epsilon A \frac{\omega(x, \widehat{I}) + \int_{\partial Q} \omega(z, \widehat{I}) \omega(x, dz, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(x, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K})} \quad (4.15)$$

Il suffit maintenant de démontrer que $\frac{\omega(x, \widehat{I}) + \int_{\partial Q} \omega(z, \widehat{I}) \omega(x, dz, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(x, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K})}$ est majoré par une constante. Par la formule (2.5), si on choisit $x_0 \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I})$ tel que $\omega(x_0, \widehat{I}) = \max \left\{ \omega(x, \widehat{I}) ; x \notin \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I}) \right\}$, nous avons

$$\begin{aligned} \omega(x_0, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K}) &= \omega(x_0, \widehat{I}) - \int_{\partial Q} \omega(z, \widehat{I}) \omega(x_0, dz, Q \setminus \mathbb{K}) \\ &\geq \omega(x_0, \widehat{I}) - \int_{\partial Q} \omega(x_0, \widehat{I}) \omega(x_0, dz, Q \setminus \mathbb{K}) \\ &= \omega(x_0, \widehat{I})(1 - \omega(x_0, \partial Q, Q \setminus \mathbb{K})) \end{aligned}$$

Or, il a été démontré dans la preuve du lemme 4.3.3, qu'il existe une constante $c = c(\underline{A})$ telle que $(1 - \omega(x_0, \partial Q, Q \setminus \mathbb{K})) \geq c$. En utilisant le principe de Harnack, nous en déduisons qu'il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de $\underline{A}, \overline{A}$ telle que

$$1 - \omega(x, \partial Q, Q \setminus \mathbb{K}) \geq c, \text{ pour tout } x \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I}).$$

Il s'ensuit que $\frac{\omega(x, \widehat{I}) + \int_{\partial Q} \omega(z, \widehat{I}) \omega(x, dz, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(x, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K})} \leq 2c$ et donc, par la relation (4.15),

$$\frac{\omega(x, I, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(x, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K})} \leq A(1 + 2c\epsilon) \quad (4.16)$$

Or, $A = \frac{\omega(\infty, I)}{\omega(\infty, \widehat{I})}$; en appliquant (4.13) nous obtenons

$$\frac{\omega(x, I, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(x, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K})} : \frac{\omega(I)}{\omega(\widehat{I})} - 1 < 2c\epsilon, \text{ pour tout } x \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I}).$$

L'inégalité opposée s'obtient de la même façon. •

Nous pouvons maintenant procéder à la démonstration du théorème 4.4.2.

Démonstration du théorème 4.4.2 Fixons $\epsilon > 0$. Fixons \tilde{I} un carré de la construction de l'ensemble de Cantor \mathbb{K} et \tilde{I}' le carré de la construction de \mathbb{K}' qui a le même codage que \tilde{I} , $\tilde{I} \stackrel{\text{cod}}{\approx} \tilde{I}'$. Soit $k \in \mathbb{N}$ donné par le lemme 4.4.4 tel que la relation (4.12) soit satisfaite pour I et I' . La constante c_0 donnée par la remarque 4.4.3 est commune aux ensembles \mathbb{K} et \mathbb{K}' , puisque elle ne dépend que de $\overline{A}, \underline{A}$. Notons toujours $Q = c_0 P_k(\tilde{I})$. En effectuant une translation et une dilatation de l'ensemble de Cantor \mathbb{K}' nous pouvons supposer que $c_0 P_k(\tilde{I}') = Q$. Notons $\tilde{\mathbb{K}'}$ l'image de \mathbb{K}' par cette fonction affine.

Or, la mesure harmonique dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}'$ de tout carré $I' \subset \mathbb{K}'$, évaluée à l'infini, est invariante par translations et dilatations de l'ensemble de Cantor \mathbb{K}' . Il suffit, donc, de comparer $\frac{\omega(\infty, I)}{\omega(\infty, \widehat{I})}$ à $\frac{\tilde{\omega}'(\infty, I')}{\tilde{\omega}'(\infty, \widehat{I}')} \quad \text{, où } \tilde{\omega}' \text{ est la mesure harmonique du complémentaire de } \tilde{\mathbb{K}'}$.

Afin d'alleger, nous abandonnons la notation $\tilde{\omega}'$ et $\tilde{\mathbb{K}'}$ en faveur de la notation ω' et \mathbb{K}' . D'après le lemme 4.4.4, il nous suffit de comparer $\frac{\omega(x, I, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(x, \widehat{I}, Q \setminus \mathbb{K})}$ et $\frac{\omega(x, I', Q \setminus \mathbb{K}')}{\omega(x, \widehat{I}', Q \setminus \mathbb{K}')}$.

Notons, pour $J \subset \mathbb{K} \cap Q$, $J' \subset \mathbb{K}' \cap Q$ et $0 < s < 1$

$$\begin{aligned} \Omega_s(J) &= \{x \in Q \setminus \mathbb{K} \text{ tel que } \omega(x, J, Q \setminus \mathbb{K}) > 1 - s\} \\ \Omega'_s(J') &= \{x \in Q \setminus \mathbb{K}' \text{ tel que } \omega(x, J', Q \setminus \mathbb{K}') > 1 - s\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Nous montrons qu'il existe une fonction $\eta > 0$ qui ne dépend que de $\underline{A}, \overline{A}$, telle que

$$\text{dist}(J, \partial \Omega_s(J)) > \eta(s)l(J) \text{ et } \text{dist}(J', \partial \Omega'_s(J')) > \eta(s)l(J'), \tag{4.18}$$

pour tout carré J de la construction de \mathbb{K} avec $J \subset \mathbb{K} \cap Q$ et tout carré J' de la construction de \mathbb{K}' avec $J' \subset \mathbb{K}' \cap Q$. Ceci résulte du lemme suivant dont la preuve est donnée à la fin de la démonstration du théorème.

Lemme 4.4.5 Posons

$$\begin{aligned} U_s(J) &= \left\{ x \in c_0 \tilde{J} \setminus \mathbb{K} \text{ tel que } \omega(x, J, c_0 \tilde{J} \setminus \mathbb{K}) > 1 - s \right\} \\ U'_s(J') &= \left\{ x \in c_0 \tilde{J}' \setminus \mathbb{K}' \text{ tel que } \omega(x, J', c_0 \tilde{J}' \setminus \mathbb{K}') > 1 - s \right\} \end{aligned}$$

Il existe une fonction $\eta > 0$ croissante ne dépendant que de $\underline{A}, \overline{A}$, telle que

$$\begin{aligned} \text{dist}(J, \partial U_s(J)) &> \eta(s)l(J) \\ \text{dist}(J', \partial U'_s(J')) &> \eta(s)l(J') \end{aligned} \quad (4.19)$$

La mesure harmonique étant fonction croissante du domaine (théorème 2.1.15), nous obtenons que $U_s(J) \subset \Omega_s(J)$ et $U'_s(J') \subset \Omega'_s(J')$, et (4.18) est vérifiée.

Soit $s > 0$, à préciser ultérieurement. Nous pouvons donc choisir $\delta = \delta(s, k) > 0$ tel que si $|a_{i_1 \dots i_n} - a_n| < \delta$ pour tout $i_j = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $J \subset U'_s(J')$ et $J' \subset U_s(J)$ pour tout carré J de la construction de \mathbb{K} de la même génération que I avec $J \subset Q$, J' étant le carré de la construction de \mathbb{K}' tel que $J' \stackrel{\text{cod}}{\sim} J$. De plus, pour δ assez petit, par exemple $\delta < \frac{\eta(s)}{10 \times 2^k}$, nous avons

$$\begin{aligned} \text{dist}(J, \partial U'_s(J')) &> \frac{\eta(s)}{5}l(J) \\ \text{dist}(J', \partial U_s(J)) &> \frac{\eta(s)}{5}l(J') \end{aligned} \quad (4.20)$$

Posons

$$\tilde{Q} = Q \setminus \bigcup \left\{ U_s(J) ; J \text{ carré de la construction de } \mathbb{K} \text{ de la même génération que } I \right\}.$$

A l'aide du lemme 4.3.3 nous obtenons qu'il existe une constante $c_2 > 0$ ne dépendant que de $\underline{A}, \overline{A}$ telle que $\omega(x, J, c_0 J) \geq c$ et $\omega(x, J', c_0 J') \geq c_2$, pour $x \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} J$. Par le principe de Harnack il existe une constante $c_3 > 0$ telle que pour tout carré J (resp. J') de la construction de \mathbb{K} (resp. \mathbb{K}') de la même génération que I , avec $J \cup J' \subset Q$, nous ayons :

$$\min \{ \omega(x, J, Q \setminus \mathbb{K}), \omega(x, J', Q \setminus \mathbb{K}') \} > c_3, \quad \forall x \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I}). \quad (4.21)$$

Or, $|\omega(\zeta, J, Q \setminus \mathbb{K}) - \omega(\zeta, J', Q \setminus \mathbb{K}')| < s$, pour tout $\zeta \in \partial \tilde{Q}$. Prennons $s > 0$ tel que $\frac{s}{c_3} < \epsilon^2/10$. Nous obtenons que pour tous les carrés J et J' de la même génération que I , avec $J \stackrel{\text{cod}}{\sim} J' \subset Q$

$$\left| \frac{\omega(\zeta, J, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(\zeta, J', Q \setminus \mathbb{K}')} - 1 \right| < \epsilon^2/10, \quad \forall \zeta \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I}). \quad (4.22)$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\omega(\zeta, I, Q \setminus \mathbb{K})}{\omega(\zeta, \tilde{I}, Q \setminus \mathbb{K})} : \frac{\omega(\zeta, I', Q \setminus \mathbb{K}')}{\omega(\zeta, \tilde{I}', Q \setminus \mathbb{K}')} - 1 \right| < \epsilon, \quad \forall \zeta \in \partial \left\{ \frac{1+c_0}{2} \right\} P_k(\tilde{I}) \quad (4.23)$$

Le lemme 4.4.4 achève la démonstration du théorème. •

Démonstration du lemme 4.4.5 En dilatant le carré \tilde{J} nous pouvons supposer que $c_0\tilde{J} = [0, 1]^2 = Q_0$ (de même pour \tilde{J}'). Nous allons utiliser l'affirmation suivante qui ressemble au principe de Harnack aux anneaux (théorème 4.2.1) :

Affirmation : Soit $Q_1 \subset Q_2 \subset Q_3 \subset \dots \subset Q_n$ des carrés tels que les modules des anneaux conformes $Q_j \setminus Q_{j-1}$ soient uniformément minorés par $1/c$ et majorés par $c > 1$. Soit $S \subset \alpha Q_1$ l'intersection d'un ensemble de Cantor comme ci-dessus avec Q_1 , où α est une constante, $0 < \alpha < 1$. Alors il existe deux constantes $C > 0$ et $\delta > 0$ qui ne dépendent que de c de \underline{A} et de \overline{A} et telles que pour tout $x \in \{\frac{1+\alpha}{2}\} Q_1$ nous ayons :

$$\omega(x, S, Q_n \setminus S) > 1 - C \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\delta}{k}\right) \quad (4.24)$$

Admettons l'affirmation pour l'instant. Soit $\tilde{J}_n \subset \tilde{J}$ un carré tel que $P_n(\tilde{J}_n) = \tilde{J}$. Les carrés $Q_1 = c_0 P_1(\tilde{J}_n) \subset Q_2 = c_0 P_2(\tilde{J}_n) \subset \dots \subset Q_n = c_0 P_n(\tilde{J}_n) = Q_0$ satisfont aux conditions de l'affirmation, car les modules des anneaux $Q_j \setminus Q_{j-1}$ sont uniformément minorés par $1/c$ et majorés par c , la constante $c > 0$ ne dépendant que de $\underline{A}, \overline{A}$, pour tout $j = 1, \dots, n$, par construction. Donc, il existe un $\delta = \delta(c) > 0$ et une constante C telles que $\omega(x, J_n, Q_n \setminus J_n) > 1 - C \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\delta}{k}\right)$. Nous en déduisons à l'aide du lemme 2.1.15 que, pour tout $x \in \frac{c_0+1}{2} J_n$

$$\omega(x, J, Q_0 \setminus J) \geq \omega(x, J_n, Q_0 \setminus J_n) \geq 1 - C \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\delta}{k}\right) \quad (4.25)$$

Le carré J_n a été choisi arbitrairement, donc la dernière équation peut se formuler de la manière suivante :

Si $\text{dist}(x, J) < \underline{A}^n/2$ alors $\omega(x, J, Q_0 \setminus J) \geq 1 - C \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\delta}{k}\right)$. Il suffit de choisir $n = n(\underline{A}, \overline{A}, \epsilon)$ tel que $C \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\delta}{k}\right) < \epsilon$.

Montrons maintenant l'affirmation : nous pouvons supposer $Q_1 = [0, 1]^2$. Remarquons dans un premier temps qu'il existe une constante $c_4 = c_4(\underline{A}, \overline{A})$ telle que pour $x \in \partial \{\frac{1+\alpha}{2}\} Q_j$ nous ayons $\omega(x, S, Q_j \setminus S) \geq c_4 \frac{1}{\log(\text{diam} Q_j)}$. Pour ce voir, il suffit de reprendre la preuve du lemme 4.3.3, avec la fonction de Green du carré Q_j .

Soient ω_j les mesures harmoniques des domaines $Q_j \setminus S$, $j = 1, \dots, n$. Fixons $x_0 \in \partial \{c_0 \tilde{J}_n\}$. Nous obtenons à l'aide de (2.5),

$$\begin{aligned} \omega_{j-1}(x_0, S) &= \omega_j(x_0, S) - \int_{\partial Q_{j-1}} \omega_j(z, S) \omega_j(x_0, dz) \\ &\leq \omega_j(x_0, S) - c_4 \frac{1}{\log(\text{diam} Q_j)} \omega_{j-1}(x_0, \partial Q_{j-1}) \end{aligned}$$

Donc, $\omega_{j-1}(x_0, \partial Q_{j-1})(1 - c_4 \log^{-1}(\text{diam } Q_j)) \geq \omega_j(x_0, \partial Q_j)$. Il suffit de poser $\delta = c_4$ et $C = \max \{\omega_1(x, S) ; x \in \{\frac{1+\alpha}{2}\} Q_1\}$ pour compléter la preuve. •

Ce théorème est le clef pour la démonstration du théorème 4.4.1. Il permet, en effet de démontrer que la preuve du théorème 4.3.1 peut s'appliquer aux ensembles de Cantor introduits, à condition que les rapports de construction dans chaque génération ne varient pas beaucoup d'un carré à l'autre. Nous donnons ainsi seulement les modifications nécessaires :

Démonstration du théorème 4.4.1 Pour deux suites $\{a_{i_1 i_2 \dots i_n}, i_j = 1, 2, 3, 4, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}\}$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $|a_n - a_{i_1 i_2 \dots i_n}| < \delta$ pour tout $i_j, n \in \mathbb{N}$ soient \mathbb{K}_δ l'ensemble de Cantor construit à partir de $(a_{i_1 i_2 \dots i_n})$ et \mathbb{K} celui construit à partir de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons ω_δ et ω les mesures harmoniques des domaines $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}_\delta$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ respectivement. Notons \mathcal{F}_n la n -ième génération de carrés de la construction de \mathbb{K} et \mathcal{F}'_n la n -ième génération de carrés de la construction de \mathbb{K}_δ . Soient, finalement, $\rho = \dim \mathbb{K}$ et $\rho' = \dim \mathbb{K}_\delta$.

