NOTES DE COURS

GEOMETRIE

Table des matières

1 Triangle 6

1.1 Médiatrice d'un segment . . . 6

1.2 Hauteur . . . 8

1.3 Médiane . . . 10

1.4 Découpage du plan et bissectrice . . . 17

1.4.1 Demi-plan . . . 17
1.4.2 Quart de plan . . . 19
1.4.3 Bissectrice d'un quart de plan ou de deux demi-droites . . . 23
1.4.4 Bissectrice de deux droites . . . 24
1.4.5 Bissectrice dans un triangle . . . 25
1.4.6 Quelques exercices sur les droites remarquables . . . 28

1.5 Cas d'égalité et de similitude du triangle . . . 29

1.5.1 Cas d'égalité . . . 29
1.5.2 Cas de similitude . . . 31

1.6 Des problèmes pour chercher . . . 33

2 Quadrilatère 35

3 Espace Euclidien 40

3.1 Espace euclidien : produit scalaire et norme . . . 40

3.1.1 Inégalité de Cauchy-Schartz . . . 41

3.2 Orthogonalité . . . 41

3.2.1 Projection et symétrie . . . 42

3.3 Endomorphismes « sympathiques » d'un espace euclidien. . . . 44

3.3.1 Théorème de Riesz . . . 44
3.3.2 Adjoint . . . 44
3.3.3 Endomorphisme symétrique. . . . 46
3.3.4 Automorphisme orthogonal = isométrie vectorielle . . . 48

3.4 Isométrie vectorielle . . . 50

3.4.1 Isométrie vectorielle en dimension 1 et 2. . . . 51
3.4.2 Réduction des isométries vectorielles . . . 54
3.4.3 Isométrie vectorielle en dimension 3 . . . 55

3.5 Orientation d'un espace vectoriel réel. . . . 57

3.6 L'algorithme de Gram-Schmidt et ses conséquences . . . 59

3.6.1 Isométrie et bases orthonormées . . . 59

3.6.2 L'algorithme et ses conséquences . . . 60
3.6.3 Polynôme orthogonaux. . . . 63

4 Géométrie affine 65

4.1 La définition . . . 65
4.1.1 Commentaires et interprétations. . . . 65
4.1.2 Relation de Chasles . . . 66
4.1.3 Des exemples d'espaces affines . . . 69

4.2 Applications affines . . . 69
4.2.1 Des exemples d'applications affines . . . 71
4.2.2 Construire des applications affines . . . 77

4.3 Sous-espace affine . . . 78
4.3.1 Intersection de sous-espaces affines . . . 79
4.3.2 Sous-espace affine engendré . . . 79
4.3.3 Intersection de deux sous-espaces affines . . . 80

4.4 Liens entre applications affines et sous-espaces affines . . . 81
4.4.1 Obtenir des sous-espaces affines à partir d'applications affines . . . 81
4.4.2 Parallélisme . . . 82

4.5 Des nouveaux types d'applications affines . . . 83
4.5.1 Projection . . . 83
4.5.2 Affinités . . . 85
4.5.3 Théorème de Thalès . . . 85

4.6 Points fixes d'application affine . . . 87

4.7 Notion de repères . . . 88
4.7.1 Repère cartésien . . . 88
4.7.2 Repère affine . . . 89
4.7.3 Équation barycentrique . . . 90

4.8 Barycentre . . . 92
4.8.1 Associativité du barycentre . . . 93
4.8.2 Désassociativité du barycentre . . . 93
4.8.3 Calcul du barycentre dans les espaces classiques . . . 94
4.8.4 Barycentre, application affine et sous-espace affine . . . 95

5 Géométrie affine euclidienne 99

5.1 Espace affine euclidien . . . 99
5.1.1 Orthogonalité et sous-espaces affines . . . 99
5.1.2 Projection et symétrie orthogonale affine . . . 100
5.1.3 Hyperplan médiateur . . . 100

5.2 Isométrie affine . . . 101
5.2.1 Les isométries du plan. . . . 102
5.2.2 Isométries de l'espace. . . . 104

5.3 Angle non orienté . . . 107
5.3.1 Le problème des angles non orientés. . . . 108

5.4 Angles orientés . . . 111
5.4.1 Angles orientés en dimension 3 . . . 111
5.4.2 Le cas des angles orientés dans le plan. . . . 112
5.4.3 Bissectrice de demi-droites, angle moitié, angle droit . . . 114
5.4.4 Angle orienté de droites dans le plan. . . . 116

5.4.5 Bissectrices, angle moitié . . . 117
5.4.6 Lien entre angle de droites et de demi-droites . . . 118
5.4.7 Mesure des angles . . . 119

6 Similitude 121

6.1 Classification des similitudes . . . 122
6.1.1 Similitude et point fixes . . . 122
6.1.2 Classification . . . 122
6.2 Similitude du plan affine euclidien . . . 123

7 Cercle 125

7.1 Quelques représentations du cercle . . . 125
7.1.1 Représentation implicite cartésienne . . . 125
7.1.2 Représentation implicite polaire . . . 126
7.1.3 Représentation implicite de nature géométrique : fonction de Leibniz. . . . 127
7.1.4 Une autre représentation implicite de nature géométrique . . . 128
7.1.5 Encore deux autres représentations implicites de nature géométrique . . . 129
7.1.6 Représentation paramétrique transcendante . . . 129
7.1.7 Représentation paramétrique rationnelle . . . 129
7.2 Le problème de l'intersection de deux cercles . . . 131
7.2.1 Intersection d'une droite et d'un cercle . . . 131
7.2.2 Retour au problème initial : intersection de deux cercles . . . 132
7.3 Puissance d'un point par rapport à un cercle . . . 134
7.3.1 Axe radical de deux cercles . . . 134
7.4 Cercle et transformations géométriques . . . 135

8 Coniques 138

8.1 Classification . . . 138
8.1.1 Méthode matricielle. . . . 139
8.1.2 Méthode calculatoire. . . . 140
8.2 Attributs géométriques . . . 140
8.2.1 Ellipse . . . 140
8.2.2 Hyperbole . . . 140
8.2.3 Parabole . . . 141

9 Annexe A : Algèbre linéaire 142

9.1 Éxercices de révision . . . 142
9.2 Projection . . . 144
9.2.1 Somme et somme directe . . . 144
9.2.2 Projection . . . 145
9.3 Réduction d'endomorphismes . . . 148
9.3.1 Les définitions . . . 148
9.3.2 Premiers résultats : indépendance linéaire et finitude . . . 149

10 Annexe B : nombres complexes 153

11 Pour jouer 159

Chapitre 1

Triangle

1.1 Médiatrice d'un segment

Proposition-Définition 1 – Médiatrice d'un segment. Soit $A \neq B$ deux points du plan. Il existe une unique symétrie axiale qui envoie A sur B. L'axe de cette symétrie est appelé *médiatrice de* [AB].

Avant de donner la démonstration de ce résultat, remarquons que la définition de la médiatrice n'est pas vraiment attachée au segment [AB] mais simplement à l'ensemble formé de deux points $\{A, B\}$ qui sont sont les extrémités de ce segment.

Preuve. On va donner trois démonstrations de l'unicité de la symétrie qui envoie A sur B reposant sur des arguments de nature différentes, la première sur des arguments reposant sur des connaissances sur les isométries du plan, la deuxième sur des propriétés du pliage (qui est la définition de la symétrie donnée à l'école élémentaire), la troisième sur des arguments de géométrie élémentaire (conservation de propriété par les symétries orthogonales).

Démonstration savante de l'unicité. Si s et s' sont deux tels symétries alors $r = s \circ s' = s \circ s'^{-1}$ est une isométrie directe qui a deux points fixes. C'est donc [1] l'identité. Ainsi $s = s'$.

« Démonstration pliage » de l'unicité. Si on essaye de plier la feuille pour envoyer A sur B, on n'a pas le choix : on pose A sur B et on aplatit la feuille.

Démonstration élémentaire de l'unicité. Si une telle symétrie existe, comme elle conserve les milieux, elle envoie le milieu de [AB] sur le milieu de [BA] = [AB]. Ainsi le milieu I de [AB] est sur l'axe. De plus, [AB] est perpendiculaire à l'axe de la symétrie. [2] Ainsi l'axe de la symétrie est nécessairement la perpendiculaire à [AB] passant par I. D'où l'unicité de s puisqu'une symétrie axiale est définie par son axe.

Démonstration de l'existence. Au vu de ce qui précède, il suffit de vérifier que la symétrie par rapport à la perpendiculaire à [AB] passant par I convient, ce qui résulte immédiatement de la définition de la symétrie. [3]

Proposition 3 – Trois versions de la médiatrice. Soit $A \neq B$ deux points du plan. La médiatrice de [AB] est la perpendiculaire à [AB] passant par le milieu de [AB]. C'est aussi l'ensemble $\{M, MA = MB\}$ des points du plan équidistants de A et B.

---

1. Ce « donc » résulte du théorème fondamental suivant de classification des isométries du plan (voir le théorème 180) :

Théorème 2 – Classification des isométries du plan. Les isométries d'un plan affine euclidien sont

(i) Les isométries directes
- L'identité (tous les points sont fixes)
- Une translation de vecteur non nul (pas de points fixes)
- Une rotation (un unique point fixe)

(ii) Les isométries indirectes
- Une symétrie orthogonale par rapport à une droite (une droite de point fixe)
- Une symétrie glissée c'est-à-dire la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation parallèle à l'axe de la symétrie (pas de points fixes).

2. Dans la version pliage de la symétrie, cette propriété se démontre en disant que les angle $\widehat{AID}$ et $\widehat{DIB}$ (D désigne un point de l'axe autre que I) se superposent par pliage et sont donc égaux et donc tous les deux la moitié d'un angle plat.

3. par pliage ou plus savante

Preuve. Le fait que la médiatrice de [AB] est la perpendiculaire à [AB] passant par le milieu de [AB] résulte de la démonstration de la proposition-définition 1.

Si M est sur la médiatrice alors $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$. En effet, soit s la symétrie axiale qui envoie A sur B. On a $s(\mathrm{M})s(\mathrm{A}) = \mathrm{MA}$ puisqu'une symétrie conserve les longueurs. Or $s(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ puisque M est sur l'axe de symétrie (la médiatrice). De plus, on a $s(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$. Ainsi $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$.

On propose trois démonstrations élémentaires de la réciproque : si $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ alors M est sur la médiatrice. Les deux premières reposent sur des arguments élémentaires de géométrie (niveau collège), la dernière repose sur des arguments plus avancés (vecteurs et produit scalaire).

Pour les deux premières démonstrations, on a besoin du résultat suivant (noté $(\star)$) : sur la droite [AB], le seul point qui est à égal distance de A et B est le milieu I de [AB]. En effet, on a trois cas possibles :

(i) soit A est entre M et B ; dans ce cas M est plus proche de A que de B.

(ii) soit B est entre M et A ; dans ce cas M est plus proche de B que de A.

(iii) soit M est entre A et B ; dans ce cas $\mathrm{AM} + \mathrm{MB} = \mathrm{AB}$ et comme $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$, on a $2\mathrm{AM} = \mathrm{AB}$ et donc M est le milieu de [AB].

Démonstration 1 élémentaire (raisonnement par l'absurde). Si M vérifie $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ mais n'est pas sur la médiatrice, alors M est soit du même côté de A de la médiatrice, soit du même côté de B[4]. Supposons que nous soyons dans le premier cas, le segment [MB] coupe alors la médiatrice en un point N. En particulier, on a $\mathrm{MB} = \mathrm{MN} + \mathrm{NB}$. Mais comme N est sur la médiatrice, on a $\mathrm{NA} = \mathrm{NB}$ et donc $\mathrm{MA} = \mathrm{MB} = \mathrm{MN} + \mathrm{NB} = \mathrm{MN} + \mathrm{NA}$ ce qui montre que M, N et A sont alignés dans cet ordre. Ainsi, $\mathrm{M}, \mathrm{N}, \mathrm{A}$ et B sont sur la même droite : la droite (AB), ce qui montre avec le résultat $(\star)$ que $\mathrm{M} = \mathrm{N} = \mathrm{I}$. NON !

Démonstration 2 élémentaire. Soit M vérifiant $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ et $\mathrm{M} \neq \mathrm{I}$. On va monter que la symétrie s' par rapport à (IM) envoie A sur B et donc que (IM) est la médiatrice par unicité de la symétrie qui envoie A sur B. On obtiendra ainsi que M est sur la médiatrice.

Soit $\mathrm{A}' = s'(\mathrm{A})$. On a les égalités de longueurs suivantes : $\mathrm{IB} = \mathrm{IA} = \mathrm{IA}'$ et $\mathrm{MB} = \mathrm{MA} = \mathrm{MA}'$ (car s' conserve les longueurs et I et M sont sur l'axe de s' donc $s'(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ et $s'(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$). Ainsi A', A et B appartiennent aux cercles de centre I de rayon IA et aux cercles de centre M et de rayon MA. Mais deux cercles de centre distincts ne se rencontrent qu'en au plus deux points (voir la proposition 257). Comme $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, on en déduit que $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{A}'$. Dans le premier cas, A est sur la droite (MI) et donc $\mathrm{M} \in (\mathrm{AI}) = (\mathrm{AB})$ ce qui montre que $\mathrm{M} = \mathrm{I}$ d'après le résultat $(\star)$. NON. Ainsi $\mathrm{B} = \mathrm{A}'$ ce qu'on souhaitait.

Démonstration 3 savante. Grâce à la relation entre longueur et produit scalaire, on a les équivalences suivantes :

$$\mathrm{MA} = \mathrm{MB} \iff \mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2 \iff \langle \overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}} \rangle .$$

La bilinéarité du produit scalaire donne $\langle \overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}} \rangle$. On en déduit que

$$\mathrm{MA} = \mathrm{MB} \iff \langle \overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \rangle = 0$$

Or la relation de Chasles assure que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ (voir la remarque 8 pour plus de détails sur cette égalité). Ainsi $\mathrm{MA} = \mathrm{MB} \iff \langle \overrightarrow{\mathrm{BA}}, 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \rangle = 0$. On en déduit que $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. L'ensemble des points M vérifiant cette dernière propriété étant clairement la perpendiculaire à (AB) passant par I.

On remarquera le bénéfice à manipuler des carrés de distances plutôt que des distances : cela permet d'utiliser les vecteurs et les produits scalaires.

Théorème 4 — Médiatrice d'un triangle. Soit ABC un (vrai[5]) triangle. Les médiatrices de [AB], [AC] et [BC] sont concourantes en un point O.

Ce point est l'unique point du plan qui est le centre d'un cercle passant par ABC et il existe un unique cercle passant par A, B et C. Ce cercle est appelé *le cercle circonscrit à* ABC.

Preuve. Les médiatrices de [AB] et [BC] se rencontrent. En effet, sinon elles seraient parallèles et [AB] et [BC] le seraient aussi et A, B et C seraient alignés[6].

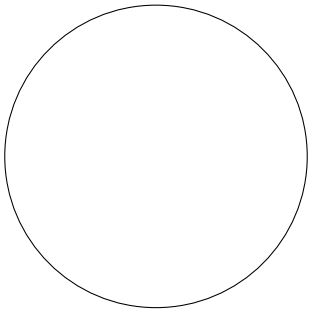
4. Voir la section 1.4 et plus particulièrement la proposition 16 qui détaille ces questions.
5. c'est-à-dire que A,B,C ne sont pas alignés.
6. On utilise ici la caractérisation des médiatrices comme perpendiculaire passant par le milieu.

Notons O leur point d'intersection. D'après la proposition 1, on a OA = OB et OB = OC[7]. On en déduit que OA = OC et que O est donc sur la médiatrice de [AC]. Les trois médiatrices sont bien concourantes en O.

Le cercle de centre O et de rayon OA passe par A, B, C. Ainsi il existe un cercle passant par A, B et C. Montrons qu'il n'y en a pas d'autre.

Si $\mathscr{C}$ est un cercle qui passe par A, B et C. On note O′ son centre. On a alors O′A = O′B. Ainsi O′ est sur la médiatrice de [AB]. De même, il est sur la médiatrice de [BC]. Donc il est à l'intersection de ces deux médiatrices c'est-à-dire en O. Le rayon d'un cercle de centre O passant par A est nécessairement OA. Ainsi $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon OA.

Exercice 1 Trouver à la règle et au compas le centre de ce cercle.



Exercice 2 — Des médiatrices. Soit ABC un triangle et M un point du plan. On note I le symétrique de M par rapport à (BC), J le symétrique de M par rapport à (AC) et K le symétrique de M par rapport à (AB). Soit $\mathscr{D}$ la perpendiculaire à (IJ) passant par C, $\mathscr{D}'$ la perpendiculaire à (IK) passant par B et $\mathscr{D}''$ la perpendiculaire à (JK) passant par A.

a) Montrer que $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont concourantes en un point M′. On dit que M′ est l'inverse isogonal de M.

b) Déterminer l'inverse isogonal de H l'orthocentre de ABC.

c) Déterminer les inverses isogonaux du centre du cercle inscrit et des centres des cercles exinscrits à ABC .

1.2 Hauteur

Définition 5 — Hauteur d'un triangle. Soit ABC un triangle. On appelle hauteur issue de A dans le triangle ABC

(*i*) la droite perpendiculaire à (BC) passant par A ;
(*ii*) le segment $[AH_A]$ où H_A est le projeté orthogonal de A sur (BC) ;
(*iii*) la longueur AH_A du segment $[AH_A]$.

C'est le contexte qui permet de savoir laquelle des trois définitions est utilisée.

Proposition 6 — Intersection des hauteurs. Les trois hauteurs d'un vrai[8] triangle ABC sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle et noté H Le point H vérifie la relation $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (où G est le centre de gravité du triangle et O le centre de son cercle circonscrit). En particulier O, G et H sont alignés sur ce qui est appelé la droite d'Euler du triangle.

De plus, les symétriques de H par rapport à chacun des trois côtés de ABC appartiennent au cercle circonscrit à ABC.

Preuve. On va démontrer la propriété de concourt de quatre façons différentes. L'une des démonstrations donnera la relation vectorielle entre O, G et H.

Démonstration 1 élémentaire. On va faire de notre triangle ABC le triangle des milieux d'un « grand » triangle. Soit D_A la parallèle à (BC) passant par A ; D_B la parallèle à (AC) passant par B

7. on bascule ici vers l'autre caractérisation de la médiatrice
8. les trois sommets ne sont pas alignés

et D_C la parallèle à (AB) passant par C. Les droites D_A, D_B et D_C s'intersectent deux à deux (sinon des côtés du triangles seraient parallèles). On note U (resp. V, W) le point d'intersection de D_B et D_C (resp. D_A et D_C, D_A et D_B).

Montrons que ABC est le triangle des milieux de UVW. On a (UC)//(AB) et (UB)//(AC) ; ainsi UBAC est un parallélogramme. De même, BCAW est un parallélogramme. On en déduit que BW = AC = UB. Comme W ≠ U, on obtient B est le milieu de [UW]. De même, C est le milieu de [UV] et A est le milieu de [WV] [9].

La médiatrice de [UV] est alors la hauteur issue de C de ABC. De même, la médiatrice de [VW] est la hauteur issue de A de ABC et la médiatrice de [UW] est la hauteur issue de B de ABC. Comme les trois médiatrices de UVW sont concourantes, on en déduit que les hauteurs de ABC sont concourantes.

Démonstration 2 savante. Les hauteurs issues de A et B ne sont pas parallèles sinon (BC) et (CA) seraient parallèles. Appelons H le point d'intersection de ces deux hauteurs. Montrons que H est sur la hauteur issue de C c'est-à-dire que (CH) est perpendiculaire à (AB) ou encore $\langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB} \rangle = 0$. Pour cela, on calcule $\langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB} \rangle$ en utilisant la relation de Chasles et la bilinéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned}
\langle \overrightarrow{HC}, \overrightarrow{AB} \rangle &= \langle \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{CB} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Démonstration 3 savante. On note O le centre du cercle circonscrit à ABC. On définit le point X tel que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Montrons que X est sur les trois hauteurs. On note A′ (resp. B′, C′) le milieu de [BC] (resp. [AC], [AB]). On a $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. La relation de Chasles fournit alors l'égalité $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OA'}$. Ainsi la droite (AX) est parallèle à la droite (OA′) qui est la médiatrice de [BC] et donc (AX) est perpendiculaire à (BC) et passe par A, c'est donc la hauteur issue de A et X est donc sur cette hauteur. De même, X est sur les deux autres hauteurs. Ainsi les trois hauteurs sont concourantes et on a $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$ (la dernière relation s'obtenant à partir de la relation de Chasles et de la propriété de G (voir la remarque 8)).

Démonstration 4 élémentaires. On note O le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ABC et on note A′ le milieu de [BC], A″ le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A, I le deuxième point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec la hauteur issue de A et X le symétrique de I par rapport à (BC).

Comme [AA″] est un diamètre de $\mathscr{C}$, le triangles AA″I est rectangle en I. Ainsi (A″I) est perpendiculaire à (AI) donc parallèle à (BC) puisque (AI) est la hauteur issue de A. Grâce à la droite des milieux dans le triangle XA″I, on en déduit que le milieu M de [XA″] est sur [BC]. En utilisant la droite des milieux dans le triangle AXA″, on obtient (MO) parallèle à (AX) et donc perpendiculaire à (BC). Ainsi (MO) est la perpendiculaire à (BC) passant par O c'est-à-dire la médiatrice de [BC]. En particulier M = A′. On en déduit que BXCA″ est un parallélogramme. On en déduit que (BX) parallèle à (CA″) qui est perpendiculaire à (AC) (puisque [AA″] est un diamètre de $\mathscr{C}$ et que $C \in \mathscr{C}$). Ainsi (BX) est la hauteur issue de X de ABC. De même, (CX) est la hauteur issue de C de ABC. Ainsi les hauteurs de X est sur les trois hauteurs de ABC qui sont donc concourantes. De plus, les symétriques de l'orthocentre par rapport à chacun des trois côtés sont sur $\mathscr{C}$.

Exercice 3 – Système orthocentrique. Soit ABC un triangle et H l'orthocentre de ABC. Déterminer l'orthocentre de ABH, de ACH et de BCH.

9. Pour démontrer cette propriété des milieux, on peut aussi appliquer le théorème de Thalès trois fois pour obtenir successivement :

$$\frac{\overline{UB}}{\overline{BW}} = \frac{\overline{UC}}{\overline{CV}}, \quad \frac{\overline{VC}}{\overline{CU}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{AW}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{WA}}{\overline{AV}} = \frac{\overline{WB}}{\overline{BU}}.$$

Les deux premières égalités donnent
$$\frac{\overline{UB}}{\overline{BW}} = \frac{\overline{AW}}{\overline{VA}}.$$

Avec la troisième égalité, on obtient
$$\frac{\overline{UB}}{\overline{BW}} = \frac{\overline{BW}}{\overline{UB}}$$

c'est-à-dire $\left(\overline{UB}/\overline{BW}\right)^2 = 1$. On obtient ainsi $\overline{UB}/\overline{BW} = \pm 1$. Si $\overline{UB}/\overline{BW} = -1$, on a $\overrightarrow{BU} = \overrightarrow{BW}$ et donc U = W. NON. Ainsi $\overrightarrow{UB} = \overrightarrow{BW}$ et B est le milieu de [UW]. On obtient alors que C est le milieu de [UV] et A le milieu de [VW] en utilisant les deuxièmes et troisièmes égalités.

Exercice 4 Soit D_1, D_2 et D_3 trois droites concourantes. Déterminer trois points du plan ABC tel que D_1, D_2 et D_3 soient les hauteurs du triangle ABC.

Exercice 5 – Cercle circonscrit. On se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Soit A, B, C trois points non alignés de $\mathscr{P}$ et A', B', C' trois points de $\mathscr{P}$.

Dans les questions **a**, **b** et **c**, on suppose qu'il existe une homothétie h de rapport non nul telle que $h(A) = A'$, $h(B) = B'$ et $h(C) = C'$.

a) Démontrer que A', B', C' ne sont pas alignés.

b) Montrer que l'image par h du cercle circonscrit à ABC est le cercle circonscrit à $A'B'C'$.

c) On note H l'orthocentre de ABC. Montrer que $h(H)$ est l'orthocentre de $A'B'C'$.

Dans les questions **d** à **f**, on suppose que A' est le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB].

d) Montrer qu'il existe une unique homothétie qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'. Déterminer son centre et son rapport.

e) Déterminer l'ensemble des homothéties qui envoie le cercle circonscrit à ABC noté $\mathscr{C}$ sur le cercle circonscrit à $A'B'C'$ noté $\mathscr{C}'$.

f) Montrer que le centre O' de $\mathscr{C}'$ est le milieu de [OH] où O est le centre de $\mathscr{C}$ et H l'orthocentre de ABC.

Exercice 6 – Des hauteurs. Soit ABC un triangle isocèle en A et I le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de I sur (AC), J le milieu de [IH]. Montrer que (AJ) et (BH) sont perpendiculaires (on pourra considérer K le milieu de [HC]).

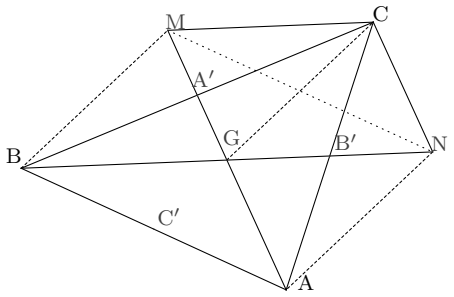
1.3 Médiane

Proposition 7 Soit ABC un triangle, A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. Les droites (AA'), (BB'), (CC') qu'on appelle les *médianes* de ABC sont concourantes en un point G appelé centre de gravité du triangle ABC qui vérifie $AG = 2GA'$, $BG = 2GB'$ et $CG = 2GC'$ et même $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GC'}$.

Preuve. On va donner six démonstrations de ce résultat.

Démonstration 1 élémentaire. Les droites (AA') et (BB') se coupent. En effet, supposons (BB') parallèle à (AA'). Dans le triangle CBB', on aurait A' qui serait le milieu de [BC] et $(AA')//(BB')$ donc (réciproque de la droite des milieux) A serait le milieu de $[CB']$. NON ! (puisque B' est le milieu de [AC]). Appelons G le point d'intersection de (AA') et (BB').

Soit M le symétrique de G par rapport à A' et N le symétrique de G par rapport à B'.



On a BMCG et ANCG qui sont des parallélogrammes puisque leurs diagonales se coupent en leur milieu (respectivement A' et B').

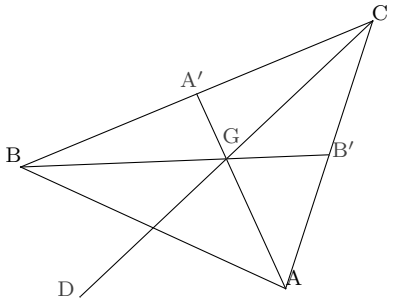
On en déduit que ABMN est un parallélogramme puisque [AN] et [BM] sont parallèles et de même longueur (tous deux parallèles et de même longueur que [GC]). Il faut aussi vérifier que ce n'est pas un quadrilatère croisé (voir l'exercice 9) ce qui est le cas puisque [AN] et [BM] sont dans le même sens que [GC] [10].

10. Cette formulation cache en fait l'utilisation des vecteurs

Ainsi [AM] et [BN] se coupent en leur milieu. Or les supports de [AM] et [BN] sont les droites (AA′) et (BB′). Ainsi G est le milieu de [AM]. On en déduit que AG = GM. Comme GM = 2GA′ (puisque M est le symétrique de G par rapport à A′). On obtient l'égalité de longueur souhaitée.

Par ailleurs, dans le triangle AMB, le point G est le milieu de [AM] et C′ le milieu de [AB]. Ainsi (GC′)//(MB) (droite des milieux). De plus, (CG)//(MB) (puisque CGBM parallélogramme). On en déduit que G, C, C′ sont sur **la** parallèle à (MB) passant par G et donc alignés. Ainsi (CC′) passe par G et les trois droites sont concourantes.

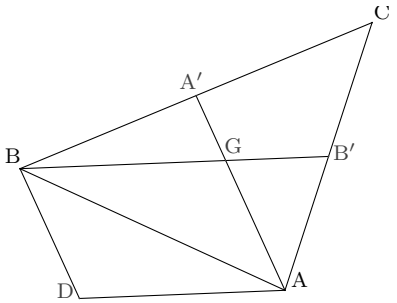
Démonstration 2 élémentaire. On reprend le début de la démonstration numéro 1. Les droites (AA′) et (BB′) se coupent (voir la justification plus haut) et on appelle G le point d'intersection de (AA′) et (BB′). On note D le symétrique de C par rapport à G.