Il suffit de montrer un lemme analogue au lemme 4.3.10; notamment, nous montrerons l'existence d'une constante $0 < \alpha < 1$ telle que pour tout $r > 0$ il existe une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ telle que

$$\alpha^{-n_k} \sum_{J' \in \mathcal{F}'_{n_k}} \omega_\delta(J')^{\frac{1}{2}} l(J')^{\frac{\rho'+r}{2}} < 1.$$

Il est facile de voir qu'il existe une fonction croissante $\psi > 0$, telle que $|\dim \mathbb{K}_\delta - \dim \mathbb{K}| < \psi(\delta)$, avec $\lim_{\delta \rightarrow 0} \psi(\delta) = 0$.

Par le lemme 4.3.10 il existe une constante $0 < \beta < 1$ telle que pour tout $r > 0$ il existe une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ telle que $\beta^{-n} \sum_{J \in \mathcal{F}_{n_k}} \omega_\delta(J)^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho+r}{2}} < 1$.

Or, le théorème 4.4.2 affirme que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $J \in \mathcal{F}_n, J' \in \mathcal{F}'_n$ nous ayons $\omega_\delta(J') < (1 + \epsilon)^n \omega(J)$. D'autre part, par construction $l(J') < (1 + \delta)^n l(J)$. Si nous choisissons $\delta > 0$ assez petit pour avoir $\frac{2}{1 + \beta} > \frac{(1 + \delta)(1 + \epsilon)}{\underline{A}^{\psi(\delta)}}$ et en posant $\alpha = \frac{2\beta}{1 + \beta}$ nous aurons (pour une suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} = (n_k)_{k \in \mathbb{N}}(r)$ donnée par le lemme 4.3.10):

$$\begin{aligned} \sum_{J' \in \mathcal{F}'_{n_k}} \omega_\delta(J')^{\frac{1}{2}} l(J')^{\frac{\rho'+r}{2}} &\leq \underline{A}^{-\psi(\delta)n_k} \sum_{J' \in \mathcal{F}'_{n_k}} \omega_\delta(J')^{\frac{1}{2}} l(J')^{\frac{\rho+r}{2}} \\ &\leq \underline{A}^{-\psi(\delta)n_k} (1 + \epsilon)^{n_k} (1 + \delta)^{n_k} \sum_{J \in \mathcal{F}_{n_k}} \omega_\delta(J)^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho+r}{2}} \\ &\leq \left(\frac{2\beta}{1 + \beta} \right)^{n_k} = \alpha^{n_k} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Posons $\Delta_k^1 = \{J' \in \mathcal{F}'_{n_k} ; \omega_\delta(J') > l(J')^{\rho'-r}\}$ et $\Delta_k^2 = \{J' \in \mathcal{F}'_{n_k} ; \omega_\delta(J') \leq l(J')^{\rho'-r}\}$.

Il est clair que $\sum_{J' \in \Delta_k^1} l(J')^{\rho'-r} \leq 1$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{J' \in \Delta_k^2} \omega_\delta(J') &\leq \sum_{J' \in \Delta_k^2} \omega_\delta(J')^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho'-r}{2}} \\ &\leq \underline{A}^{-rn_k} \sum_{J' \in \Delta_k^2} \omega_\delta(J')^{\frac{1}{2}} l(J)^{\frac{\rho'+r}{2}} \leq (\underline{A}^{-r} \alpha)^{n_k} \end{aligned}$$

Si nous choisissons r assez petit pour que $(\underline{A}^{-r} \alpha) < 1$ nous aurons que la mesure harmonique ω_δ de $\bigcup\{J' ; J' \in \Delta_k^2\}$ converge vers 0, quand $k \rightarrow \infty$.

Il est facile d'en déduire que la mesure ω_δ est alors portée par un ensemble de dimension inférieure à $\rho' - r$ ce qui termine la preuve. •

Chapitre 5

Comparaisons des dimensions de deux mesures

La question qui a donné naissance à ce chapitre a été la suivante : *Est-il vrai que la dimension de la mesure harmonique du complémentaire d'un ensemble de Cantor construit à partir d'une suite variable $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (introduite dans le chapitre précédent) est une fonction continue de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par rapport à la “distance” $\text{dist}((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - a'_n|$?*

Nous donnons une réponse partielle à cette question et nous cherchons des conditions suffisantes pour que les dimensions de deux mesures soient proches.

5.1 Introduction, présentation du cadre

Les notions et les théorèmes introduits dans cette section sont classiques et peuvent être trouvés, par exemple, dans le livre de Billingsley [Bil65] et la monographie de Zinsmeister [Zin97]. Nous définissons la notion de l'entropie, les mesures de Bernoulli et l'opérateur décalage et nous en donnons quelques exemples caractéristiques. Ensuite nous rappelons les théorèmes de Billingsley et de Shannon-McMillan. Nous illustrons le lien entre ces notions et la dimension des mesures à l'aide d'exemples.

5.1.1 Entropie, dimension informatique et mesures de Bernoulli

Nous introduisons la notion de l'entropie d'une partition et d'une mesure.

Définition 5.1.1 Soit μ une mesure sur un espace \mathbb{X} . Soit \mathcal{F} une partition finie de \mathbb{X} . On appelle entropie de \mathcal{F} par rapport à la mesure μ la quantité

$$h_\mu(\mathcal{F}) = - \sum_{F \in \mathcal{F}} \mu(F) \log \mu(F) \tag{5.1}$$

avec la convention $0 \log 0 = 0$.

Rappelons qu'une filtration $(\mathcal{R}_i)_{i \in \mathbb{I}}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, dans un espace mesurable $(\mathbb{X}, \mathcal{B})$ est un ensemble de σ -algèbres contenant des ensembles de \mathcal{B} telles que si $i > s$ alors $\mathcal{R}_s \subset \mathcal{R}_i$. Considérons une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un espace de probabilité \mathbb{X} . Supposons que chaque tribu \mathcal{R}_m soit engendrée par une partition finie \mathcal{F}_n de \mathbb{X} . Imposons également la condition suivante : pour tout $I \in \mathcal{F}_{n-1}$ l'ensemble des éléments de \mathcal{F}_n qui intersectent I forme une partition de I dont le cardinal est constant égale à $N \in \mathbb{N}$. Nous appelons un alphabet tout ensemble fini du type $\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}$.

Un codage de $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une énumération des ensembles $I \in \bigcup \{\mathcal{F}_n ; n \in \mathbb{N}\}$ telle que :

- chaque $I \in \mathcal{F}_n$ s'écrit sous la forme $I = I_{i_1 \dots i_n}$ avec $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, N\}$, c'est-à-dire I correspond à un "mot" de l'alphabet $\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}$ et
- si $I = I_{i_1 \dots i_n}$ est un élément de \mathcal{F}_n alors $I \subset I_{i_1 \dots i_{n-1}}$ (avec $I_{i_1 \dots i_{n-1}} \in \mathcal{F}_{n-1}$).

Exemple 5.1.2 Un exemple classique est l'intervalle $[0, 1[$ muni de la grille des intervalles dyadiques. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \left\{ \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[; k = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \right\}$. Le codage se définit de la façon naturelle suivant : $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ et nous posons $I_0 = [0, 1/2[$, $I_1 = [1/2, 1[$. Si $I_{i_1 \dots i_n} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right[\in \mathcal{R}_n$ alors nous posons $I_{i_1 \dots i_n 0} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right[$ et $I_{i_1 \dots i_n 1} = \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n} \right[$. •

Définition 5.1.3 Soit μ une mesure sur l'espace $(\mathbb{X}, \mathcal{B}, (\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}})$. On appelle entropie minimale (ou dimension informatique minimale) de la mesure μ par rapport à \mathcal{F}_n la quantité :

$$h_*(\mu) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} \mu(I) |\log \mu(I)| \quad (5.2)$$

et entropie maximale (ou dimension informatique maximale) la quantité

$$h^*(\mu) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{I \in \mathcal{F}_n} \mu(I) |\log \mu(I)| \quad (5.3)$$

Quand $h_*(\mu) = h^*(\mu)$ on dit que $h(\mu) = h_*(\mu)$ est l'entropie (ou la dimension informatique) de la mesure μ par rapport à \mathcal{F}_n .

Dorénavant nous identifions \mathbb{X} avec $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, les partitions finies \mathcal{F}_n pour $n \in \mathbb{N}$ étant égales à \mathcal{A}^n . Pour $I = I_{i_1 \dots i_n} \in \mathcal{F}_n$ et $J = I_{j_1 \dots j_k} \in \mathcal{F}_k$ nous notons $IJ = I_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_k}$. Notons finalement \mathcal{B} la tribu engendré par $\mathcal{F}_\infty = \bigcup \{\mathcal{F}_n ; n \in \mathbb{N}\}$.

Définition 5.1.4 Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{B}, \beta)$ un espace de probabilité avec $\mathbb{X} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ pour un alphabet \mathcal{A} , comme convenu.

1. La mesure β est dite mesure de Bernoulli si

$$\text{pour tout } I, J \in \bigcup \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}, \beta(IJ) = \beta(I)\beta(J) \quad (5.4)$$

Il suffit donc pour définir une mesure de Bernoulli de donner la répartition de masses sur \mathcal{A}^1 .

2. La mesure β est dite quasi-Bernoulli s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\text{pour tout } I, J \in \bigcup \{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}, \frac{1}{c}\beta(I)\beta(J) \leq \beta(IJ) \leq c\beta(I)\beta(J) \quad (5.5)$$

Les mesures de Bernoulli servent d'exemples et de mesures de contrôle car leur entropies et leurs dimensions sont faciles à calculer. Un exemple de calcul sera donné dans la suite. Le théorème très général suivant, dû à Carathéodory (cf. [Mat95]), théorème 4.1), nous permet de construire des telles mesures. Il existe bien entendu d'autres façons pour le faire.

Théorème 5.1.5 (Carathéodory) Soient \mathbb{X} un espace métrique, \mathcal{F} une famille de sous-ensembles de \mathbb{X} et η une fonction positive sur \mathcal{F} . Nous supposons que

- Pour tout $\delta > 0$ il existe $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ tels que $\mathbb{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ et $\text{diam}E_i < \delta$,
- Pour tout $\delta > 0$ il existe $E \in \mathcal{F}$ tel que $\eta(E) < \delta$ et $\text{diam}E < \delta$

Pour $\delta > 0$ et $A \subset \mathbb{X}$ posons

$$\psi_{\delta}(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \eta(E_i), A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \text{diam}E_i < \delta, \eta(E_i) < \delta \right\} \quad (5.6)$$

Définissons $\psi = \psi(\mathcal{F}, \eta)$ de la façon suivante : $\psi(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \psi_{\delta}(A)$. Alors la fonction ψ est une mesure de Borel et si les éléments de \mathcal{F} sont des ensembles boréliens, alors ψ est une mesure régulière.

5.1.2 Opérateur de décalage, théorème de Shannon-McMillan

Les notions d'invariance et d'ergodicité d'une mesure caractérisent la relation entre la mesure d'un espace de probabilité et une application du même espace.

Définition 5.1.6 Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité. On dit que l'opérateur $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est ergodique pour μ (ou que μ est ergodique pour l'opérateur) si

$$F \in \mathcal{R} \text{ et } T^{-1}(F) = F \implies \mu(F) = 0 \text{ ou } 1 \quad (5.7)$$

Introduisons à présent la notion d'invariance.

Définition 5.1.7 Soient $(\mathbb{X}, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et une application $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$. On dit que la mesure μ est invariante par l'application T si

$$\mu(T^{-1}(F)) = \mu(F) \quad \text{pour tout } F \in \mathcal{B} \quad (5.8)$$

Soit $\mathcal{A} = \{1, \dots, N\}$ un alphabet. L'opérateur décalage (ou shift) est l'application $T : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ définie de la façon suivante : si $x = i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1} \dots \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors $T(x) = i_2 \dots i_n i_{n+1} \dots$. Avec la notation précédente le décalage est mesurable par rapport à \mathcal{B} .

Dans toute la suite les éléments x de $\mathbb{X} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ seront notés $x = x_{i_1 i_2 \dots}$ avec $i_1, i_2, \dots \in \mathcal{A}$. Par $I_{i_1 \dots i_n}$ nous noterons le cylindre $\{x = x_{j_1 j_2 \dots} \in \mathbb{X}; j_1 = i_1, \dots, j_n = i_n\}$. La filtration $(\mathcal{R}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera comme convenu celle engendrée par les familles de cylindres $\mathcal{A}^n = \{I_{i_1 \dots i_n}, i_j \in \mathcal{A}, j = 1, \dots, n\}$.

Avec cette notation

$$h_*(\mu) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h_\mu(\mathcal{A}^n) \quad \text{et} \quad h^*(\mu) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h_\mu(\mathcal{A}^n) \quad (5.9)$$

La connaissance du comportement de $h_\mu(\mathcal{A}^n)$ est donc suffisante pour le calcul des dimensions informatiques. La formule suivante, due à Khinchine, permet d'évaluer l'entropie d'une mesure à l'aide des entropies “intermédiaires”.

Proposition 5.1.8 (Khinchine) Pour $n, k \in \mathbb{N}$

$$h_\mu(\mathcal{A}^{n+k}) = h_\mu(\mathcal{A}^n) - \sum_{J \in \mathcal{A}^n} \sum_{I \in \mathcal{A}^k} \log \left(\frac{\mu(JI)}{\mu(J)} \right) \mu(JI) \quad (5.10)$$

Cette version du théorème de Khinchine est très facile à montrer; il suffit de remarquer que la double somme est égale à $h_\mu(\mathcal{A}^{n+k}) - h_\mu(\mathcal{A}^n)$. Cependant elle est d'une grande utilité dans plusieurs situations.

Le théorème que nous présentons maintenant est un résultat classique de la théorie ergodique.

Théorème 5.1.9 (Shannon-McMillan) Soit \mathcal{A} un alphabet et soit μ une mesure définie sur $(\mathbb{X} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B})$. Notons $T : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ l'opérateur décalage et $I_{i_1 \dots i_n}(x)$ l'élément de \mathcal{A}^n contenant x . Si μ est invariante et ergodique pour T , alors pour μ -presque tout $x \in \mathbb{X}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \mu(I_{i_1 \dots i_n}(x))}{n} = h(\mu) \quad (5.11)$$

Le théorème de Shannon-McMillan peut être vu comme une version ergodique de la loi de grands nombres. Nous l'illustrons par un exemple classique.

Exemple 5.1.10 Soit $\mathbb{X} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Nous pouvons regarder \mathbb{X} comme étant l'intervalle $[0, 1[$, muni de la grille dyadique et du codage naturel proposé lors de l'exemple 5.1.2. Soit β la mesure de Bernoulli définie sur $[0, 1]$ de la façon suivante : $\beta(I_0) = \alpha$, $\beta(I_1) = 1 - \alpha$, avec $0 < \alpha < 1$ et $\beta(I_{i_1 \dots i_{n-1} 0}) = \alpha \beta(I_{i_1 \dots i_{n-1}})$, $\beta(I_{i_1 \dots i_{n-1} 1}) = (1 - \alpha) \beta(I_{i_1 \dots i_{n-1}})$. Il est facile de voir que la mesure β est invariante par le shift; il suffit de remarquer que β est invariante sur les intervalles dyadiques. Pour montrer qu'elle est ergodique il faudrait travailler un peu plus. On peut cependant vérifier le théorème de Shannon-McMillan par une voie probabiliste, afin de montrer le lien entre le théorème 5.1.9 et la loi de grands nombres.

Considérons la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathbb{X} par $Y_n(x_{i_1 i_2 \dots}) = \log \frac{\beta(I_{i_1 \dots i_n})}{\beta(I_{i_1 \dots i_{n-1}})}$. Par la construction de β la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, équidistriquées et la loi de grands nombres implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \beta(I_{i_1 \dots i_n}(x))}{n} = \alpha \log \alpha + (1 - \alpha) \log(1 - \alpha) \quad \beta\text{-presque sûrement.}$$

On a $h_\beta(\mathcal{A}^1) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)$ et

$$\sum_{J \in \mathcal{A}^1} \sum_{I \in \mathcal{A}^k} \log \left(\frac{\beta(JI)}{\beta(J)} \right) \beta(JI) = \sum_{J \in \mathcal{A}^1} \left(\alpha \log \alpha + (1 - \alpha) \log(1 - \alpha) \right) \beta(J).$$

En utilisant la formule (5.10) on a $h(\beta) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)$, ce qui démontre l'affirmation. •

Nous essayons maintenant d'illustrer le lien entre la dimension informatique et la dimension de Hausdorff dans le cadre d'ensembles autosimilaires et plus généralement d'ensembles admettant un codage, identifiés à $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$.

5.1.3 Lien entre l'entropie et la dimension de Hausdorff

Un outil important utilisé pour la comparaison des dimensions de deux mesures définies sur un ensemble du type $\{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}}$ est le théorème de Billingsley. Afin de l'énoncer il faut introduire la notion de la dimension d'un ensemble par rapport à une mesure.

Définition 5.1.11 Soit μ une mesure de probabilité sur un espace métrique \mathbb{X} . Soit $E \subset \mathbb{X}$ mesurable. Nous notons $\mathcal{F}(\delta)$ la famille des recouvrements de E par des ouverts de diamètre $< \delta$. La dimension $\dim_\mu E$ de E par rapport à μ est définie comme étant :

$$\dim_\mu E = \inf\{d ; \mathcal{H}_\mu^d(E) = 0\} = \sup\{d ; \mathcal{H}_\mu^d(E) = +\infty\}, \text{ où} \quad (5.12)$$

$$\mathcal{H}_\mu^d(E) = \liminf_{\delta \searrow 0} \left\{ \sum_{I \in \mathcal{E}} \mu(I)^d, \mathcal{E} \in \mathcal{F}(\delta) \right\} \quad (5.13)$$

Rappelons que la notation \dim (sans indice) est réservée à la mesure de Hausdorff (cf. définition A.1.1). La dimension (de Hausdorff) d'une mesure μ a été définie en section 4.

Remarque 5.1.12 Les faits suivants sont utiles pour le calcul de dimensions de mesures.

- 1) Pour toute mesure de probabilité μ et tout ensemble E mesurable $0 \leq \dim_\mu(E) \leq 1$. Si $\mu(E) > 0$ alors $\dim_\mu(E) = 1$.
- 2) Dans \mathbb{R}^d si la mesure μ est la mesure de Lebesgue alors $d \dim_\mu$ est la dimension de Hausdorff habituelle.

Présentons maintenant le théorème de Billingsley.

Théorème 5.1.13 (*Billingsley, [Bil65]*) Soit $\mathbb{X} = [0, 1[$ muni de la filtration des intervalles dyadiques. Pour $x \in \mathbb{X}$ notons $I_n(x)$ l'intervalle dyadique de longueur 2^{-n} contenant x . Soient μ et ν deux mesures de probabilités et $M \subset \mathbb{X}$. Alors pour $\delta > 0$

$$M \subset \left\{ x \in \mathbb{X} ; \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \nu(I_n(x))} \geq \delta \right\} \implies \delta \dim_\mu M \leq \dim_\nu M. \quad (5.14)$$

On peut donner une version plus générale du théorème de Billingsley adaptée aux ensembles de Cantor, en remplaçant les intervalles dyadiques par les carrés de la construction de l'ensemble de Cantor. Cependant le théorème 5.1.13 suffit pour notre objectif actuel, qui est donner un exemple d'application de l'entropie à l'estimation de dimensions de mesures.

Corollaire 5.1.14 Soit $\mathbb{X} = [0, 1[$ muni de la filtration des intervalles dyadiques. Soient μ et ν deux mesures de probabilités et $M \subset \mathbb{X}$. Alors pour $\delta > 0$

$$M \subset \left\{ x \in \mathbb{X} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \nu(I_n(x))} = \delta \right\} \implies \delta \dim_\mu M = \dim_\nu M. \quad (5.15)$$

Nous allons évoquer souvent la proposition suivante sous le nom “théorème de Billingsley adapté pour les ensembles de Cantor”.

Proposition 5.1.15 Soit $\mathbb{X} = \mathbb{K}$ un ensemble de Cantor de type 4-coins décrit en chapitre 4 muni de la filtration \mathcal{F}_n des générations de carrés de construction. Pour $x \in \mathbb{K}$ notons $I_n(x) \in \mathcal{F}_n$ l'unique carré de la n -ième génération de la construction contenant x . Soient μ et ν deux mesures de probabilités et $M \subset \mathbb{K}$. Alors pour $\delta > 0$

$$M \subset \left\{ x \in \mathbb{X} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log \nu(I_n(x))} = \delta \right\} \implies \delta \dim_\mu M = \dim_\nu M. \quad (5.16)$$

On en déduit la remarque importante suivante

Remarque 5.1.16 Sous les hypothèses de la proposition 5.1.15 (ou du corollaire 5.1.14) si $\mu(M)$ est positive et si ν est la mesure uniforme sur \mathbb{X} alors $\dim_{\mu} M = 1$ et donc $\dim M = \delta \dim \mathbb{X}$. De plus, si $\mu(M) = 1$ alors $\dim \mu = \delta \dim \mathbb{X}$.

Nous proposons maintenant un exemple illustrant la relation entre l'entropie et la dimension Hausdorff.

Exemple 5.1.17 (Exemple 5.1.10, suite) Soit $\mathbb{X} = [0, 1[$ et β la mesure de Bernoulli introduite dans l'exemple 5.1.10. Nous avons montré dans ce même cadre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \beta(I_n(x))}{n} = h(\beta) = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha) \quad \beta\text{-presque sûrement}$$

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1[$. Nous avons $\lambda(I_n(x)) = 2^{-n}$ pour tout $x \in \mathbb{X}$. Soit

$$B = \left\{ x \in \mathbb{X} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \beta(I_n(x))}{n} = -\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha) \right\}.$$

Pour tout $x \in B$ nous obtenons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \beta(I_n(x))}{\log \lambda(I_n(x))} = \frac{-\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)}{\log 2}$$

D'après le théorème de Billingsley la relation précédente implique

$$\frac{-\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)}{\log 2} \dim_{\beta} S = \dim_{\lambda} S \text{ pour tout ensemble mesurable } S \subset B.$$

Nous en déduisons que pour tout $S \subset B$ tel que $\beta(S) > 0$

$$\frac{-\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)}{\log 2} = \dim_{\lambda} S,$$

puisque $\dim_{\beta} S = 1$. D'autre part, $\dim_{\lambda} S = \dim_{\mathcal{H}} S$ et donc tout sous-ensemble de B de mesure β positive est de dimension $\frac{-\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)}{\log 2}$.

Or $\beta(B) = 1$ et donc $\dim \beta = \frac{-\alpha \log \alpha - (1 - \alpha) \log(1 - \alpha)}{\log 2}$. •

Ces considérations peuvent être étendues aux mesures de Bernoulli définies sur un ensemble de Cantor autosimilaire, puisque la structure d'un tel ensemble est identique à celle de $[0, 1]$ muni de la filtration des intervalles dyadiques. La preuve s'adapte facilement en utilisant le théorème de Billingsley adapté aux ensembles de Cantor.

Les outils et les notions vus dans cette section sont très fréquemment utilisés dans le formalisme multifractal (cf. [Heu97], [Kah87], [KP76], [Pey77]). Malheureusement les hypothèses nécessaires pour pouvoir les appliquer sont trop fortes pour le cadre de la mesure harmonique d'ensembles de Cantor considérés ici.

Une remarque sur le théorème de Billingsley

Soient $\epsilon > 0$ et μ, ν deux mesures sur $[0, 1[$ vérifiant

$$\left| \frac{\mu(I_n(x))}{\nu(I_n(x))} : \frac{\mu(I_{n-1}(x))}{\nu(I_{n-1}(x))} - 1 \right| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \in [0, 1[\text{ et tout } n \in \mathbb{N} \quad (5.17)$$

A première vue on pourrait croire que si cette relation est valable pour ϵ petit, alors les dimensions des deux mesures sont proches. Comme nous l'avons vu dans la remarque 5.1.16 la relation 5.17 implique en effet la proximité des dimensions des mesures quand l'une d'entre elles est la mesure de Lebesgue ou quand elles sont toutes les deux des mesures de Bernoulli. Nous montrerons même qu'il suffit que l'une d'entre elles soit une mesure de Bernoulli.

En général c'est faux : comme nous le verrons dans la suite à l'aide de contre-exemples, il se peut que pour deux mesures μ et ν la relation 5.17 soit valable avec ϵ très petit mais $|\dim \mu - \dim \nu| > 1/2$.

5.1.4 Ensembles de Cantor autosimilaires

Soit D un ensemble ouvert simplement connexe dans \mathbb{R}^d et soient p_1, \dots, p_k k similitudes. Soient D_1, \dots, D_k k sous-ensembles ouverts simplement connexes de D à fermetures disjointes et supposons que $p_i(D) = D_i$ pour $i = 1, \dots, k$. Considérons l'ensemble \mathbb{K} défini par

$$\mathbb{K} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup \{p_{i_1} \dots p_{i_n}(D) ; i_1, \dots, i_n = 1, \dots, k\} \quad (5.18)$$

Définition 5.1.18 *Un tel ensemble \mathbb{K} est appelé ensemble de Cantor autosimilaire.*

Les résultats de ce chapitre (et notamment le théorème 5.2.1) sont valables pour tous les ensembles de Cantor autosimilaires comme nous le verrons à la fin de la section suivante. Nous nous restreignons aux ensembles de Cantor définis lors du chapitre précédent pour des raisons de commodité. Un tel ensemble de Cantor est autosimilaire s'il est construit à partir d'une suite de nombres constante.

5.2 Continuité de la dimension de la mesure harmonique des ensembles de Cantor

Nous montrons que les ensembles de Cantor à rapport constant sont des “points de continuité” de la dimension de la mesure harmonique des ensembles de Cantor définis au cours du chapitre 3 vue comme fonction des rapports des ensembles. Le théorème que nous allons démontrer est le suivant :

Théorème 5.2.1 *Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{a_{i_1 \dots i_n} ; i_1, \dots, i_n = 1, 2, 3, 4, n \in \mathbb{N}\}$ deux suites de nombres vérifiant*

- $a_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et
- $|a_{i_1 \dots i_n} - a| < \delta$, $\delta > 0$.

Soient \mathbb{K}, \mathbb{K}' les ensembles de Cantor construits à partir des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_{i_1 \dots i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ respectivement (cf. section 4.4) et ω, ω' les mesures harmoniques de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}'$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|a_{i_1 \dots i_n} - a| < \delta \implies |\dim \omega - \dim \omega'| < \epsilon$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin de résultats de la théorie de la mesure géométrique. Des extensions de ce théorème à la fin de la section.

Nous notons comme avant \mathcal{F}_n , $n \in \mathbb{N}$, les générations des carrés de la construction de \mathbb{K} . Ces collections suffisent pour le calcul de la dimension de Hausdorff des sous-ensembles de \mathbb{K} , voir corollaire 4.2.4. Pour $x \in \mathbb{K}$ nous notons $I_n(x)$ l’unique élément de \mathcal{F}_n qui contient x .

5.2.1 Lemmes préliminaires

Le théorème suivant donne une méthode de calcul de la dimension d’une mesure. La preuve est facile quand la mesure est invariante par le shift et ergodique, et utilise le théorème de Billingsley. Dans le cas que nous examinons ce théorème n’est pas inconnu (voir par exemple [Fan94]). Cependant pour plus de clarté nous en présentons une preuve.

RAPPEL : une mesure μ est dite monodimensionnelle si tout ensemble mesurable de dimension strictement inférieure à $\dim \mu$ est de mesure μ nulle.

Soit \mathbb{K} un ensemble de Cantor comme dans la section 4.4.

Théorème 5.2.2 *Pour toute mesure de probabilité μ monodimensionnelle portée par \mathbb{K} nous avons :*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log l(I_n(x))} = \dim \mu \quad \mu - \text{presque partout}, \quad (5.19)$$

où $l(I_n(x))$ est la longueur des côtés du carré $I_n(x)$.

Commençons par établir la version plus générale suivante de ce théorème.

Théorème 5.2.3 *Pour toute mesure de probabilité μ monodimensionnelle, portée par un ensemble borné de \mathbb{R}^d , nous avons*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} = \dim \mu \text{ } \mu\text{-presque partout.} \quad (5.20)$$

Démonstration Montrons dans un premier temps que

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \leq \dim \mu, \text{ } \mu\text{-presque sûrement.} \quad (5.21)$$

Soient

$$\begin{aligned} P_0 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^d ; \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} > \dim \mu + \epsilon \right\} \\ P_{r_0} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^d ; \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} > \dim \mu + \epsilon, \forall r < r_0 \right\}. \end{aligned}$$

Clairement, $P_0 \subset \bigcup_{r_0 > 0} P_{r_0}$. Supposons que $\mu(P_0) > 0$. Il existe donc $r_0 > 0$ tel que $\mu(P_{r_0}) > 0$. Pour tout $x \in P_{r_0}$ et tout $r < r_0$ nous avons

$$\mu(B(x, r)) < r^{\dim \mu + \epsilon}. \quad (5.22)$$

Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble de dimension $\dim S = \dim \mu$ avec $\mu(S) = 1$, et posons $P = P_{r_0} \cap S$. Alors, $\mu(P_{r_0}) = \mu(P)$ et $\dim P \leq \dim \mu$. Pour tout $t > 0$, il existe donc un recouvrement \mathcal{R} de P par des boules de rayon inférieur à r_0 centrées sur P telles que $\sum_{B \in \mathcal{R}} \text{diam } B^{\dim \mu + \epsilon} < t$. D'après l'équation (5.22) ceci implique $\mu(P) < t$ et donc (t étant arbitraire) $\mu(P) = 0$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse.

Montrons maintenant l'inégalité opposée, c'est-à-dire

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \geq \dim \mu \text{ } \mu\text{-presque partout.}$$

Nous utilisons le théorème de Besicovitch (cf. [Mat95]) suivant.