Montrons que GADB est un parallélogramme. Comme G est le milieu de [CD] et B′ le milieu de [CA], le théorème de la droite des milieux appliquée dans le triangle ACD montre que (B′G) = (BG) est parallèle à (AD). Par le même argument, en utilisant le triangle CBD, on obtient que (AG) est parallèle à (BD). Ainsi GADB est bien un parallélogramme.

On en déduit que [GD] et [AB] se coupent en leur milieu. Ainsi C′ est le milieu de [GD] et la droite (GC) passe donc par C′. Les trois médianes sont donc concourantes. De plus, on a que GD = GC = 2GC′.

Démonstration 3 élémentaire. Cette démonstration numéro 3 est une adaptation de la démonstration numéro 2 : la différence réside qu'on définit le point D d'une façon différente (mais c'est bien le même).



On définit cette fois-ci le point D comme le point qui fait de GADB un parallélogramme c'est-à-dire le point d'intersection de la parallèle à (GA) passant par B et de la parallèle à (GB) passant par A.

Montrons que G est sur la droite (CD) et même au milieu de [CD]. Appliquons la réciproque du théorème de la droite des milieux dans le triangle CBD : on obtient que le milieu de [CD] est sur la parallèle à (BD) passant par A′ c'est-à-dire sur (AA′). Par le même raisonnement en utilisant le triangle ACD, on obtient que le milieu de [CD] est sur la parallèle à (AD) passant par B′ c'est-à-dire sur (BB′). Ainsi le milieu de [CD] est à l'intersection de (AA′) et (BB′), c'est donc G.

Comme C′ est le milieu de [DG] (puisque AGBD est un parallélogramme), on obtient que G est bien sur (CC′) que CG = 2GC′.

Démonstration 4 élémentaire. Comme pour la démonstration 1, on montre que (AA′) et (BB′) s'intersectent et on note G le point d'intersection. On note M le milieu de [AG] et N le milieu de [BG]. Montrons que MNA′B′ est un parallélogramme. Dans le triangle GAB, la droite (MN) est la droite des milieux de [GA] et [GB], elle est donc parallèle à la droite (AB) qui est parallèle à la droite (A′B′) (toujours en utilisant la droite des milieux mais cette fois-ci dans le triangle ABC). Toujours avec la droite des milieux, cette fois-ci dans les triangles ACG et BCG, on obtient que (MB′) est parallèle à (GC) et (NA′) est parallèle à (GC). Ainsi (MB′) est parallèle à (NA′) et MNA′B′ est un

quadrilatère dont les côtés sont deux à deux parallèles donc un parallélogramme. En particulier, ses diagonales se coupent en leur milieu : $[MA']$ et $[NB']$ ont donc le même milieu. Or on a $(MA') = (AA')$ et $(NB') = (BB')$ qui se coupent en G. Ainsi G est le milieu de $[MA']$ et celui de $[NB']$. On en déduit ainsi les relations de longueur : $AG = 2/3AA'$ et $BG = 2/3BB'$.

Une première façon de conclure est de considérer G' le point d'intersection de (AA') et (CC'). De façon analogue, on montre que $AG' = 2/3AA'$ et donc $G = G'$. Ainsi $G \in (CC')$ est vérifie $GC = 2/3CC'$.

Une deuxième façon de conclure est de considérer le triangle ABG. Toujours en utilisant la droite des milieux, on en déduit que (NC') est parallèle à (AG) et (MC') parallèle à (GC). Ainsi $MC'NG$ est un parallélogramme. Comme $GA' = GM$ et G, A', M alignés, on en déduit que $GC'NA'$ est un parallélogramme. En particulier, (GC') est parallèle à (NA') et donc à (GB). Ainsi G, B, B' alignés et $G \in (BB')$.

Démonstration 5 savante. On va montrer le résultat suivant : il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$.

En effet grâce à la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ si et seulement si $3\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ si et seulement si $\overrightarrow{AG} = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. Cette dernière relation définit bien un unique point.

De plus, toujours avec la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$ (puisque A' est le milieu de $[BC]$ et vérifie donc $\overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{A'C} = 0$). Ainsi on a $\overrightarrow{AG} = 1/3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2/3\overrightarrow{AA'}$. En particulier, le point G est sur (AA') et vérifie les relations de longueur souhaitée. Pour les mêmes raisons, G va être sur (BB') et (CC').

Démonstration 6 cartésienne. On choisit le repère (non orthonormé) $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. La droite (AA') a pour équation $y = x$, la droite (BB') a pour équation $y = 1/2 - 1/2x$. En résolvant le système

$$\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

on obtient que leur point d'intersection a pour coordonnée $(1/3, 1/3)$. Par ailleurs, l'équation de (CC') est $y = 1 - 2x$ et on vérifie que $(1/3, 1/3)$ appartient bien à cette droite.

De plus, on a $\overrightarrow{AG} = (1/3, 1/3) = 2/3(1/2, 1/2) = 2/3\overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BG} = (-2/3, 1/3) = 2/3(-1, 1/2) = 2/3\overrightarrow{BB'}$ et enfin $\overrightarrow{CG} = (1/3, -2/3) = 2/3(1/2, -1) = 2/3\overrightarrow{CC'}$.

Remarque. On aurait pu prendre un autre repère mais les calculs auraient été plus compliqués. De plus, le fait de prendre un repère orthonormé n'est absolument pas utile : la notion de milieu n'est pas liée à la notion de longueur : elle est purement vectorielle (voir à ce propos la remarque 8). En particulier, la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ montre que dans n'importe quel repère cartésien, les coordonnées de G sont

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right).$$

Exercice 7 Reprendre démonstration 1 en utilisant des égalités vectorielles pour caractériser les parallélogrammes. Cela la simplifie beaucoup (plus de problème du quadrilatère croisé par exemple).

Exercice 8 Montrer que G est aussi le centre de gravité de $A'B'C'$.

Remarque 8 À propos de la démonstration 4, le point G est caractérisé par la propriété suivante : pour tout point M, on a $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. En effet, par définition, on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$. En appliquant la relation de Chasles avec M, on a

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MC} = 0$$

et donc $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Inversement, soit G' un point qui vérifie pour tout point M, on a $3\overrightarrow{MG'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. En appliquant avec $M = G$, on a

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0\,.$$

et donc $\overrightarrow{GG'} = 0$ c'est-à-dire $G' = G$.

On retrouve une propriété analogue pour le milieu d'un segment. Le milieu de [AB] peut être défini par la la propriété suivante : il existe un unique point I tel que $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$. En effet, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$ est équivalent à $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BA}$ ou encore $\overrightarrow{AI}=1/2\overrightarrow{AB}$ ce qui définit bien un unique point.

De plus, ce point est caractérisé par la propriété : pour tout point M, on a $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$. En effet, par définition, on a $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$. En appliquant la relation de Chasles avec M, on a

$$\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MB}=0$$

et donc $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$. Inversement, soit I′ est un point vérifiant $2\overrightarrow{MI'}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ pour tout point M du plan. En prenant M = I, on obtient $2\overrightarrow{II'}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$ c'est-à-dire I = I′.

Ces caractérisations proviennent en fait d'une propriété générale de la notion de barycentre ; le milieu d'un segment étant en fait le barycentre de ses extrémités affectées d'un coefficient 1 et le centre de gravité d'un triangle étant le barycentre de ses sommets affectés d'un coefficient 1.

Exercice 9 – caractérisation des parallélogrammes. Soient $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien et A, B, C, D quatre points distincts et non alignés de $\mathscr{E}$.

L'objectif est de donner les caractérisations classiques du parallélogramme utilisées au collège (et même un peu plus).

a) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

- (i) (AB)//(CD) et (AD)//(BC) ;
- (ii) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$;
- (iii) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$;
- (iv) [AC] et [BD] ont le même milieu ;
- (v) AB = CD et AD = BC et ABCD est un quadrilatère convexe (c'est-à-dire que, pour tout coté, le quadrilatère est entièrement dans l'un des deux demi-plans définis par ce coté).
- (vi) AB = CD et (AB)//(CD) et ABCD est un quadrilatère convexe.
- (vii) ABCD admet un centre de symétrie et n'est pas un quadrilatère croisé.

Si (A, B, C, D) vérifie ces propriétés, on dit que c'est un parallélogramme.

b) *Une application : un théorème de Varignon.* Soient (A, B, C, D) quatre points de $\mathscr{E}$. On note I_1 le milieu de [AB], I_2 le milieu de [BC], I_3 le milieu [CD] et I_4 le milieu de [DA]. Montrer que (I_1, I_2, I_3, I_4) est un parallélogramme (on pourra utiliser le théorème de la droite des milieux dans des triangles bien choisis).

Corrigé Montrons que $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=0$ si et seulement si $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ alors (AD)//(BC). De plus, comme $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, on a aussi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et donc (AB)//(DC).

$(i) \Rightarrow (ii)$. On a $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}=\beta\overrightarrow{DC}$. On a donc $\overrightarrow{AD}=\alpha(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$. On en déduit alors que $(1-\alpha)\overrightarrow{AD}=\alpha(\beta\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC})=\alpha(1-\beta)\overrightarrow{DC}$. Comme A, B, D ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et donc $(1-\alpha)\overrightarrow{AD}=\alpha(1-\beta)\overrightarrow{DC}=0$. Ainsi $\alpha=\beta=1$.

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$. On l'a vu en cours. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$ si et seulement si $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=0$ si et seulement si D barycentre de $(A,-1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$.

$(ii) \Rightarrow (v)$. Soit I le milieu de [AC] c'est-à-dire que I est le barycentre de $(A,1)$ et $(C,1)$ (la notion de milieu est une notion barycentrique : pas une notion de longueur !). On a $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$. On veut montrer que I est aussi le milieu de [BD] c'est-à-dire que $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{ID}$.

Par hypothèse, on a $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ et donc $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}$ grâce à la relation de Chasles. Grâce à la relation $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$, on en déduit que $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{ID}$.

$(v) \Rightarrow (ii)$. Soit I le milieu commun de [AC] et [BD]. On a donc $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{BI}$. En ajoutant les deux relations, on obtient $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}$ ce qui donne $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

$(ii) \Rightarrow (vi)$. On a AD = BC. De plus, grâce à l'équivalence de (ii) et (iii), on a aussi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et donc AB = CD. De plus, comme $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, les points B et C sont du même côté de la droite (AD) (sinon, on aurait un point du segment [BC] qui serait sur la droite (AD) (théorème des valeurs

intermédiaires) et (AD) et (BC) ne seraient pas parallèles). De la même façon, A et D sont du même côté de la droite (BC) et en utilisant la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, on obtient la convexité de ABCD.

$(vi) \Rightarrow (ii)$. Le point C est sur le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre B et de rayon AD et sur le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre D et de rayon AB. Ces deux cercles n'ont pas le même centre et se rencontrent (en C). Ainsi $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ est réduit à un ou deux points qui sont symétriques par rapport à la droite (BD) qui relient les centres des cercles.

Par ailleurs, on définit C′ le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC'}$. D'après $(ii) \Rightarrow (vi)$ (appliqué aux points A, B, C' et D), on a $C' \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ et ABC′D est un parallélogramme convexe. On veut montrer que $C = C'$. On aura alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Si $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ est réduit à un point, comme C et C′ sont dans l'intersection, on en déduit que $C = C'$.

On suppose à présent que $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ contient deux points C_1 et C_2 qui sont alors de part et d'autre de la droite des centres (BD). On appelle C_1 celui qui est du même côté de (BD) que A et C_2 l'autre. On va montrer que ABC_1D n'est pas convexe et donc on aura $C \neq C_1$ et $C' \neq C_1$ et ainsi $C = C_2 = C'$.

Il reste à montrer que ABC_1D n'est pas convexe. Pour cela, on peut, quitte à échanger B et D supposer que $AB \leqslant AD$. De plus, si $AB = AD$. Alors A est sur le cercle de centre D et de rayon AB et sur le cercle de centre B et de rayon AD. Ainsi A est sur $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ et $A \neq C_2$ puisqu'ils ne sont pas du même côté de (BD). Ainsi $A = C_1$ et donc $C_1 = A \neq C$ (par hypothèse, les quatre points sont distincts) et $A \neq C'$ et donc $C = C' = C_2$.

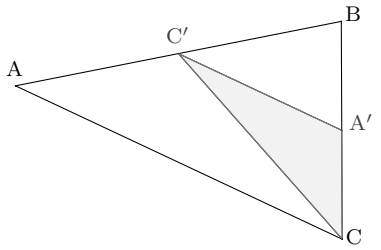
On suppose à présent que $AD > AB$. Pour montrer que ABC_1D n'est pas convexe, on commence par considérer la médiatrice $\mathscr{D}$ de [BD] et A′ le symétrique de A par rapport à $\mathscr{D}$ (on note s cette symétrie). On a $A'B = s(A)s(D) = AD$ et donc A′ est sur $\mathscr{C}_1$. De même, $A'D = s(A)s(B) = AB$ et donc A′ est sur $\mathscr{C}_2$. Ainsi $A' \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$. Mais (AA′) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et donc parallèle à (BD). En particulier, A et A′ sont du même côté de (BD) et donc $A' = C_1$.

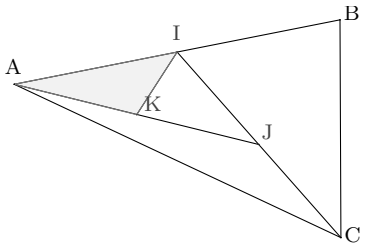
Par ailleurs, A est dans le même demi-plan délimité par $\mathscr{D}$ que B (puisque $AB < AD$) et D dans l'autre demi-plan (l'ensemble des points M du plan tel que $MB < MD$ est le demi-plan contenant B et délimité par $\mathscr{D}$). En particulier, le segment [AD] coupe $\mathscr{D}$ en un point E. Mais $s([AD]) = [C_1B]$ et $s(E) = E$. Donc $E \in [AD] \cap [C_1B]$ et C_1 et B ne sont pas du même côté de [AD] et le quadrilatère n'est donc pas convexe.

Proposition 9 – Médiane et aire. Soit ABC un triangle et A′ le milieu de [BC]. La médiane (AA′) partage le triangle ABC en deux triangles d'aire égales AA′B et AA′C.

Preuve. Lorsqu'on choisit [BA′] comme base pour ABA′ et [CA′] comme base pour ACA′, la hauteur de chacun des deux triangles est la même.

Application 10 Pour les deux figures suivantes, comparer l'aire du triangle grisé à celle de ABC





où C′ est le milieu de [AB] et A′ le milieu de [BC] ; et I le milieu de [AB], J le milieu de [IC] et K le milieu de [AJ].

Exercice 10 – Milieu.

a) Soient I, J, K trois points non alignés. Déterminer tous les triangles ABC tels que K soit le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et I le milieu de [BC].

b) Cela marche-t-il avec quatre points : soit I, J, K, L quatre points peut-on trouver un quadrilatère ABCD tel que I soit le milieu de [DA], J celui de [AB], K celui de [BC] et L celui de [CD] ? (Indication : on pourra penser au théorème de Varignon). Si oui, combien y en a-t-il ? Parmi ces quadrilatères, combien y a-t-il de parallélogrammes ?

c) Même question avec un polygône à n sommets (voir CAPES 1988 deuxième sujet).

Exercice 11 — Une presque caractérisation des médianes et du centre de gravité.

1) Soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles et O leur point d'intersection. Soit $k > 0$. On veut montrer que le lieu $\mathscr{L}$ des points M tel que $d(\mathrm{M}, \mathscr{D}) = kd(\mathrm{M}, \mathscr{D}')$ est formé de deux droites passant par O.

a) Soit $\mathrm{P} \neq \mathrm{O} \in \mathscr{L}$. Montrer que (OP) est contenue dans $\mathscr{L}$. En déduire que $\mathscr{L}$ est une réunion de droites passant par O.

b) Soit Δ une parallèle à $\mathscr{D}'$ ne passant pas par O. Montrer que Δ contient exactement deux points de $\mathscr{L}$. En déduire que $\mathscr{L}$ est formé de deux droites passant par O.

Les questions **c** et **d** proposent une autre démonstration du résultat de la question **1** via l'utilisation des coordonnées. On fixe donc un repère **orthonormé** (puisqu'on va parler de distance). Soit $ax + by + c = 0$ l'équation de la droite $\mathscr{D}$ et $a'x + b'y + c' = 0$ celle de $\mathscr{D}'$.

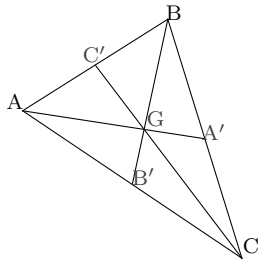
c) Déterminer (formule à retenir) la distance du point P de coordonnées (u, v) aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

d) Retrouver le résultat (on rappelle que $|\mathrm{X}| = |\mathrm{Y}|$ si et seulement si $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$ ou $\mathrm{X} = -\mathrm{Y}$).

2) Soit ABC un triangle. Déterminer le lieu des points M tels que Aire(AMB) = Aire(AMC).

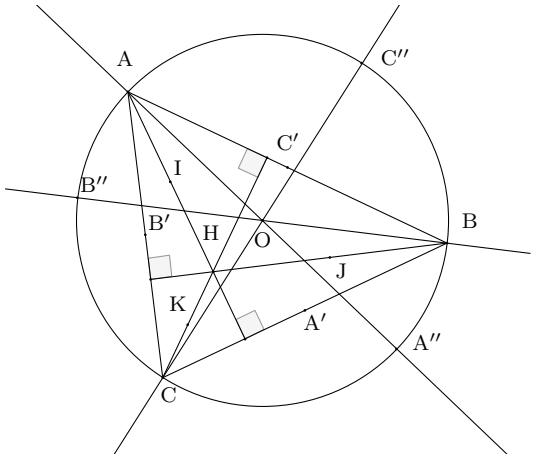
3) Soit ABC un triangle. Déterminer le lieu des points M tels que Aire(AMB) = Aire(AMC) = Aire(BMC).

4) À l'aide de la figure suivante, retrouver le fait que Aire(AGB) = Aire(AGC) = Aire(BGC) (on pourra considérer les triangles CC′B et CC′A, ainsi que GC′A et GC′B...). Montrer aussi que les six petits triangles ont la même aire.



Exercice 12 — Des médianes et des aires. Soit ABC un triangle, P le symétrique de C par rapport à B, Q le symétrique de B par rapport à A et R le symétrique de A par rapport à C. Déterminer le rapport entre l'aire de PQR et l'aire de ABC.

Exercice 13 — Un immense classique : cercle circonscrit et cercle d'Euler. Soit ABC un triangle, A′B′C′ son triangle des milieux. Le cercle circonscrit de A′B′C′ est appelé *cercle d'Euler*[11] de ABC.



On note $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC et $\mathscr{C}'$ celui de A′B′C′.

11. On trouve aussi les expressions *Cercle des neuf points*, *Cercle de Feuerbach*, *Cercle de Terquem* et *Cercle médian*

1) Soit A'' le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A. Montrer que A' est le milieu de $[HA'']$ (on pourra utiliser la relation vectorielle $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{A'O}$ (vue dans l'une des démonstrations du fait que les hauteurs sont concourantes) pour comparer $\overrightarrow{HA''}$ et $\overrightarrow{HA'}$).

2) Soit H_A le deuxième point d'intersection de (AH) avec $\mathscr{C}$.

a) Montrer que l'angle $\widehat{AH_AA''}$ est droit.

b) En déduire que H_A est le symétrique de H par rapport à (BC) [12].

3) On note I le milieu de [AH], J le milieu de [BH] et K le milieu de [CH].

a) Montrer que $IB'A'J$ et $IC'A'K$ sont deux rectangles.

b) En déduire que le cercle de diamètre $[IA']$ contient A', B', C', I, J, K et est donc le cercle d'Euler de ABC.

c) Montrer que ce cercle de diamètre $[IA']$ contient aussi H_A, H_B et H_C.

4) En utilisant l'homothétie de centre H et de rapport 1/2, retrouver le résultat de la question **3** c'est-à-dire que $\mathscr{C}'$ passe par les pieds des hauteurs de ABC et les milieux de [AH], [BH] et [CH].

5) Détermination du centre du cercle d'Euler

a) Montrer que OHH_AA' est un trapèze rectangle.

b) En déduire que la médiatrice de $[H_AA']$ passe par le milieu de [OH].

c) En déduire que le centre du cercle d'Euler est le milieu de [OH].

Les démonstrations que nous avons vues utilisent fréquemment le théorème de la droite des milieux. L'exercice suivant en propose différentes démonstrations.

Exercice 14 — La droite des milieux. Soit ABC un triangle, on note A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB].

L'objectif de cet exercice est de donner plusieurs preuves du théorème de la droite des milieux : on a $(B'C')//(BC)$ et $B'C' = \frac{1}{2}BC$.

1) *Démonstration « savante »* Montrer que $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (on pourra utiliser la relation de Chasles). Conclure.

Démonstrations « élémentaires » La vraie difficulté est de montrer que $(B'C')$ est parallèle à (BC) (la suite de l'exercice propose plusieurs preuves élémentaires de ce résultat). Ensuite la relation de longueur est facile à obtenir.

2) Commençons par montrer comment obtenir la relation sur les longueurs une fois qu'on sait que (BC) et $(B'C')$ sont parallèles. Montrer que $B'C'A'C$ et $B'C'BA'$ sont des parallélogrammes. Conclure sur l'égalité des longueurs $B'C' = \frac{1}{2}BC$.

3) *Démonstration 1 du parallélisme.* Soit K le symétrique B' par rapport à C'. Montrer que $AB'BK$ puis $KB'CB$ sont des parallélogrammes.

4) *Démonstration 2 du parallélisme.* Soit A'' le pied de la hauteur issue de A. On note I le symétrique de A'' par rapport à C' et J le symétrique de A'' par rapport à B'. Que dire des quadrilatères $A''BIA$ et $A''CJA$? En déduire que IJ est la médiatrice de [AH]. Conclure.

Pour d'autres démonstrations élémentaires, voir

www.ac-corse.fr/math/file/117/

Remarque 11 — « Réciproque » au théorème de la droite des milieux. Soit ABC un triangle et I le milieu de [AB]. On va montrer (très rapidement) qu'une droite parallèle à (BC) et passant par I passe J par le milieu de [AC].

12. On a ainsi montré que les symétriques de l'orthocentre par rapport au côté du triangle sont sur le cercle circonscrit

Le point crucial provient de la remarque suivante : il n'y a qu'une seule droite parallèle à (AB) passant par I (c'est le postulat d'Euclide). Or d'après l'exercice précédent, la droite (IJ) est parallèle à (BC) et passe par J. C'est donc la même que la droite dont on est parti et elle passe par J.

Ainsi, lorsqu'on connaît le sens direct, la réciproque est immédiate. C'est un raisonnement classique en géométrie. On le verra de nouveau pour le théorème de Thalès dont le théorème de la droite des milieux est un cas particulier.

1.4 Découpage du plan et bissectrice

Nous passons à présent au dernier type classique de droites remarquables dans un triangle : il s'agit des bissectrices. Là encore, les bissectrices d'un triangle sont concourantes. Grâce à la caractérisation des bissectrices comme ensemble des points du plan à égale distance des deux droites concernées, on pourrait penser naïvement que la preuve du fait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes s'adapte très facilement au cas des bissectrices en remplaçant les distances aux sommets (OA, OB et OC) par les distances aux côtés du triangle $(d(\mathrm{I},(\mathrm{AB})), d(\mathrm{I},(\mathrm{AC})), d(\mathrm{I},(\mathrm{BC}))$ [13]. Il n'en est rien car il n'y a pas qu'une bissectrice mais deux bissectrices qui sont perpendiculaires. Il faut donc faire bien plus attention. Cela nécessite en particulier de déterminer dans quelles parties du plan les différents points se trouvent. Pour cela, on va définir les notions de demi-plan, quart de plan.

1.4.1 Demi-plan

On considère un plan affine $\mathscr{P}$ et $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère du plan. Les coordonnées d'un point M du plan sont les réels (x, y) tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.

Définition 12 — Forme affine. On appelle *forme affine* [14], une application $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante

$$f(\mathrm{A} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = (1-t)f(\mathrm{A}) + tf(\mathrm{B}) \quad \text{pour tous } \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{P} \text{ et tout } t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 13 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. L'application qui a M de coordonnées (x, y) associe $ax + by + c$ est une forme affine.

Inversement, tout forme affine peut s'écrire ainsi.

Preuve. Soit A de coordonnées $(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ et B de coordonnées $(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$, les coordonnées de $\mathrm{M} = \mathrm{A} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont $(x_\mathrm{A} + t(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}), y_\mathrm{A} + t(y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})) = ((1-t)x_\mathrm{A} + tx_\mathrm{B}, (1-t)y_\mathrm{A} + ty_\mathrm{B})$. On a alors

$$f(\mathrm{M}) = a((1-t)x_\mathrm{A} + tx_\mathrm{B}) + b((1-t)y_\mathrm{A} + ty_\mathrm{B}) + c = (1-t)(ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + c) + t(ax_\mathrm{B} + by_\mathrm{B} + c)$$

c'est-à-dire
$$f(\mathrm{M}) = tf(\mathrm{A}) + (1-t)f(\mathrm{B})\,.$$

Inversement, soit f une forme affine. Soit I le point de coordonnées $(1, 0)$ et J le point de coordonnées $(0, 1)$. On pose alors $c = f(\mathrm{O})$, $a = f(\mathrm{I}) - c$ et $b = f(\mathrm{J}) - c$. Montrons que pour M de coordonnées (x, y), on a $f(\mathrm{M}) = ax + by + c$.

Soit N sur la droite (OI). On peut écrire $\mathrm{N} = \mathrm{O} + x'\overrightarrow{i} = \mathrm{O} + x'\overrightarrow{\mathrm{OI}}$. On a $f(\mathrm{N}) = (1-x')f(\mathrm{O}) + x'f(\mathrm{I}) = (1-x')c + x'(a+c) = c + ax'$. De même, soit P sur la droite (OJ). On peut écrire $\mathrm{P} = \mathrm{O} + y'\overrightarrow{j} = \mathrm{O} + y'\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$. On a $f(\mathrm{P}) = c + by'$.

On en déduit que si M est sur (OI) ou (OJ), on a le résultat voulu : $f(\mathrm{M}) = ax + by + c$.

On suppose à présent que M n'est pas sur les axes et on choisit à présent N et P pour que la droite (NP) passe par M. Par exemple N de coordonnées $(x/2, 0)$ et P de coordonnées $(0, -y)$. On a alors $\mathrm{M} = \mathrm{P} + 2\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ et donc $f(\mathrm{M}) = (1-2)f(\mathrm{P}) + 2f(\mathrm{N}) = -(c - by) + 2(c + ax/2) = c + ax + by$.

Remarque 14 — Forme affine et vecteur. Soit A, B, C, D quatre points du plan et f une forme affine. Si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$, on a $f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{D}) - f(\mathrm{C})$ (c'est-à-dire la valeur « f de extrémité - f de origine est indépendant du représentant du vecteur »). Proposons deux démonstrations de ce résultat.

Démonstration 1 : par les coordonnées On choisit un repère, on note $(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$,... les coordonnées des points A, B, C, D. Dans ce repère, f est donnée par $ax + by + c$. On a alors $f(\mathrm{B}) - f(\mathrm{A}) =$

13. C'est un exercice très intéressant d'adapter la démonstration et de voir où a lieu le problème.

14. Dans le chapitre 4, on définira (définition 104) une notion générale d'application affine entre deux espaces affines, lorsque l'espace d'arrivée d'une application affine est $\mathbb{R}$, on parle alors de **forme** affine (tout comme on parle de **forme** linéaire pour les applications linéaires à valeurs dans le corps de base).

$a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A)$ et $f(D) - f(C) = a(x_D - x_C) + b(y_D - y_C)$. Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on obtient le résultat voulu.

Démonstration 2 géométrique. On suppose que A, B, C ne sont pas alignés et on définit les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC}$ [15].

On a alors $I = A + 2\overrightarrow{AB}$ et $J = A + 2\overrightarrow{AC}$. Ainsi $f(I) = (1-2)f(A) + 2f(B)$ et $f(J) = 2f(C) - f(A)$. Par ailleurs, on a D qui est le milieu de [IJ] [16]. Ainsi, on a $D = I + 1/2\overrightarrow{IJ}$ et donc $f(D) = 1/2(f(I) + f(J))$. On obtient alors $f(D) = f(B) + f(C) - f(A)$ comme désiré.

Si maintenant, A, B, C sont alignés. On considère E qui n'est pas sur (AB) et F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. D'après ce qui précède, on a $f(B) - f(A) = f(F) - f(E) = f(D) - f(C)$ (puisque A, B et E ne sont pas alignés et E, F et C non plus).