Théorème 5.2.4 *Il existe un entier $N = N(d)$ avec les propriétés suivantes. Soit A un ensemble de \mathbb{R}^d borné et soit \mathcal{F} une famille de boules fermées telles que tout point de A soit le centre d'une boule $B \in \mathcal{F}$. Alors, il existe une collection \mathcal{R} au plus dénombrable de boules de \mathcal{F} tel que \mathcal{R} soit un recouvrement de A et tout point de \mathbb{R}^d appartienne à au plus N boules de \mathcal{R} .*

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un nombre $\epsilon > 0$ et un ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ de mesure μ positive tel que pour tout $x \in A$

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \leq \dim \mu - \epsilon.$$

Pour tout $0 < r < 1$ considérons la famille \mathcal{F} des boules fermées $B(x, s)$ centrées en un point x de A , de rayon s inférieur à r vérifiant

$$\frac{\log \mu(B(x, s))}{\log s} \leq \dim \mu - \epsilon,$$

ou de façon équivalente que

$$\mu(B(x, s)) \geq s^{\dim \mu - \epsilon}. \quad (5.23)$$

D'après la définition de l'ensemble A , la famille \mathcal{F} est un recouvrement de A et chaque point de A est le centre d'un nombre infini de boules de \mathcal{F} . La relation (5.23) donne

$$\sum_{B(x,s) \in \mathcal{R}} \mu(B(x, s)) \geq \sum_{B(x,s) \in \mathcal{R}} s^{\dim \mu - \epsilon} \quad (5.24)$$

Par le théorème de Besicovitch il existe une sous-collection \mathcal{R} de boules de \mathcal{F} , dénombrable, telle que tout point de A appartienne à au plus N boules, N étant un nombre entier fixe. En utilisant la relation (5.24) nous en déduisons

$$\sum_{B(x,s) \in \mathcal{R}} s^{\dim \mu - \epsilon} \leq \sum_{B(x,s) \in \mathcal{R}} \mu(B(x, s)) \leq N \mu(\mathbb{R}^d) = N$$

Le nombre r a été choisi arbitrairement, donc $\dim A \leq \dim \mu - \epsilon$. La mesure μ étant monodimensionnelle, nous avons alors $\mu(A) = 0$, ce qui est absurde. •

La preuve du théorème 5.2.2 est une adaptation facile de la démonstration précédente en ne considérant que des recouvrements avec des carrés de la construction de \mathbb{K} (cf. corollaire 4.2.4).

Remarque 5.2.5 Si μ est une mesure de probabilité quelconque (pas nécessairement monodimensionnelle) la démonstration du théorème donne

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \leq \dim \mu \text{ } \mu\text{-presque partout.} \quad (5.25)$$

De plus $\dim \mu = \sup_{\mu} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}$.

Pour la preuve du théorème 5.2.1 nous utilisons également une version plus forte du théorème 4.2.1 tirée de [Car85] et de [MV86].

Théorème 5.2.6 (*Carleson, Makarov et Volberg*) Soit \mathbb{K} un ensemble de Cantor construit à partir d'une suite constante égale à α , $0 < \alpha < 1/2$. Soit ω la mesure harmonique de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ évaluée à l'infini et notons \mathcal{F}_n la collection des carrés de la n -ième génération. Alors pour tout $I \in \mathcal{F}_n$, $J \in \mathcal{F}_k$ et $L \in \mathcal{F}_m$, $n, k, m \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\omega(IJL)}{\omega(IJ)} : \frac{\omega(JL)}{\omega(J)} - 1 \right| < C q^k \quad (5.26)$$

où C, q sont deux constantes positives, $q < 1$, qui ne dépendent que de α .

A l'aide de ce théorème Carleson [Car85] montre la proposition suivante.

Proposition 5.2.7 Sous les hypothèses du théorème 5.2.6 il existe une mesure μ portée par \mathbb{K} invariante par le shift, ergodique et une constante positive C_0 telles que

$$\frac{1}{C_0} \omega(E) \leq \mu(E) \leq C_0 \omega(E)$$

pour tout ensemble $E \subset \mathbb{K}$ mesurable.

Le théorème suivant nous aidera à calculer la limite du théorème 5.2.2 pour des mesures harmoniques d'ensembles de Cantor non-autosimilaires. Il s'agit d'une version connue du théorème de grands nombres (cf. [HH80]).

Théorème 5.2.8 Soit X_n une suite de variables aléatoires sur un espace de probabilité $(\mathbb{X}, \mathcal{B}, P)$ et soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de tribus telles que X_n soit mesurable par rapport à \mathcal{F}_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe une variable aléatoire X et une constante $c > 0$ telle que $P(|X_n| > x) \leq cP(|X| > x)$ pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\mathbb{E}(|X| \log^+ |X|) < +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_n - \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_{n-1})) = 0 \text{ } P\text{-presque sûrement} \quad (5.27)$$

En fait nous utilisons une version plus faible du théorème : les variables aléatoires considérées sont uniformément majorées par une constante.

5.2.2 Démonstration du théorème 5.2.1 et remarques

Rappelons que nous notons \mathbb{K} l'ensemble de Cantor autosimilaire et ω la mesure harmonique de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ évaluée à l'infini et que nous reservons la notation \mathbb{K}' pour les ensembles de Cantor non-autosimilaires et ω' pour leurs mesures harmoniques. Nous notons \mathcal{F}_n la n -ième génération de carrés de construction du Cantor \mathbb{K} . Finalement, notons μ la mesure invariante, équivalente à ω , donnée par la proposition 5.2.7.

Lemme 5.2.9 Soit $\epsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ assez grand tel que pour tout $I \in \cup\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \left| \log \left(\frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \right) \right| - h(\mu) \right| < \epsilon \quad (5.28)$$

Démonstration Soit $\epsilon > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Nous écrivons $p = p_1 + p_2$, avec p, p_1, p_2 à choisir plus tard. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \log \left(\frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \right) &= \sum_{J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}_{p_2}} \frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(I)} \log \left(\frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(I)} \right) \\ &= \sum_{J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}_{p_2}} \frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(I)} \log \left(\frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(IJ_1)} \right) + \sum_{J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}_{p_2}} \frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(I)} \log \left(\frac{\omega(IJ_1)}{\omega(I)} \right). \end{aligned}$$

Notons

$$A = \sum_{J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}_{p_2}} \frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(I)} \log \left(\frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(IJ_1)} \right) \text{ et } B = \sum_{J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}_{p_2}} \frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(I)} \log \left(\frac{\omega(IJ_1)}{\omega(I)} \right).$$

D'après le lemme 4.3.3 il existe une constante $c_2 > 0$ telle que $\omega(I_n(x)) \geq c_2 \omega(I_{n-1}(x))$ pour tout $x \in \mathbb{K}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $|B| \leq -\log(c_2^{p_1})$. Nous montrons que pour p_2 assez grand $-\frac{1}{p}A$ est proche de $h(\mu)$ pour tout I .

Nous obtenons par le théorème de Shannon-McMillan (théorème 5.1.9) que pour p_1 fixé

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \log \left(\frac{\omega(I_n(x))}{\omega(I_{p_1}(x))} \right) \right| = h(\mu) \text{ pour } \omega\text{-presque tout } x \in \mathbb{K}. \quad (5.29)$$

En utilisant le théorème de convergence dominée nous en déduisons qu'il existe $N_0 = N_0(p_1) \in \mathbb{N}$ assez grand tel que pour tout $p_2 \geq N_0$ et pour tout $J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}$

$$\left| \frac{1}{p_2} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}_{p_2}} \left| \log \left(\frac{\omega(J_1J_2)}{\omega(J_1)} \right) \right| \frac{\omega(J_1J_2)}{\omega(J_1)} - h(\mu) \right| < \epsilon. \quad (5.30)$$

Par le théorème 5.2.6 nous avons

$$\left| \frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(IJ_1)} : \frac{\omega(J_1J_2)}{\omega(J_1)} - 1 \right| < C q^{p_1} \text{ avec } q < 1. \quad (5.31)$$

Choisissons p_1 assez grand pour avoir $Cq^{p_1} < \epsilon$ et $p_2 \geq N_0(p_1)$ de manière que la relation (5.30) soit valable. Nous obtenons

$$\begin{aligned}
-h(\mu) - \frac{1}{p}A &= -h(\mu) - \frac{1}{p} \sum_{J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}_{p_2}} \frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(I)} \log \left(\frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(IJ_1)} \right) = \\
&= -h(\mu) - \frac{1}{p} \sum_{J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}} \frac{\omega(IJ_1)}{\omega(I)} \sum_{J_2 \in \mathcal{F}_{p_2}} \frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(IJ_1)} \log \left(\frac{\omega(IJ_1J_2)}{\omega(IJ_1)} \right) \leq \\
&\leq -h(\mu) + (h(\mu) + 2\epsilon) \frac{p_2}{p} \sum_{J_1 \in \mathcal{F}_{p_1}} \frac{\omega(IJ_1)}{\omega(I)} = \\
&= -h(\mu) + \frac{p_2}{p}(h(\mu) + 2\epsilon)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Il suffit à présent de modifier le choix de p_2 en prenant, si nécessaire, p_2 encore plus grand pour avoir $\frac{p_2}{p} = \frac{p_2}{p_1 + p_2} > 1 - \epsilon$. La minoration s'obtient de la même façon.

Pour B remarquons que

$$\left| \frac{1}{p}B \right| \leq -\frac{p_1}{p} \log c_2.$$

Par le choix de p_2 nous avons $\frac{p_1}{p} < \epsilon$ et donc

$$\left| \frac{1}{p}B \right| \leq -\epsilon \log c_2.$$

Les quantités c_2 et $h(\mu)$ ne dépendant pas de p_1 et p_2 nous avons montré que

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \left| \log \left(\frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \right) \right| - h(\mu) \right| < \epsilon, \tag{5.33}$$

pour p assez grand. •

Nous pouvons à présent procéder à la preuve du théorème. Nous utilisons les notations de la section 4.4 pour les carrés de la construction des deux ensembles de Cantor \mathbb{K} et \mathbb{K}' (construits à partir de deux suites de rapports).

Démonstration du théorème 5.2.1 : Soit $\epsilon > 0$. Par le théorème 4.4.2 il existe $\delta > 0$ tel que

$$|a_{i_1 \dots i_n} - a| < \delta \implies \left| \frac{\omega(I)}{\omega(\widehat{I})} : \frac{\omega'(I')}{\omega'(\widehat{I}')} - 1 \right| < \epsilon \tag{5.34}$$

pour tout $I \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ et $I' \stackrel{\text{cod}}{\sim} I$.

Par le lemme 5.2.9 il existe $p \in \mathbb{N}$ assez grand tel que l'inégalité (5.28) soit satisfaite pour tout $I \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.

Par (5.34) pour $\delta > 0$ assez petit nous avons

$$\left| \frac{\omega(I)}{\omega(\widehat{I})} : \frac{\omega'(I')}{\omega'(\widehat{I}')} - 1 \right| < \epsilon', \quad (5.35)$$

où $\epsilon' > 0$ est assez petit pour avoir $(1 + \epsilon')^p < 1 + \epsilon^{10}$.

Nous en déduisons

$$\left| \frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} : \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} - 1 \right| < \epsilon^{10}$$

pour tout $I \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ avec $I' \stackrel{\text{cod}}{\sim} I$ et tout $J \in \mathcal{F}_p$ avec $J' \stackrel{\text{cod}}{\sim} J$.

Par une variation facile du lemme 4.3.3, pour $\delta < a/2$ il existe une constante $c_3 = c_3(a) > 0$ telle que pour tout $I' \in \mathcal{F}'_n$ et pour tout $I \in \mathcal{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$

$$\omega(I) \geq c_3^n \text{ et } \omega'(I') \geq c_3^n.$$

Alors, en prenant $\epsilon < \inf\{\log^{-1} c_3, 2^{-1}\}$, nous avons pour tout $I \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$, $I' \stackrel{\text{cod}}{\sim} I$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{J' \in \mathcal{F}'_p} \frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \left| \log \left(\frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \right) \right| &\leq (1 + \epsilon^{10}) \sum_{\substack{J \in \mathcal{F}_p \\ J \stackrel{\text{cod}}{\sim} J'}} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \left| \log \left(\frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{p} (1 + \epsilon^{10}) \left(\sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \left| \log \left(\frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \right) \right| + \sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} |\log(1 - \epsilon^{10})| \right) \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \left| \log \left(\frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \right) \right| + \frac{1}{p} \epsilon^{10} \sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \left| \log \left(\frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \right) \right| + \\ &\quad + \frac{1}{p} (1 + \epsilon^{10}) |\log(1 - \epsilon^{10})| \\ &\leq \frac{1}{p} \sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \left| \log \left(\frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \right) \right| + \frac{\epsilon^{10}}{p} |\log c_3| + \frac{1}{p} (1 + \epsilon^{10}) |\log(1 - \epsilon^{10})|. \end{aligned} \quad (5.36)$$

De la même façon nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{J' \in \mathcal{F}'_p} \frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \left| \log \left(\frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \right) \right| &\geq \\ \geq \frac{1}{p} \sum_{J \in \mathcal{F}_p} \frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \left| \log \left(\frac{\omega(IJ)}{\omega(I)} \right) \right| - \frac{\epsilon^{10}}{p} |\log c_3| - \frac{1}{p} (1 + \epsilon^{10}) |\log(1 - \epsilon^{10})|. \end{aligned} \quad (5.37)$$

En combinant les équations (5.33), (5.36) et (5.37) nous obtenons

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{J' \in \mathcal{F}'_p} \frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \left| \log \left(\frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \right) \right| - h(\mu) \right| < \epsilon + \frac{\epsilon^{10}}{p} |\log c_3| + \frac{(1 + \epsilon^{10}) |\log(1 - \epsilon^{10})|}{p} \quad (5.38)$$

et donc

$$\left| \frac{1}{p} \sum_{J' \in \mathcal{F}'_p} \frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \left| \log \left(\frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \right) \right| - h(\mu) \right| < 3\epsilon. \quad (5.39)$$

Nous montrons maintenant que pour ω' -presque tout $x \in \mathbb{K}'$

$$\left| \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \omega'(I'_n(x))}{n} + h(\mu) \right| < 3\epsilon \quad (5.40)$$

Avec cette relation et à l'aide du théorème 5.2.2 nous pourronsachever la preuve. Considérons la suite variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur \mathbb{K}' de la manière suivante.

Pour $x \in \mathbb{K}'$ nous posons

$$X_n(x) = -\frac{1}{p} \log \left(\frac{\omega'(I'_{np}(x))}{\omega'(I'_{(n-1)p}(x))} \right).$$

Considérons la suite de tribus $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où \mathcal{R}'_n est engendrée par \mathcal{F}'_{np} . Les hypothèses du théorème 5.2.8 sont vérifiées pour la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite de tribus $(\mathcal{R}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous en déduisons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[X_k - \mathbb{E}_{\omega'}(X_k | \mathcal{R}'_{n-1}) \right] = 0 \text{ } \omega'\text{-presque surely} \quad (5.41)$$

Or, sur $I' \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}'_n$

$$\mathbb{E}_{\omega'}(X_n | \mathcal{R}'_{n-1}) = \frac{1}{p} \sum_{J' \in \mathcal{F}'_p} \frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \left| \log \left(\frac{\omega'(I'J')}{\omega'(I')} \right) \right|$$

Par la relation (5.39) nous obtenons

$$|\mathbb{E}_{\omega'}(X_n | \mathcal{R}'_{n-1}) - h(\mu)| < 3\epsilon,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc,

$$h(\mu) - 3\epsilon < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_n < h(\mu) + 3\epsilon \text{ } \omega'\text{-presque sûrement.}$$

Or,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_n = \frac{1}{np} \log \omega'(I'_{np}(x)). \quad (5.42)$$

Donc,

$$\left| \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \omega'(I'_n(x)) + h(\mu) \right| < 3\epsilon \text{ } \omega'\text{-presque partout.} \quad (5.43)$$

Nous utilisons cette relation ainsi que le théorème 5.2.2 pour conclure. La mesure ω est monodimensionnelle par la proposition 4.3.11. Remarquons que pour $n \in \mathbb{N}$, pour tout $I \in \mathcal{F}_n$ la longueur du côté du carré I est a^n . D'autre part, pour tout $I' \in \mathcal{F}'_n$ la longueur du côté du carré I' est comprise entre $(a - \delta)^n$ et $(a + \delta)^n$.

Par le théorème 5.2.2

$$\dim \omega = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \omega(I_n(x))}{n \log a} \text{ } \omega\text{-presque partout sur } \mathbb{K}$$

et d'après la remarque 5.2.5

$$\dim \omega' = \sup_{\omega'} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega'(I'_n(x))}{\log l(I'_n(x))}.$$

Il s'ensuit que

$$\dim \omega = \frac{h(\mu)}{|\log a|}.$$

Or, par la relation (5.43) nous avons

$$\dim \omega' \in \left[\frac{h(\mu) - 3\epsilon}{|\log(a - \delta)|}, \frac{h(\mu) + 3\epsilon}{|\log(a + \delta)|} \right]$$

Il suffit de choisir δ encore plus petit pour avoir

$$\dim \omega' \in [\dim \omega - 5\epsilon, \dim \omega + 5\epsilon].$$

Le théorème est à présent démontré. •

Corollaire 5.2.10 Pour tout $d \in]0, 1[$ il existe un ensemble de Cantor de dimension d tel que la dimension de la mesure harmonique de son complémentaire soit d .

La démonstration découle immédiatement de la proposition 4.3.12 et de la construction de la section 4.3.4.

Remarque 5.2.11 La méthode ne s'applique pas aux ensembles de Cantor définis en section 4.2. En effet, pour un ensemble de Cantor non-autosimilaire la somme de la relation (5.33) n'est pas nécessairement proche d'une constante, ce qui rend le reste de la preuve inadaptable. Remarquons finalement que la preuve n'utilise pas d'hypothèses sur la mesure ω' .

Dans la démonstration du théorème nous avons utilisé deux propriétés cruciales de la mesure harmonique ω d'un Cantor autosimilaire : l'existence presque sûre d'une limite de $n^{-1} \log \omega(I_n(x))$ et les inégalités de Carleson qui nous ont permis d'avoir une estimation uniforme des entropies intermédiaires. Ces propriétés sont vérifiées par les mesures harmoniques des ensembles de Cantor autosimilaires. Nous montrons que la méthode s'applique aux ensembles de Cantor autosimilaires qui ne sont pas forcément de type 4-coins (voir définition 5.1.18).

Théorème 5.2.12 Soit \mathbb{K} un ensemble de Cantor autosimilaire comme donné par la définition 5.1.18, associé aux similitudes p_1, \dots, p_k . Soit $\mathbb{K}_\delta(p'_1, \dots, p'_k)$ un ensemble de Cantor du même type associé aux similitudes p'_1, \dots, p'_k vérifiant $\|p_i - p'_i\|_\infty < \delta$ pour tout $i = 1, \dots, k$. Alors, si ω et ω_δ sont les mesures harmoniques de \mathbb{K} et $\mathbb{K}_\delta(p'_1, \dots, p'_k)$ respectivement

$$|\dim \omega - \dim \omega_\delta| < \eta(\delta),$$

où η est une fonction positive telle que $\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta(\delta) = 0$.

Démonstration Nous donnons les modifications nécessaires par rapport à la preuve du théorème 5.2.1. Comme avant, si ω est la mesure harmonique de l'ensemble de Cantor autosimilaire \mathbb{K} , alors il existe une mesure μ invariante par le shift et ergodique équivalente à ω . Les estimations que nous faisons sont uniformes en (p'_1, \dots, p'_k) et ne dépendent que de δ et de (p_1, \dots, p_k) .

Par la formule de Manning [Man84] la dimension de la mesure harmonique égale à $h(\mu)/\chi(\mu)$ où $\chi(\mu)$ est l'exposant de Lyapounov de la mesure μ . Les variations de $h(\mu)$ avec δ sont contrôlées en suivant la même voie qu'avant. L'exposant de Lyapounov est $\chi(\mu) = \int_{\mathbb{K}} |\log \phi'| d\mu$, où $\phi = p_i^{-1}$ sur D_i , pour $i = 1, \dots, k$. Or, il est facile de voir que pour l'ensemble de Cantor $\mathbb{K}_\delta(p'_1, \dots, p'_k)$ si μ_δ est la mesure invariant et ergodique équivalente à ω_δ alors μ_δ converge vers μ vaguement, quand δ tend vers 0, uniformément en (p'_1, \dots, p'_k) . Il s'ensuit que $\chi(\mu_\delta)$ tend vers $\chi(\mu)$ quand δ tend vers 0. •

5.3 Exemples de non-continuité de la dimension de mesures

Nous essayons maintenant de répondre à la question posée en fin de section 5.1.

Soit \mathbb{K} un ensemble de type 4-coins construit à partir d'une suite $\{a_{i_1 \dots i_n} ; i_1, \dots, i_n = 1, 2, 3, 4, n \in \mathbb{N}\}$ et \mathbb{K}' un ensemble de Cantor de même type construit à partir d'une suite $\{a'_{i_1 \dots i_n} ; i_1, \dots, i_n = 1, 2, 3, 4, n \in \mathbb{N}\}$. Par le théorème 4.4.2 si ω et ω' sont les mesures harmoniques de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{K}'$ respectivement nous avons : pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $|a_{i_1 \dots i_n} - a'_{i_1 \dots i_n}| < \delta$ alors pour tout carré I de la construction de \mathbb{K}

$$\left| \frac{\omega(I)}{\omega(\widehat{I})} : \frac{\omega'(I')}{\omega'(\widehat{I}')} - 1 \right| < \epsilon \quad (5.44)$$

Nous allons montrer que cette relation n'est pas suffisante pour conclure que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\dim \omega - \dim \omega'| = 0.$$

Nous donnons un exemple d'une mesure μ portée par l'ensemble de Cantor \mathbb{K} pour laquelle il existe une suite de mesures $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ portées par \mathbb{K} , vérifiant

$$\dim \mu - \dim \mu_n > \frac{1}{4} \text{ et } \left| \frac{\mu(I)}{\mu(\widehat{I})} : \frac{\mu_n(I)}{\mu'_n(\widehat{I})} - 1 \right| < n^{-1}. \quad (5.45)$$

Pour donner un exemple qui soit le plus près possible de la situation actuelle, nous imposerons également les conditions suivantes pour la mesure μ ainsi que pour les mesures $\mu_n, n \in \mathbb{N}$:

$\alpha)$ μ et μ_n sont monodimensionnelles.

$\beta)$ μ et μ_n sont doublantes.

Nous allons proposer deux exemples. Dans le premier nous montrons que pour tout ϵ il existe deux mesures μ et ν portées par le segment $[0, 1]$, avec μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue telles que

1. $\dim \mu = 1$ et $\frac{1}{4} \leq \dim \nu \leq \frac{1}{2}$.
2. Pour tout intervalle dyadique I , $\left| \frac{\mu(I)}{\mu(\widehat{I})} : \frac{\nu(I)}{\nu(\widehat{I})} - 1 \right| < \epsilon$ (5.46)

(nous avons noté \widehat{I} le plus petit intervalle dyadique qui contient strictement I).

Cet exemple, ayant comme origine une idée de A. Ancona, donne l'existence d'une mesure avec une construction qualitative.

Dans le deuxième nous construisons la mesure μ et les mesures μ_n vérifiant les conditions demandées. La mesure μ ainsi que les mesures μ_n seront portées par l'ensemble de Cantor construit à partir de la suite constante égale à $\frac{1}{4}$. La construction est contrôlable dans le sens que les mesure ainsi les ensembles qui portent les mesures sont décrits explicitement. La technique suivie est inspirée par celle du premier exemple.

Remarquons que dans ces exemples les mesures sont portées par le même ensemble. Ceci n'est pas gênant. Il est, en effet très facile de modifier les exemples de sorte que les mesure μ et μ_n soient portées par des ensembles de Cantor différents construits à partir de suites arbitrairement proches.

5.3.1 Premier exemple

Considérons l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue λ . Soit $0 < q < \frac{1}{2}$. Nous posons

$$I'_0 =]0, q] , I'_1 =]q, 1] \text{ et } \mathcal{F}'_1 = \{I_0, I_1\}$$

Supposons que $\mathcal{F}'_{n-1} = \{I'_{i_1 \dots i_{n-1}} , i_1, \dots, i_{n-1} \in \{0, 1\}\}$, $n \in \mathbb{N}$ soit défini. Si $I'_{i_1 \dots i_{n-1}} =]a, b] \in \mathcal{F}'_{n-1}$ nous posons

$$I'_{i_1 \dots i_{n-1} 0} =]a, a + q(b - a)] , I'_{i_1 \dots i_{n-1} 1} =]a + q(b - a), b] \text{ et } \mathcal{F}'_n = \{I'_{i_1 \dots i_n} , i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\}\}$$

Avec ce système d'intervalles nous pouvons définir un nouveau codage des éléments de $[0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$ nous écrivons

$$x = x'_{i_1 \dots i_n \dots} \text{ avec } i_1, i_2, \dots \in \{0, 1\} \text{ si } x \in I'_{i_1 \dots i_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Nous notons $x = x_{i_1 \dots i_n \dots}$ le codage classique de x avec les intervalles dyadiques (voir exemple 5.1.10).

Soit $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la fonction définie de la façon suivante :

$$\text{Pour } x = x_{i_1 \dots i_n \dots} \in [0, 1] , F(x) = x'_{i_1 \dots i_n \dots} \quad (5.47)$$

Il est facile de vérifier que la fonction F est bien définie, strictement croissante et bi-holdérienne, avec $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

Soit β une mesure de Bernoulli définie à partir des intervalles dyadiques (cf. exemple 5.1.10) qui charge l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ de masse α et l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ de masse $1 - \alpha$, $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Notation 5.3.1 Pour une mesure de probabilité μ sur $[0, 1]$ et une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mesurable nous notons $f[\mu]$ la mesure image définie par $f[\mu](E) = \mu(f^{-1}(E))$ pour tout ensemble mesurable $E \subset [0, 1]$. Nous notons par $\text{card}(E)$ le cardinal d'un ensemble E .

Posons $\beta' = F[\beta]$. Par l'exemple 5.1.10 l'ensemble

$$E_\alpha = \{x = x_{i_1 \dots i_n} \in [0, 1] ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{card}\{i_j ; j \leq n \text{ et } i_j = 0\} = \alpha\}$$

porte la mesure β . De plus,

$$\dim \beta = \dim E_\alpha = \frac{-\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha)}{\log 2}.$$

Il est donc clair que $F(E_\alpha)$ porte la mesure β' . Il s'ensuit que $\dim \beta' \leq \dim F(E_\alpha)$. Montrons que, en notant $\rho = \dim E_\alpha$, $\dim F(E_\alpha) \leq \frac{\rho}{2}$, pour q assez petit.

Soit $\epsilon > 0$ et soit \mathcal{R}_n^0 la collection des intervalles $I'_{i_1 \dots i_k} \in \bigcup_{k \geq n} \mathcal{F}'_k$ qui vérifient

$$\left| \frac{1}{n} \text{card}\{i_j ; j \leq n \text{ et } i_j = 0\} - \alpha \right| < \epsilon \quad (5.48)$$

La collection \mathcal{R}_n^0 forme un recouvrement de $F(E_\alpha)$. Par la définition des familles d'intervalles \mathcal{F}'_n , nous pouvons extraire un recouvrement $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_n^0$ de $F(E_\alpha)$ dont les intervalles sont deux à deux disjoints.

Remarquons que pour $I' = I'_{i_1 \dots i_k} \in \mathcal{R}_n$, en notant comme convenu $l(I')$ la longueur de I' ,

$$l(I') \leq q^{(\alpha-\epsilon)k} (1-q)^{(1-\alpha+\epsilon)k}.$$

Donc, si $q = q(\alpha)$ est assez petit, $l(I') < (\frac{1}{4^{\frac{\rho}{2}}})^k$. Il s'ensuit que

$$\sum_{I' \in \mathcal{R}_n} l(I')^{\frac{\rho}{2}} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} 2^k \frac{1}{4^k} < 1$$

et par conséquent, comme ϵ et n étaient arbitraires, $\dim F(E_\alpha) \leq \frac{\rho}{2}$. Nous passons à présent à la construction de deux mesures μ et ν vérifiant (5.46), avec ϵ arbitrairement petit, dont les dimensions diffèrent de $\frac{1}{2}$.

Proposition 5.3.2 Soit $\epsilon > 0$. Il existe deux mesures μ et ν monodimensionnelles, portées par $[0, 1]$ telles que

$$\left| \frac{\mu(B(x, \frac{r}{2}))}{\mu(B(x, r))} : \frac{\nu(B(x, \frac{r}{2}))}{\nu(B(x, r))} - 1 \right| < \epsilon \quad (5.49)$$

avec μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (donc $\dim \mu = 1$) et $\dim \nu < \frac{1}{2}$.

Démonstration Nous continuons à faire appel à la notation déjà utilisée dans cette partie. Posons $\mu_0 = \lambda$ la mesure de Lebesgue et $\nu_0 = \beta$ la mesure de Bernoulli définie au cours du dernier paragraphe, avec $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}$. Soit E_α l'ensemble défini comme

$$E_\alpha = \{x = x_{i_1 \dots i_n \dots} \in [0, 1] ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{card}\{i_j, j \leq n \text{ et } i_j = 0\} = \alpha\}.$$

Première construction

La condition (5.49) est satisfaite pour $\mu = \mu_0$ et $\nu = \nu_0$. Remarquons que μ_0 et ν_0 sont monodimensionnelles, $\dim \mu_0 = 1$ et $\dim \nu_0 = \frac{1}{\log 2}(-\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha))$. Il s'ensuit que les mesures μ_0 et ν_0 sont singulières, $\mu_0 \perp \nu_0$. Il existe donc un ensemble compact K_0 tel que $\nu_0(K_0) = 0$ et $\mu_0(K_0) > 1 - \epsilon$.

Le complémentaire de K_0 dans $]0, 1[$ étant un ensemble ouvert, nous pouvons écrire $]0, 1[\setminus K_0$ comme une réunion dénombrable d'intervalles disjoints

$$]0, 1[\setminus K_0 = \bigcup_{j \in J}]a_j, b_j[\text{ avec } J \subset \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq a_j < b_j \leq 1 \text{ pour tout } j \in J.$$

Nous définissons une fonction $F_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, à l'aide de la fonction F définie par (5.47).

$$F_0(x) = \begin{cases} x, & \text{pour } x \in K_0 \cup \{0, 1\} \\ \frac{F(x) - F(a_j)}{F(b_j) - F(a_j)}(b_j - a_j) + a_j, & \text{pour } x \in]a_j, b_j[\subset]0, 1[\setminus K_0 \end{cases} \quad (5.50)$$

Remarquons que $F_0 = \tau_j \circ F$ sur $]a_j, b_j[$, où τ_j est une fonction affine, $j \in J$. La fonction F_0 est donc continue, strictement croissante et localement hölderienne, vérifiant $F_0(0) = 0$ et $F_0(1) = 1$. De plus, $F_0(K_0) = K_0$ et $F_0(]0, 1[\setminus K_0) =]0, 1[\setminus K_0$.