Définition 15 – Demi-plan. Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ et f la forme affine qui a M de coordonnées (x, y) associe $ax + by + c$. Le plan $\mathscr{P}$ se partitionne entre trois parties

(*i*) $\mathscr{D} = \{M,\ f(M) = 0\}$
(*ii*) $\mathscr{P}_+ = \{M,\ f(M) > 0\}$
(*iii*) $\mathscr{P}_- = \{M,\ f(M) < 0\}$

Les parties $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ sont nommées *demi-plans ouverts de frontière* $\mathscr{D}$. Les parties

$$\mathscr{P}_{\geqslant 0} := \mathscr{P}_+ \cup \mathscr{D} = \{M,\ f(M) \geqslant 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P}_{\leqslant 0} := \mathscr{P}_- \cup \mathscr{D} = \{M,\ f(M) \leqslant 0\}$$

sont nommées *demi-plans fermés de frontière* $\mathscr{D}$.

Proposition 16 – Quelques propriétés élémentaires des demi-plans.

(*i*) Les demi-plans (ouverts et fermés) sont des ensembles convexes [17] et non vide.
(*ii*) Les demi-plans ouverts sont des ensembles ouverts, les demi-plans fermés sont des ensembles fermés.
(*iii*) La frontière topologique [18] d'un demi-plan (ouvert ou fermé) est la droite frontière [19].
(*iv*) Si $M \in \mathscr{P}_+$ et $N \in \mathscr{P}_-$ alors [MN] rencontre $\mathscr{D}$ en un unique point.
(*v*) Soit $M \in \mathscr{P}_+$, la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par M est contenue dans $\mathscr{P}_+$
(*vi*) Soit $M \in \mathscr{D}$ et $N \in \mathscr{P}_+$, la demi-droite $]M, N)$ est contenue dans $\mathscr{P}_+$.
(*vii*) La symétrie axiale s d'axe $\mathscr{D}$ échange $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$.
(*viii*) Soit $\mathscr{D}'$ une droite alors l'intersection de $\mathscr{D}'$ avec un demi-plan fermé de frontière $\mathscr{D}$ est $\varnothing$ ou $\mathscr{D}'$ si $\mathscr{D}' // \mathscr{D}$ ou une demi-droite dont l'origine est $\mathscr{D}' \cap \mathscr{D}$ sinon.

Preuve. (*i*) Montrons que $\mathscr{P}_+$ est convexe. Soit $A, B \in \mathscr{P}_+$, on a $f(A) > 0$, $f(B) > 0$. Pour $t \in [0, 1]$, on a $f(A + t\overrightarrow{AB}) = (1-t)f(A) + tf(B) > 0$ puisque $(1-t) \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$ (et t et $1-t$ ne sont pas nuls en même temps).

Pour montrer que $\mathscr{P}_-, \mathscr{P}_{\geqslant 0}, \mathscr{P}_{\leqslant 0}$ sont convexes, le raisonnement est le même en remplaçant $>$ respectivement par $<, \geqslant, \leqslant$.

Pour montrer que $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ ne sont pas vide, on considère $M \in \mathscr{D}$ et $P \in\notin \mathscr{D}$ (un tel couple existe toujours) ; en particulier, on a $f(P) \neq 0$. On pose alors $Q = M - \overrightarrow{MP}$. Comme f est affine, on a $f(Q) = 2f(M) - f(P) = -f(P)$ puisque $f(M) = 0$. Ainsi $f(P)$ et $f(Q)$ sont de signes opposés. On obtient ainsi que $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ ne sont pas vide (l'un de deux contient P et l'autre Q).

(*ii*) Montrons que les demi-plans ouverts sont des ensembles ouverts et les demi-plans fermés sont des ensembles fermés. Comme le complémentaire d'un demi-plan ouvert est un demi-plan fermé, il suffit de montrer qu'un demi-plan ouvert est un ouvert. Or un demi-plan ouvert est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ par l'application **continue** f.

(*iii*) Étudions la frontière topologique d'un demi-plan ouvert : par exemple $\mathscr{P}_+$. Comme $\mathscr{P}_+$ est ouvert, il s'agit de montrer que l'adhérence de $\mathscr{P}_+$ est $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$. Or $\mathscr{P}_+ \subset \mathscr{P}_{\geqslant 0}$ et $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$ est fermé donc l'adhérence de $\mathscr{P}_+$ est contenu dans $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$ et contient bien évidemment $\mathscr{P}_+$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que tout point de $\mathscr{D}$ est dans l'adhérence de $\mathscr{P}_+$. Soit donc $N \in \mathscr{D}$ et $M \in \mathscr{P}_+$. Pour

15. Faire la figure pour y voir quelque chose !
16. En effet, on a $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{AC}$. Mais $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CJ}$ donc $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{DJ}$.
17. Un sous-ensemble X du plan est convexe si pour tous A, B dans X le segment $[AB] := A + t\overrightarrow{AB}, t \in [0, 1]$ est contenu dans X.
18. Si X est un sous-ensemble du plan, la frontière topologique de X est $\overline{X} \setminus \mathring{X}$
19. ce qui « justifie » son nom de frontière

tout $t > 0$, on a $\mathrm{N} + t\overrightarrow{\mathrm{NM}} \in \mathscr{P}_+$ puisque $f(\mathrm{N} + t\overrightarrow{\mathrm{NM}}) = (1-t)f(\mathrm{N}) + tf(\mathrm{M}) = tf(\mathrm{M}) > 0$. En prenant une suite de réels $(t_n)_n$ avec $t_n > 0$ tendant vers 0, on obtient une suite de points de $\mathscr{P}_+$ qui tend vers N.

Étudions la frontière topologique d'un demi-plan fermé : par exemple $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$. Comme $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$ est fermé, il s'agit de montrer que l'intérieur de $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$ est $\mathscr{P}_+$. Or $\mathscr{P}_+ \subset \mathscr{P}_{\geqslant 0}$ et $\mathscr{P}_+$ est ouvert donc l'intérieur de $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$ contient $\mathscr{P}_+$ et est bien évidemment contenu $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$. Il s'agit donc de montrer qu'un point de $\mathscr{D}$ n'est pas dans l'intérieur de $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$. Si N était un point de $\mathscr{D}$ qui était dans l'intérieur de $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$, on aurait un voisinage de ce point qui serait contenu dans $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$. Mais on a montré dans le paragraphe précédent que tout voisinage de N rencontrait $\mathscr{P}_-$. NON.

(iv) Montrons que [MN] rencontre $\mathscr{D}$. Donnons deux preuves de ce résultat de nature différente.

Preuve 1 topologique. On considère la fonction continue $g\colon \mapsto f(\mathrm{M} + t\overrightarrow{\mathrm{MN}}) = (1-t)f(\mathrm{M}) + tf(\mathrm{N})$. On a $g(0) = f(\mathrm{M}) > 0$ et $g(1) = f(\mathrm{N}) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors qu'il existe $t \in \,]\,0\,,1\,[$ tel que $g(t) = 0$. Le point $\mathrm{M} + t\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ est alors sur $\mathscr{D}$. Comme M et N ne sont pas sur $\mathscr{D}$, les droites (MN) et $\mathscr{D}$ sont distinctes. Elles se rencontrent donc en au plus un point. On a trouvé un point d'intersection. Il n'y en a pas d'autre.

Preuve 2 algébrique. On cherche les solutions de l'équation d'inconnue t :

$$f(\mathrm{M} + t\overrightarrow{\mathrm{MN}}) = (1-t)f(\mathrm{M}) + tf(\mathrm{N}) = 0\,.$$

On résout cette équation du premier degré [20] et on trouve $t = f(\mathrm{M})/(f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{N}))$. Or $f(\mathrm{M}) > 0$ et $f(\mathrm{N}) < 0$ ce qui assure que $t \in \,]\,0\,,1\,[$.

(v) Soit N sur la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par M. Montrons que $f(\mathrm{N}) = f(\mathrm{M})$. On aura ainsi que $\mathrm{N} \in \mathscr{P}_+$. Soit $\mathrm{P} \in \mathscr{D}$ et Q tel que $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. On a alors $\mathrm{Q} \in \mathscr{D}$ puisque la droite (MN) est parallèle à $\mathscr{D}$. La remarque 14 assure que $f(\mathrm{N}) = f(\mathrm{M}) + f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{Q}) = f(\mathrm{M})$ puisque P et Q sont sur $\mathscr{D}$.

(vi) Soit P sur la demi-droite $]\mathrm{M}, \mathrm{N})$. On écrit $\mathrm{P} = \mathrm{M} + t\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ avec $t > 0$. On a alors $f(\mathrm{P}) = (1-t)f(\mathrm{M}) + tf(\mathrm{N}) = tf(\mathrm{N})$ puisque $\mathrm{M} \in \mathscr{D}$. Comme $\mathrm{N} \in \mathscr{P}_+$ et $t > 0$, on obtient $f(\mathrm{P}) > 0$.

(vii) Soit $\mathrm{N} \in \mathscr{P}_+$ (resp. $\mathscr{P}_-$) et P le projeté orthogonal de N sur $\mathscr{D}$. On a $s(\mathrm{N}) = \mathrm{P} - \overrightarrow{\mathrm{PN}}$ et donc $f(s(\mathrm{N})) = (1-(-1))f(\mathrm{P}) + (-1)f(\mathrm{N}) = -f(\mathrm{N})$ puisque $\mathrm{P} \in \mathscr{D}$. On en déduit que $\mathrm{N} \in \mathscr{P}_-$ (resp. $\mathscr{P}_+$).

($viii$) Si $\mathscr{D}'//\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}' \neq \mathscr{D}$ alors $\mathscr{D}'$ contenue dans $\mathscr{P}_+$ ou $\mathscr{P}_-$ d'après le point (v). On obtient le résultat souhaité.

Supposons $\mathscr{D}'$ n'est pas parallèle à $\mathscr{D}$ et que le demi-plan est $\mathscr{P}_{\geqslant 0}$. On note O l'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ et on considère $\mathrm{N} \in \mathscr{D}'$ avec $\mathrm{N} \neq \mathrm{O}$. On a $f(\mathrm{N}) \neq 0$. Un élément de $\mathscr{D}'$ s'écrit alors $\mathrm{P} = \mathrm{O} + t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ et on a $f(\mathrm{P}) = tf(\mathrm{N})$. Ainsi P appartient à $\mathscr{D}' \cap \mathscr{P}_{\geqslant 0}$ si et seulement si t est du signe de $f(\mathrm{N})$ ce qui donne le résultat souhaité.

1.4.2 Quart de plan

Définition 17 — Quart de plan. Soit $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites **non parallèles** et O le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On appelle quart de plan $\mathscr{Q}$ défini par $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ l'intersection d'un demi-plan $\mathscr{P}_1$ de frontière $\mathscr{D}$ avec un demi-plan $\mathscr{P}_2$ de frontière $\mathscr{D}'$. On dit que O est le sommet de $\mathscr{Q}$ [21].

On dit que $\mathscr{Q}$ est un quart de plan fermé (resp. ouvert) si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont fermés (resp. ouverts).

Proposition 18 — Quelques propriétés élémentaires des quarts de plan. Soit $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ **non parallèles** et O le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

(i) Un quart de plan est convexe, non vide.
(ii) Un quart de plan ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. un fermé).
(iii) Soit $\mathscr{Q}$ un quart de plan ouvert d'origine O et $\mathrm{N} \in \mathscr{Q}$. La demi-droite $]\mathrm{O}, \mathrm{N})$ est contenue dans $\mathscr{Q}$.
(iv) Les deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ définissent quatre demi-plans ouverts (resp. quatre quarts de plan fermés).
(v) L'adhérence d'un quart de plan est le quart de plan fermé associé.
(vi) L'intérieur d'un quart de plan est le quart de plan ouvert associé.

20. qui est vraiment du premier degré car $f(\mathrm{M}) \neq f(\mathrm{N})$ puisque $f(\mathrm{M})$ et $f(\mathrm{N})$ ne sont pas de même signe.
21. Attention, il se peut que O ne soit pas dans le quart de plan, si on considère l'intersection de deux demi-plan ouvert.

(*vii*) La frontière d'un quart de plan est constituée de deux demi-droites dont l'origine est l'origine du quart de plan.

Preuve. (*i*) L'intersection de deux convexes est convexe ou vide. Il suffit donc de montrer que l'intersection de deux demi-plans de frontière respective $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est non vide et on peut même considérer uniquement le cas où les deux demi-plans sont ouverts. Soit donc f une forme affine tel que $\mathscr{D} = \{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) = 0\}$ et g une forme affine tel que $\mathscr{D}' = \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) = 0\}$. Quitte à changer f en $-f$ et g en $-g$, on peut supposer que les demi-plans en question sont $\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) > 0\}$ et $\{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) > 0\}$. Il s'agit donc de montrer l'existence de M tel que $f(\mathrm{M}) > 0$ et $g(\mathrm{M}) > 0$.

Soit M tel que $f(\mathrm{M}) > 0$. Si $g(\mathrm{M}) > 0$, on a trouvé un point M comme on le souhaite. Si $g(\mathrm{M}) \leqslant 0$. On considère $\mathscr{D}_1$ la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par M et on fixe N différent de M sur $\mathscr{D}$[22]. On a alors $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{N})$ (d'après un calcul fait dans la preuve de la proposition 16 *(v)*) et $g(\mathrm{M}) \neq g(\mathrm{N})$. En effet, supposons que $g(\mathrm{M}) = g(\mathrm{N})$. On considère le point Q tel que $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. D'après la remarque 14, on a $g(\mathrm{Q}) - g(\mathrm{O}) = g(\mathrm{M}) - g(\mathrm{N}) = 0$ et donc $g(\mathrm{Q}) = 0$ ce qui signifie que $\mathrm{Q} \in \mathscr{D}'$ et donc $(\mathrm{MN})//\mathscr{D}'$. NON.

On considère alors P tel que $\mathrm{P} = \mathrm{M} + t\overrightarrow{\mathrm{MN}}$. On a $f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{M})$ et $g(\mathrm{P}) = g(\mathrm{M}) + t(g(\mathrm{N}) - g(\mathrm{M}))$. Comme $g(\mathrm{M}) \neq g(\mathrm{N})$, on peut choisir t tel que $g(\mathrm{P}) > 0$ (en effet si $g(\mathrm{N}) > g(\mathrm{M})$, on prend $t > -g(\mathrm{M})/(g(\mathrm{N}) - g(\mathrm{M}))$ et si $g(\mathrm{N}) < g(\mathrm{M})$, on prend $t < -g(\mathrm{M})/(g(\mathrm{N}) - g(\mathrm{M}))$).

(*ii*) L'intersection de deux ouverts (resp. fermés) est un ouvert (resp. fermé).

(*iii*) D'après la proposition 16 (*vi*), la demi-droite $]\mathrm{O}, \mathrm{N})$ est contenue dans les deux demi-plans ouverts qui définissent le quart de plan.

(*iv*) On reprend les notations de (*i*). D'après (*i*), on a les quatre quarts de plans ouverts non vide en considérant

$$\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) > 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) > 0\}, \qquad \{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) > 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) < 0\},$$

et
$$\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) < 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) < 0\} \quad \text{et} \quad \{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) < 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) > 0\}.$$

Pour les demi-plans fermés, on remplace les inégalités strictes par des inégalités larges.

(*v*) Soit f une équation de $\mathscr{D}$ et g une équation de $\mathscr{D}'$. Quitte à changer f en $-f$ et g en $-g$. On peut supposer que notre quart de plan $\mathscr{Q}$ vérifie

$$\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) > 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) > 0\} \subset \mathscr{Q} \subset \{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) \geqslant 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) \geqslant 0\}.$$

Comme $\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) \geqslant 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) \geqslant 0\}$ est fermé (intersection de deux fermés). Il suffit de montrer l'adhérence du quart de plan ouvert $\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) > 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) > 0\}$ est le quart de plan fermé $\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) \geqslant 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) \geqslant 0\}$.

Il s'agit donc de montrer que si M vérifie $f(\mathrm{M}) \geqslant 0$ et $g(\mathrm{M}) \geqslant 0$ alors M est limite d'une suite de points $(\mathrm{M}_n)_n$ vérifiant $f(\mathrm{M}_n) > 0$ et $g(\mathrm{M}_n) > 0$. Si $f(\mathrm{M}) > 0$ et $g(\mathrm{M}) > 0$ c'est évident (prendre $\mathrm{M}_n = \mathrm{M}$ pour tout n). Si $f(\mathrm{M}) > 0$ et $g(\mathrm{M}) = 0$, on considère la parallèle $\mathscr{D}_1$ à $\mathscr{D}$ passant par M[23]. L'intersection de $\mathscr{D}_1$ avec le demi-plan $\{\mathrm{N}, g(\mathrm{N}) \geqslant 0\}$ alors une demi-droite d'origine M (proposition 16 (*viii*)). Tout point N de cette demi-droite distinct de M vérifie $f(\mathrm{N}) = f(\mathrm{M})$ (proposition 16 (*v*)) et $g(\mathrm{N}) > 0$ (proposition 16 (*vi*)). On construit alors sur cette demi-droite une suite de point tendant vers M. On raisonne de même si $f(\mathrm{M}) = 0$ et $g(\mathrm{M}) > 0$. Enfin pour $f(\mathrm{M}) = g(\mathrm{M}) = 0$, on a $\mathrm{M} = \mathrm{O}$. On considère alors un point N vérifiant $g(\mathrm{N}) > 0$ et $f(\mathrm{N}) > 0$ et la demi-droite $]\mathrm{O}, \mathrm{N})$ qui est contenue dans $\mathscr{Q}$ (point (*iii*)). Sur cette demi-droite, on construit une suite qui tend vers O.

(*vi*) L'intérieur d'une intersection est l'intersection des intérieurs. On obtient alors le résultat souhaité grâce à la preuve du (*iii*) de la proposition 16[24].

(*vii*) En choisissant convenablement f et g, on obtient à partir de (*v*) et (*vi*) que la frontière d'un quart de plan $\mathscr{Q}$ est la réunion de $\{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) = 0\} \cap \{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) \geqslant 0\}$ et de $\{\mathrm{M}, g(\mathrm{M}) = 0\} \cap \{\mathrm{M}, f(\mathrm{M}) \geqslant 0\}$ qui sont deux demi-droites d'origine O d'après la proposition 16 (*viii*).

Remarque 19 — Deux points de vue sur un même objet. Soit O un point du plan. Il revient au même de se donner

(*i*) un quart de plan fermé de sommet O

22. Faire le dessin.
23. Là encore, faire le dessin
24. Montrons que $\overbrace{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}^{\circ} = \mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$. Comme $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$, on a $\overbrace{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}^{\circ} \subset \mathring{\mathrm{A}}$ et $\overbrace{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}^{\circ} \subset \mathring{\mathrm{B}}$. Ainsi $\overbrace{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}^{\circ} \subset \mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$. Inversement, $\mathring{\mathrm{A}} \cap \mathring{\mathrm{B}}$ est un ouvert contenu dans $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ donc dans $\overbrace{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}^{\circ}$.

(*ii*) deux demi-droites fermées d'origine O non opposées par le sommet.

En effet, pour définir deux demi-droites fermées d'origine O à partir d'un quart de plan $\mathscr{Q}$ fermé, il suffit de considérer la frontière du quart de plan. Les deux demi-droites ne sont pas opposées par le sommet : elles n'ont pas le même support de droite. On dit que les deux demi-droites frontières sont *associées* au quart de plan $\mathscr{Q}$.

Inversement à partir de deux demi-droites d_1 et d_2 fermés d'origine O non opposées par le sommet, on définit un quart de plan de la façon suivante : soit $\mathscr{D}$ la droite portant d_1 et $\mathscr{D}'$ la droite portant d_2. Parmi les deux demi-plans fermés de frontière $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$), il y a un seul qui contient d_1 (resp. d_2) puisque les deux demi-droites ne sont pas opposées par le sommet. On considère alors l'intersection de ces deux demi-plans fermés. On dit que le quart de plan ainsi construit est *associé à d_1 et d_2*. La frontière de ce quart de plan est alors exactement $d_1 \cup d_2$: en prenant la frontière on retrouve les deux demi-droites dont on est parti.

Enfin, si $\mathscr{Q}$ est un demi-plan fermé, le demi-plan défini comme précédemment à partir de sa frontière, est bien $\mathscr{Q}$.

On peut donc changer de point de vue et considérer soit des quarts de plan d'origine O, soit des ensembles de deux demi-droites d'origine O non opposées par le sommet.

On est maintenant prêt pour démontrer un résultat très intuitif au niveau visuel mais dont la démonstration demande le formalisme que nous venons de développer.

Proposition 20 — Quart de plan et segment. Soit $\mathscr{Q}$ un quart de plan fermé d'origine O et d_1 et d_2 les deux demi-droites associées. Si $\mathrm{M} \in d_1$ et $\mathrm{N} \in d_2$ alors $]\mathrm{MN}[\subset \mathscr{Q}$.

De plus, toute demi-droite d'origine O contenue dans $\mathscr{Q}$ rencontre [MN].

Preuve. Soit $\mathscr{D}$ le support de d_1 et $\mathscr{D}'$ le support de d_2. On considère f une forme affine telle que $\mathscr{D} = \{\mathrm{P}, f(\mathrm{P}) = 0\}$ et g une forme affine telle que $\mathscr{D}' = \{\mathrm{P}, g(\mathrm{P}) = 0\}$. Quitte à éventuellement changer f en $-f$ et g en $-g$, on peut supposer que $g(\mathrm{M}) > 0$ et $f(\mathrm{N}) > 0$ et donc que $\mathscr{Q} = \{\mathrm{P}, \quad f(\mathrm{P}) \geqslant 0,\ g(\mathrm{P}) \geqslant 0\}$.

On a alors $]\mathrm{MN}[= \left\{\mathrm{M} + t\overrightarrow{\mathrm{MN}}, t \in \left]0\,,1\right[\right\}$ et pour $\mathrm{P} \in]\mathrm{MN}[$, on obtient $f(\mathrm{P}) = (1-t)f(\mathrm{M}) + tf(\mathrm{N}) = tf(\mathrm{N}) > 0$ et $g(\mathrm{P}) = (1-t)g(\mathrm{M}) + tg(\mathrm{N}) = (1-t)g(\mathrm{N}) > 0$. Ainsi P est bien dans $\mathscr{Q}$.

Donnons à présent deux démonstrations du fait que tout demi-droite d'origine O contenue dans $\mathscr{Q}$ rencontre [MN].

Démonstration 1 cartésienne. On considère le repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{ON}})$, la droite (MN) a pour équation $y = 1 - x$ et le segment [MN] a pour équation $y = 1 - x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Par ailleurs, les points de $\mathscr{Q}$ sont caractérisés par la propriété $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Une demi-droite d'origine O contenue dans $\mathscr{Q}$ aura donc comme équation $y = ax$ (avec $a \geqslant 0$) et $x \geqslant 0$ (ou $x = 0$ et $y \geqslant 0$). L'intersection de (MN) et de la demi-droite d'origine O vérifie alors $(a+1)x = 1$ et donc $x = 1/(a+1) \geqslant 0$ et $y = a/(a+1) \geqslant 0$ qui est bien sur le segment [MN].

Démonstration 2 géométrique. Soit d une demi-droite d'origine O contenue dans $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{D}''$ la droite support de d. On considère Δ la parallèle à $\mathscr{D}'$ passant par M[25]. On note $\mathrm{P} = \Delta \cap \mathscr{D}''$ (Δ et $\mathscr{D}''$ ne sont pas parallèles sinon $\mathscr{D}'' = \mathscr{D}'$ et le résultat est évident). Montrons que $\mathrm{P} \in \mathscr{Q}$.

Pour cela, on considère f une forme affine telle que $\mathscr{D} = \{\mathrm{Q},\ f(\mathrm{Q}) = 0\}$ et g une forme affine telle que $\mathscr{D}' = \{\mathrm{Q},\ g(\mathrm{Q}) = 0\}$. Quitte à éventuellement changer f en $-f$ et g en $-g$, on peut supposer que $g(\mathrm{M}) > 0$ et $f(\mathrm{N}) > 0$ et donc que $\mathscr{Q} = \{\mathrm{Q},\ f(\mathrm{Q}) \geqslant 0,\ g(\mathrm{Q}) \geqslant 0\}$.

Sur Δ, la forme affine g est constante (puisque $\Delta // \mathscr{D}'$ voir le point (v) de la proposition 16). En particulier, comme $g(\mathrm{M}) > 0$, on a $g(\mathrm{P}) > 0$. Mais les points de la droite $\mathscr{D}''$ sont soit dans $\mathscr{Q}$ soit dans le quart de plan opposé à $\mathscr{Q}$ et les points Q de ce quart de plan vérifient $f(\mathrm{Q}) < 0$ et $g(\mathrm{Q}) < 0$. Il ne peuvent donc être sur Δ. On en déduit que P est dans $\mathscr{Q}$.

On considère alors $\mathrm{Q} \in]\mathrm{OP}[$. En particulier, on a $\mathrm{Q} \in \mathscr{Q}$. On va montrer que la droite (MP) rencontre $\mathscr{D}'$ en un point N′ de d_2.

Pour cela, on considère le quart de plan $\mathscr{Q}'$ d'origine M associé aux demi-droites [MP) et [MO). Montrons que Q est dans ce quart de plan. Comme Q est sur le segment $]\mathrm{OP}[$, cela résulte de la première partie de cette proposition. Ainsi [MQ) est une demi-droite contenu dans ce quart de plan.

D'après ce qu'on vient de montrer, la parallèle à (MP) passant par O intersecte alors la droite [MQ) en un point de $\mathscr{Q}'$. Notons le N′. Comme Q est dans $\mathscr{Q}$ la demi-droite [MQ) dans le demi-plan

25. Faire le dessin.

de frontière $\mathscr{D}$ défini par $\{\mathrm{R}, f(\mathrm{R}) \geqslant 0\}$. On a donc $f(\mathrm{N}') > 0$ et bien sûr $g(\mathrm{N}') = 0$. Ainsi N' est bien sur $[\mathrm{ON})$.

On en déduit aussi que $\mathrm{Q} \in [\mathrm{MN}']$. En effet, on peut écrire $\mathrm{Q} = \mathrm{M} + t\overrightarrow{\mathrm{MN}'}$. On a alors $f(\mathrm{Q}) = (1-t)f(\mathrm{M}) + tf(\mathrm{N}') = tf(\mathrm{N}') \geqslant 0$ puisque $\mathrm{Q} \in \mathscr{Q}$ et donc $t \geqslant 0$. On a aussi $g(\mathrm{Q}) = (1-t)f(\mathrm{M}) + tf(\mathrm{N}') = (1-t)f(\mathrm{M}) \geqslant 0$ puisque $\mathrm{Q} \in \mathscr{Q}$. On en conclut que $0 \leqslant t \leqslant 1$ c'est-à-dire $\mathrm{Q} \in [\mathrm{MN}']$.

On en déduit que M et N' sont de part et d'autre de $\mathscr{D}''$ sinon le segment $[\mathrm{MN}']$ serait contenu dans l'un des demi-plan ouvert défini par $\mathscr{D}''$ ce qui contredirait le fait que P est sur $\mathscr{D}''$ et sur le segment $[\mathrm{MN}']$. On en déduit que les demi-droite $[\mathrm{OM})$ et $[\mathrm{ON}') = [\mathrm{ON})$ sont de part et d'autre de $\mathscr{D}''$.

En particulier, M et N sont de part et d'autre de $\mathscr{D}''$ et d'après la proposition 16 (iv), $[\mathrm{MN}]$ rencontre $\mathscr{D}''$. Comme $[\mathrm{MN}]$ est contenu dans $\mathscr{Q}$ l'intersection de $[\mathrm{MN}]$ et $\mathscr{D}''$ est sur $\mathscr{D}'' \cap \mathscr{Q} = d$.

Les deux exercices qui suivent proposent une étude des propriétés de convexité des quadrilatères.

Exercice 15 Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ quatre points d'un plan affine tel que trois d'entre eux ne soient pas alignés.

a) Montrer l'équivalence des propriétés

- (i) ABCD est un quadrilatère convexe (c'est-à-dire que, pour chacun des quatre côtés, les deux autres sommets du quadrilatère sont dans l'un des deux demi-plans définis par ce coté).
- (ii) Pour chacun des côtés de ABCD, les quatre côtés $[\mathrm{AB}], [\mathrm{BC}], [\mathrm{CD}]$ et $[\mathrm{DA}]$ du quadrilatère sont dans le même demi-plan de frontière le côté initial.
- (iii) C est dans le quart de plan défini par les demi-droites $[\mathrm{AB})$ et $[\mathrm{AD})$ et A est dans le quart de plan défini par les vecteurs $[\mathrm{CB})$ et $[\mathrm{CD})$
- (iv) C est dans le quart de plan défini par les demi-droites $[\mathrm{AB})$ et $[\mathrm{AD})$ et D est dans le quart de plan défini par les demi-droites $[\mathrm{BC})$ et $[\mathrm{BA})$
- (v) B et D sont de part et d'autre de (AC) et A et C sont de part et d'autre de (BD).
- (vi) $[\mathrm{AC}] \cap [\mathrm{BD}] \neq \varnothing$
- (vii) Dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$, les coordonnées (x, y) de C vérifient $x > 0$, $y > 0$ et $y > 1 - x$

b) Montrer qu'on ne peut pas seulement supposer C est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ pour avoir un quadrilatère convexe.

c) Montrer qu'on ne peut pas seulement supposer B et D de part et d'autre de (AC) pour avoir un quadrilatère convexe.