A l'aide des propriétés de la dimension de Hausdorff (propriétés A.1.6) nous en déduisons $\dim F_0(E_\alpha \cap]a_j, b_j[) \leq \frac{1}{2}$. Donc, $\dim F_0(E_\alpha \setminus K_0) \leq \frac{1}{2}$.

Posons $\mu_1 = F_0[\mu_0]$ et $\nu_1 = F_0[\nu_0]$, ou de façon équivalente

$$\mu_1 = \begin{cases} \mu_0 \text{ sur } K_0 \\ F_0[\mu_0] \text{ sur }]0, 1[\setminus K_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \nu_1 = \begin{cases} \nu_0 \text{ sur } K_0 \\ F_0[\nu_0] \text{ sur }]0, 1[\setminus K_0 \end{cases} \quad (5.51)$$

Nous déduisons des propriétés de la fonction F_0 que les mesures μ_1 et ν_1 sont bien définies. Puisque $\nu_0(K_0) = 0$ nous avons $\dim \nu_1 \leq \dim F_0(E_\alpha \setminus K_0) \leq \frac{1}{2}$. D'autre part, il est clair que $\dim \mu_1 = 1$.

Les mesures μ_1 et ν_1 satisfont à la condition (5.49) mais μ_1 n'est pas monodimensionnelle.

Deuxième construction

Par définition, les mesures μ_1 et ν_1 sont singulières entre elles. Il existe donc un ensemble compact K_1 vérifiant

$$1. \quad K_1 \cap K_0 = \emptyset \quad 2. \quad \mu_1(K_1) = 0 \quad \text{et} \quad 3. \quad \nu_1(K_1) > 1 - \epsilon^2$$

Nous écrivons l'ensemble ouvert $]0, 1[\setminus (K_1 \cup K_0)$ comme réunion d'intervalles disjoints

$$]0, 1[\setminus (K_1 \cup K_0) = \bigcup_{j \in J}]a_j, b_j[\quad \text{avec } J \subset \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq a_j < b_j \leq 1 \text{ pour tout } j \in J.$$

Nous définissons la fonction $F_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de la façon suivante

$$F_1(x) = \begin{cases} F_0, \text{ pour } x \in K_0 \cup K_1 \cup \{0, 1\} \\ f_j \circ F_0^{-1}(x), \text{ pour } x \in]a_j, b_j[\subset]0, 1[\setminus K_0 \end{cases} \quad (5.52)$$

où f_j est une fonction affine telle que $f_j \circ F_0^{-1}(]a_j, b_j[) =]a_j, b_j[$, pour $j \in J$.

Nous posons $\mu_2 = F_1[\mu_1]$ et $\nu_2 = F_1[\nu_1]$. Notamment,

$$\mu_2 = \begin{cases} \mu_1 \text{ sur } K_0 \cup K_1 \\ F_1[\mu_1] \text{ sur }]0, 1[\setminus (K_0 \cup K_1) \end{cases} \quad \text{et} \quad \nu_2 = \begin{cases} \nu_1 \text{ sur } K_0 \cup K_1 \\ F_1[\nu_1] \text{ sur }]0, 1[\setminus (K_0 \cup K_1) \end{cases} \quad (5.53)$$

De nouveau, les mesures μ_2 et ν_2 sont singulières entre elles et satisfont à la condition (5.46), mais ν_2 n'est pas monodimensionnelle. Remarquons que la mesure ν_2 restreinte à K_1 est monodimensionnelle.

Nous itérons le processus en alternant la première et la deuxième construction. A titre d'exemple nous donnons la construction d'une étape impaire (par exemple construire μ_3 et ν_3). Pour faire ceci nous utilisons la première construction.

Supposons que nous ayons défini $\mu_n, \nu_n, F_0, \dots, F_{n-1}$ ainsi que les ensembles compacts K_0, K_1, \dots, K_{n-1} , $n \in \mathbb{N}$ pair. Supposons (puisque n est supposé pair) que ν_n ne soit pas monodimensionnelle et que les mesures μ_n et ν_n soient singulières entre elles. Finalement nous supposons que μ_n est monodimensionnelle et que ν_n est monodimensionnelle sur $\bigcup_{k \leq \frac{n}{2}} K_{2k+1}$,

$$\nu \left(\bigcup_{k \leq \frac{n-1}{2}} K_{2k+1} \right) = \nu \left(\bigcup_{k \leq n-1} K_k \right) > 1 - \epsilon^n$$

Puisque μ_n et ν_n sont singulières il existe un compact K_n vérifiant

1. $\bigcup_{0 \leq k \leq n-1} K_k \cap K_n = \emptyset$
2. $\nu_n(K_n) = 0$ et
3. $\mu_n(K_n) > (1 - \epsilon^{n+1}) \mu_n(]0, 1[\setminus \bigcup_{0 \leq k \leq n-1} K_k)$

Le complémentaire de $\bigcup_{0 \leq k \leq n} K_k$ dans $]0, 1[$ étant ouvert, nous pouvons l'écrire comme réunion d'intervalles ouverts disjoints

$$]0, 1[\setminus \bigcup_{0 \leq k \leq n} K_k = \bigcup_{j \in J}]a_j, b_j[\text{ avec } J \subset \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq a_j < b_j \leq 1 \text{ pour } j \in J.$$

Nous définissons la fonction F_n sur $]0, 1[$ de la façon suivante

$$F_n(x) = \begin{cases} x, \text{ pour } x \in \bigcup_{0 \leq k \leq n} K_k \cup \{0, 1\} \\ f_j \circ F \circ F_0^{-1} \circ \dots \circ F_{n-1}^{-1}, \text{ pour } x \in]a_j, b_j[\subset]0, 1[\setminus \bigcup_{1 \leq k \leq n} K_k \end{cases} \quad (5.54)$$

où f_j est une fonction affine croissante sur $F \circ F_0^{-1} \circ \dots \circ F_{n-1}^{-1}(]a_j, b_j[)$ telle que

$$f_j \circ F \circ F_0^{-1} \circ \dots \circ F_{n-1}^{-1}(]a_j, b_j[) =]a_j, b_j[.$$

La fonction F_n est strictement croissante et $F_n(]a_j, b_j[) =]a_j, b_j[$, pour $j \in J$. Posons

$$\mu_{n+1} = F_n[\mu_n] \text{ et } \nu_{n+1} = F_n[\nu_n]$$

Par la construction de la fonction F_n , la mesure ν_{n+1} restreinte sur $]0, 1[\setminus \bigcup_{0 \leq k \leq n} K_k$ est portée par un ensemble de dimension égale à $\dim F(E_\alpha)$. D'autre part, μ_{n+1} est monodimensionnelle sur $\bigcup_{k \leq n} K_k$ et

$$\mu \left(\bigcup_{k \leq n} K_k \right) > 1 - \epsilon^{n+1},$$

ce qui permettra l'étape suivante de la recurrence, avec la deuxième construction.

Les suites de mesures $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vaguement vers deux mesures μ et ν respectivement. La mesure μ (respectivement la mesure ν) coincide avec μ_n (respectivement ν_n) sur $\bigcup_{k \leq n-1} K_k$, pour $n \in \mathbb{N}$. Nous en déduisons que μ et ν sont monodimensionnelles, $\dim \mu = 1$ et $\dim \nu = \dim F(E_\alpha) \leq \frac{1}{2}$. De plus, μ et ν satisfont à la condition (5.49). Il est possible de modifier la construction afin de récupérer deux mesures μ et ν doublantes, ainsi que pour trouver une suite de mesures μ_n qui satisfassent à la condition (5.45). Cependant, puisqu'un tel exemple de mesures est fourni dans la suite, nous omettons cette modification. •

5.3.2 Deuxième exemple

La construction est divisée en deux étapes. Dans un premier temps, nous nous donnons $\epsilon > 0$ et nous construisons deux mesures μ et ν définies sur un ensemble de Cantor, vérifiant la condition (5.46) adaptée à l'ensemble de Cantor (cf relation (5.55)). Ensuite nous procédons à une modification de cette construction pour obtenir une mesure μ et une suite de mesures $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant (5.45). Toutes les mesures sont monodimensionnelles. Remarquons que sous la condition (5.45), la mesure μ est la limite vague de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Construction des mesures μ et ν

Soit \mathbb{K} l'ensemble de Cantor construit à partir de la suite constante égale à $\frac{1}{4}$. Nous reprenons la notation antérieure des carrés de construction de \mathbb{K} et nous notons encore \mathcal{F}_n la collection des carrés de la n -ième génération, $n \in \mathbb{N}$. Pour $I \in \mathcal{F}_n$ nous notons \widehat{I} l'unique carré de la $(n-1)$ -ième génération \mathcal{F}_{n-1} contenant I . Nous construisons par récurrence deux mesures μ et ν telles que

$$\left| \frac{\mu(I)}{\mu(\widehat{I})} : \frac{\nu(I)}{\nu(\widehat{I})} - 1 \right| < \epsilon, \text{ pour tout carré } I \text{ de la construction de } \mathbb{K} \quad (5.55)$$

Remarquons d'abord que la dimension de Hausdorff de l'ensemble \mathbb{K} est égale à 1 (voir A.1.4). La mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle de \mathbb{K} $\mathcal{H}_1(\mathbb{K})$ est égale à 1. Nous divisons la construction en trois étapes : dans les deux premières nous définissons quatre mesures dont l'alternance donnera les mesures μ et ν . Ensuite, nous procédons à une récurrence.

A) Soient $\epsilon > 0$ et λ_0 la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle sur \mathbb{K} . La mesure \mathcal{H}_1 est la mesure uniforme sur \mathbb{K} et charge chaque carré I de la n -ième génération \mathcal{F}_n , $n \in \mathbb{N}$, avec la masse $(\frac{1}{4})^n$. Montrons que $\dim \lambda_0 = 1$. On a

$$\frac{\log \lambda_0(I_n(x))}{n \log 4} = -1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{K} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \quad (5.56)$$

où $I_n(x)$ est le carré de \mathcal{F}_n qui contient x . Or, si pour un ensemble $F \subset K$ mesurable $\lambda_0(F) > 0$ alors $\dim_{\lambda_0} F = 1$. Par le théorème de Billingsley et la relation 5.56 $\dim_{\lambda_0} F = \dim_{\mathcal{H}} F$ et donc $\dim_{\mathcal{H}} F = 1$. Or, $\dim \lambda_0 \leq \dim \mathbb{K} = 1$. Par conséquent, $\dim \lambda_0 = 1$.

Considérons également la mesure de Bernoulli ρ_0 définie de la façon suivante (en reprenant la notation du chapitre 4).

$$\rho_0(I_1) = \rho_0(I_2) = \frac{1}{4} - \epsilon, \quad \rho_0(I_3) = \rho_0(I_4) = \frac{1}{4} + \epsilon. \quad (5.57)$$

et posons $\mu_0 = \lambda_0$ et $\nu_0 = \rho_0$.

Les mesures λ_0 et ρ_0 vérifient la condition (5.55), sont monodimensionnelles, doublantes et comme ci-dessus on a

$$\dim \rho_0 = \frac{h(\rho_0)}{\log 4} = -2 \frac{(\frac{1}{4} - \epsilon) \log(\frac{1}{4} - \epsilon) + (\frac{1}{4} + \epsilon) \log(\frac{1}{4} + \epsilon)}{\log 4} < 1$$

Il s'ensuit que λ_0 et ρ_0 sont singulières entre elles. De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \rho_0(I_n(x))}{n} = -h(\rho_0) \text{ } \rho_0\text{-presque partout sur } \mathbb{K}$$

comme l'indique l'exemple 5.1.10.

Il existe ainsi $n_1 \in \mathbb{N}$ et une partition $\{F_0, F_1\}$ de \mathcal{F}_{n_1} vérifiant :

1. $F_0 \cup F_1 = \mathcal{F}_{n_1}$
2. $\left| \frac{\log \rho_0(I)}{n} + h(\rho_0) \right| < \epsilon$ pour tout $I \in F_1$
3. $\left| \frac{\log \lambda_0(I)}{n} + \log 4 \right| < \epsilon$ pour tout $I \in F_0$
4. $\sum_{I \in F_1} \rho_0(I) > 1 - \epsilon$
5. $\sum_{I \in F_0} \lambda_0(I) > 1 - \epsilon$

B) Nous définissons à présent les mesures de Bernoulli λ_1 et ρ_1 sur l'ensemble de Cantor \mathbb{K} de la façon suivante

$$\begin{aligned} \rho_1(I_1) &= \rho_1(I_2) = \rho_1(I_3) = \delta & \text{et} & \quad \rho_1(I_4) = 1 - 3\delta \\ \lambda_1(I_1) &= \lambda_1(I_2) = \lambda_1(I_3) = \delta(1 - \epsilon) & \text{et} & \quad \lambda_1(I_4) = 1 - 3\delta(1 - \epsilon) \end{aligned} \quad (5.58)$$

avec $\delta > 0$ à fixer plus tard.

Nous procédons à la deuxième étape de la construction à l'aide des mesures λ_1 et ρ_1 . Posons pour $I_{i_1 \dots i_n} \subset I \in F_1$

$$\begin{aligned}\mu_1(I_{i_1 \dots i_n}) &= \mu_0(I_{i_1 \dots i_{n_1}}) \lambda_1(I_{i_{n_1} \dots i_n}) \\ \nu_1(I_{i_1 \dots i_n}) &= \nu_0(I_{i_1 \dots i_{n_1}}) \rho_1(I_{i_{n_1} \dots i_n})\end{aligned}\quad (5.59)$$

et pour $I_{i_1 \dots i_n} \subset I \in F_0$

$$\mu_1(I_{i_1 \dots i_n}) = \mu_0(I_{i_1 \dots i_n}), \quad \nu_1(I_{i_1 \dots i_n}) = \nu_0(I_{i_1 \dots i_n}) \quad (5.60)$$

Si $I = I_{i_1 \dots i_n}$ avec $n \leq n_1$ nous posons $\mu_1(I) = \mu_0(I)$ et $\nu_1(I) = \nu_0(I)$.

Les restrictions des mesures μ_1 et ν_1 dans chaque carré de $\mathcal{F}_{n_1} = F_0 \cup F_1$ sont deux mesures de Bernoulli de dimensions différentes et par conséquent singulières entre elles. Il existe alors $n_2 \in \mathbb{N}$ et une partition $\{F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}\}$ de \mathcal{F}_{n_2} vérifiant

1. $I \in F_{j0} \cup F_{j1}$ si et seulement si il existe $J \in F_j$ tel que $I \subset J$, $j \in \{0, 1\}$.
2. $\left| \frac{\log \mu_1(I)}{n_2} + \log 4 \right| < \epsilon^2$ pour tout $I \in F_{00}$.
3. $\left| \frac{\log \nu_1(I)}{n_2} + h(\rho_1) \right| < \epsilon^2$ pour tout $I \in F_{11}$.
4. $\sum_{\substack{J \in F_{00} \\ J \subset I}} \mu_1(J) > (1 - \epsilon^2) \mu_1(I)$ et $\sum_{\substack{J \in F_{01} \\ J \subset I}} \nu_1(J) > (1 - \epsilon^2) \nu_1(I)$ pour $I \in F_0$
5. $\sum_{\substack{J \in F_{10} \\ J \subset I}} \mu_1(J) > (1 - \epsilon^2) \mu_1(I)$ et $\sum_{\substack{J \in F_{11} \\ J \subset I}} \nu_1(J) > (1 - \epsilon^2) \nu_1(I)$ pour $I \in F_1$

Nous posons pour $I \in F_{00} \cup F_{10}$, $J \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

$$\mu_2(IJ) = \mu_1(I) \lambda_0(J), \quad \nu_2(IJ) = \nu_1(I) \rho_0(J)$$

et pour $I \in F_{01} \cup F_{11}$, $J \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

$$\mu_2(IJ) = \mu_1(I) \lambda_1(J), \quad \nu_2(IJ) = \nu_1(I) \rho_1(J).$$

Pour $I \in \mathcal{F}_n$, avec $n \leq n_2$ nous laissons $\mu_2(I) = \mu_1(I)$ et $\nu_2(I) = \nu_1(I)$.