Exercice 16 – « Types » de quadrilatère. Soit ABCD est un quadrilatère, le sommet A est dit *sympathique* si C est dans le quart de plan défini par $[\mathrm{AB})$ et $[\mathrm{AD})$. Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ quatre points d'un plan affine tel que trois d'entre eux ne soient pas alignés.

a) Montrer que ABCD a $0, 1$ ou 4 sommets sympathiques.

b) Montrer que ABCD est convexe si et seulement si les 4 sommets de ABCD sont sympathiques.

c) Montrer que ABCD n'a pas de sommet sympathique si et seulement si deux côtés (en tant segment) non consécutifs s'intersectent (on dit que ABCD est un quadrilatère croisé).

d) Montrer que les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ définissent trois quadrilatères.

e) Montrer que si ABCD admet un seul sommet sympathique alors les deux autres quadrilatères définis à partir de $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$, et D ont aussi un seul sommet sympathique.

f) Montrer que si ABCD admet 0 sommet sympathique alors un seul des deux quadrilatères définis à partir de $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ et D est convexe.

On suppose pour la suite de l'exercice que $(\mathrm{AB})//(\mathrm{CD})$ [26].

g) Montrer que ABCD est convexe ou croisé.

h) Montrer que ABCD est convexe si et seulement si B et C sont dans le même demi-plan de frontière (AD)

i) Un quadrilatère vérifiant $(\mathrm{AB})//(\mathrm{CD})$ et $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$ est-il un parallélogramme ?

26. On pourra consulter http://megamaths.perso.neuf.fr/ceaa0009.pdf pour une façon légèrement différente de présenter les choses.

1.4.3 Bissectrice d'un quart de plan ou de deux demi-droites

Dans cette partie, on désigne par $\mathscr{Q}$ un quart de plan fermé ; on note O son origine et d_1 et d_2 les deux demi-droites qui forment la frontière de $\mathscr{Q}$. On note $\mathscr{D}$ la droite support de d_1 et $\mathscr{D}'$ la droite support de d_2. On choisit f une forme affine telle que $\mathscr{D} = \{\mathrm{M},\ f(\mathrm{M}) = 0\}$ et g une forme affine telle que $\mathscr{D}' = \{\mathrm{M},\ g(\mathrm{M}) = 0\}$ et on s'arrange (éventuellement en changeant f en $-f$ et g en $-g$) pour que $\mathscr{Q} = \{\mathrm{M},\ f(\mathrm{M}) \geqslant 0,\ g(\mathrm{M}) \geqslant 0\}$.

Proposition 21 — Bissectrice et demi-droite. Il existe une unique symétrie axiale qui envoie d_1 sur d_2 (ou de manière équivalente qui envoie $\mathscr{Q}$ sur $\mathscr{Q}$). L'axe Δ de cette symétrie est appelé *bissectrice de $\mathscr{Q}$ ou de d_1 et d_2*. Parmi les deux demi-droites de sommet O et de support Δ, l'une est contenue dans $\mathscr{Q}$.

Soit M sur d_1 et N sur d_2 tel que $\mathrm{OM} = \mathrm{ON}$ [27] alors $\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}$ est un vecteur directeur de Δ.

Tout point de Δ est à égal distance de d_1 et d_2 [28].

Preuve. Construisons Δ. Soit M sur d_1 et N sur d_2 tel que $\mathrm{OM} = \mathrm{ON}$. On considère alors P tel que OMPN est un parallélogramme ou de manière équivalente (mais un peu plus savante), on définit P par $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}$. On note Δ la droite (OP). Montrons de deux façons différentes que la symétrie s par rapport à Δ envoie M sur N ou ce qui revient au même que Δ est la médiatrice de [MN] [29].

Démonstration 1 élémentaire. OMPN est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur [OM] et [ON]. On en déduit que c'est un losange. Ses diagonales sont donc perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Ainsi [MN] est perpendiculaire à (OP) et [MN] coupe (OP) en le milieu de [MN] donc l'image de M par la symétrie d'axe Δ est N.

Démonstration 2 savante. On a $\langle \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{MN}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{ON}} \rangle$. On en déduit que $\langle \overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{MN}} \rangle = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{ON}^2 = 0$. Ainsi (OP) et (MN) sont perpendiculaires et comme OMPN est un parallélogramme le milieu de [MN] est sur (OP). Ainsi (OP) est bien la médiatrice de [MN].

On en déduit à présent que l'image de d_1 par s est d_2. L'image d'une demi-droite d d'origine A par une symétrie s' est une demi-droite dont l'origine est $s'(\mathrm{A})$ [30]. Ainsi l'image de d_1 par s est une demi-droite d'origine $s(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$ contenant $s(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$, c'est donc d_2.

On a bien trouvé une symétrie qui envoie d_1 sur d_2. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres. Une telle symétrie s' envoie nécessairement O sur O (l'image de l'origine d'une demi-droite est l'origine de la demi-droite image). L'axe passe donc par O. Ensuite, une symétrie conserve les distances. Donc si $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$ appartient à d_1 alors l'image N de M vérifie $\mathrm{OM} = \mathrm{ON}$ et donc l'image de M est l'unique point de d_2 qui est à la distance OM de O. Ainsi s' envoie M sur N. D'après la proposition-définition 1, il existe une unique symétrie qui envoie M sur N et donc au plus une symétrie qui envoie d_1 sur d_2.

Montrons que la demi-droite [OP) est contenue dans $\mathscr{Q}$. D'après la proposition 18 (*iii*), il suffit de montrer que $\mathrm{P} \in \mathscr{Q}$. On a $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{NP}}$ donc $f(\mathrm{M}) - f(\mathrm{O}) = f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{N})$ (voir la remarque 14). Ainsi $f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{N}) > 0$. De la même façon, $g(\mathrm{P}) = g(\mathrm{M}) > 0$. Ainsi $\mathrm{P} \in \mathscr{Q}$.

Enfin montrons qu'un point de Δ est à égal distance de d_1 et d_2. Soit $\mathrm{M} \in \Delta$ et $\mathrm{P} \in d_1$ le point de d_1 le plus proche de M. On note s la symétrie par rapport à Δ. Comme s est une isométrie, on a $\mathrm{PM} = s(\mathrm{P})\mathrm{M}$ et $s(\mathrm{P}) \in d_2$. La distance de M à d_2 est donc inférieure à la distance de M à d_1. Mais comme $s(d_2) = d_1$, on obtient par le même raisonnement que la distance de M à d_1 est inférieure à la distance de M à d_2. On a donc l'égalité souhaitée.

Remarque 22 — Demi-droite et quart de plan. Montrons que la symétrie qui envoie d_1 sur d_2 envoie $\mathscr{Q}$ sur $\mathscr{Q}$ et inversement.

Dans le repère (non orthonormé) $(\mathrm{O}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{ON}})$, la symétrie s'écrit $(x, y) \mapsto (y, x)$ et un point P est dans $\mathscr{Q}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. On en déduit que $\mathscr{Q}$ est envoyé sur lui-même.

Inversement si s' est une symétrie qui envoie $\mathscr{Q}$ sur lui-même alors comme s' est continue et d'application réciproque continue (puisque $s'^{-1} = s'$), on en déduit que s' envoie la frontière de $\mathscr{Q}$ sur

27. Cette hypothèse est bien sûr cruciale : en considérant le point P tel que OMPN est un parallélogramme, on obtient un losange

28. Attention, avec cette définition de bissectrice, la réciproque n'est pas vraie ! Et c'est d'ailleurs pour cela que la démonstration du fait que les bissectrices d'un triangle sont concourantes est plus complexe qu'elle n'en a l'air.

29. on voit ainsi apparaître un lien entre bissectrice et médiatrice.

30. À démontrer ! Le cas de la définition d'une symétrie avec le papier calque est facile. Il faut aussi le faire pour la définition savante de la symétrie.

elle-même[31]. L'image par s' de d_1 est donc une demi-droite de la frontière de $\mathscr{Q}$. C'est donc soit d_1 soit d_2. Dans le premier cas, d_1 et d_2 sont fixes par s', O aussi. Comme s' conserve les distances, envoie O sur O et envoie d_1 sur d_1, tous les points de d_1 sont fixes par s' (de même pour ceux de d_2). En effet, sur d_1, il existe un unique point à une distance donnée de O. Ainsi s' admet deux demi-droites non colinéaire de points fixes, ce qui n'est pas possible pour une symétrie. On en déduit que $s'(d_1) = d_2$ (et donc $s = s'$)[32].

1.4.4 Bissectrice de deux droites

Dans la sous-section précédente, on a défini la notion de bissectrice de deux demi-droites (de même support et de même origine) ou de façon équivalente, la notion de bissectrice de quart de plan : c'est une droite. Cette sous-section s'intéresse quant à elle à la notion de bissectrices de deux droites (disctinctes et sécantes). Cette fois-ci, il y a deux bissectrices et c'est de là que vient la complexité de la situation pour les triangles. Dans cette sous-section, on désigne par $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèle du plan et par O leur point d'intersection.

Proposition 23 – Bissectrice et droite. Il existe exactement deux symétries axiales qui envoient $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}'$. Les axes de ces symétries sont appelées *bissectrice de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$*[33].

Soit M sur $\mathscr{D}$ et N sur $\mathscr{D}'$ tel que $\mathrm{OM} = \mathrm{ON}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{ON}}$ sont les vecteurs directeurs des bissectrices de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. En particulier, les deux bissectrices sont perpendiculaires.

De plus, la réunion des bissectrices est exactement l'ensemble des points du plan à égale distance de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Preuve. On considère la demi-droite [OM) sur $\mathscr{D}$ et les demi-droites [ON) et [ON′) sur $\mathscr{D}'$ où N′ est le symétrique de N par rapport à O (en particulier, $\overrightarrow{\mathrm{ON'}} = \overrightarrow{\mathrm{NO}}$).

Une symétrie axiale s qui envoie $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}'$ envoie O sur O (en effet, on a $s(\mathscr{D}) = \mathscr{D}'$ mais aussi $s(\mathscr{D}') = \mathscr{D}$ et donc $\mathrm{O} \in \mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$ est envoyé sur un élément de $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$ donc sur O). Ainsi l'image de [OM) est une demi-droite de $\mathscr{D}$ d'origine O. C'est donc [ON) ou [ON′). Par ailleurs, si une isométrie envoie [OM) sur [ON) ou sur [ON′), elle envoie $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}'$ (puisque l'image d'une droite par une isométrie est une droite). Ainsi les symétries axiales qui envoient $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}'$ sont celles qui envoient [OM) sur [ON) ou sur [ON′).

Or, d'après la proposition 21, il existe une unique symétrie axiale qui envoie [OM) sur [ON) et une unique symétrie axiale qui envoie [OM) sur [ON′). On trouve bien les deux symétries souhaitées. De plus, l'axe de la première symétrie est dirigé par $\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}$ et l'axe de la deuxième symétrie est dirigé par $\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON'}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{NO}} = \overrightarrow{\mathrm{NM}}$.

Comme $\langle \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{ON}} \rangle = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{ON}^2 = 0$, on obtient que les bissectrices sont perpendiculaires.

Montrons à présent que la réunion des bissectrices est l'ensemble des points équidistants de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Commençons par considérer M sur l'une des deux bissectrices (disons Δ) et P le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de M (le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$). Soit s la symétrie par rapport à Δ. Comme s est une isométrie, on a $\mathrm{PM} = s(\mathrm{P})\mathrm{M}$ et $s(\mathrm{P}) \in \mathscr{D}'$. La distance de M à $\mathscr{D}'$ est donc inférieure à la distance de M à $\mathscr{D}$. Mais comme $s(\mathscr{D}') = \mathscr{D}$, on obtient par le même raisonnement que la distance de M à $\mathscr{D}$ est inférieure à la distance de M à $\mathscr{D}'$. On a donc l'égalité souhaitée[34].

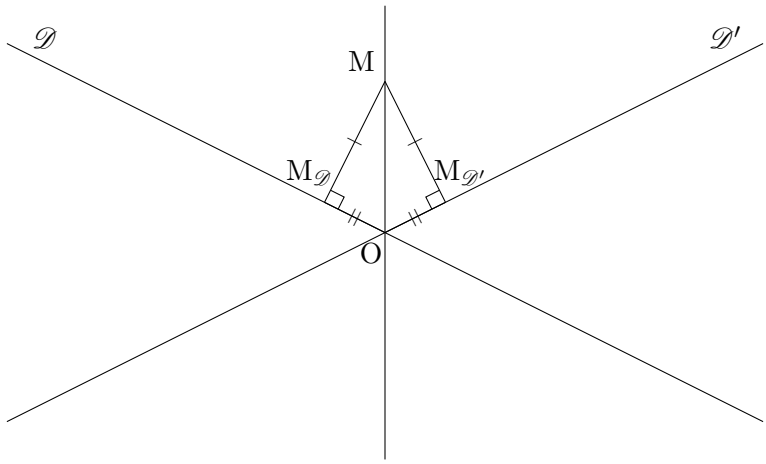
Montrons à présent qu'un point M qui est à égal distance de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ est sur l'une des deux médiatrices. On suppose que $\mathrm{M} \neq \mathrm{O}$ (sinon, c'est fini). On note $\mathrm{M}_{\mathscr{D}}$ et $\mathrm{M}_{\mathscr{D}'}$ les projetés orthogonaux de M sur $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Par hypothèse, on a $\mathrm{MM}_{\mathscr{D}} = \mathrm{MM}_{\mathscr{D}'}$. Par ailleurs, on a grâce au théorème de Pythagore, $\mathrm{OM}_{\mathscr{D}} = \mathrm{OM}'_{\mathscr{D}}$. On en déduit que (OM) est la médiatrice de $[\mathrm{M}_{\mathscr{D}}\mathrm{M}'_{\mathscr{D}}]$ et donc que la symétrie par rapport à (OM) envoie $\mathrm{M}_{\mathscr{D}}$ sur $\mathrm{M}_{\mathscr{D}'}$ et donc $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}'$. Ainsi (OM) est l'une des deux bissectrices.

31. Cela résulte du lemme suivant : soit X un espace métrique et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ une bijection continue dont l'application réciproque est continue, alors pour $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, la frontière de $f(\mathrm{Y})$ est l'image par f de la frontière de Y.

32. À quelques modifications près, cette preuve assure qu'une isométrie différente de id qui envoie $\mathscr{Q}$ sur $\mathscr{Q}$ envoie d_1 sur d_2 et d_2 sur d_1 et donc en composant avec s, on obtient une isométrie qui envoie d_1 sur d_1 et d_2 sur d_2 et donc c'est l'identité. On en déduit que les seuls isométries qui envoient $\mathscr{Q}$ sur $\mathscr{Q}$ sont id et s.

33. Comme pour la médiatrice ou pour la bissectrice de deux demi-droites, la définition est donnée comme axe de symétrie. C'est une définition très pratique.

34. Remarquer l'analogie avec la preuve du dernier point de la proposition 21



Exercice 17 — Symétrie centrale et axiale. Soit $\mathscr{D}$ une droite, s la symétrie par rapport à $\mathscr{D}$, O un point de $\mathscr{D}$ et s' la symétrie par rapport à O.

a) Déterminer les transformations $s' \circ s$ et $s \circ s'$.

b) Retrouver à l'aide de la question **a**, les bissectrices de deux droites sont perpendiculaires (on pourra vérifier que $s' \circ s$ envoie $\mathscr{D}$ sur $\mathscr{D}'$).

1.4.5 Bissectrice dans un triangle

Soit ABC un triangle. La donnée d'un triangle défini **pour chaque sommet** un quart de plan privilégiée : le quart de plan défini par les deux demi-droites dont l'origine est le sommet en question et qui contiennent les deux autres points du triangle. Par exemple pour le sommet A, on obtient le quart de plan associé aux deux demi-droites [AB) et [AC). Ainsi parmi les deux bissectrices des droites (AB) et (AC), il y a celle qui envoie [AB) sur [AC), elle s'appelle *bissectrice intérieure en* A. L'autre bissectrice s'appelle *bissectrice extérieure en* A.

Proposition 24 — Point de concours des bissectrices. Les trois bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes en un point à l'intérieur du triangle ABC (c'est-à-dire dans l'intersection des demi-plans de frontière (BC) contenant A, de frontière (AC) contenant B et de frontière (BA) contenant C).

Le point de concours des trois bissectrices intérieures est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle ABC appelé cercle inscrit au triangle ABC.

Le cercle inscrit est le seul cercle intérieur au triangle qui est tangent aux trois droites portant les côtés de ABC.

De plus, la bissectrice intérieure en A coupe le segment [BC] en un point I_A vérifiant

$$\frac{\overline{I_AB}}{\overline{I_AC}} = -\frac{AB}{AC}. \tag{1}$$

On a bien évidemment des relations identiques pour les autres sommets.

Preuve. Comme C est sur la demi-droite [AC) et B sur la demi-droite [AB), la bissectrice intérieure coupe le segment [BC] (proposition 20). On note I_A ce point d'intersection.

On en déduit que le rapport $\dfrac{\overline{I_AB}}{\overline{I_AC}}$ est négatif. De plus, on a

$$\frac{I_AB}{I_AC} = \frac{\text{Aire}(I_ABA)}{\text{Aire}(I_ACA)} = \frac{AB}{AC}.$$

La première égalité résulte du fait que les hauteurs issues de A de I_ABA et I_ACA sont les mêmes. La deuxième égalité résulte du fait que la longueur des hauteurs issues de I_A de I_ABA et I_ACA sont les mêmes (puisque I_A est sur la bissectrice).

Donnons une autre démonstration de cette égalité (**1**). D'après la proposition 21, on a $\overrightarrow{AI_A} = \lambda(\overrightarrow{AB}/AB + \overrightarrow{AC}/AC)$ avec $\lambda > 0$. En utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$\overrightarrow{AI_A}(1 - \lambda/AB - \lambda/AC) = \lambda(\overrightarrow{I_AB}/AB + \overrightarrow{I_AC}/AC)$$

Comme A n'est pas aligné avec $\mathrm{I_A}$, B et C, on en déduit que $(1-\lambda/\mathrm{AB}-\lambda/\mathrm{AC})=0$ et donc $\lambda\neq 0$ et $(\overrightarrow{\mathrm{I_AB}}/\mathrm{AB}+\overrightarrow{\mathrm{I_AC}}/\mathrm{AC})=0$ ce qui donne (**1**).

On considère à présent le quart de plan d'origine C associé aux demi-droites [CB) et [CA). La demi-droite portée par la bissectrice intérieure issue de C contenue dans ce demi-plan rencontre alors le segment $[\mathrm{I_A A}]$ puisque $\mathrm{A}\in[\mathrm{CA})$ et $\mathrm{I_A}\in[\mathrm{CB})$ (proposition 20).

Ainsi la bissectrice intérieure issue de C rencontre la bissectrice intérieure issue de A. On note I le point d'intersection. Comme I est dans le quart de plan défini par [AB) et [AC), il est dans le demi-plan frontière (AB) contenant C et dans le demi-plan frontière (AC) contenant B. De plus, comme I est dans le quart de plan d'origine C associé aux demi-droites [CB) et [CA), on en déduit que I est dans le demi-plan de frontière (BC) et contenant dans A. Ainsi I est à l'intérieur du triangle et aussi dans le quart de plan défini les demi-droites [BA) et [BC) (intersection du demi-plan de frontière (BC) contenant A et du demi-plan de frontière (AB) contenant C).

Le point I étant sur la bissectrice issue de A, I est à égal distance de (AB) et (AC). De même, I est sur la bissectrice issue de C, I est à égal distance de (CB) et (AC). Ainsi I est à égal distance de (BC) et (AB). Il est donc sur l'une des bissectrices issues de B. C'est nécessairement la bissectrice intérieure puisqu'il est dans le quart de plan défini les demi-droites [BA) et [BC).

Le point I étant à égale distance de (AB), (AC) et (BC), le cercle de centre I de rayon égal à cette distance commune est tangent aux trois droites portant les côtés du triangle. De plus, le cercle reste du même côté de (AB) que C, du même côté de (AC) que B et du même côté de (BC) que A, les points de tangences sont donc à l'intérieur du triangle et donc sur les côtés [AB], [AC] et [BC].

Si $\mathscr{C}$ est un cercle tangent aux trois côtés du triangle et intérieur au triangle alors son centre est à égal distance de (AB), (AC) et (BC). Il est donc sur des bissectrices issues de A, B et C. De plus, comme il est à l'intérieur du triangle, le centre est aussi à l'intérieur du triangle et donc les bissectrices sur lesquelles il se situe sont nécessairement les bissectrices intérieures au triangle ABC. Ainsi le centre est nécessairement I et $\mathscr{C}$ le cercle inscrit.

Exercice 18 – Centre du cercle inscrit. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On note (de façon très standard[35]) $a=\mathrm{BC}$, $b=\mathrm{AC}$ et $c=\mathrm{BA}$.

a) Montrer que la relation $a\overrightarrow{\mathrm{JA}}+b\overrightarrow{\mathrm{JB}}+c\overrightarrow{\mathrm{JC}}=0$ définit un unique point J.

b) En considérant l'intersection de (AJ) avec (BC) (et cycliquement, l'intersection de (BJ) avec (AC) et (CJ) avec (AB)), montrer que J = I.

Exercice 19 – Une précision. Soit ABC un triangle. Montrer que les points de tangence du cercle inscrit à ABC avec les côtés du triangle sont sur]AB[,]BC[et]AC[.

On se pose à présent la question « existe-t-il d'autres points que le centre du cercle inscrit équidistant des droites (AB), (AC) et (BC) ? » ou de manière équivalente « existe-t-il d'autres points que le centre du cercle inscrit qui sont les centres de cercles tangents à (AB), (AC) et (BC) ? »

De tels points M doivent nécessairement être les points de concours d'une bissectrice issue de A (puisque $d(\mathrm{M},(\mathrm{AC}))=d(\mathrm{M},(\mathrm{AB}))$) avec une bissectrice issue de B (puisque $d(\mathrm{M},(\mathrm{BC}))=d(\mathrm{M},(\mathrm{BA}))$) et une bissectrice issue de C (puisque $d(\mathrm{M},(\mathrm{CA}))=d(\mathrm{M},(\mathrm{BC}))$).

Par ailleurs, un point qui est l'intersection de deux bissectrices issues de deux sommets différents est nécessairement sur une bissectrice issue du troisième sommet (par égalité au distance des droites portant les côtés du triangle). Il suffit donc de s'intéresser au point d'intersection de deux bissectrices issues de deux sommets distincts.

Proposition 25 – Cercle exinscrit. Soit ABC un triangle. Les bissectrices extérieures issues de B et C se rencontre en un point qui est sur la bissectrice intérieure issue de A noté I_a.

Les bissectrices extérieures issues de A et C se rencontre en un point qui est sur la bissectrice intérieure issue de B noté I_b.

Les bissectrices extérieures issues de A et B se rencontre en un point qui est sur la bissectrice intérieure issue de C noté I_c.

Les points I_a, I_b, I_c sont les centres de trois cercles tangents à (AB), (AC) et (BC) appelé *cercles exinscrits au triangle* ABC.

35. Cette notation est vraiment universelle pour les longueurs des côtés de ABC

Les points $\mathrm{I}, \mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b$ et I_c sont les seuls points du plan qui sont des centres de cercles tangents aux trois droites portant les côtés du triangle.

Preuve. Supposons l'existence de $\mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b$ et I_c et montrons qu'il n'y a pas de points autres que $\mathrm{I}, \mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b$ et I_c centres de cercles tangents aux trois droites portant les côtés du triangle ABC.

D'après les éléments développés avant l'énoncé la proposition, il suffit d'étudier les intersections de bissectrices. Soit J un point à l'intersection de deux bissectrices. Si les deux bissectrices sont des bissectrices intérieures, la proposition 24 montre que J est sur la troisième bissectrice intérieure et donc $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.

Supposons que J est l'intersection d'une bissectrice intérieure et d'une bissectrice extérieure alors, d'après les éléments développés avant l'énoncé la proposition, J est sur une des bissectrices issue du troisième sommet. Mais cette bissectrice ne peut être une bissectrice intérieure (sinon J serait à l'intersection de deux bissectrices intérieures et donc J serait I). Ainsi J est l'intersection de deux bissectrices extérieures et d'une bissectrice intérieure donc $\mathrm{J} = \mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b$ ou I_c.

Supposons que J est l'intersection de deux bissectrices extérieures. Comme la bissectrice extérieure issue de B (resp. C, A) et celle issue de C (A, B) se rencontrent en I_a (resp. I_b, I_c), on en déduit que J est $\mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b$ ou I_c.

On obtient ainsi bien qu'hormis $\mathrm{I}, \mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b, \mathrm{I}_c$, il n'y a pas de points qui sont équidistants de (AB), (AC) et (BC) [36].

Montrons à présent l'existence de I_a, I_b et I_c. Il suffit de s'intéresser à I_a (les autres cas se déduisent par le même raisonnement en changeant le nom des points). Pour cela, on va montrer que la bissectrice intérieure (AI) issue de A rencontre la bissectrice extérieure issue de B.

Il s'agit donc de montrer que (AI) n'est pas parallèle à la bissectrice extérieure issue de B ou encore qu'elle n'est pas perpendiculaire à (BI). Raisonnons par l'absurde et supposons que (AI) et (BI) perpendiculaires. On note F le point de tangence du cercle inscrit avec (AB). D'après l'exercice 19, $\mathrm{F} \in]\mathrm{AB}[$. En particulier, A et B sont plus éloignés que F de I et donc à l'extérieur du cercle. Il passe donc deux tangentes en A et en B au cercle inscrit $\mathscr{C}$: ce sont (AB) et (AC) pour le point A et (BC) et (AB) en B. En particulier, elles sont sécantes en C. Mais on va montrer que la tangente en B à $\mathscr{C}$ autre que (AB) est parallèle à la tangente en A à $\mathscr{C}$ autre que (AB).

On note U le point de tangence de $\mathscr{C}$ avec (AC) et V le point de tangence de $\mathscr{C}$ avec (BC). Comme (AB) et (AC) sont les tangentes à $\mathscr{C}$ issue de A, la symétrie par rapport à (AI) envoie U sur H (voir l'exercice 151). Par un argument similaire, la symétrie par rapport à (BI) envoie H sur V. Ainsi la composée de la symétrie par rapport à (AI) avec la symétrie par rapport à (BI) envoie U sur V. Or comme (AI) et (IB) sont supposées perpendiculaires, cette composée est la symétrie centrale de centre I. Ainsi U et V sont diamétralement opposés et les droites $(\mathrm{AU}) = (\mathrm{AC})$ et $(\mathrm{BV}) = (\mathrm{BC})$ sont parallèles (toutes deux perpendiculaires à [UV]). NON.

La droite (AI) rencontre la bissectrice extérieure en B. Soit I_a le point d'intersection. D'après les éléments développés avant l'énoncé de la proposition, I_a est sur l'une des bissectrices issues de C. Si c'était la bissectrice intérieure alors d'après la proposition 24, I_a serait aussi sur la bissectrice intérieure issue de B et donc $\mathrm{I}_a = \mathrm{I} = \mathrm{B}$ (I_a serait à l'intersection des deux bissectrices issues de B) ce qui est absurde puisqu'on a vu que I était à l'intérieur strict de ABC. Ainsi I_a est sur la bissectrice extérieure issue de C.

Exercice 20 — Triangle exinscrit. Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit, $\mathrm{I}_a, \mathrm{I}_b$ et I_c les centres des cercles exinscrits.

a) Déterminer les hauteurs et l'orthocentre de $\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b\mathrm{I}_c$. En déduire l'orthocentre des triangle $\mathrm{II}_a\mathrm{I}_b$, $\mathrm{II}_b\mathrm{I}_c$ et $\mathrm{II}_a\mathrm{I}_c$ (voir l'exercice 3).

b) En utilisant les résultats de l'exercice 13, déterminer le cercle d'Euler de $\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b\mathrm{I}_c$. En déduire que les milieux de $[\mathrm{I}_a\mathrm{I}_b]$, $[\mathrm{I}_b\mathrm{I}_c]$, $[\mathrm{I}_c\mathrm{I}_a]$ sont sur le cercle circonscrit à ABC.

c) Toujours avec cet exercice, montrer que le milieu A'' (resp. B'', C'') de $[\mathrm{II}_a]$ (resp. $[\mathrm{II}_b]$, $[\mathrm{II}_c]$) est sur le cercle circonscrit à ABC.

d) Montrer que A'' (resp. B'', C'') est sur la médiatrice de [BC] (resp. [AC], [BA]). Indication : on pourra considérer le cercle de diamètre $[\mathrm{II}_a]$.

36. En particulier les trois bissectrices extérieures ne sont pas concourantes.

e) On note D $\in]BC[$, E $\in]AC[$ et F $\in]AB[$ les points de tangences du cercle inscrit à ABC aux droites (BC), (AC) et (AB). Montrer que (IC) (resp. (IB), (IA)) est la médiatrice de [DE] (resp. [DF], [EF]).

f) Déterminer l'orthocentre de $A''B''C''$.

Exercice 21 — Un lieu courant. Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

a) Montrer que ABC est isocèle en A si et seulement si la bissectrice extérieure issue de A est parallèle à (BC).

b) On suppose que ABC n'est pas isocèle en A. On note J_A le point d'intersection de la bissectrice extérieure en A avec (BC). Démontrer que

$$\frac{\overline{J_AB}}{\overline{J_AC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}.$$

On pourra introduire la parallèle à la bissectrice extérieure passant par C.

c) Déterminer le lieu des points M tel que $MB/MC = AB/AC$ (on distinguera le cas où ABC est isocèle en A).

d) Montrer qu'il existe un unique point J tel que $-a\overrightarrow{JA} + b\overrightarrow{JB} + c\overrightarrow{JC} = 0$. Montrer que $J = I_a$ (on distinguera le cas où ABC est isocèle en B ou C).

Exercice 22 — Bissectrice et projection orthogonale. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On note Q le projeté orthogonal de A sur (BI) et R le projeté orthogonal de A sur la bissectrice extérieure au triangle issue de B. On note C' le milieu de [AB] et B' le milieu de [AC].

a) Faire une figure propre (on tracera la droite $(B'C')$) Que constatez-vous pour les points Q et R ?

b) Déterminer le centre du cercle circonscrit au triangle ABQ.

c) En déduire que $\widehat{C'QB} = \widehat{C'BQ}$ (on pourra considérer le triangle $C'QB$).

d) Montrer que $\widehat{C'QB} = \widehat{QBC}$.

e) En déduire que $(C'Q)$ et (BC) sont parallèles.

f) Conclure pour le point Q.

g) Adapter pour le point R.

Exercice 23 — Construction des droites remarquables avec un gabarit. Sur une feuille blanche, tracer un triangle ABC.

Préparation du matériel. Sur un autre feuille blanche, tracer un triangle superposable avec le premier et découper-le pour obtenir un gabarit du triangle ABC.

a) En utilisant uniquement la première feuille, le gabarit, un crayon et une règle non graduée, tracer les médianes, hauteurs, médiatrices, bissectrices de ABC.

b) Justifier chacune des constructions.

1.4.6 Quelques exercices sur les droites remarquables

Exercice 24 — Triangle isocèle. Soit ABC un triangle. On dit que ABC est isocèle en A (ou de sommet principal A) si $AB = AC$. On note I la milieu de [BC]

a) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

(*i*) $\widehat{B} = \widehat{C}$.

(*ii*) $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = -\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})}$

(*iii*) La médiatrice de [BC] est la hauteur issue de A

(*iv*) La médiatrice de [BC] est la médiane issue de A

(*v*) La bissectrice de $\widehat{A}$ de [BC] est aussi la hauteur issue de A

(vi) la hauteur issue de A est aussi la médiane issue de A
(vii) la bissectrice de $\widehat{A}$ est aussi médiatrice de [BC]
($viii$) la bissectrice de $\widehat{A}$ est aussi la médiane issue de A
(ix) ABC admet un axe de symétrie qui passe par A
(x) (AI) est un axe de symétrie de ABC
(xi) Les hauteurs issues de B et C ont la même longueur

b) Trouver d'autres propriétés équivalentes.

Exercice 25 – Triangle. Soit ABC désigne un « vrai » triangle (les points A, B, C ne sont pas alignés).

a) À quelle condition l'orthocentre de ABC est-il sur l'un des trois côtés de ABC ?

b) À quelle condition le centre du cercle circonscrit de ABC est-il sur l'un des trois côtés de ABC ?

c) À quelle condition le centre de gravité du triangle de ABC est-il sur l'un des trois côtés de ABC ?

d) À quelle condition le centre du cercle inscrit du triangle de ABC est-il sur l'un des trois côtés de ABC ?

Exercice 26 – CAPES. Soit M, B, C trois points du plan. On suppose que M n'est pas sur la droite (BC).

a) Déterminer (en justifiant) l'ensemble des points A du plan tel que M soit le centre de gravité de ABC.

b) Déterminer (en justifiant) l'ensemble des points A du plan tel que M soit le centre du cercle circonscrit à ABC.

c) Déterminer (en justifiant) l'ensemble des points A du plan tel que M soit l'orthocentre de ABC.

d) Déterminer (en justifiant) l'ensemble des points A du plan tel que M soit le centre du cercle inscrit de ABC.

1.5 Cas d'égalité et de similitude du triangle

Cette section est consacrée à l'un des résultats cruciaux de la géométrie du triangle : il s'agit de répondre à la question « quand deux triangles sont-ils superposables ou agrandissement-réduction l'un de l'autre ? » En terme plus savant, il s'agit, pour le cas superposable, de donner des conditions pour qu'il existe une isométrie qui envoie le premier triangle sur le deuxième et, pour le cas agrandissement-réduction, des conditions pour qu'il existe une similitude envoyant le premier triangle sur le deuxième. Les deux propositions 26 et 28 donnent différents critères simples qui s'expriment à l'aide des côtés et angles des triangles.

1.5.1 Cas d'égalité

Proposition 26 – Cas d'égalité. Soient ABC et A′B′C′ deux triangles d'un plan euclidien. Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) Il existe une isométrie (qui est alors unique) qui envoie A sur A′, B sur B′ et C sur C′
(ii) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $BC = B'C'$
(iii) $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \overline{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})}$[37].
(iv) $AB = A'B'$, $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \overline{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})}$ et $\overline{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})} = \overline{(\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'})}$

Preuve. On a évidemment $(i) \Rightarrow (ii)$, $(i) \Rightarrow (iii)$ et $(i) \Rightarrow (iv)$ puisqu'une isométrie conserve les longueurs et les angles non orientés.

37. La notation $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ désigne l'angle non orienté des vecteurs $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$(ii) \Rightarrow (i)$. On considère la translation $\tau_{\overrightarrow{AA'}}$ qui envoie A sur A′. On note $B_1 = t(B)$. On considère alors r la[38] rotation de centre A′ qui envoie $[A'B_1)$ sur $[A'B')$. L'isométrie (directe) $r \circ \tau_{\overrightarrow{AA'}}$ envoie alors [AB) sur [A′B′). Comme AB = A′B′, elle envoie B sur B′. L'image par $r \circ \tau_{\overrightarrow{AA'}}$ du point C est donc sur le cercle de centre A′ et de rayon AC = A′C′ et sur le cercle de centre B′ de rayon BC = B′C′. Le point C′ aussi. Les deux cercles se rencontrent en au plus deux points symétriques par rapport à (A′B′) (voir la proposition 257). Ainsi si l'image de C n'est pas C′, on obtient l'isométrie cherchée en composant avec la symétrie par rapport à (A′B′).

$(iii) \Leftrightarrow (ii)$. On a $BC^2 = \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle = AB^2 + AC^2 + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$. D'où,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cos \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}.$$

De même, $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + 2A'B' \cdot A'C' \cos \overline{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})}$. Ainsi lorsque A′B′ = AB et A′C′ = AC, l'égalité $\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \overline{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})}$ est équivalente à l'égalité BC = B′C′.

$(iv) \Rightarrow (i)$. On considère la translation $\tau_{\overrightarrow{AA'}}$ qui envoie A sur A′. On note $B_1 = t(B)$. On considère alors r la[39] rotation de centre A′ qui envoie $[A'B_1)$ sur [A′B′). L'isométrie (directe) $r \circ \tau_{\overrightarrow{AA'}}$ envoie alors [AB) sur [A′B′). Comme AB = A′B′, elle envoie B sur B′. Il existe deux demi-droites δ et δ′ telles que $\overline{(\overrightarrow{A'B'}, \delta)} = \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\overline{(\overrightarrow{A'B'}, \delta')} = \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$[40]. Ces deux demi-droites sont symétriques par rapport à (A′B′). De plus, comme une isométrie conserve les angles, l'image de C par $r \circ \tau_{\overrightarrow{AA'}}$ est sur δ ou δ′. De même, il existe deux demi-droites δ_1 et δ_1' telles que $\overline{(\overrightarrow{A'B'}, \delta_1)} = \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ et $\overline{(\overrightarrow{A'B'}, \delta_1')} = \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$. Ces deux demi-droites sont symétriques par rapport à (A′B′). De plus, comme une isométrie conserve les angles, l'image de C par $r \circ \tau_{\overrightarrow{AA'}}$ est sur δ_1 ou δ_1'. Enfin, C′ est aussi sur δ ou δ′ et δ_1 ou δ_1'. En particulier, en composant si besoin par la symétrie par rapport à (A′B′), on a bien construit une isométrie comme souhaitée.

La démonstration est maintenant terminée. Donnons pour le plaisir une démonstration de $(iv) \Rightarrow (ii)$. On sait que (voir la proposition 27)

$$\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{BC}{\sin \widehat{A}}$$

De même, on a
$$\frac{A'B'}{\sin \widehat{C'}} = \frac{A'C'}{\sin \widehat{B'}} = \frac{B'C'}{\sin \widehat{A'}}$$

L'égalité de $\widehat{A}$ et $\widehat{A'}$ et de $\widehat{B}$ et $\widehat{B'}$ impose celle de $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ (puisque la somme des angles d'un triangle est un angle plat). Comme de plus AB = A′B′, on en déduit que

$$\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{A'B'}{\sin \widehat{C'}}$$

On en déduit alors les égalités AC = A′C′ et BC = B′C′.

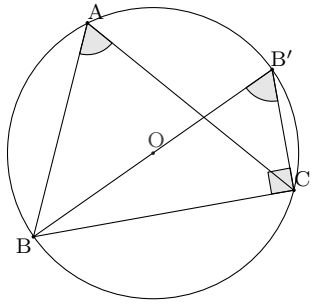
Proposition 27 – Égalité des sinus. Soit ABC un triangle. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, et R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

On a

$$2R = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

Preuve. Soit B′ le point diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit à ABC. Par le théorème de l'angle au centre, on a $\sin \widehat{A} = \sin \widehat{BB'C} = BC/BB' = BC/2R$.

38. Elle existe et il n'y en a qu'une d'après le lemme 204
39. Elle existe et il n'y en a qu'une d'après le lemme 204
40. Faire un dessin !



Exercice 27 – Triangles isométriques. Soit ABC un triangle isocèle en A, d la médiatrice de [AC] et D le point d'intersection de d avec la droite (BC). On suppose que D est à l'extérieur de [BC]. On porte du [DA) à l'extérieur de [DA] le point E tel que DB = AE.

a) Faire une figure.

b) Montrer que $\widehat{\mathrm{DAC}} = \widehat{\mathrm{DCA}}$.

c) En déduire que $\widehat{\mathrm{DBA}} = \widehat{\mathrm{EAC}}$.

d) En déduire que les triangles ADB et CEA sont isométriques.

e) En déduire que CDE est isocèle.

Exercice 28 Soit ABC un triangle. On note B′ le pied de la hauteur issue de B et C′ le pied de la hauteur issue de C. On suppose que BB′ = CC′. Montrer que ABC est isocèle.

1.5.2 Cas de similitude

Proposition 28 – Cas de similitude du triangle. Soient ABC et A′B′C′ deux triangles d'un plan euclidien. Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) Il existe une similitude (qui est alors unique) qui envoie A sur A′, B sur B′ et C sur C′

(ii) $$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{B'C'}}$$

(iii) $$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{A'C'}} \quad \text{et} \quad \overline{(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})} = \overline{(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}, \overrightarrow{\mathrm{A'C'}})}$$

(iv) $$\overline{(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})} = \overline{(\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}, \overrightarrow{\mathrm{A'C'}})} \quad \text{et} \quad \overline{(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}})} = \overline{(\overrightarrow{\mathrm{B'A'}}, \overrightarrow{\mathrm{B'C'}})}$$

Preuve. On se ramène au théorème sur les isométries en envoyant considérant le triangle A″B″C″ image de ABC par une homothétie de rapport A′B′/AB.

Exercice 29 – Similitude et triangle. À un triangle ABC, on peut associer six grandeurs : les trois longueurs de ses côtés et les angles en ces trois sommets. Existe-t-il deux triangles non isométriques tels que cinq de leurs six grandeurs soient égales ?

Exercice 30 – Similitude et triangle. Soit ABC un triangle isocèle en A. On considère D le deuxième point d'intersection de (AB) avec le cercle de centre C de rayon BC.

a) Montrer qu'un tel deuxième point existe bien et déterminer à quelle condition D ∈ [AB].

b) Montrer que ABC est semblable à CBD.

c) On suppose de plus que ACD est isocèle. Déterminer les angles de la figure et le rapport de similitude entre ABC et CBD.

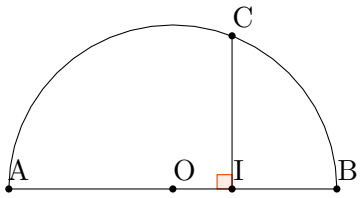
Exercice 31 – Similitude et rectangle.

a) Soit ABCD et A′B′C′D′ deux rectangles de $\mathscr{E}$. À quelle condition existe-t-il une isométrie (similitude) qui envoie A sur A′, B sur B′, C sur C′ et D sur D′.

b) On considère la transformation suivante d'un rectangle ABCD : on suppose que AB $\geqslant$ AD. On considère B′ le milieu de [AB] et C′ le milieu de [CD]. À quelle condition le rectangle ABC′D′ est-il semblable à ABCD (indication : c'est la transformation pour passer du format A3 au format A4 et de A4 à A5...) ?

c) On considère la transformation suivante d'un rectangle ABCD : on suppose que AB $\geqslant$ AD. On considère A′ sur [AB] et D′ sur [CD] tel que AA′D′D soit un carré. À quelle condition le rectangle A′BCD′ est-il semblable à ABCD ?

Exercice 32 — Une application du critère de similitude. On considère la figure géométrique suivante



a) Donner un critère pour que deux triangles rectangles soient semblables.

b) En déduire que les triangles IBC et ICA sont semblables. Déterminer les similitudes qui envoie l'un sur l'autre.

c) En déduire que $\mathrm{IC} = \sqrt{\mathrm{IA} \cdot \mathrm{IB}}$ (c'est-à-dire que IC est la moyenne géométrique de IA et IB).

d) En déduire une démonstration géométrique de l'inégalité arithmético-géométrique.

e) En déduire une construction géométrique de $\sqrt{x}$ lorsqu'on dispose d'une longueur x.

Exercice 33 Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A. On note D l'intersection de la bissectrice (intérieure) en B avec [AC]. On suppose que ABC et BCD sont semblables.

1) Montrer que l'énoncé suivant est faux : « Deux triangles isocèles sont semblables si et seulement si ils ont un angle égal ».

2) Corriger l'énoncé précédent pour obtenir un énoncé vrai de la forme « Deux triangles isocèles sont semblables si et seulement si condition sur les angles à déterminer » et le démontrer.

3) a) Déterminer les angles des triangles ABC et ABD et BCD.

b) On note $a = \mathrm{BC}$, $c = \mathrm{BA} = \mathrm{AC}$. Montrer que c/a est solution de l'équation $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1 = 0$ (on pourra remarquer (en le justifiant) que BAD est isocèle de sommet principal D et déterminer ainsi la longueur DC en fonction de a et c). En déduire la valeur de c/a.

4) **Question de cours** Justifier qu'il existe une unique similitude directe S qui envoie A sur B, B sur C. Démontrer que $\mathrm{S}(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$. Déterminer l'angle et le rapport de S.

5) Montrer que S^5 est une homothétie dont on déterminera le rapport.

6) Justifier que le centre de S^5 et celui de S coïncident.

7) Calculer $\mathrm{S}^2(\mathrm{A}), \mathrm{S}^3(\mathrm{A})$. On note $\mathrm{E} = \mathrm{S}^4(\mathrm{A}), \mathrm{F} = \mathrm{S}^5(\mathrm{A})$ et $\mathrm{G} = \mathrm{S}^6(\mathrm{A})$. Montrer que $\mathrm{G} = \mathrm{S}^5(\mathrm{B})$. Justifier que le centre de S est le point d'intersection de (AF) et (BG).

Corrigé

1) Les triangles dont les angles sont $(75°, 75°, 30°)$ et $(30°, 30°, 120°)$ sont isocèles (ils ont deux angles égaux) et ont chacun un angle égal à 30° pourtant ils ne sont pas semblables puisqu'ils n'ont pas les mêmes angles.

2) L'énoncé est le suivant : deux triangles isocèles sont semblables si et seulement si ils ont le même angle au sommet principal.

En effet, s'ils ont le même angle au sommet principal x, alors les deux autres angles coïncident aussi : les quatre angles en question valent $(180° - x)/2$. Ainsi les trois angles des deux triangles sont les mêmes et ils sont donc semblables.

On suppose à présent que ABC et A′B′C′ sont semblables. On note s une similitude qui envoie ABC sur A′B′C′. Montrons que s le sommet principal de ABC sur le sommet principal de A′B′C′. Supposons que A soit le sommet principal de ABC, on a alors $\mathrm{AB}/\mathrm{AC} = 1$. Comme une similitude conserve les rapports de longueurs, on en déduit que $s(\mathrm{A})s(\mathrm{B})/s(\mathrm{A})s(\mathrm{C}) = 1$ et donc $s(\mathrm{A})$ est bien le sommet principal de A′B′C′. Comme une similitude conserve les angles (non orientés), on en déduit que les angles au sommet principal coïncident.

3) a) Les triangles ABC et BCD étant semblables. On note pour simplifier $\widehat{\mathrm{B}} = \widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{BAC}}$. Les angles de ABC sont donc $\widehat{\mathrm{A}}, \widehat{\mathrm{B}}, \widehat{\mathrm{B}}$. Les angles de BCD sont les mêmes puisque ABC et BCD sont semblables. Or $\widehat{\mathrm{CBD}} = \widehat{\mathrm{B}}/2$ n'est pas égal à $\widehat{\mathrm{B}}$. Ainsi on a donc nécessairement $\widehat{\mathrm{B}}/2 = \widehat{\mathrm{A}}$ et en plus BCD est isocèle en B.

Ainsi, on a $5\widehat{\mathrm{B}}/2 = 180°$ et donc $\widehat{\mathrm{B}} = 72°$, $\widehat{\mathrm{A}} = 36°$ et les angles de BDA sont $108°, 36°, 36°$.

b) Les angles en B et A de BAD sont égaux à 36°. Ainsi BAD est isocèle en D. Comme une similitude conserve les rapports de longueurs, on a $c/a = \mathrm{BA}/\mathrm{BC} = \mathrm{BC}/\mathrm{CD} = a/(\mathrm{CA} - \mathrm{DA})$. Or $\mathrm{DA} = \mathrm{DB} = \mathrm{CB}$. Ainsi $c/a = a/(c-a) = 1/(c/a - 1)$ et $x = c/a$ vérifie $x = 1/(x-1)$ soit $x^2 - x - 1 = 0$. Les solutions de $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1 = 0$ sont $(1+\sqrt{5})/2$ et $(1-\sqrt{5})/2 < 0$. Ainsi $c/a = (1+\sqrt{5})/2$ [41]

4) Par le théorème 241, il existe une unique similitude directe S qui envoie A sur B et B sur C. Déterminosn l'image de C par S.

L'image du triangle isocèle ABC par S est un triangle isocèle de sommet principal $\mathrm{S}(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$. Ainsi S(C) est le point du plan vérifiant les relations $\mathrm{BC} = \mathrm{B}s(\mathrm{C})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}}) = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{B}s(\mathrm{C})}})$. Ainsi, on a $s(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$ ou $s(\mathrm{C})$ est le symétrique de D par rapport à (BC). Pour éliminer le deuxième cas, il suffit de montrer que les bases $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}})$ ont la même orientation. Comme D est entre A et C (puisque D est le pied de la bissectrice intérieure), l'orientation définie par $(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BD}})$ est la même que l'orientation définie par $(\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}})$ qui est elle-même la même que l'orientation définie par $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$.

Le rapport de la similitude est $\mathrm{S}(\mathrm{A})\mathrm{S}(\mathrm{B})/\mathrm{AB} = \mathrm{BC}/\mathrm{AB} = 2/(1+\sqrt{5}) = (\sqrt{5}-1)/2$

L'angle de S est $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}}) = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}}) + (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}})$. Pour donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}})$, il est nécessaire d'orienter le plan c'est-à-dire de choisir une base du plan. On peut décider par exemple que $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}})$ est directe auquel cas $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}}) = 2\pi/5$ et l'angle de la similitude S est $\pi + 2\pi/5 = 7\pi/5[2\pi]$. Si on choisit que $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}})$ est indirecte alors $(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}}) = -2\pi/5$ et l'angle de la similitude est $3\pi/5$.

5) S^5 est une similitude directe dont l'angle est 5 fois l'angle de S. Ainsi l'angle de S^5 est un multiple de π et S^5 est donc une homothétie.

6) La similitude S est de rapport $a/c \neq 1$. Elle a donc un unique point fixe qui est évidemment un point fixe de S^5.

7) On a $\mathrm{S}^2(\mathrm{A}) = \mathrm{S}(\mathrm{B}) = \mathrm{C}$. On a donc $\mathrm{S}^3(\mathrm{A}) = \mathrm{S}(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$ d'après la question **4**. On a $\mathrm{G} = \mathrm{S}^6(\mathrm{A}) = \mathrm{S}^5(\mathrm{S}(\mathrm{A})) = \mathrm{S}^5(\mathrm{B})$. Le centre de l'homothétie S^5 qui est le centre de la similitude S est sur la droite reliant un point et sont images donc sur $(\mathrm{AS}^5(\mathrm{A})) = (\mathrm{AF})$ et $(\mathrm{BS}^5(\mathrm{B})) = (\mathrm{BG})$.

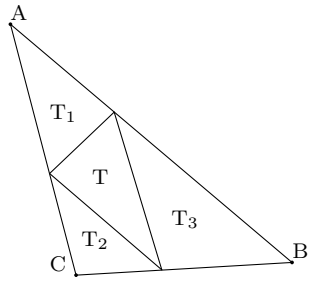
1.6 Des problèmes pour chercher

Exercice 34 — Un problème pour chercher. Soit ABC un triangle et p, q, r trois réels strictement positifs. On définit P tel que $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = p\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, Q tel que $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = q\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et R tel que $\overrightarrow{\mathrm{CR}} = r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.

Déterminer le rapport entre l'aire de PQR et ABC.

Exercice 35 — Triangle inscrit. Soit ABC un triangle et T un triangle inscrit dans ABC

41. Le rapport c/a est donc le nombre d'or. Les triangles semblables a ABC sont ainsi appelés triangle d'or.



a) A-t-on $\text{Aire}(T) \geqslant \min(\text{Aire}(T_1), \text{Aire}(T_2), \text{Aire}(T_3))$

b) Les longueurs des bissectrices de T sont-elles plus petites que celles de T_1 et T_2 et T_3 ? Et les médianes, le périmètre, les angles, les cercles inscrits et circonscrits.

Exercice 36 – Itération de triangles. Soit ABC un triangle.

a) Soit A_1 le milieu de [BC], B_1 le milieu de [AC] et C_1 le milieu de [AB]. On construit ainsi un triangle $A_1B_1C_1$. On recommence le même processus à partir de $A_1B_1C_1$... On définit ainsi une suite de triangles $A_nB_nC_n$. Converge-t-elle ? Vers quoi ? À quelle vitesse ?

b) Même question en remplaçant milieu de [BC] par pied de la hauteur issue de A,...

c) Même question en remplaçant milieu de [BC] par pied de la bissectrice issue de A...

Chapitre 2

Quadrilatère

Définition 29 – Quadrilatère convexe. Soit A, B, C et D quatre points non alignés. On dit que ABCD est un quadrilatère convexe si pour tous les côtés de ABCD les deux autres sommets de ABCD sont du même côté du côté considéré : de façon explicite : C et D du même côté de (AB), D et A du même côté de (BC), A et B du même côté de (CD) et B et C du même côté de (AD).

Définition 30 – Parallélogramme. Soit A, B, C et D quatre points non alignés. On dit que ABCD est un parallélogramme si ses côtés opposés sont parallèles c'est-à-dire si (AB)//(CD) et (AD)//(BC).

Définition 31 – Rectangle. Soit A, B, C et D quatre points non alignés. On dit que ABCD est un rectangle si les quatre angles de ABCD sont droits.

Définition 32 – Losange. Soit A, B, C et D quatre points non alignés. On dit que ABCD est un losange si les quatre côtés de ABCD sont égaux.

Proposition 33 – Caractérisation des parallélogrammes. Soit A, B, C et D quatre points non alignés. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) ABCD est un parallélogramme
- (ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
- (iii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
- (iv) Les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu
- (v) $AB = CD$, $AD = BC$ et ABCD est un quadrilatère convexe (c'est-à-dire les côtés opposés ont la même longueur)
- (vi) (AB)//(CD), $AB = CD$ et ABCD est un quadrilatère convexe (c'est-à-dire ABCD a deux côtés opposés de même longueur)
- (vii) Deux angles consécutifs de ABCD sont supplémentaires
- $(viii)$ $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont supplémentaires, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont supplémentaires
- (ix) $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B}$ et $\widehat{A}$ sont supplémentaires
- (x) Les angles opposés sont égaux et ABCD n'est pas un quadrilatère croisé.
- (xi) ABCD admet un centre de symétrie est un quadrilatère convexe

Proposition 34 – Caractérisation des rectangles. Soit A, B, C et D quatre points non alignés. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) ABCD est un rectangle
- (ii) ABCD a trois angles droits
- (iii) Les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu et sont de même longueur
- (iv) ABCD est un parallélogramme et $AC = BD$
- (v) ABCD est un parallélogramme avec un angle droit
- (vi) ABCD est un parallélogramme inscriptible dans un cercle
- (vii) ABCD est un parallélogramme avec deux angles consécutifs égaux

Proposition 35 – Caractérisation des losanges. Soit A, B, C et D quatre points non alignés. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) ABCD est un losange
(ii) ABCD est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs égaux
(iii) Les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires
(iv) ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires
(v) Les diagonales sont les bissectrices des quatre angles.

Exercice 37 – Vrai ou faux ?. Justifier

a) Les côtés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux

b) Un trapèze est un quadrilatère

c) Un carré est un losange

d) Un rectangle est un parallélogramme

e) Les diagonales d'un losange sont de même longueur

f) Un rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires est un carré

g) Un losange qui a un angle droit est un carré

h) Un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur et parallèles est un parallélogramme

i) Un trapèze isocèle rectangle est un rectangle

j) Un parallélogramme admet au moins un axe de symétrie

k) Tout trapèze peut être inscrit dans un cercle

l) Les diagonales d'un rectangle sont des axes de symétries

m) Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle

n) Un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle

o) Un quadrilatère qui a quatre angles égaux est un rectangle

p) Si (AC) est la bissectrice de $\widehat{A}$ et (BD) la bissectrice de $\widehat{B}$ alors ABCD est un losange

q) Si (AC) est la bissectrice de $\widehat{A}$ et (AC) la bissectrice de $\widehat{C}$ alors ABCD est un losange

r) Si (AC) est la bissectrice de $\widehat{A}$, (BD) la bissectrice de $\widehat{B}$ et (AC) la bissectrice de $\widehat{C}$ alors ABCD est un losange

Exercice 38 Soit A, B, C, D quatre points d'un plan affine tel que trois d'entre eux ne soient pas alignés.

a) Montrer l'équivalence des propriétés

(i) ABCD est un quadrilatère convexe (c'est-à-dire que, pour chacun des quatre côtés, les deux autres sommets du quadrilatère sont dans l'un des deux demi-plans définis par ce coté).
(ii) Pour chacun des côtés de ABCD, les quatre côtés $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$ du quadrilatère sont dans le même demi-plan de frontière le côté initial.
(iii) C est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et A est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD}$
(iv) C est dans le quart de plan défini par les demi-droites [AB) et [AD) et A est dans le quart de plan défini par les vecteurs [CB) et [CD)
(v) C est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et D est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$
(vi) C est dans le quart de plan défini par les demi-droites [AB) et [AD) et D est dans le quart de plan défini par les demi-droites [BC) et [BA)
(vii) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, les coordonnées (x, y) de C vérifient $x > 0$, $y > 0$ et $y > 1 - x$
($viii$) Les coordonnées barycentriques (α, β, γ) de C dans le repère affine ABD vérifient $\alpha < 0$, $\beta > 0$ et $\gamma < 0$.