C) Nous procédons par récurrence. Supposons que les mesures μ_k et ν_k ainsi que la partition $\{F_{i_1 \dots i_k}, i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}\}$ de \mathcal{F}_{n_k} soient construites. En accord avec les étapes précédentes nous supposons que les restrictions des mesures μ_k et ν_k sur les carrés de \mathcal{F}_{n_k} sont des mesures de Bernoulli; notamment, elles sont soit λ_0 et ρ_0 soit λ_1 et ρ_1 .

Définissons les mesures μ_{k+1} et ν_{k+1} et la partition $\{F_{i_1 \dots i_{k+1}}, i_1, \dots, i_{k+1} \in \{0, 1\}\}$. D'après les hypothèses les mesures μ_k et ν_k sont singulières entre elles. Il existe donc $n_{k+1} > n_k$ et une partition $\{F_{i_1 \dots i_{k+1}}, i_1, \dots, i_{k+1} \in \{0, 1\}\}$ de $\mathcal{F}_{n_{k+1}}$ vérifiant

1. $I \in F_{i_1 \dots i_k 0} \cup F_{i_1 \dots i_k 1}$ si et seulement si il existe $J \in F_{i_1 \dots i_k}$ tel que $I \subset J$, où $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$
2. $\left| \frac{\log \mu_k(I)}{n_{k+1}} + \log 4 \right| < \epsilon^{k+1}$ pour tout $I \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 00}$.
3. $\left| \frac{\log \nu_k(I)}{n_2} + h(\rho_1) \right| < \epsilon^{k+1}$ pour tout $I \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 11}$.
4. $\sum_{\substack{J \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 00} \\ J \subset I}} \mu_k(J) > (1 - \epsilon^{k+1})\mu_k(I)$ et $\sum_{\substack{J \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 01} \\ J \subset I}} \nu_k(J) > (1 - \epsilon^{k+1})\nu_k(I)$,
pour tout carré $I \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 0}$.
5. $\sum_{\substack{J \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 10} \\ J \subset I}} \mu_k(J) > (1 - \epsilon^{k+1})\mu_k(I)$ et $\sum_{\substack{J \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 11} \\ J \subset I}} \nu_k(J) > (1 - \epsilon^{k+1})\nu_k(I)$,
pour tout carré $I \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 1}$.

Soit $I \in F_{i_1 \dots i_k 0}$, avec $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$. Pour $J \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ nous posons

$$\mu_{k+1}(IJ) = \mu_k(I)\lambda_0(J) \quad \text{et} \quad \nu_{k+1}(IJ) = \nu_k(I)\rho_0(J).$$

Soit $I \in F_{i_1 \dots i_k 1}$, $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$. Pour $J \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ nous posons

$$\mu_{k+1}(IJ) = \mu_k(I)\lambda_1(J) \quad \text{et} \quad \nu_{k+1}(IJ) = \nu_k(I)\rho_1(J).$$

La suite de mesures $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ainsi (respectivement $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$) converge vers une mesure de probabilité μ (respectivement ν). Nous montrons que μ et ν sont deux mesures doublantes, monodimensionnelles, satisfaisant à la condition (5.55) et telles que $\dim \mu = 1$ et $\dim \nu \leq \frac{1}{2}$, si δ est assez petit.

$\alpha)$ Les mesures μ et ν sont doublantes.

Soit $x \in \mathbb{K}$. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, comme convenu, $I_n(x)$ l'unique carré de \mathcal{F}_n contenant x . Nous voulons montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\frac{\mu(I_n(x))}{\mu(I_{n-1}(x))} > c$ (respectivement $\frac{\nu(I_n(x))}{\nu(I_{n-1}(x))} > c$). Pour cela il suffit de remarquer que soit $\frac{\mu(I_n(x))}{\mu(I_{n-1}(x))} = \frac{\lambda_1(I_n(x))}{\lambda_1(I_{n-1}(x))}$ soit $\frac{\mu(I_n(x))}{\mu(I_{n-1}(x))} = \frac{\lambda_0(I_n(x))}{\lambda_0(I_{n-1}(x))}$. Il existe donc, par la définition des mesures λ_0 et λ_1 , une constante $c > 0$ telle que $\frac{\mu(I_n(x))}{\mu(I_{n-1}(x))} > c$. L'argument s'applique également à la mesure ν .

$\beta)$ La dimension de la mesure μ est égale à 1, tandis que la dimension de la mesure ν est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Nous utilisons la version du théorème de Billingsley, adaptée aux ensembles de Cantor.

Définissons les ensembles

$$E = \{x \in \mathbb{K} ; \text{ il existe } n_0 = n_0(x) \text{ tel que } \frac{\mu(I_n(x))}{\mu(I_{n-1}(x))} = \frac{\lambda_0(I_n(x))}{\lambda_1(I_{n-1}(x))} = \frac{1}{4}, \forall n \geq n_0\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{K} ; \text{ il existe } n_0 = n_0(x) \text{ tel que } \frac{\nu(I_n(x))}{\nu(I_{n-1}(x))} = \frac{\rho_1(I_n(x))}{\rho_1(I_{n-1}(x))}, \forall n \geq n_0\}$$

Nous montrons dans un premier temps que

$$\mu(E) = 1 \quad \text{et} \quad \nu(F) = 1 \quad (5.61)$$

Nous procédons par un calcul direct. Soit $I \in F_{i_1 \dots i_k}$ où $k \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$.

$$\begin{aligned} & \mu \left(I \cap \bigcup_{n \geq k} \{F_{i_1 \dots i_k j_{k+1} \dots j_n} ; \text{ il existe } k < j \leq n, i_j = 1\} \right) \leq \\ & \leq \sum_{\substack{i_{k+1} \dots i_n = 0 \\ i_{n+1} = 1 \\ n \geq k}} \mu(I \cap \cup \{J ; J \in F_{i_k+1 \dots i_{n+1}}\}) \leq (\sum_{n \geq k} \epsilon^n) \mu(I). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Il s'ensuit que pour μ -presque tout $x \in \mathbb{K}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si x appartient à $F_{i_1 \dots i_n}$, alors $i_{n_0+1} = \dots = i_n = 0$; par conséquent $\mu(E) = 1$. Pour la même raison $\nu(F) = 1$.

Or, pour $x \in E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \mu(I_n(x))}{n} = -\log 4 \quad (5.63)$$

D'autre part, par la construction des mesures ν_n , $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(I_n(x))}{n} = -h(\rho_1) \text{ pour } \nu\text{-presque tout } x \in F \quad (5.64)$$

Par la remarque 5.1.16 et les relations (5.61), (5.63), (5.64) nous obtenons $\dim \mu = 1$ et $\dim \nu = \frac{h(\rho_1)}{\log 4}$. Or, si δ est choisi assez petit nous avons

$$h(\nu_1) = -3\delta(1-\epsilon) \log(\delta(1-\epsilon)) - (1-3\delta(1-\epsilon)) \log(1-3\delta(1-\epsilon)) \leq \frac{1}{8}.$$

γ) Les mesures μ et ν sont monodimensionnelles.

Nous appliquons encore le théorème de Billingsley. Soit $M \subset F$ compact tel que $\nu(M) > 0$. Il existe alors $M' \subset M$ tel que $\nu(M') = \nu(M)$ et pour tout $x \in M'$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \nu(I_n(x))}{n} = -h(\rho_1).$$

A l'aide de la remarque 5.1.16 nous en déduisons $\dim M' = \frac{h(\nu_1)}{\log 4}$. Pour montrer que la mesure μ est monodimensionnelle la démarche est identique.

$\delta)$ Les mesures μ et ν vérifient la condition (5.55).

Ceci est immédiat de la définition des mesures λ_0, ρ_0 et λ_1, ρ_1 .

Construction d'une mesure μ et d'une suite de mesures $(\tilde{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Nous construisons une mesure μ et une suite de mesures $(\tilde{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ portées par l'ensemble de Cantor \mathbb{K} , vérifiant les conditions suivantes (nous rappelons la condition (5.45)).

1. $\dim \mu = 1$ et $\sup_{n \in \mathbb{N}} \dim \tilde{\mu}_n \leq \frac{1}{2}$
2. Pour tout $I \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{\mu(I)}{\mu(\widehat{I})} : \frac{\tilde{\mu}_n(I)}{\tilde{\mu}_n(\widehat{I})} - 1 \right| < n^{-1}$.

Nous nous appuyons sur l'exemple précédent. Nous construisons d'abord deux mesures μ et ν dont les dimensions diffèrent d'au moins $\frac{1}{2}$ et qui vérifient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{I \in \mathcal{F}_n} \left| \frac{\mu(I)}{\mu(\widehat{I})} : \frac{\nu(I)}{\nu(\widehat{I})} - 1 \right| = 0 \quad (5.65)$$

Soient $\lambda_0, \lambda_1, \rho_0, \rho_1$ les mesures construites dans la paragraphe précédente, voir relations (5.58) et (5.57). Nous construisons les mesures $\mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1$ comme avant (étapes A et B) avec $\epsilon = \frac{1}{10}$. Nous modifions seulement la troisième étape de la construction.

Notons ρ_0^n, λ_1^n les mesures de Bernoulli

$$\rho_0^n(I_1) = \rho_0^n(I_2) = \frac{1}{4} - 10^{-n} \text{ et } \rho_0^n(I_3) = \rho_0^n(I_4) = \frac{1}{4} + 10^{-n}$$

$$\lambda_1^n(I_1) = \lambda_1^n(I_2) = \lambda_1^n(I_3) = \delta(1 - 10^{-n}) \text{ et } \lambda_1^n(I_4) = 1 - 3\delta(1 - 10^{-n})$$

Supposons que les mesures μ_k et ν_k ainsi que la partition $\{F_{i_1 \dots i_k}, i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}\}$ de \mathcal{F}_{n_k} soient construites. En accord avec les étapes A et B nous supposons que les restrictions des mesures μ_k et ν_k sur les carrés de \mathcal{F}_{n_k} sont des mesures de Bernoulli différentes entre elles. Nous construisons les mesures μ_{k+1} et ν_{k+1} ainsi que la partition $\{F_{i_1 \dots i_{k+1}}, i_1, \dots, i_{k+1} \in \{0, 1\}\}$.

Par les hypothèses les mesures μ_k et ν_k sont singulières entre elles. Il existe donc $n_{k+1} > n_k$ et une partition de \mathcal{F}_{n_k} $\{F_{i_1 \dots i_{k+1}}, i_1, \dots, i_{k+1} \in \{0, 1\}\}$ de $\mathcal{F}_{n_{k+1}}$ vérifiant

1. $I \in F_{i_1 \dots i_k 0} \cup F_{i_1 \dots i_k 1}$ si et seulement si il existe $J \in F_{i_1 \dots i_k}$ tel que $I \subset J$, où $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$

2. $\left| \frac{\log \mu_k(I)}{n_{k+1}} + \log 4 \right| < \epsilon^{k+1}$ pour tout $I \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 00}$.
3. $\left| \frac{\log \nu_k(I)}{n_{k+1}} + \frac{1}{2} \log 4 \right| < \epsilon^{k+1}$ pour tout $I \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 11}$.
4. $\sum_{\substack{J \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 00} \\ J \subset I}} \mu_1(J) > (1 - \epsilon^{k+1}) \mu_k(I)$ et $\sum_{\substack{J \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 01} \\ J \subset I}} \nu_k(J) > (1 - \epsilon^{k+1}) \nu_1(I)$
pour tout carré $I \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 0}$.
5. $\sum_{\substack{J \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 10} \\ J \subset I}} \mu_1(J) > (1 - \epsilon^{k+1}) \mu_k(I)$ et $\sum_{\substack{J \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 11} \\ J \subset I}} \nu_1(J) > (1 - \epsilon^{k+1}) \nu_k(I)$
pour tout carré $I \in F_{i_1 \dots i_{k-1} 1}$.

Soit $I \in F_{i_1 \dots i_k 0}$, où $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$. Pour $J \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ nous posons

$$\mu_{k+1}(IJ) = \mu_k(I)\lambda_0(J) \quad \text{et} \quad \nu_{k+1}(IJ) = \nu_k(I)\rho_0^n(J).$$

Soit $I \in F_{i_1 \dots i_k 1}$, où $i_1, \dots, i_k \in \{0, 1\}$. Pour $J \in \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ nous posons

$$\mu_{k+1}(IJ) = \mu_k(I)\lambda_1^n(J) \quad \text{et} \quad \nu_{k+1}(IJ) = \nu_k(I)\rho_1(J).$$

Les mesures μ_{k+1} et ν_{k+1} satisfont aux hypothèses de la recurrence. De plus, les limites

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \quad \text{et} \quad \nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n$$

existent et sont des mesures de probabilité. Les mêmes arguments que précédemment montrent que les mesures μ et ν sont doublantes, monodimensionnelles avec $\dim \mu = 1$ et $\dim \nu \leq \frac{1}{2}$. De plus, par le choix des mesures λ_1^n et ρ_0^n la condition (5.65) est satisfaite.

Construisons à présent une nouvelle suite de mesures $(\tilde{\mu}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la condition (5.45). Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $k = k(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\max \left\{ \left| \frac{\lambda_0(I_j)}{\rho_0^k(I_j)} - 1 \right|, \left| \frac{\lambda_1^k(I_j)}{\rho_1(I_j)} - 1 \right| \right\} < n^{-1}, \quad \text{pour tout } j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.66)$$

Posons

$$\tilde{\mu}_n(I) = \begin{cases} \mu(I) & \text{si } I \in \mathcal{F}_m, m \leq n_k \\ \frac{\nu(I)}{\nu(P_{n_k}(I))} \mu(P_{n_k}(I)) & \text{si } I \in \mathcal{F}_m, m > n_k \end{cases} \quad (5.67)$$

où nous avons noté $P_{n_k}(I)$ le carré de \mathcal{F}_{n_k} contenant I .

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k = k(n)$ l'entier donné par (5.66). Si E est un sous-ensemble de $I \in \mathcal{F}_{n_k}$ alors $\tilde{\mu}_n(E) = 0$ si et seulement si $\nu(E) = 0$. Il s'ensuit que $\dim \tilde{\mu}_n = \dim \nu \leq \frac{1}{2}$. Pour la même raison $\tilde{\mu}_n$ est monodimensionnelle et doublante.

Or, il est facile de vérifier que par le choix de k , relation (5.66), les mesures μ_n vérifient la condition (5.45).