(ix) B et D sont de part et d'autre de (AC) et A et C sont de part et d'autre de (BD).
(x) $[AC] \cap [BD] \neq \varnothing$

b) Montrer qu'on ne peut pas seulement supposer C est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ pour avoir un quadrilatère convexe.

c) Montrer qu'on ne peut pas seulement supposer B et D de part et d'autre de (AC) pour avoir un quadrilatère convexe.

Corrigé (i) $\Leftrightarrow$ (iii). Dire que C est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ signifie que C et D sont du même côté que (AB) et C et B sont du même côté de (AD). En ajoutant l'hypothèse A est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CD}$, on ajoute le fait que A et B sont du même côté que (CD) et A et D sont du même côté de (BC). On obtient ainsi précisément la définition du quadrilatère convexe.
(i) $\Rightarrow$ (iv). Soit (α, β, γ) les coordonnées barycentrique de C dans le repère affine défini par les points A, B et D. Comme C et D sont du même côté de (AB), on a $\gamma > 0$. De même, C et B du même côté de (AD) donne $\beta > 0$.

On veut à présent écrire D comme barycentre de A, B et C. La relation

$$\alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB} + \gamma\overrightarrow{CD} = 0$$

devient

$$\alpha\overrightarrow{DA} + \beta\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = 0\,.$$

c'est-à-dire D barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ et $(C, -1)$. Or la somme est $-1 + \alpha + \beta = -\gamma$ est négative. Ainsi en renormalisant, on obtient que les coordonnées barycentrique de D dans le repère ABC sont (u, v, w) avec u du signe de $-\alpha$. Mais comme D et A sont du même côté de (BC), on obtient $-alpha > 0$ d'où le point (iv).
(iv) $\Rightarrow$ (i). (iv) donne immédiatement C et D du même côté de (AB) et B et C du même côté de (AD).

Mais avec un calcul fait précédemment, on a A barycentre de (B, β), $(C, -1)$ et (D, γ) avec une somme de coefficient qui est $-\alpha > 0$. Ainsi les coordonnées barycentrique de D dans le repère ABC ont pour signe $(+, -, +)$ ce qui donne en particulier que D et A sont du même côté que (BC) et A et B sont du même côté que (AD).
(i) $\Rightarrow$ (iii). est évident.
($\Rightarrow$ (. iii))(iv) Introduisons les coordonnées barycentriques (α, β, γ) de C dans le repère (A, B, D). L'hypothèse C est dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ assure $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On exprime ensuite le fait que D est barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ et $(C, -1)$ avec une somme de coefficient de $-\gamma < 0$. Ainsi les coordonnées barycentriques ont pour signe $(-\text{signe}(\alpha), -, +)$. L'hypothèse D dans le quart de plan défini par les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$ assure alors que $-\alpha > 0$.
(iv) $\Rightarrow$ (v). On a évidemment A et C de part et d'autre de (BD). Toujours avec le même calcul, on obtient que D est barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ et $(C, -1)$ avec une somme de coefficient de $-\gamma < 0$. Ainsi les coordonnées barycentriques ont pour signe $(+, -, +)$. Et B et D sont de part et d'autre de (AC).
(v) $\Rightarrow$ (iv). L'hypothèse A et C de part et d'autre de (BD) assure que $\alpha < 0$. Toujours comme D est barycentre de $(A, \alpha), (B, \beta)$ et $(C, -1)$ de somme $-\gamma$. Si $\gamma < 0$, alors $-\gamma > 0$ et la coordonnée barycentrique de D suivant B est du signe de β. Or comme B et D sont de part et d'autre de (AC). On obtient que $\beta < 0$. Mais $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et α et β et γ sont négatifs ce qui est impossible. Donc $\gamma > 0$. Toujours comme B et D sont de part et d'autre de (AC), on en déduit que $\beta/ - \gamma < 0$ c'est-à-dire $\beta > 0$.
(vi) $\Leftrightarrow$ (vii) évident
(vii) $\Rightarrow$ (iii) C est dans le quart de plan défini par [AB) et [AD). Soit Q le point d'intersection. On a [DB] dans le quart de plan. Donc Q l'est. Donc la demi-droite [AQ) l'est. Or C est sur cette demi-droite (puisque Q est entre A et C).

Par le même argument avec C comme origine, on a
(iii) $\Rightarrow$ ($viii$) (AC) rencontre [BD] sur [AC). De même, à partir de C, (AC) rencontre [BD] sur [CA). Le point d'intersection est donc sur [AC].
(iv) $\Rightarrow$ ($viii$). le point d'intersection $(BD) \cap (AC)$ est sur $[BD] \cap [AC)$ et $[BD) \cap [AC]$.

Exercice 39 – caractérisation des parallélogrammes. Soient $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien et A, B, C, D quatre points distincts et non alignés de $\mathscr{E}$.

L'objectif est de donner les caractérisations classiques du parallélogramme utilisées au collège (et même un peu plus).

a) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

(i) $(AB)//(CD)$ et $(AD)//(BC)$;

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

(iii) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

(iv) $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu ;

(v) $AB = CD$ et $AD = BC$ et $ABCD$ est un quadrilatère convexe (c'est-à-dire que, pour tout coté, le quadrilatère est entièrement dans l'un des deux demi-plans définis par ce coté).

(vi) $AB = CD$ et $(AB)//(CD)$ et $ABCD$ est un quadrilatère convexe.

(vii) $ABCD$ admet un centre de symétrie et n'est pas un quadrilatère croisé.

Si (A, B, C, D) vérifie ces propriétés, on dit que c'est un parallélogramme.

b) *Une application : un théorème de Varignon.* Soient (A, B, C, D) quatre points de $\mathscr{E}$. On note I_1 le milieu de $[AB]$, I_2 le milieu de $[BC]$, I_3 le milieu $[CD]$ et I_4 le milieu de $[DA]$. Montrer que (I_1, I_2, I_3, I_4) est un parallélogramme (on pourra utiliser le théorème de la droite des milieux dans des triangles bien choisis).

Corrigé Montrons que $(ii) \Leftrightarrow (iii)$. D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ alors $(AD)//(BC)$. De plus, comme $(ii) \Leftrightarrow (iii)$, on a aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $(AB)//(DC)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. On a $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} = \beta\overrightarrow{DC}$. On a donc $\overrightarrow{AD} = \alpha(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$. On en déduit alors que $(1-\alpha)\overrightarrow{AD} = \alpha(\beta\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) = \alpha(1-\beta)\overrightarrow{DC}$. Comme A, B, D ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires et donc $(1-\alpha)\overrightarrow{AD} = \alpha(1-\beta)\overrightarrow{DC} = 0$. Ainsi $\alpha = \beta = 1$.

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$. On l'a vu en cours. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $-\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 0$ si et seulement si D barycentre de $(A, -1)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

$(ii) \Rightarrow (v)$. Soit I le milieu de $[AC]$ c'est-à-dire que I est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 1)$ (la notion de milieu est une notion barycentrique : pas une notion de longueur !). On a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$. On veut montrer que I est aussi le milieu de $[BD]$ c'est-à-dire que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID}$.

Par hypothèse, on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et donc $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}$ grâce à la relation de Chasles. Grâce à la relation $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$, on en déduit que $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{ID}$.

$(v) \Rightarrow (ii)$. Soit I le milieu commun de $[AC]$ et $[BD]$. On a donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI}$. En ajoutant les deux relations, on obtient $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}$ ce qui donne $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$(ii) \Rightarrow (vi)$. On a $AD = BC$. De plus, grâce à l'équivalence de (ii) et (iii), on a aussi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $AB = CD$. De plus, comme $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, les points B et C sont du même côté de la droite (AD) (sinon, on aurait un point du segment $[BC]$ qui serait sur la droite (AD) (théorème des valeurs intermédiaires) et (AD) et (BC) ne seraient pas parallèles). De la même façon, A et D sont du même côté de la droite (BC) et en utilisant la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, on obtient la convexité de $ABCD$.

$(vi) \Rightarrow (ii)$. Le point C est sur le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre B et de rayon AD et sur le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre D et de rayon AB. Ces deux cercles n'ont pas le même centre et se rencontrent (en C). Ainsi $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ est réduit à un ou deux points qui sont symétriques par rapport à la droite (BD) qui relient les centres des cercles.

Par ailleurs, on définit C' le point tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC'}$. D'après $(ii) \Rightarrow (vi)$ (appliqué aux points A, B, C' et D), on a $C' \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ et $ABC'D$ est un parallélogramme convexe. On veut montrer que $C = C'$. On aura alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Si $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ est réduit à un point, comme C et C' sont dans l'intersection, on en déduit que $C = C'$.

On suppose à présent que $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ contient deux points C_1 et C_2 qui sont alors de part et d'autre de la droite des centres (BD). On appelle C_1 celui qui est du même côté de (BD) que A et C_2 l'autre. On va montrer que ABC_1D n'est pas convexe et donc on aura $C \neq C_1$ et $C' \neq C_1$ et ainsi $C = C_2 = C'$.

Il reste à montrer que ABC_1D n'est pas convexe. Pour cela, on peut, quitte à échanger B et D supposer que $AB \leqslant AD$. De plus, si $AB = AD$. Alors A est sur le cercle de centre D et de rayon AB

et sur le cercle de centre B et de rayon AD. Ainsi A est sur $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ et $A \neq C_2$ puisqu'ils ne sont pas du même côté de (BD). Ainsi $A = C_1$ et donc $C_1 = A \neq C$ (par hypothèse, les quatre points sont distincts) et $A \neq C'$ et donc $C = C' = C_2$.

On suppose à présent que $AD > AB$. Pour montrer que ABC_1D n'est pas convexe, on commence par considérer la médiatrice $\mathscr{D}$ de [BD] et A' le symétrique de A par rapport à $\mathscr{D}$ (on note s cette symétrie). On a $A'B = s(A)s(D) = AD$ et donc A' est sur $\mathscr{C}_1$. De même, $A'D = s(A)s(B) = AB$ et donc A' est sur $\mathscr{C}_2$. Ainsi $A' \in \mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$. Mais (AA') est perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et donc parallèle à (BD). En particulier, A et A' sont du même côté de (BD) et donc $A' = C_1$.

Par ailleurs, A est dans le même demi-plan délimité par $\mathscr{D}$ que B (puisque $AB < AD$) et D dans l'autre demi-plan (l'ensemble des points M du plan tel que $MB < MD$ est le demi-plan contenant B et délimité par $\mathscr{D}$). En particulier, le segment [AD] coupe $\mathscr{D}$ en un point E. Mais $s([AD]) = [C_1B]$ et $s(E) = E$. Donc $E \in [AD] \cap [C_1B]$ et C_1 et B ne sont pas du même côté de [AD] et le quadrilatère n'est donc pas convexe.

Chapitre 3

Espace Euclidien

Soit E un espace vectoriel **réel**. Sur un simple espace vectoriel, on ne peut pas définir de notion de longueur des vecteurs, encore moins d'angle entre les vecteurs, ni parler d'orthogonalité. Pour avoir accès à ces notions, il faut une donnée supplémentaire sur l'espace vectoriel E. Si on se contente de la notion de longueur des vecteurs, il faut ajouter à E une norme.[1] Notre objectif étant de faire de la géométrie, il s'agit d'avoir un peu plus que des longueurs : on veut pouvoir parler d'orthogonalité, définir des angles,... Pour cela, la donnée qu'il faut ajouter à E est un produit scalaire. Ce produit scalaire permettra de définir l'orthogonalité, des angles et aussi bien sûr une norme pour parler de longueur des vecteurs. C'est l'objectif de ce chapitre que de mettre ces éléments en place.

3.1 Espace euclidien : produit scalaire et norme

Entrons à présent dans le vif du sujet et définissons les objets que nous allons étudier. On commence par la notion de produit scalaire.

Définition 36 – Produit scalaire. Soit E un espace vectoriel réel. On appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire symétrique définie positive c'est-à-dire une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathrm{E} \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle \end{cases}$$

vérifiant les propriétés suivantes : pour tout $u, u', v, v' \in \mathrm{E}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a

(i) $\langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$;[2]
(ii) $\langle u + u', v + v' \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle + \langle u, v' \rangle + \langle v, v' \rangle$;[3]
(iii) $\langle \lambda u, \mu v \rangle = \lambda \mu \langle u, v \rangle$;[4]
(iv) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;[5]
(v) $\langle u, u \rangle \geqslant 0$;[6]
(vi) $\langle u, u \rangle = 0 \implies u = 0$.[7]

On définit à présent un espace euclidien, qui comme annoncé dans le chapeau du chapitre, est un couple formé d'un espace vectoriel et d'une donnée supplémentaire.

Définition 37 – Espace euclidien. On dit que $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel euclidien si E est un espace vectoriel de dimension finie et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

1. c'est-à-dire une application $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ tel que
(i) $\mathrm{N}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$,
(ii) $\mathrm{N}(x) = 0 \iff x = 0$
(iii) $\mathrm{N}(x + y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$
(iv) $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathrm{N}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Le mot forme décrit cette propriété.
3. C'est la première partie de la propriété de bilinéarité.
4. C'est la deuxième partie de la propriété de bilinéarité.
5. C'est la propriété de symétrie.
6. C'est la propriété de positivité.
7. C'est le fait d'être définie.

3.1.1 Inégalité de Cauchy-Schartz

La propriété fondamentale suivante (l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et son corollaire montrent en particulier que, dans un espace euclidien, on peut construire une norme à partir du produit scalaire. Ainsi, on peut parler de longueur des vecteurs d'un espace euclidien et lorsqu'on le fait, c'est toujours relativement à cette norme qui est naturellement associée au produit scalaire.

Proposition 38 – Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace (vectoriel) euclidien alors $\langle u, v\rangle^2 \leqslant \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$

Preuve. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathrm{P}(\lambda) := \langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle \geqslant 0$ et

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2\langle v, v\rangle$$

Ainsi, P est un polynôme de degré 2 qui est positif (et a donc au plus une racine). Son discriminant est donc négatif.

Corollaire 39 – Norme associée à un produit scalaire. L'application $\mathrm{N} : u \mapsto \sqrt{\langle u, u\rangle}$ est une norme sur E.

Preuve. Grâce à la propriété de positivité du produit scalaire, on a $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ pour tout $u \in \mathrm{E}$. Ainsi $\mathrm{N}(u) = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ est bien défini et en plus positif. De plus, le fait d'être défini assure que $\sqrt{\langle u, u\rangle} = 0$ implique $u = 0$. De plus, on a par bilinéarité, $\langle 0, 0\rangle = 0$. Par ailleurs, avec la deuxième propriété de bilinéarité, on a $\mathrm{N}(\lambda u) = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle u, u\rangle} = \lambda\mathrm{N}(u)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Enfin, pour $u, v \in \mathrm{E}$, on a

$$\mathrm{N}(u + v) = \sqrt{\langle u + v, u + v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle}$$

Mais $2\langle u, v\rangle \leqslant \sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz). Donc

$$\mathrm{N}(u + v) \leqslant \sqrt{\mathrm{N}(u)^2 + 2\mathrm{N}(u)\mathrm{N}(v) + \mathrm{N}(v)^2} = \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(v)\,.$$

Et N est une norme.

Remarque 40 – Produit scalaire, norme et carré. On voit une racine carré dans la définition de la norme associée à un produit scalaire. Cette racine carré est nécessaire. Mais elle complique parfois inutilement les calculs. Ainsi, dès qu'il est possible, on préférera utiliser le carré de la norme. Voir par exemple, dans le chapitre 1, la démonstration des propositions 3, 21 et 26.

Lorsqu'on dispose d'une inégalité, il est toujours intéressant de déterminer les conditions pour laquelle cette inégalité est une égalité : on parle alors de cas d'égalité (dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). C'est l'objectif de l'exercice qui suit.

Exercice 40 – Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

a) Montrer que $\langle u, v\rangle^2 = \mathrm{N}(u)^2\mathrm{N}(v)^2$ si et seulement si (u, v) est une famille liée. Indication :le discriminant du polynôme P de la preuve de la proposition 38 est nul. Ainsi P admet une racine λ_0. Mais $\mathrm{P}(\lambda_0) = 0$ implique $u + \lambda_0 v = 0$ grâce au fait qu'un produit scalaire est défini.

b) En déduire que $\langle u, v\rangle = \mathrm{N}(u)\mathrm{N}(v)$ si et seulement si (u, v) est une famille positivement liée (c'est-à-dire $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$ avec $\lambda \geqslant 0$.

c) En déduire que $\mathrm{N}(u + v) = \mathrm{N}(u) + \mathrm{N}(v)$ si et seulement si (u, v) est une famille positivement liée.

Notation 41 À partir de maintenant, on notera indifféremment $\mathrm{N}(u)$ ou $\|u\|$.

3.2 Orthogonalité

Comme annoncé dans l'introduction, les espaces euclidiens sont un cadre dans lequel il est simple de définir la notion d'orthogonalité. Définir et étudier cette notion est l'objectif de cette section.

Définition 42 – Vecteur orthogonaux. Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien et $u, v \in \mathrm{E}$. On dit que u et v sont orthogonaux ou perpendiculaires si $\langle u, v\rangle = 0$ [8].

8. Dans le cadre des espaces euclidiens, la définition des vecteurs orthogonaux se fait via le produit scalaire : c'est bien une définition.

Proposition-Définition 43 – Orthogonal. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

Alors $\mathrm{F}^\perp = \{x \in \mathrm{E}, \quad \langle x, y\rangle = 0 \ \ \forall y \in \mathrm{F}\}$ (c'est-à-dire les vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F) est un sous-espace vectoriel de E qui est un supplémentaire de F dans E : on a

$$\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}.$$

En particulier, $\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} = (\mathrm{F}^\perp)^\perp$.

Preuve. La propriété de bilinéarité du produit scalaire assure que $\mathrm{F}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E[9]. Il est aussi évident que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0\}$. En effet, un vecteur u qui est dans F et dans $\mathrm{F}^\perp$ est en particulier orthogonal à lui-même (puisqu'il est dans F et orthogonal à tous les vecteurs de F). On a donc $\langle u, u\rangle = 0$ et donc $u = 0$.

Montrons à présent que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$. Cette démonstration est délicate et repose sur l'isomorphisme de Riesz (proposition 47). Elle peut être omise en première lecture. La première remarque à faire est de constater[10] que la restriction à $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ du produit scalaire de E est un produit scalaire sur F qu'on va noter $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{F}}$. En particulier $(\mathrm{F}, \langle \cdots, \cdots \rangle_{\mathrm{F}})$ est un espace euclidien[11]. On fixe $x \in \mathrm{E}$ et on considère l'application

$$\begin{cases} \mathrm{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \langle x, y\rangle . \end{cases}$$

Le fait que le produit scalaire soit une forme bilinéaire assure que cette application est une forme linéaire sur F c'est-à-dire un élément de F^*. L'isomorphisme de Riesz (proposition 47) appliquée à l'espace euclidien $(\mathrm{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{F}})$ assure alors qu'il existe $z \in \mathrm{F}$ tel que $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle_{\mathrm{F}}$ pour tout $y \in \mathrm{F}$. En particulier, on en déduit que $x - z \in \mathrm{F}^\perp$ et on a bien décomposé $x = z + (x - z)$ en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $\mathrm{F}^\perp$.

On en déduit alors tout de suite la propriété de dimension. Montrons que $\mathrm{F} = (\mathrm{F}^\perp)^\perp$. On remarque que $\mathrm{F} \subset (\mathrm{F}^\perp)^\perp$ puisque tout vecteur de F est bien orthogonal à tous les vecteurs de $\mathrm{F}^\perp$. Pour conclure, il suffit de montrer que les deux espaces vectoriels ont la même dimension. Or d'après ce qui précède, on a $\dim(\mathrm{F}^\perp)^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{F}$.

3.2.1 Projection et symétrie

Pour définir une projection de E, on a besoin d'un couple (F, G) de sous-espaces vectoriels de E vérifiant $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ (voir la proposition-définition 276). Cela permet de définir la projection sur F parallèlement à G. En particulier, il y a plusieurs projections sur F : autant que de supplémentaires de F dans E[12]. Lorsque E est euclidien, parmi tous les supplémentaires de F, il y en a un spécifique : c'est son orthogonal $\mathrm{F}^\perp$.

Définition 44 – Projection orthogonal. Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E[13]. On définit la *projection orthogonale sur* F comme la projection sur F parallèlement à $\mathrm{F}^\perp$. On la note p_{F} plutôt que $p_{\mathrm{F},\mathrm{F}^\perp}$. Elle est donnée par

$$\text{si } x = u + v \text{ avec } u \in \mathrm{F} \text{ et } v \in \mathrm{F}^\perp \text{ alors } p_{\mathrm{F}}(x) = u\,.$$

La proposition suivante montre que la structure euclidienne permet de caractériser le projeté orthogonal en terme de distance au sous-espacesur lequel on projette. De plus, elle montre aussi que la notion de base orthonormée permet de calculer explicitement la projection orthogonale sur un sous-espace lorsqu'on dispose d'une base orthonormée de celui-ci.

Proposition 45 – Projeté orthogonal. Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E. On note p_{F} la projection orthogonale sur F.

Alors $p_{\mathrm{F}}(x)$ est l'unique vecteur y de E vérifiant $y \in \mathrm{F}$ et $\|x - y\| = \inf\{\|x - z\|, z \in \mathrm{F}\}$[14].

Par ailleurs, si $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée de F alors pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a

$$p_{\mathrm{F}}(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

9. Vérifier le.
10. Cela ne demande guère plus d'effort qu'une constatation.
11. Au passage, on vient de montrer que tout sous-espace vectoriel d'un espace euclidien est lui-même un espace vectoriel euclidien avec comme produit scalaire, la restriction de celui du grand espace.
12. c'est-à-dire une infinité si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\mathrm{F} \neq 0$ et $\mathrm{F} \neq \mathrm{E}$.
13. On se donne un seul espace vectoriel
14. En particulier le projeté orthogonal est le vecteur de F le plus proche de x

Preuve. Par définition $p_{\mathrm{F}}(x) \in \mathrm{F}$. Montrons que $\|x - p_{\mathrm{F}}(x)\| \leqslant \|x - f\|$ pour tout $f \in \mathrm{F}$. Pour $f \in \mathrm{F}$, on écrit $x - f = u + v$ avec $u = x - p_{\mathrm{F}}(x) \in \mathrm{F}^{\perp}$ (par définition de $p_{\mathrm{F}}(x)$, on a $p_{\mathrm{F}}(x) \in \mathrm{F}^{\perp}$) et $v = p_{\mathrm{F}}(x) - f \in \mathrm{F}$. On a alors

$$\|x - f\|^2 = \|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, v\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle\,.$$

Or $\langle u, v\rangle = 0$ puisque $u \in \mathrm{F}^{\perp}$ et $v \in \mathrm{F}$. On en déduit que $\|x - f\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. En particulier, on a bien $\|x - p_{\mathrm{F}}(x)\| \leqslant \|x - f\|$ pour tout $f \in \mathrm{F}$ et l'égalité a lieu uniquement si $v = 0$ c'est-à-dire $f = p_{\mathrm{F}}(x)$ [15].

On note $z = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i\rangle e_i$. Pour montrer que $z = p_{\mathrm{F}}(x)$, il s'agit de décomposer x sous la forme $x = z + z'$ avec $z \in \mathrm{F}$ et $z' \in \mathrm{F}^{\perp}$. Il est clair que $z \in \mathrm{F}$ puisque $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base de F. Si une telle décomposition existe, on a nécessairement $z' = x - z$. Si on montre que $x - z \in \mathrm{F}^{\perp}$ alors, on aura décomposer $x = z + (x - z)$ avec $z \in \mathrm{F}$ et $(x - z) \in \mathrm{F}^{\perp}$ ce qui est le résultat souhaité.

Montrons donc que $x - z \in \mathrm{F}^{\perp}$. Pour cela, on doit montrer que $\langle x - z, y\rangle = 0$ pour tout $y \in \mathrm{F}$. Soit donc $y \in \mathrm{F}$. Comme $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée de F, on a vu que la décomposition de y dans cette base était donnée par

$$y = \sum_{i=1}^{r} \langle y, e_i\rangle e_i\,.$$

On en déduit, par linéarité à droite du produit scalaire que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle y, e_i\rangle\langle x, e_i\rangle$$

Par ailleurs, comme $z = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i\rangle e_i$, la linéarité à gauche du produit scalaire donne

$$\langle z, y\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle\,.$$

On a bien $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ ce qui est l'égalité souhaitée.

Définition 46 — Symétrie orthogonale. De même, on peut considérer la symétrie s_{F} par rapport à F de direction $\mathrm{F}^{\perp}$: c'est ce qu'on appelle la **symétrie orthogonale par rapport à** F :

$$\text{si } x = u + v \text{ avec } u \in \mathrm{F} \text{ et } v \in \mathrm{F}^{\perp} \text{ alors } s_{\mathrm{F}}(x) = u - v\,.$$

Exercice 41 — Projection, symétrie et longueur. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\|p_{\mathrm{F}}(x)\| \leqslant \|x\|$ et $\|s_{\mathrm{F}}(x)\| = \|x\|$ [16].

Exercice 42 — Un exemple. Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Déterminer la projection orthogonale d'un vecteur (x, y, z) sur la droite $\mathrm{D} = \mathbb{R}(2, 1, -2)$ et sur le plan $\mathrm{D}^{\perp}$.

Exercice 43 — Espace de matrices. On considère $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on munit du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{tr}\,({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{B})$. On considère les sous-espaces vectoriels $\mathcal{T} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad \mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = 0\}$, $\mathcal{I} = \mathbb{R}\mathrm{I}_2$, $\mathcal{S} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad {}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}\}$, $\mathcal{S} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \quad {}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}\}$.

a) Soit E un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace vectoriel de E. Déterminer $p_{\mathrm{F}^{\perp}}$ en fonction de p_{F}.

b) Calculer les projections orthogonales de $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sur $\mathcal{T}, \mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{A}$.

Exercice 44 — Polynômes. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$. Pour chacun des trois produits scalaires

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q}\rangle_1 = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2)$$

15. On remarque encore une fois, l'efficacité du passage au carré pour le calcul, voir la remarque 40.

16. Cette dernière égalité montre en particulier que s_{F} est une isométrie vectorielle (voir la section 3.3) et particulièrement la proposition-définition 58 pour plus de détails sur cette question.

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle_2 = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t$$

$$\langle \mathrm{P}, \mathrm{Q} \rangle_3 = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}'(0)\mathrm{Q}'(0) + \mathrm{P}''(0)\mathrm{Q}''(0)$$

déterminer les projections orthogonales sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ et $\mathbb{R}_0[\mathrm{X}]$.

3.3 Endomorphismes « sympathiques » d'un espace euclidien.

Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdots, \cdots \rangle)$ un espace euclidien. Le produit scalaire sur E donne un rôle spécifique à certains endomorphismes de E : ceux qui se comportent bien relativement au produit scalaire. Les enjeux sont ainsi de définir précisément ce que signifie « se comportent bien » (on verra qu'il s'agit de propriétés relatives à l'adjoint) et d'étudier ensuite les endomorphismes en question (les endomorphismes symétriques et orthogonaux) et leur réduction.

On a vu au début de ce chapitre qu'un espace euclidien est muni naturellement d'une norme donnée par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. C'est toujours de cette norme dont il sera question dans la suite.

3.3.1 Théorème de Riesz

Pour un espace vectoriel de dimension fini quelconque, il existe un isomorphisme avec son espace dual puisque les deux espaces vectoriels ont la même dimension. Mais pour construire un tel isomorphisme, il faut en général choisir des bases dans chacun de ces espaces. Lorsqu'on ajoute un produit scalaire sur E, on peut définir un isomorphisme entre E et E^* qui ne dépend pas du choix des bases : c'est l'isomorphisme de Riesz.

Proposition 47 – Isomorphisme de Riesz. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{E}})$ un espace euclidien. L'application

$$\mathrm{R} : \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^* \\ x \longmapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Preuve. La linéarité à droite du produit scalaire assure que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'application $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est bien une forme linéaire. Ainsi l'application R est bien définie. La linéarité à gauche du produit scalaire assure que R est bien linéaire [17].

Comme E et E^* sont des espaces vectoriels de dimension finie de même dimension, pour montrer que R est un isomorphisme, il suffit de montrer que R est injectif. Or, si $\mathrm{R}(x) = 0$ [18], on a $0 = \mathrm{R}(x)(x) = \langle x, x \rangle_{\mathrm{E}}^2$ ce qui montre que $x = 0$.

Remarque 48 – Surjectivité-Injectivité. Pour montrer que R était bijectif, on s'est servi de l'injectivité de R et du fait que E et E^* était de même dimension finie. Cela assure la surjectivité qui est délicate à montrer par un autre moyen. Cette surjectivité, obtenue à moindre frais, est très utile : elle dit en particulier que n'importe quelle forme linéaire φ sur notre espace euclidien E se met sous la forme $\varphi = \langle x, \cdot \rangle$: φ peut s'exprimer comme le produit scalaire avec un vecteur constant. On verra que c'est cette surjectivité qui servira dans la définition de l'adjoint. On s'en est aussi déjà servi pour montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$ (voir la proposition 43)

Par ailleurs, de façon heuristique l'injectivité de R peut aussi s'interpréter de la façon suivante : si je connais le produit scalaire de x avec tous les vecteurs de E alors je connais x. En effet, cela signifie qu'on connait la forme linéaire $\mathrm{R}(x) = \langle x, \cdot \rangle$ et donc x puisque R est injective.

3.3.2 Adjoint

Dans ce paragraphe, on ajoute encore un élément à notre situation : on considère un endomorphisme (quelconque) de notre espace euclidien. À cet endomorphisme, on commence par lui associer un autre endomorphisme (son adjoint). On étudiera ensuite les endomorphismes dont l'adjoint vérifie certaines propriétés.

17. On réfléchira au sens de $\varphi + \psi$ et $\lambda\varphi$ pour φ et ψ des formes linéaires et $\lambda \in \mathbb{R}$.

18. Ça veut dire que la forme linéaire $\mathrm{R}(x)$ est nulle, elle est donc nulle évaluée en tout vecteur y et en particulier en $y = x$

Proposition-Définition 49 — Adjoint d'un endomorphisme. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{E}})$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Il existe un unique endomorphisme de E, noté $u*$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall\,(x,y)\in\mathrm{E}^2,\qquad \langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle$$

Preuve. Cette propriété est une utilisation directe de l'isomorphisme de Riesz : l'injectivité de R va donner l'unicité de u^*, la surjectivité de R son existence.

Commençons par montrer l'unicité. Supposons que u^* et v sont deux endomorphismes de E qui vérifient

$$\forall\,(x,y)\in\mathrm{E}^2,\qquad \langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle=\langle x,v(y)\rangle$$

Fixons $y\in\mathrm{E}$. Par symétrie du produit scalaire, on a $\langle u^*(y),x\rangle=\langle v(y),x\rangle$ pour tout $x\in\mathrm{E}$ c'est-à-dire $\mathrm{R}(u^*(y))=\mathrm{R}(v(y))$. Comme R est injective, on en déduit que $u^*(y)=v(y)$. Cette égalité étant vraie pour tout $y\in\mathrm{E}$, on en déduit que $u^*=v$.

Passons maintenant à l'existence. Fixons $y\in\mathrm{E}$. Comme u est linéaire, l'application $x\mapsto\langle u(x),y\rangle$ est une forme linéaire sur E. La surjectivité de R assure qu'il existe un (unique [19]) vecteur $z\in\mathrm{E}$ tel que

$$\langle u(x),y\rangle=\mathrm{R}(z)(x)=\langle z,x\rangle=\langle x,z\rangle \text{ pour tout } x\in\mathrm{E}\,.$$

Bien entendu, z dépend de y. Pour rappeler cette dépendance en y, on note $u^*(y)$ plutôt que z. Ainsi, pour tout y, on a construit un vecteur $u^*(y)$ tel que

$$\langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle \text{ pour tout } x\in\mathrm{E}\,.$$

On a donc bien

$$\forall\,(x,y)\in\mathrm{E}^2,\qquad \langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle\,.$$

Il reste alors à s'assurer que l'application $u^*\colon y\mapsto u^*(y)$ est linéaire c'est-à-dire que pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $y,y'\in\mathrm{E}$, on a $u^*(\lambda y+\mu y')=\lambda u^*(y)+\mu u^*(y')$.

Comme u^* est définie à partir de l'isomorphisme R et qu'en particulier R est injectif, pour montrer l'égalité précédente, il suffit de montrer que $\mathrm{R}(u^*(\lambda y+\mu y'))=\mathrm{R}(\lambda u^*(y)+\mu u^*(y'))$ c'est-à-dire que

$$\forall\,x\in\mathrm{E},\quad \langle u^*(\lambda y+\mu y'),x\rangle=\langle\lambda u^*(y)+\mu u^*(y),x\rangle\,.$$

Or, on a

$$\langle u^*(\lambda y+\mu y'),x\rangle=\langle x,u^*(\lambda y+\mu y')\rangle=\langle u(x),\lambda y+\mu y'\rangle=\lambda\langle u(x),y\rangle+\mu\langle u(x),y'\rangle \qquad (\mathbf{1})$$

et$\langle\lambda u^*(y)+\mu u^*(y),x\rangle=\langle x,\lambda u^*(y)+\mu u^*(y)\rangle=\lambda\langle x,u^*(y)\rangle+\mu\langle x,u^*(y')\rangle=\lambda\langle u(x),y\rangle+\mu\langle u(x),y'\rangle(\mathbf{2})$

Les égalités (**1**) et (**2**) donnent ce dont on a besoin pour conclure.

Propriétés 50 — Propriété de l'adjoint. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{E}})$ un espace euclidien, u,v deux endomorphismes de E, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. On a

(*i*) $(\lambda u+\mu v)^*=\lambda u^*+\mu v^*$
(*ii*) $(u\circ v)^*=v^*\circ u^*$
(*iii*) ${\mathrm{id}_{\mathrm{E}}}^*=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$
(*iv*) $u^{**}=u$

Autrement dit, l'application

$$*\colon\begin{cases}\mathscr{L}(\mathrm{E})\longrightarrow\mathscr{L}(\mathrm{E})\\ \quad u\quad\longmapsto u^*\end{cases}$$

est un antihomomorphisme d'algèbres involutif.

Preuve. Les démonstrations se font en utilisant la caractérisation de u^* avec la relation :

$$\forall\,(x,y)\in\mathrm{E}^2,\qquad \langle u(x),y\rangle=\langle x,u^*(y)\rangle=\langle x,v(y)\rangle\,.$$

Traitons le cas de (*iii*). On veut calculer $(u\circ v)^*$. Pour cela, on exprime donc pour tous $x,y\in\mathrm{E}$, la quantité $\langle u\circ v(x),y\rangle$ sous la forme $\langle x,z\rangle$ pour un certain z qui sera $(u\circ v)^*(y)$. On fixe donc $x,y\in\mathrm{E}$ et on calcule

19. Parce que R est bijective

$$\langle u \circ v(x), y\rangle = \langle v(x), u^*(y)\rangle = \langle x, v^*(u^*(y))\rangle$$

La première égalité résulte de la relation de définition de u^*, la deuxième de la relation de définition de v^* [20]. On en déduit la formule voulue : $(u \circ v)^*(y) = v^* \circ u^*(y)$, ceci étant valable pour tout y.

Maintenant qu'on sait définir l'adjoint d'un endomorphisme u, on va étudier deux types d'endomorphismes dont l'adjoint vérifie des propriétés particulières relativement à u : les endomorphismes symétriques qui sont ceux pour lesquels $u = u^*$ et les endomorphisme orthogonaux qui sont bijectifs et vérifient $u^* = u^{-1}$. Ce sont des endomorphismes spécifique de E : ils sont définis par une propriété liée au produit scalaire.

3.3.3 Endomorphisme symétrique.

Définition 51 Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On dit que u est *symétrique* si u est égal à son adjoint c'est-à-dire $u = u^*$.

Un endomorphisme **symétrique** est dit *positif* si $\langle u(x), x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Un endomorphisme **symétrique** est dit *défini positif* si $\langle u(x), x\rangle > 0$ pour tout $x \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0\}$.

Exercice 45 Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{E}})$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E. Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{E} \times \mathrm{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \langle u(x), y\rangle \end{cases}$$

est un produit scalaire sur E si et seulement si u est un endomorphisme symétrique défini positif.

Le théorème principal (et plus que très important) concernant les endomorphismes symétriques est le théorème 56. Pour démontrer ce résultat on va tout d'abord démontrer quelques lemmes intéressant pour eux-mêmes. Le premier lemme montre qu'à partir d'un endomorphisme symétrique et d'un sous-espace stable par cet endomorphisme, on peut construire un nouveau sous-espace stable qui en plus est un supplémentaire du premier. Ce lemme est évidemment crucial dans toutes les questions de réduction puisqu'il permettra de faire des raisonnements par récurrence et de raisonner par bloc.

Lemme 52 — Endomorphisme symétrique et sous-espace stable. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{E}})$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique et F un sous-espace stable par u. Alors $\mathrm{F}^\perp$ est aussi stable par u.

Preuve. Soit $y \in \mathrm{F}^\perp$. Il s'agit de montrer que $u(y) \in \mathrm{F}^\perp$ c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathrm{F}$, on a $\langle x, u(y)\rangle = 0$. Or, on a

$$\langle x, u(y)\rangle = \langle u^*(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0\,.$$

En effet, la première égalité résulte de la définition de l'adjoint, la deuxième du fait que u est symétrique et la troisième du fait que $u(x) \in \mathrm{F}$ (puisque F est stable par u) et $y \in \mathrm{F}^\perp$.

Remarque 53 — Endomorphisme symétrique et sous-espace stable. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace de E.

L'espace vectoriel F est aussi muni d'une structure d'espace euclidien grâce à celle de E : on vérifie immédiatement que l'application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}} : \begin{cases} \mathrm{F} \times \mathrm{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle \end{cases}$$

est un produit scalaire sur F. De façon concrète, avec cette construction, le produit scalaire de deux vecteurs de F dans l'espace euclidien $(\mathrm{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}})$ est le même que dans l'espace vectoriel $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ [21].

On suppose de plus qu'on se donne un endomorphisme symétrique u de E et que le sous-espace vectoriel F est stable par u. L'endomorphisme induit par u (qu'on va noter $\widetilde{u}$) est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $(\mathrm{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}})$.

En effet, on a pour tout $x, y \in \mathrm{F}$

$$\langle x, \widetilde{u}(y)\rangle_{\mathrm{F}} = \langle x, u(y)\rangle_{\mathrm{F}} = \langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle u(x), y\rangle_{\mathrm{F}} = \langle \widetilde{u}(x), y\rangle_{\mathrm{F}}$$

20. Cette relation qui définit $u*$ se résume intuitivement en disant que pour faire passer un endomorphisme de « l'autre côté du produit scalaire », on le transforme en son adjoint.

21. On a déjà fait cette remarque dans la preuve de la proposition 43.

La première et la cinquième égalité résultent de la définition de $\widetilde{u}$, la deuxième et la quatrième égalité résulte de la définition de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}}$, la troisième résulte du fait que u est symétrique. L'égalité du premier et du sixième terme dit précisément que $\widetilde{u} = \widetilde{u}^*$.

Le lemme suivant n'est pas propre aux espaces euclidiens. Il est lié aux propriétés du corps $\mathbb{R}$: les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est négatif.

Lemme 54 – Sous-espace stable. Soit E un espace vectoriel de dimension finie[22], u un endomorphisme de E[23]

Il existe un sous-espace vectoriel F de dimension 1 ou 2 stable par u.

Preuve. La famille des $(u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille infinie de l'espace vectoriel $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, elle est donc liée. On en déduit qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non nul tel que $\mathrm{P}(u) = 0$. En effet, si $a_0u^0 + a_1u^1 + a_2u^2 + \cdots + a_\ell u^\ell = 0$ est une relation de dépendance linéaire entre les $(u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ alors $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots a_\ell\mathrm{X}^\ell$ convient.

On considère alors P de degré minimal parmi les polynômes Q non nuls vérifiant $\mathrm{Q}(u) = 0$. Le polynôme P est de degré strictement positif. Soit R un facteur irréductible de P. En particulier, il existe $\mathrm{S} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \smallsetminus \{0\}$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{RS}$ On a $\operatorname{Ker}\mathrm{R}(u) \neq 0$. En effet, si $\operatorname{Ker}\mathrm{R}(u) = 0$ alors $\mathrm{R}(u)$ est inversible et donc $0 = \mathrm{R}(u)^{-1}\mathrm{P}(u) = \mathrm{S}(u)$ avec $\deg\mathrm{S} < \deg\mathrm{P}$ et $\mathrm{S} \neq 0$. Cela contredit la propriété de minimalité du degré de P.

On peut donc considérer $x \neq 0$ tel que $\mathrm{R}(u)(x) = 0$. Si $\mathrm{R} = a\mathrm{X} + b$ est de degré 1 (en particulier $a \neq 0$), on a alors $au(x) + bx = 0$ et donc x est vecteur propre de u pour la valeur propre $-ba^{-1}$ et la droite vectorielle $\mathbb{R}x$ engendrée par x est un espace de dimension 1 stable par u.

Si $\mathrm{R} = a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$ est de degré 2 (en particulier, on a $a \neq 0$) alors montrons que l'espace $\mathrm{F} = \operatorname{vect}(x, u(x))$ est stable par u. On considère $y = \alpha x + \beta u(x) \in \mathrm{F}$, on a $u(y) = \alpha u(x) + \beta u^2(x)$. Mais comme $\mathrm{R}(u)(x) = 0$, on a $u^2(x) = -ba^{-1}u(x) - ca^{-1}x$ et donc $u(y) = (\alpha - ba^{-1})u(x) - ca^{-1}x \in \mathrm{F}$. Ainsi F est un espace vectoriel de dimension 1 ou 2 stable par F[24].

Le dernier lemme exprime de façon matricielle la notion d'endomorphisme symétrique. Pour cela, on a besoin de choisir une base. Dans un espace euclidien, il existe des bases privilégiées (c'est-à-dire qui ont des propriétés relativement au produit scalaire), il s'agit des bases orthonormées (on verra plus loin que de telles bases existent toujours : voir le corollaire 81). On a alors l'énoncé suivant.

Proposition 55 – Endomorphismes symétriques. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E.

La matrice de u dans $\mathscr{B}$ est symétrique si et seulement si u est un endomorphisme symétrique.

L'ensemble des endomorphismes symétriques est un espace vectoriel de dimension $\dim\mathrm{E}(\dim\mathrm{E} + 1)/2$

Preuve. Par définition, la j^{e} colonne de la matrice A de u dans $\mathscr{B}$ est formée du vecteur-colonne des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$. Or, comme $\mathscr{B}$ est **orthonormée**, les coordonnées d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont données par $(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$. En effet, si on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

en prenant le produit scalaire avec e_j dans l'égalité précédente, on obtient $\langle x, e_j\rangle = \lambda_j$ puisque $\mathscr{B}$ est une base orthonormée. Le coefficient a_{ij} de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de A est donc $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i\rangle$. Ainsi la matrice A est symétrique si et seulement si pour tout i, j, $\langle u(e_j), e_i\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle$.

Montrons à présent l'équivalence souhaitée. Si u est symétrique alors on a bien pour tout i, j, $\langle u(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, u(e_i)\rangle$ puisque $u^* = u$.

Réciproquement, si pour tout i, j, $\langle u(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, u(e_i)\rangle$ alors par bilinéarité on en déduit que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$ pour tout $x, y \in \mathrm{E}$ (écrire les décompositions de x et y dans la base $\mathscr{B}$) ce qui montre que $u^* = u$ et donc que u est symétrique.

22. on ne suppose pas E euclidien

23. on ne suppose pas E symétrique, puisque E n'est même pas supposé euclidien.

24. On peut montrer que F est en fait de dimension 2 c'est-à-dire que $(x, u(x))$ est libre. En effet, si $(x, u(x))$ était liée, il existerait $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ $\alpha u(x) + \beta x = 0$. On aurait $\alpha \neq 0$ sinon β serait nul puisque $x \neq 0$. Ainsi, on a une relation de la forme $u(x) = \lambda x$ avec $\lambda = \beta\alpha^{-1}$. En particulier, x est vecteur propre de u pour la valeur propre λ. On a alors $\mathrm{R}(u)(x) = \mathrm{R}(\lambda)x = 0$ et donc $\mathrm{R}(\lambda) = 0$ puisque $x \neq 0$. Mais R est un polynôme irréductible de degré 2, il ne peut donc avoir de racines réelles.

L'application qui à un endomorphisme associe sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ étant une application linéaire bijective entre $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{M}_{\dim \mathrm{E}}(\mathbb{R})$, on en déduit le résultat du fait que l'espace vectoriel des matrices symétriques est de dimension $\dim \mathrm{E}(\dim \mathrm{E}+1)/2$ [25]

On a maintenant tous les outils pour proposer une démonstration par récurrence de théorème 56.

Théorème 56 – Diagonalisabilité des endomorphismes symétriques. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique alors il existe une base orthonormée de E tel que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ soit diagonale.

Preuve. On raisonne par récurrence sur $\dim \mathrm{E}$. Si $\dim \mathrm{E} = 1$, le résultat est évident (on prend comme base orthonormée n'importe lequel des deux vecteurs unitaires de la droite E) [26]. Pour initialiser la récurrence, on a besoin aussi d'étudier le cas $\dim \mathrm{E} = 2$ (car le lemme 54 assure l'existence de sous-espace vectoriel de dimension 1 ou 2 et pas seulement de sous-espaces de dimension 1).

On considère alors un espace E de dimension 2 et une base orthonormée $\mathscr{B}$ de cet espace vectoriel [27]. Le lemme 55 assure que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est symétrique. On l'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $\mathrm{X}^2 - (a+c)\mathrm{X} + ac - b^2$. Son discriminant est $(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2$. En particulier, on en déduit que le discriminant est nul si et seulement si $a = c$ et $b = 0$. Dans ce cas, la matrice est diagonale est la base $\mathscr{B}$ convient. Si le discriminant n'est pas nul, il est strictement positif et la matrice admet deux valeurs propres distinctes qu'on note $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On considère alors un vecteur propre unitaire x_1 pour la valeur propre λ_1 et un vecteur propre unitaire x_2 pour la valeur propre λ_2. Montrons que (x_1, x_2) est une base orthonormé de E. Il suffit de montrer que $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. Or on a

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle u(x_1), x_2 \rangle = \langle x_1, u(x_2) \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle .$$

En effet, la première et la troisième égalité viennent du fait que x_1 et x_2 sont vecteurs propres et de la linéarité du produit scalaire et la deuxième égalité du fait que u est symétrique. Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, l'égalité des termes extrêmes assure que $\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathrm{E}} = 0$.

Montrons à présent l'hypothèse d'hérédité : on suppose à présent $\dim \mathrm{E} \geqslant 3$ et que pour tout endomorphisme symétrique v de tout espace vectoriel euclidien de dimension strictement inférieure à $\dim \mathrm{E}$, il existe une base orthonormée de vecteur propre pour v.

D'après le lemme 54, il existe F de dimension 1 ou 2 stable par u. D'après le lemme 52, $\mathrm{F}^\perp$ qui est de dimension $\dim \mathrm{E} - 1$ ou $\dim \mathrm{E} - 2$ est aussi stable par u. On note alors $\widetilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F et $\widehat{u}$ l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{F}^\perp$. D'après la remarque 53, $\widetilde{u}$ et $\widehat{u}$ sont des endomorphismes symétriques de F et $\mathrm{F}^\perp$ qui sont sous-espace vectoriels de dimension strictement inférieure à $\dim \mathrm{E}$. Il existe donc $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ une base orthonormée de F telle que la matrice A de $\widetilde{u}$ dans F est diagonale et une base orthonormée $\mathscr{B}_{\mathrm{F}^\perp}$ de $\mathrm{F}^\perp$ telle que la matrice B de $\widehat{u}$ dans $\mathrm{F}^\perp$.

Comme $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\mathrm{F}} \cup \mathscr{B}_{\mathrm{F}^\perp}$ est une base de E. C'est même une base orthonormée de E puisque tout vecteur de F (en particulier ceux de $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$) est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{F}^\perp$ (en particulier ceux de $\mathscr{B}_{\mathrm{F}^\perp}$). La matrice de u dans $\mathscr{B}$ est alors

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}$$

qui est bien diagonale puisque A et B le sont.

3.3.4 Automorphisme orthogonal = isométrie vectorielle

On commence cette partie par un lemme qu'on aurait pu placer dans la partie sur l'adjoint, on en a presque donné une démonstration dans la preuve du lemme 55 [28].

25. Si ce n'est pas clair, montrer que la famille formée de la réunion des $(\mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji})$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et des E_{ii} pour $1 \leqslant i \leqslant n$ est une base de E.

26. Pour ceux qui aiment bien la logique, ça vaut le coup se poser la question de la véracité du théorème lorsque E est de dimension 0.

27. Une telle base existe d'après l'algorithme de Gram-Schmidt (voir le corollaire 81).

28. C'est un bon exercice de comparer les preuves de ces deux lemmes. C'est aussi un très bon exercice de démontrer le lemme 55 lorsqu'on suppose connu le lemme 57 : la preuve nécessite moins de deux lignes)

Lemme 57 — Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E et u un endomorphisme de E. On note A la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

La matrice de u^* dans $\mathscr{B}$ est ${}^t\mathrm{A}$. En particulier, on a $\det(u) = \det(u^*)$ et $\mathrm{tr}\,(u) = \mathrm{tr}\,(u^*)$ et $\chi_u = \chi_{u^*}$: un endomorphisme et son adjoint ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique[29].

Preuve. Par définition, la j^{e} colonne de la matrice A de u dans $\mathscr{B}$ est formée du vecteur-colonne des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}$. Or, comme $\mathscr{B}$ est **orthonormée**, les coordonnées d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont données par $(\langle x, e_1\rangle, \ldots, \langle x, e_n\rangle)$. En effet, si on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

en prenant le produit scalaire avec e_j dans l'égalité précédente, on obtient $\langle x, e_j\rangle = \lambda_j$ puisque $\mathscr{B}$ est une base orthonormée[30]. Le coefficient a_{ij} de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de A est donc $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i\rangle$.

Par définition, la i^{e} colonne de la matrice B de u^* dans $\mathscr{B}$ est formée du vecteur-colonne des coordonnées de $u(e_i)$ dans la base $\mathscr{B}$. Le coefficient b_{ji} de la j^{e} ligne et de la i^{e} colonne de B est donc $b_{ji} = \langle u^*(e_i), e_j\rangle$.

La définition de l'adjoint donne alors $b_{ji} = a_{ij}$ pour tout i, j.

Proposition-Définition 58 — Isométrie d'un espace vectoriel euclidien. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E et $\mathscr{B}$ une base **orthonormée** de E. On note A la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) u est bijective et $u^* = u^{-1}$
(ii) $u \circ u^* = \mathrm{id}$
(iii) $u^* \circ u = \mathrm{id}$
(iv) ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} = \mathrm{I}$
(v) $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A} = \mathrm{I}$
(vi) $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$.
(vii) Pour tous $x, y \in \mathrm{E}$, on a $\langle u(x), u(y)\rangle_{\mathrm{E}} = \langle x, y\rangle_{\mathrm{E}}$.

Si u vérifie ces propriétés équivalentes, on dit que u est une isométrie vectorielle[31] ou que u est un automorphisme orthogonal.

Preuve. Les équivalences $(ii) \Leftrightarrow (v)$ et $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ résulte du lemme 57.
$(iv) \Rightarrow (v)$. En calculant le déterminant, on obtient que $\det({}^t\mathrm{A})\det(\mathrm{A}) = 1$. En particulier, $\det \mathrm{A} \neq 0$ et donc A est inversible. En multipliant à droite par A^{-1}, on obtient que $\mathrm{A}^{-1} = {}^t\mathrm{A}$. En multipliant à gauche par A, on obtient alors l'égalité souhaité. L'implication $(v) \Rightarrow (iv)$ s'obtient par le même argument en multipliant d'abord à gauche par A^{-1} puis à droite par A.

On a évidemment $(i) \Rightarrow (ii)$. Réciproquement, montrons que $(ii) \Rightarrow (i)$. On a $u \circ u^* = \mathrm{id}$. Comme id est surjective, on en déduit que u est aussi surjective[32]. Comme u est un endomorphisme surjectif d'un espace vectoriel de dimension finie, c'est un automorphisme : il est bijectif. En composant à gauche par u^{-1}, on obtient le résultat souhaité.
$(vii) \Rightarrow (vi)$. Il suffit de faire $y = x$.
$(vi) \Rightarrow (vii)$. On applique la technique de polarisation, on applique la relation donnée par (vi) en $x + y$. On a donc, pour tous $x, y \in \mathrm{E}$,

$$\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$$

Or $\|u(x+y)\|^2 = \|u(x)+u(y)\|^2 = \|u(x)\|^2 + 2\langle u(x), u(y)\rangle_{\mathrm{E}} + \|u(y)\|^2$ et $\|x+y\|^2 = \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle_{\mathrm{E}} + \|y\|^2$. Avec la relation (vi) appliquée en x et y, on obtient (vii).
$(vii) \Rightarrow (iii)$. Par la définition de l'adjoint, on a

$$\forall\,(x,y) \in \mathrm{E}^2, \qquad \langle u^* \circ u(x), y\rangle_{\mathrm{E}} = \langle x, y\rangle_{\mathrm{E}}$$

29. L'égalité des traces et des déterminants est évidemment une conséquence de l'égalité des polynômes caractéristiques.
30. Cet argument a déjà été vu dans la preuve du lemme 55
31. Ce nom d'isométrie provient de la propriété (vi) : ces endomorphismes sont ceux qui conservent la norme des vecteurs.
32. Cela résulte du résultat suivant (à savoir démontrer absolument) : soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ deux applications telles que $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

ce qui s'écrit aussi $\mathrm{R}(u^* \circ u(x))(y) = \mathrm{R}(x)(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ (voir la proposition 47 pour la définition de R). On en déduit que $\mathrm{R}(u^* \circ u(x)) = \mathrm{R}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ puis que $u^* \circ u(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ puisque R est injective.
$(iii) \Rightarrow (vii)$. On a $u^* \circ u(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et donc $\langle u^* \circ u(x), y\rangle_{\mathrm{E}} = \langle x, y\rangle_{\mathrm{E}}$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$. Avec la définition de l'adjoint, on en déduit que $\langle u(x), u(y)\rangle_{\mathrm{E}} = \langle x, y\rangle_{\mathrm{E}}$ pour tout $(x, y) \in \mathrm{E}^2$.

Même s'ils ne sont pas diagonalisables, les automorphismes orthogonaux ont une forme relativement simple dans une base orthonormée (voir le théorème 70). La preuve de ce théorème repose sur les mêmes idées que celle du théorème 56 de réduction des endomorphismes symétriques. On commence par démontrer le lemme suivant, analogue au lemme 52 qui nous permet d'effectuer la partie hérédité du raisonnement par récurrence. L'initialisation (qui revient quant à elle à étudier les automorphismes orthogonaux en dimension 1 et 2) nous prendra beaucoup plus de temps.

Lemme 59 — Sous-espace stable. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace vectoriel euclidien, u un endomorphisme orthogonal de E et F un sous-espace de E stable par u. Alors $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u.

Preuve. La démonstration nécessite un argument supplémentaire par rapport à celle du lemme 52. On a $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$. Mais comme u est bijective, $u(\mathrm{F})$ et F ont la même dimension donc $u(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} = u^{-1}(\mathrm{F})$. Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. On veut montrer que $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$ c'est-à-dire que $\langle u(x), y\rangle_{\mathrm{E}} = 0$ pour tout $y \in \mathrm{F}$.

Mais $\langle u(x), y\rangle_{\mathrm{E}} = \langle x, u^*(y)\rangle_{\mathrm{E}} = \langle x, u^{-1}(y)\rangle_{\mathrm{E}}$. Mais $u^{-1}(y) \in \mathrm{F}$ (puisque $u^{-1}(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$) et $x \in \mathrm{F}^\perp$ donc $\langle x, u^{-1}(y)\rangle_{\mathrm{E}}$ et on a le résultat voulu.

Remarque 60 — Automorphisme orthogonal. Cette remarque est le pendant de la remarque 53.

Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace de E et u un automorphisme orthogonal de E qui laisse stable F. Alors l'endomorphisme induit par u sur F (qu'on va noter $\widetilde{u}$) est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien $(\mathrm{F}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}})$ (voir la remarque 53 pour la notation).

En effet, on a pour tout $x, y \in \mathrm{F}$

$$\langle \widetilde{u}(x), \widetilde{u}(y)\rangle_{\mathrm{F}} = \langle u(x), u(y)\rangle_{\mathrm{F}} = \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_{\mathrm{F}}\,.$$

La première égalité résulte de la définition de $\widetilde{u}$, la deuxième et la quatrième égalité résulte de la définition de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{F}}$, la troisième résulte du fait que u est un automorphisme orthogonal (point (vii) de la proposition-définition 58). L'égalité du premier et du cinquième terme dit précisément que $\widetilde{u}$ est orthogonal.

3.4 Isométrie vectorielle

Pour obtenir le théorème 70, il reste à étudier les automorphismes orthogonaux en dimension 1 et 2. Le cas de la dimension 1 est évidemment très rapide. Celui de la dimension 2 nécessite plus de travail et va nous prendre quelques lemmes. Pour cette raison, on débute une nouvelle section. Et pour commencer, on démontre quelques résultats généraux sur les automorphismes orthogonaux.