Remarque 5.3.3 Il nous est toujours inconnu s'il existe un exemple de mesures μ et $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui soient monodimensionnelles, doublantes satisfaisant la condition (5.45) ainsi que la condition (11) de l'article incorporé en chapitre 4. Les constructions proposées ici ne semblent pas adaptables, bien que les mesures μ_n et ν_n proposées lors de la deuxième construction vérifient cette condition. Ainsi la question de continuité de la dimension des mesures harmoniques reste ouverte.

Annexe A

Mesure et dimension de Hausdorff, fractals

Nous rappelons les notions principales de la théorie de la mesure géométrique et nous en donnons quelques applications. En premier temps nous définissons la mesure et la dimension de Hausdorff et nous en donnons quelques propriétés capitales. Dans la suite nous présentons des résultats sur la densité de la mesure Hausdorff et nous introduisons les ensembles réguliers et irréguliers au sens de Besicovitch. Pour une introduction complète à la théorie de la mesure géométrique, nous proposons à titre indicatif les livres de Falconer [Fal90], de Federer [Fed69] et de Mattila [Mat95].

A.1 Mesure et dimension de Hausdorff

Soit ϕ une fonction croissante, $\phi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[,$ continue en 0, avec $\phi(0) = 0$.

Définition A.1.1 Soit E un ensemble de \mathbb{R}^d et soit $\delta > 0$. Nous posons

$$\mathcal{H}_\phi^\delta(E) = \inf_{\mathcal{F}} \sum_{\mathcal{F}} \phi(\text{diam } U)$$

l'infimum étant considéré sur tous les recouvrements de E avec des ouverts de diamètre inférieur à δ . La mesure de Hausdorff \mathcal{H}_ϕ associée à ϕ de E est définie

$$\mathcal{H}_\phi(E) = \lim_{d \rightarrow 0} \mathcal{H}_\phi^\delta(E) \tag{A.1}$$

La mesure \mathcal{H}_ϕ est une mesure extérieure pour laquelle les ensembles boréliens sont mesurables. Si $\phi(x) = x^\alpha$, avec $\alpha > 0$, nous notons $\mathcal{H}_\phi = \mathcal{H}_\alpha$ et nous l'appelons mesure de Hausdorff α -dimensionnelle. Avant d'exposer les propriétés principales des mesures de Hausdorff nous donnons la définition de la dimension de Hausdorff.

Théorème A.1.2 Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borélien. Il existe $\alpha_0 \geq 0$ tel que

- i) Pour tout $\alpha > \alpha_0$, $\mathcal{H}_\alpha(E) = 0$
- ii) Pour tout $\alpha < \alpha_0$, $\mathcal{H}_\alpha(E) = +\infty$

La dimension de Hausdorff est définie à l'aide de ce théorème.

Définition A.1.3 Pour un ensemble borélien $E \subset \mathbb{R}^d$ la dimension de Hausdorff $\dim E$ de E est définie d'être l'unique α_0 , donné par le théorème A.1.2, vérifiant $\mathcal{H}_\alpha(E) = 0$ pour tout $\alpha > \alpha_0$ et $\mathcal{H}_\alpha(E) = +\infty$ pour tout $\alpha < \alpha_0$. Nous notons également $\dim E = \dim_{\mathcal{H}} E$.

Dans \mathbb{R}^d la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle coïncide avec la mesure de Lebesgue. Remarquer également que dans la définition de la mesure de Hausdorff nous pouvons considérer des recouvrements de E avec des ensembles fermés, des boules ou des carrés. Les mesures résultantes seront équivalentes et la dimension de Hausdorff de E sera la même pour tout choix de type de recouvrement.

Exemple A.1.4 Pour un ensemble de Cantor comme ceux défini en chapitre 4 construit à partir d'une suite constante égale à $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, nous avons

$$\dim \mathbb{K} = -\frac{\log \alpha}{\log 4}$$

De plus, la mesure de Hausdorff $\dim \mathbb{K}$ -dimensionnelle vérifie

$$\mathcal{H}_{\dim \mathbb{K}}(\mathbb{K}) = 1$$

La démonstration de ces affirmations se trouvent dans [Fal90] ainsi que dans [Mat95] et utilise le fait que des recouvrements avec les carrés de la construction sont suffisantes pour le calcul de la dimension et de la mesure de Hausdorff de l'ensemble \mathbb{K} . •

Un fait capital pour la mesure de Hausdorff est le suivant (voir également [Rog70]).

Théorème A.1.5 Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borélien. Alors pour tout $\alpha > 0$

$$\mathcal{H}_\alpha(E) = \sup \{ \mathcal{H}_\alpha(F), F \subset E \text{ compact, vérifiant } \mathcal{H}_\alpha(F) < +\infty \}$$

La mesure de Hausdorff est donc régulière sur les boréliens.

Propriétés A.1.6 Soit E un ensemble borélien de \mathbb{R}^d .

- Si f est une fonction affine injective sur \mathbb{R}^d alors $\dim f(E) = \dim E$.
- Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles boréliens de \mathbb{R}^d avec $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, alors $\dim E = \lim \dim E_n$. De plus pour toute suite d'ensembles boréliens $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nous avons $\dim \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \dim E_n$.

A.2 Théorèmes de densité, ensembles réguliers au sens de Besicovitch

Cette section est consacrée à la présentation des ensembles réguliers et irréguliers au sens de Besicovitch. Il s'agit d'ensembles caractérisés selon l'existence d'une densité de la mesure de Hausdorff de l'ensemble en les points de l'ensemble. Un autre terme souvent utilisé pour les ensembles réguliers est “ensemble rectifiable” et pour les ensembles irréguliers “ensemble totalement non-rectifiable” (comparer [Fal90] et [Mat95]).

Soient $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borélien et $x \in E$. Nous notons $\Theta^{*s}(E, x)$ la s -densité supérieure de E en x (pour $s > 0$)

$$\Theta^{*s}(E, x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_s(E \cap B(x, r))}{(2r)^s} \quad (\text{A.2})$$

et $\Theta_*^s(E, x)$ la s -densité inférieure de E en x

$$\Theta_*^s(E, x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_s(E \cap B(x, r))}{(2r)^s} \quad (\text{A.3})$$

Remarquer que pour tout E , x et $s > 0$, $\Theta_*^s(E, x) \leq \Theta^{*s}(E, x)$. Pour la s -densité supérieure d'un ensemble s -dimensionnelle nous avons l'encadrement suivant

Théorème A.2.1 *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borélien avec $\mathcal{H}_s(E) < +\infty$, $s > 0$. Alors,*

$$\frac{1}{2^s} \leq \Theta^{*s}(E, x) \leq 1, \text{ en } \mathcal{H}_s\text{-presque tout point } x \in E \quad (\text{A.4})$$

A l'aide de ce théorème nous définissons les ensembles réguliers et irréguliers au sens de Besicovitch.

Définition A.2.2 *Un ensemble borélien $E \subset \mathbb{R}^d$ avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$ est appelé régulier au sens de Besicovitch si*

$$\Theta_*^{(d-1)}(E, x) = \Theta^{*(d-1)}(E, x) = 1, \text{ en } \mathcal{H}_s\text{-presque tout point } x \in E.$$

Un ensemble borélien vérifiant $\mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$ est appelé irrégulier au sens de Besicovitch si

$$\Theta_*^{(d-1)}(E, x) < 1, \text{ en } \mathcal{H}_s\text{-presque tout point } x \in E.$$

Il existe une définition équivalente des ensembles réguliers et irréguliers au sens de Besicovitch en termes de leurs intersections avec des graphes lipschitziens.

Théorème A.2.3 *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borélien avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$.*

- i) E est régulier au sens de Besicovitch si et seulement s'il existe une collection dénombrable $\mathcal{F} = (\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de graphes lipschiziens telle que

$$\mathcal{H}_{d-1}(E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n) = 0.$$

- ii) E est irrégulier au sens de Besicovitch si et seulement si pour tout Γ graphe lipschitzien

$$\mathcal{H}_{d-1}(E \cap \Gamma) = 0.$$

Remarquer qu'il existe des ensembles boreliens E avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$ qui ne sont ni réguliers ni irréguliers au sens de Besicovitch. Il suffit pour cela de considérer la réunion d'un ensemble régulier et d'un ensemble irrégulier au sens de Besicovitch. Par contre tout ensemble borelien E avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$ peut être écrit comme réunion d'un ensemble régulier et d'un ensemble irrégulier au sens de Besicovitch.

Théorème A.2.4 Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble borélien avec $0 < \mathcal{H}_{d-1}(E) < +\infty$. Il existe alors une partition $\{E_r, E_i\}$ de E , avec E_r régulier au sens de Besicovitch et E_i irrégulier au sens de Besicovitch.

Bibliographie

- [Aik85] H. Aikawa. On the thinness in a lipschitz domain. *Analysis*, **5** : 345–382, 1985.
- [Anc78] A. Ancona. Principe de harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine Lipschitzien. *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, **28** (4): 169–213, 1978.
- [Anc84] A. Ancona. Régularité d'accès de bouts et frontière de Martin d'un domaine euclidien. *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées*, **63** : 215–260, 1984.
- [Anc90a] A. Ancona. Sur la frontière de Martin des domaines de Denjoy. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, **15** : 259–271, 1990.
- [Anc90b] A. Ancona. Théorie du potentiel sur les graphes et les variétés. In *Ecole d'été de probabilités de Saint-Flour XVII*, volume **1427** of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin, 1990.
- [AZ89] A. Ancona and M. Zinsmeister. Fonctions harmoniques positives et compacts de petits dimensions. *Comptes Rendus de l'Academie de Sciences Paris*, **309** (Série I): 305–308, 1989.
- [Bat96] A. Batakis. Harmonic measure of some Cantor type sets. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, **21** : 255–270, 1996.
- [BCGJ89] C. J. Bishop, L. Carleson, J. B. Garnett, and P. W. Jones. Harmonic measures supported on curves. *Pacific Journal of Mathematics*, **138** : 233–236, 1989.
- [Bea65] A. Beardon. On the Hausdorff dimension of general Cantor sets. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **61** : 679–694, 1965.
- [Bil65] P. Billingsley. *Ergodic Theory and Information*. John Wiley & Sons, 1965.
- [Bis91] C. J. Bishop. A characterization of Poissonian domains. *Arkiv för Matematik*, **29** : 1–24, 1991.
- [Bis92] C. J. Bishop. Some questions concerning harmonic measure. In *Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications*, volume **42** of *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pages 89–98. Springer-Verlag Berlin, 1992.

- [Bou87] J. Bourgain. On the Hausdorff dimension of harmonic measure in higher dimension. *Inventiones Mathematicae*, **87** : 477–483, 1987.
- [Bre69] M. Brelot. *Axiomatique des fonctions harmoniques*. Les presses de l’Université de Montréal, 1969.
- [Car85] L. Carleson. On the support of harmonic measure for sets of Cantor type. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, **10** : 113–123, 1985.
- [Che89] N. Chevallier. Frontière de Martin d’un domaine de \mathbb{R}^n dont le bord est inclus dans une hypersurface Lipschitzienne. *Arkiv för Matematik*, **27** (1): 29–48, 1989.
- [Dah77] B. Dahlberg. Estimates of harmonic measure. *Archive of Rational Mechanical Analysis*, **65** : 275–288, 1977.
- [Doo84] J. L. Doob. *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*. Springer-Verlag New York, 1984.
- [Fal90] K. Falconer. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, 1990.
- [Fan94] A.H. Fan. Sur la dimension des mesures. *Studia Mathematicae*, **111** : 1–17, 1994.
- [Fed69] H. Federer. *Geometric measure theory*. Springer Verlag (Berlin), 1969.
- [FH76] S. Friedland and H. K. Hayman. Eigenvalue inequalities for the Dirichlet problem on spheres and the growth of subharmonic functions. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **51**: 133–161, 1976.
- [Hel69] L. L. Helms. *Introduction to Potential Theory*. John Wiley & Sons, 1969.
- [Heu97] Y. Heurteaux. Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures. A paraître dans les Annales de l’Institut Henri Poincaré (probabilités et statistiques), 1997.
- [HH80] P. Hall and C. C. Heyde. *Martingale theory and its applications*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press (New York), 1980.
- [Hör94] L. Hörmander. *Notions of convexity*. Birkhauser-Verlag Basel, 1994.
- [HW70] R. A. Hunt and R. L. Wheeden. Positive harmonic functions on Lipschitz domains. *Transactions of the American Mathematical Society*, **147** : 507–527, 1970.
- [JW86] P. Jones and T. Wolff. Hausdorff dimension of harmonic measures in the plane I. Preprint, 1986.

- [JW88] P. Jones and T. Wolff. Hausdorff dimension of harmonic measures in the plane. *Acta Mathematica*, **161** : 131–144, 1988.
- [Kah87] J.-P. Kahane. Multiplications aléatoires et dimensions de Hausdorff. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, **23** : 289–296, 1987.
- [KP76] J.-P. Kahane and J. Peyrière. Sur Certaines Martingales de Benoit Mandelbrot. *Advances in Mathematics*, **22** : 131–145, 1976.
- [Mak85] N. G. Makarov. On the distortion of boundary sets under conformal mappings. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **51** (3): 369–384, 1985.
- [Man84] A. Manning. The dimension of the maximal measure for a polynomial map. *Annals of Mathematics*, **119** : 425–430, 1984.
- [Mat95] P. Mattila. *Geometric measure theory*. Cambridge University Press, 1995.
- [MP91] T. S. Mountford and S. C. Port. Representations of bounded harmonic functions. *Arkiv för Matematik*, **29** : 107–126, 1991.
- [MV86] N. Makarov and A. Volberg. On the harmonic measure of discontinuous fractals. Preprint LOMI E-6-86, Leningrad, 1986.
- [Naï57] L. Naïm. Sur le rôle de la frontière de Martin en théorie du potentiel. *Annales de l'Institut Fourier*, **7** : 183–281, 1957.
- [Øks81] B. Øksendal. Brownian motion and sets of harmonic measure zero. *Pacific Journal of Mathematics*, **95** : 179–192, 1981.
- [Pey77] J. Peyrière. Calculs de dimensions de Hausdorff. *Duke Mathematical Journal*, **44** (3): 591–601, 1977.
- [Pom86] C. Pommerenke. On conformal mapping and linear measure. *Journal d'Analyse Mathématique*, **46** : 231–238, 1986.
- [Rog70] C. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, 1970.
- [Vol92] A. Volberg. On harmonic measure of self-similar sets in the plane. In *Harmonic Analysis and Discrete Potential theory*. Plenum Press, 1992.
- [Vol93] A. Volberg. On the dimension of harmonic measure of Cantor-type repellers. *Michigan Mathematical Journal*, **40** : 239–258, 1993.
- [Wol93] T. Wolff. Plane harmonique measures live on sets of σ -finite length. *Arkiv för Matematik*, **31** (1): 137–172, 1993.
- [Wol95] T. Wolff. Counterexamples with harmonic gradients. In *Essays on Fourier Analysis in honor of Elias Stein*. Princeton University Press, 1995.

- [Zdu90] A. Zdunik. Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal measure for rational maps. *Inventiones Mathematicae*, **99** : 627–649, 1990.
- [Zha87] Y. Zhang. *Comparaison entre l'effilement interne et l'effilement minimal*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, 1987.
- [Zin97] M. Zinsmeister. *Formalisme thermodynamique et systèmes dynamiques holomorphes*, volume **4** of *Panoramas et synthèses*. Société Mathématique de France, 1997.