Propriétés 61 — Quelques propriétés des isométries. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal de E. On a les propriétés suivantes

(i) $\det(u) = \pm 1$.
(ii) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de u alors $\lambda = \pm 1$.
(iii) Les isométries forment un groupe pour la composition des applications : on le note $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ et on l'appelle le groupe orthogonal de $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Preuve. Démontrons (i). Considérons $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans $\mathscr{B}$. Comme $\det(\mathrm{A}) = \det({}^t\mathrm{A})$ et que ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A} = \mathrm{Id}$, on en déduit que $\det(\mathrm{A})^2 = 1$.

Démontrons (ii). Soit x un vecteur propre pour u pour la valeur propre λ. On a $u(x) = \lambda x$. En prenant la norme de cette égalité, on en déduit que $\|u(x)\| = |\lambda|\|x\|$. Comme u est un automorphisme orthogonal, on a $\|u(x)\| = \|x\| \neq 0$. On en déduit que $|\lambda| = 1$.

Démontrons (iii). L'identité est un automorphisme orthogonal (car $\mathrm{id}^* = \mathrm{id} = \mathrm{id}^{-1}$ ou car $\|\mathrm{id}(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$). Soient u, v deux automorphismes orthogonaux, montrons que $v \circ u$ est un automorphisme orthogonal. On a $(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$ (voir les propriétés de l'adjoint 50) et donc $(v \circ u)^* \circ (v \circ u) = v \circ u \circ u^* \circ v^*$. Or $u \circ u^* = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ puisque u est orthogonal et $v \circ v^* = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ puisque v est orthogonal, on en déduit que $(v \circ u)^* \circ (v \circ u) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ c'est-à-dire que $v \circ u$ est orthogonal. Enfin si u est

un automorphisme orthogonal alors u est bijectif et $u^{-1} = u^*$. On a donc $u^{-1*} = u^{**} = u = (u^{-1})^{-1}$; la deuxième égalité résultant du point (iv) des propriétés 50.

Donnons une autre démonstration du fait que $v \circ u$ est orthogonal lorsque u et v sont des isométries. On a $\|v \circ u(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. La première égalité provient de fait que v est orthogonal, la deuxième du fait que u est orthogonal. L'égalité des premiers et troisièmes membres assure que $v \circ u$ est orthogonal.

Donnons une autre démonstration du fait que u^{-1} est orthogonal lorsque u l'est. Soit $x \in \mathrm{E}$. On pose $y = u^{-1}(x)$ et donc $u(y) = x$. Comme u est une isométrie, on a $\|u(y)\| = \|y\|$. Ainsi $\|x\| = \|y\| = \|u^{-1}(x)\|$ et u^{-1} est une isométrie.

Définition 62 – déplacement et antidéplacement. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{E}})$ un espace euclidien et u un endomorphisme orthogonal de E.

On dit que u est une isométrie *directe* (on dit aussi *déplacement*) lorsque $\det(u) = 1$.

On dit que u est une isométrie *indirecte* (on dit aussi *antidéplacement*) lorsque $\det(u) = -1$.

Remarque 63 – Isométries directes, indirectes et composition. D'après le point (i) des propriétés 61, une isométrie vectorielle est soit directe, soit indirecte.

Les isométries directes forment un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathrm{E})$ noté $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$. En effet, id_{E} est une isométrie directe puisque id_{E} est une isométrie et $\det(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = 1$. De plus, si u, v sont des isométries directes alors $u \circ v^{-1}$ est une isométrie (puisque les isométries forment un groupe pour la composition) et $\det(u \circ v^{-1}) = \det(u)\det(v)^{-1} = 1$. Donc $u \circ v^{-1}$ est une isométrie directe.

Les isométries indirectes NE forment PAS un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathrm{E})$: la composée de deux isométries indirectes est une isométrie directe. En effet, si u, v sont deux isométries indirectes alors $u \circ v$ est une isométrie (puisque les isométries forment un groupe pour la composition) directe puisque $\det(u \circ v) = \det(u) \circ \det(v) = (-1)(-1) = 1$.

Enfin, la composée d'une isométrie directe avec une isométrie indirecte est une isométrie indirecte. En effet si u est une isométrie directe et v une isométrie indirecte alors $u \circ v$ et $v \circ u$ sont des isométries (puisque les isométries forment un groupe pour la composition) indirecte puisque $\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u)\det(v) = (-1)(1)$.

On retrouve ainsi un principe de « règle des signes » pour les isométries (qui résulte de la « règle des signes » standard dans $\mathbb{R}$ en appliquant le déterminant).

3.4.1 Isométrie vectorielle en dimension 1 et 2.

Lemme 64 – Isométrie vectorielle en dimension 1. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 1 et u un automorphisme orthogonal de E. Alors $u = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ou $u = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Preuve. L'idée principale de la preuve se résume ainsi. En dimension un, un endomorphisme est nécessairement une homothétie (la matrice dans n'importe quelle base est de taille 1 et donc de la forme $a\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$). Il reste à déterminer le a (qui en fait ne dépend pas de la base : c'est l'unique valeur propre de l'endomorphisme en question). On utilise alors la propriété 61 qui détermine les valeurs propres d'une isométrie.

Détaillons à présent la preuve, en présentant les éléments de façon un peu plus conceptuelle (utilisation des sous-espaces propres plutôt que des matrices). Comme E est de dimension 1, tout vecteur non nul de E est vecteur propre pour u. Le point (ii) des propriétés 61 assure que la valeur propre correspondante est $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$. En particulier, pour $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$, on a $\mathrm{E}_\lambda \neq \{0\}$ [33]. Pour cette valeur de λ, on a donc $\{0\} \subsetneq \mathrm{E}_\lambda \subset \mathrm{E}$ et $\dim \mathrm{E} = 1$. Ainsi $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{E}$ et on obtient le résultat souhaité.

Remarque 65 On peut faire rentrer $-\mathrm{id}$ et id dans la classe des symétries orthogonales : $-\mathrm{id}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\{0\}$ et id est la symétrie orthogonale par rapport à E.

On s'intéresse à présent aux isométries vectorielles d'un plan euclidien. On distingue le cas des isométries directes (proposition 67), du cas des isométries indirectes (prop 66) pour aboutir dans chacun des cas à une classification simple : dans le plan, les isométries indirectes sont exactement

33. On rappelle que E_λ est défini comme $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$

les symétries orthogonales ; les isométries directes sont les rotations. On commence par l'étude des isométries indirectes qui est un peu plus simple.

Proposition 66 – Isométrie indirecte. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{E}})$ un **plan** vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ une isométrie indirecte. Alors u est une symétrie orthogonale et donc $u^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Preuve. Soit χ_u le polynôme caractéristique de u. On a $\chi(u)(0) = \det(u) = -1$. Mais $\chi_u(\mathrm{X})$ est un polynôme **unitaire** de degré 2 en X. Il s'annule donc entre $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. L'endomorphisme u admet donc une valeur propre positive et une valeur propre négative. Le point (ii) des propriétés 61 assure que les valeurs propres de u ne peuvent être que -1 ou 1. On en déduit que -1 et 1 sont valeurs propres de u. En particulier $\dim \mathrm{E}_1 \geqslant 1$ et $\dim \mathrm{E}_{-1} \geqslant 1$ [34]. En particulier, on a aussi $\mathrm{E}_1 \neq \mathrm{E}$ et $\mathrm{E}_{-1} \neq \mathrm{E}$. On en déduit que E_1 et E_{-1} sont des droites vectorielles et qu'elles vérifient $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_{-1} = \mathrm{E}$ (par exemple en utilisant le corollaire 284 ou sinon à la main puisqu'on est en petite dimension : les droites vectorielles E_1 et E_{-1} ne rencontrent qu'en zéro puisqu'un vecteur ne peut être vecteur propre à la fois pour la valeur propre 1 et pour la valeur propre -1. La somme $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_{-1}$ est donc directe et elle est égale à E pour des raisons de dimension.)

Un vecteur $x \in \mathrm{E}$ se décompose alors $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{E}_1$ et $z \in \mathrm{E}_{-1}$. On a alors $u(x) = u(y) + u(z) = y - z$. Ainsi u est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_{-1}. Pour conclure que u est un symétrie orthogonale, il s'agit de montrer que les droites E_1 et E_{-1} sont perpendiculaires. Pour cela, on considère $y \in \mathrm{E}_1$ et $z \in \mathrm{E}_{-1}$. On a alors

$$\langle y, z\rangle = \langle u(y), z\rangle = \langle y, u^*(z)\rangle = \langle y, u^{-1}(z)\rangle = -\langle y, z\rangle\,,$$

la première égalité résultant du fait que $y \in \mathrm{E}_1$, la deuxième de la définition de l'adjoint, la troisième du fait que u est une isométrie, la dernière du fait que $z \in \mathrm{E}_{-1}$. On obtient ainsi bien que E_1 et E_{-1} sont perpendiculaires.

Ainsi, on vient de voir que les isométries vectorielles indirectes du plan ont une forme très simple : ce sont les symétries orthogonales par rapport à des droites. Passons aux cas des isométries directes.

Proposition 67 – isométrie directe. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathrm{E}})$ un **plan** vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ une isométrie directe.

Si u a une valeur propre alors $u = \pm\mathrm{id}$.

Dans le cas général, la matrice de u dans une base orthonormée est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$ ou encore de la forme

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Les réels a et $|b|$ ne dépendent pas de la base orthonormée choisie. Le signe de b quant à lui peut varier.

Un tel endormorphisme est appelé une *rotation*.

Le groupe $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ est **commutatif** et isomorphe à $\mathbb{U}$ (groupe des nombres complexes de module 1).

Preuve. On suppose que u admet une valeur propre (réelle). On la note λ. Soit x un vecteur propre de u pour λ. La droite D engendrée par x est donc stable par u. D'après le lemme 59, $\mathrm{D}^\perp$ est stable par u. Or $\mathrm{D}^\perp$ est de dimension $\dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{D} = 1$. Ainsi $\mathrm{D}^\perp$ est une droite stable par u. Un vecteur non nul de cette droite est donc un vecteur propre de u. On note μ la valeur propre associée. Ainsi E admet une base formée de vecteurs propres [35]). Ainsi u est donc diagonalisable et on a $\det u = \lambda\mu$. Or d'après le point (ii) des propriétés 61, on a $\lambda, \mu \in \{-1, 1\}$. Comme $\det u = 1$, on en déduit que $\lambda = \mu \in \{-1, 1\}$ et $u = \pm\mathrm{id}$.

On se place maintenant dans le cas général : u n'a pas forcément de valeur propre. On choisit une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E. On écrit la matrice de u dans $\mathscr{B}$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Comme u est une isométrie, on doit avoir $\|u(e_1)\| = \|ae_1 + be_2\| = \|e_1\| = 1$ c'est-à-dire $a^2 + b^2 = 1$. De même avec e_2, on obtient la relation $c^2 + d^2 = 1$. Par ailleurs, comme $\langle e_1, e_2\rangle = 0$, on doit avoir

34. On reprend toujours la notation $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ et $\mathrm{E}_{-1} = \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

35. On prend une base formée d'un vecteur non nul de D et d'un vecteur non nul de $\mathrm{D}^\perp$, c'est bien une base puisque $\mathrm{D} \oplus \mathrm{D}^\perp = \mathrm{E}$

avoir $\langle u(e_1), u(e_2)\rangle = 0$ (voir le point (*vii*) de la proposition-définition 58). Cela donne la relation $ac + bd = 0$. Enfin comme u est directe, on a $\det(u) = ad - bc = 1$. On va montrer que ces relations imposent $c = -b$ et $d = a$.

Si $a = 0$ alors $b^2 = 1$ et $bc = -1$ donc $b = \pm 1$ et $c = -b = \mp 1$. Comme $c^2 + d^2 = 1$ on a bien $d = 0 = a$. Si $a \neq 0$, on a $c = -bd/a$ et donc $b^2d^2/a^2 + d^2 = 1$ d'où $(a^2 + b^2)d^2 = a^2$. On en déduit que $a^2 = d^2$. Si $a = -d$ alors $-d^2 - bc = 1$ et $(b - c)d = 0$ d'où $b = c$ puisque $d = -a \neq 0$ et donc $-d^2 - b^2 = 1$. NON. Ainsi $a = d$ et la relation $ac + bd = 0$ devient $a(b + c) = 0$ ce qui donne $c = -b$ puisque $a \neq 0$.

Le réel a vérifie $\operatorname{tr}(u) = 2a$. Il est donc bien indépendant de la base orthonormée dans laquelle on écrit la matrice : si $\mathscr{B}'$ est une base orthonormée, on vient de montrer que la matrice aurait la forme

$$\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}.$$

et donc $\operatorname{tr}(u) = 2c$. La trace étant indépendant de la base, on a bien $a = c$. Comme a ne dépend pas de la base orthonormée choisie, $b^2 = 1 - a^2$ non plus, de même que $|b| = \sqrt{b^2}$.

Enfin, on ne peut pas déterminer le signe de b : soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

alors $\mathscr{B}' = (e_2, e_1)$ (pourrait aussi prendre $\mathscr{B}' = (-e_1, e_2)$ ou $\mathscr{B}' = (e_1, -e_2)$) est aussi une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Par ailleurs, si (a, b) vérifie $a^2 + b^2 = 1$ alors $a + ib$ est un nombre complexe de module 1 et peut donc s'écrire sous la forme $a + ib = \exp(i\theta)$ avec $\theta \in [\,0\,, 2\pi\,[$. On obtient alors le résultat voulu sur la forme de la matrice de u en identifiant partie réelle et imaginaire.

Montrons à présent que $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ est un groupe commutatif isomorphe à $\mathbb{U}$. On va donner deux démonstrations de la commutativité. La première calculatoire, la deuxième plus géométrique.

Première démonstration. On fixe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. D'après le calcul effectué plus haut, l'application qui à $u \in \mathcal{SO}$ associe sa matrice dans $\mathscr{B}$ est alors un isomorphisme de groupe entre l'ensemble des isométries directe de E et l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

avec $a^2 + b^2 = 1$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que l'ensemble des matrice de cette forme est isomorphe à $\mathbb{U}$. L'isomorphisme cherché est donné par

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \longmapsto a + ib$$

dont l'isomorphisme inverse est

$$a + ib \longmapsto \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Les deux applications sont évidemment réciproques l'une de l'autre. Il s'agit de montrer que ce sont des morphismes de groupes. Cela repose sur les calculs suivants

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & bc + ad \\ -(bc + ad) & ac - bd \end{bmatrix}.$$

Deuxième démonstration. Soit $u, u' \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ et s une isométrie indirecte. On a alors $s \circ u'$ est une isométrie indirecte qu'on note s' (voir la remarque 63). On a ainsi $u' = s \circ s'$ puisque la proposition 66 assure que $s^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ [36]. On calcule alors $u'^{-1} \circ u \circ u' = s' \circ s \circ u \circ s \circ s'$. Or $s \circ u$ est une isométrie indirecte donc $s \circ u \circ s \circ u = \mathrm{id}$ et $s \circ u \circ s = u^{-1}$. De même, $s' \circ u^{-1}$ est une isométrie indirecte donc $s' \circ u^{-1} \circ s' = u$. Finalement, $u'^{-1} \circ u \circ u' = u$. Ainsi u et u' commutent.

Remarque 68 Dans l'énoncé précédent, l'identité correspond au cas $a = 1$ et $b = 0$ ou encore $\theta = 0$ et $-\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ correspond à $a = -1$ et $b = 0$ ou encore $\theta = \pi$. Si $b \neq 0$, la matrice n'a pas de valeurs propres,

36. On vient en particulier de montrer qu'une isométrie vectorielle directe peut s'écrire comme la composée de deux symétries orthogonales dont la première est celle qu'on veut : c'est bien pratique dans les calculs

on l'a déjà montré dans la preuve ci-dessus. On peut bien sûr retrouver ce phénomène en calculant le discriminant du polynôme caractéristique. Mais de façon plus géométrique, la matrice est celle d'une rotation qui n'a pas de droite qui est envoyée sur elle-même.

Remarque 69 L'expression matricielle d'un automorphisme orthogonal d'un plan vectoriel euclidien permet de se convaincre à l'aide d'un petit dessin que l'expression rotation est adaptée à la situation.

Exercice 46 — Isométrie dans $\mathbb{R}^2$. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un plan vectoriel euclidien.

a) Déterminer le nombre d'isométries de E de trace $\sqrt{2}$.

b) Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$, existe-t-il une isométrie de E de trace x ? Combien en existe-t-il alors ? (Indication : attention au cas $x = 0$!)

c) Soit R une isométrie directe du plan et v un vecteur unitaire de E. Montrer que $\langle v, \mathrm{R}v\rangle$ ne dépend pas de v.

Exercice 47 — Isométrie de $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

a) Montrer que l'application $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (y, x) \in \mathbb{R}^2$ est une symétrie dont on déterminera l'axe. Déterminer sa matrice dans la base canonique.

b) Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à la droite d'équation $ax + by = 0$.

c) Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite d'équation $ax + by = 0$.

3.4.2 Réduction des isométries vectorielles

On dispose maintenant de tout le matériel pour prouver le théorème de réduction des isométries vectorielles.

Théorème 70 — Réduction des endomorphismes orthogonaux. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est de la forme diagonale par blocs

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Id}_r & & & & & & \\ & -\mathrm{Id}_s & & & & & \\ & & a_1 & -b_1 & & & \\ & & b_1 & a_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & a_t & -b_t \\ & & & & & b_t & a_t \end{bmatrix}$$

avec ${a_i}^2 + {b_i}^2 = 1$, $b_i \neq 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\, t]\!]$ ou encore de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Id}_r & & & & & & \\ & -\mathrm{Id}_s & & & & & \\ & & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & & & \\ & & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos(\theta_t) & -\sin(\theta_t) \\ & & & & & \sin(\theta_t) & \cos(\theta_t) \end{bmatrix}$$

avec $\theta_i \neq 0[\pi]$ pour tout $i \in [\![1\,,\, t]\!]$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur la dimension de E. Le cas où $\dim \mathrm{E} = 1$ et $\dim \mathrm{E} = 2$ a été traité dans les propositions 64, 66 et 67. Pour le cas des isométries indirectes en dimension deux, on prend $r = 1$, $s = 1$ et $t = 0$.

On suppose $\dim \mathrm{E} \geqslant 3$. D'après le lemme 54, il existe F un sous-espace vectoriel stable par u de dimension 1 ou 2. D'après le lemme 59, $\mathrm{F}^\perp$ est aussi un sous-espace vectoriel stable par u et on a

$\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp} = \mathrm{E}$. En considérant une base orthonormée $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ de F suivie d'une base orthonormée $\mathscr{B}_{\mathrm{F}^{\perp}}$ de $\mathrm{F}^{\perp}$, on obtient une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E. La matrice de u dans $\mathscr{B}$ est alors de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}$$

où A est de dimension 1 ou 2 et est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur F et B est de dimension $\dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$ et est la matrice de l'endomorphisme induit par u sur $\mathrm{F}^{\perp}$. Ces deux endomorphismes sont orthogonaux. Les propositions 64, 66 et 67 permettent de choisir une base orthonormée $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ de F tel que A soit de l'une des formes suivantes

$$[1]\,, \quad [-1]\,, \quad \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & \\ & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

avec $a^2 + b^2 = 1$ et $b \neq 0$.

L'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathrm{F}^{\perp}$ permet quant à elle d'obtenir une base $\mathscr{B}_{\mathrm{F}^{\perp}}$ de $\mathrm{F}^{\perp}$ de la forme donnée dans le théorème. En considérant la base formée de la réunion de $\mathscr{B}_{\mathrm{F}}$ et $\mathscr{B}_{\mathrm{F}^{\perp}}$, on obtient une matrice pour u qui a presque la bonne forme. Il ne reste qu'à éventuellement permuter les vecteurs de la base pour obtenir la forme souhaitée.

Exercice 48 — Espace de matrices. Soit $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés de taille deux à coefficients réels.

a) Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longmapsto \operatorname{tr}({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{B}) \end{cases}$$

est un produit scalaire sur $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $\mathcal{T} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

c) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{T}$ dans E.

d) Montrer que l'application $f\colon \mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}$ est un automorphisme orthogonal de $\mathcal{T}$ dont on déterminera la nature géométrique.

e) Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $g_{\mathrm{U}}\colon \mathrm{A} \mapsto \mathrm{UAU}^{-1}$ est un automorphisme orthogonal de $\mathcal{T}$ dont on déterminera la nature géométrique.

f) Soit $\mathcal{S} \subset \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

g) Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{S}$ dans E.

h) Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $g_{\mathrm{U}}\colon \mathrm{A} \mapsto \mathrm{UAU}^{-1}$ est un automorphisme orthogonal de $\mathcal{S}$ dont on déterminera la nature géométrique.

i) Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}$. Montrer que $f_{\mathrm{S}}\colon \mathrm{A} \mapsto \mathrm{SAS}$ est un endomorphisme symétrique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ laissant stable $\mathcal{S}$. Déterminer les valeurs propres, la trace et le déterminant de f_{S} et de la restriction de f_{S} à $\mathcal{S}$.

j) Montrer que $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de E dont on déterminera la dimension.

k) Soit $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $g_{\mathrm{U}}\colon \mathrm{A} \mapsto \mathrm{UAU}^{-1}$ est un automorphisme orthogonal de $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ dont on déterminera la nature géométrique.

3.4.3 Isométrie vectorielle en dimension 3

La proposition suivante est un cas particulier du théorème 70 lorsque $\dim \mathrm{E} = 3$. On va en donner une démonstration un peu plus élémentaire mais reposant sur les mêmes idées. Le fait qu'on soit en dimension 3 permet d'obtenir plus simplement un sous-espace stable et l'orthogonal est alors de dimension 2.

Proposition 71 — Réduction des isométries vectorielles en dimension 3. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension **3** et $u \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ une isométrie.

Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & a & -b \\ & b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & & \\ & a & -b \\ & b & a \end{bmatrix}$$

où $a^2 + b^2 = 1$. Dans le premier cas, c'est une isométrie directe, on dit que c'est une rotation. Dans le deuxième cas, c'est une isométrie indirecte.

Les nombres a et $|b|$ sont entièrement déterminés par u mais pas le nombre b qui peut être changé en son opposé.

Preuve. Soit χ_u le polynôme caractéristique de u. C'est un polynôme de degré 3. Il admet donc une racine réelle λ qui, d'après le point (ii) des propriétés 61 vérifie $\lambda = \pm 1$. On appelle x un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre et D la droite engendrée par x.

Soit $\mathrm{D}^\perp$ le plan orthogonal à D. Il est stable par u (lemme 59) et u induit sur $\mathrm{D}^\perp$ une isométrie.

Supposons que u soit une isométrie indirecte alors $\chi_u(0) = \det(0\mathrm{id} - u) = (-1)^3 \det u = 1$ [37] Ainsi χ_u admet une racine négative et donc -1 est valeur propre (les seules valeurs propres possibles sont 1 et -1 pour une isométrie (point (ii) des propriétés 61). La restriction à $\mathrm{D}^\perp$ est alors une isométrie directe et on obtient le résultat souhaité en prenant $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base orthonormée de $\mathrm{D}^\perp$ et $\varepsilon_1 = x$.

Supposons que u est une isométrie directe.

Si $\lambda = 1$ alors la restriction à $\mathrm{D}^\perp$ est aussi une isométrie directe et on a alors forme voulue en prenant $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base orthonormée de $\mathrm{D}^\perp$ (proposition 67) et $u = \varepsilon_1$.

Si $\lambda = -1$ alors la restriction à $\mathrm{D}^\perp$ est une isométrie indirecte. La proposition 66 assure alors qu'il existe une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ dans laquelle la matrice de la restriction de u à $\mathrm{D}^\perp$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$$

On en déduit le résultat souhaité en posant $\varepsilon_3 = x$.

Pour finir, on a $\mathrm{tr}\,(u) = 1 + 2a$ si u est directe ou $\mathrm{tr}\,(u) = -1 + 2a$ si u est indirecte. Comme $a^2 + b^2 = 1$, on a $|b| = \sqrt{1 - a^2}$ qui est bien déterminé par a et donc par u. Enfin si on change la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ en $(\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2)$ ou en $(-\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_2))$, on change b en $-b$.

Exercice 49 – Isométrie dans $\mathbb{R}^3$.

a) Montrer que

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

est une matrice orthogonale. Déterminer sa nature géométrique.

b) Même question pour les matrices

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Exercice 50 – Isométrie dans $\mathbb{R}^3$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique.

a) Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport au plan d'équation $3x + 4y + 5z = 0$.

37. On fait ici la convention que $\chi_u = \det(X\mathrm{id} - u)$ et le polynôme caractéristique est ainsi un polynôme unitaire. En particulier, sa limite en $-\infty$ est $-\infty$.

b) Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\pi/3$ autour de l'axe orientée par le vecteur $(1, 2, 3)$.

Exercice 51 — Rotation en dimension 3. Soit E une espace vectoriel euclidien de dimension 3. On considère u et v deux rotations dont les axes sont orthogonaux. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les angles de u et v pour que u et v commutent.

Corrigé On note e_1 un vecteur unitaire dirigeant l'axe de u, e_3 un vecteur unitaire dirigeant l'axe de v. La famille (e_1, e_3) est une famille orthonormée. On peut la compléter en une base orthonormée (e_1, e_2, e_3). On note A la matrice de u dans cette base et B la matrice de v. On a

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' & \\ \sin\theta' & \cos\theta' & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

avec $\theta \neq 0[2\pi]$ et $\theta' \neq 0[2\pi]$. On calcule AB et BA. On en déduit que A et B commutent si et seulement si $\sin\theta = \sin\theta' = 0$c'est-à-dire si u et v sont des rotations d'angle π.

Une deuxième façon d'expliquer ce résultat est que si u et v commutent alors $\mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{id})$ (qui est l'axe de v) est stable par u et $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{id})$ (qui est l'axe de u) est stable par v. Or comme les axes de u et v sont orthogonaux, l'axe de v est donc contenu dans un plan stable par u dans lequel u induit une rotation. L'axe de v est donc une droite fixe par cette rotation. D'après la classification des isométries d'un plan vectoriel cela signifie que la rection de u à ce plan est id (auquel cas $u = \mathrm{id}$ NON) ou est $-\mathrm{id}$ auquel cas u est une rotation d'angle π. Idem pour v.

Un exercice pour faire le bilan du cours sur la dimension 3.

Exercice 52 — Isométrie dans l'espace. Soit $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension 3. Une isométrie de E est une application linéaire $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ vérifiant $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$.

a) Montrer que u admet une valeur propre λ. Quelles sont les valeurs possibles pour λ ?

b) Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Montrer que le plan $\mathrm{P} = x^\perp$ est stable par u et que la restriction de u à P est une isométrie de ce plan vectoriel euclidien.

c) En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$r_\theta = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad s_\theta = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta \\ & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

d) Le réel θ est-il uniquement déterminé ? Que **doit**-on faire pour que θ soit déterminé à 2π près ?

e) Peut-on avoir $r_\theta = s_{\theta'}$ pour des paramètres réels θ et θ' ?

f) Quels sont les valeurs propres de r_θ, de s_θ ? (Attention aux différentes valeurs de θ !)

g) Lorsqu'on connaît une matrice de u, comment trouver facilement θ ?

h) Donner une interprétation géométrique de r_θ. Donner une interprétation géométrique de s_0.

i) Montrer que toute isométrie s'écrit comme produit d'au plus trois réflexions.

j) *Un classique : linéarité gratuite.* Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application dont on ne sait pas encore qu'elle est linéaire mais qui vérifie $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$. Montrer que u est linéaire et donc une isométrie.

3.5 Orientation d'un espace vectoriel réel.

Le corps $\mathbb{R}$ a la redoutable propriété d'être un corps ordonné. On a déjà vu l'utilité de cet ordre pour définir les demis-espaces ou la notion de points entre deux autres sur une droite. On retrouve ici l'intérêt de cette propriété pour définir la notion d'orientation de l'espace.

Définition 72 – Orienter une espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On peut définir une relation d'équivalence sur les bases de E de la façon suivante on dit que $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$ si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$ [38]

Cette relation d'équivalence à deux classes : en effet si $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ ne sont pas équivalentes à $\mathscr{B}$ alors $\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}''$. En effet, on a $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'')$ qui est le produit de deux nombres négatifs.

Orienter E c'est choisir l'une des deux classes d'équivalences de bases ou de manière équivalente, orienter E c'est choisir une base de E [39]. Les bases de la classe d'équivalence choisie sont appelées bases directes.

Lorsque E est euclidien, il y a des bases adaptées à cette structure supplémentaire : les bases orthonormées. Elles ne sont pas toutes équivalentes : par exemples $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ ne sont pas équivalentes. Ainsi, on peut orienter E en choisissant une base orthonormée.

On suppose à présent que $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel euclidien **orienté** de dimension n. Le fait d'avoir à la fois orienté E et d'avoir une structure euclidienne sur E permet de définir de nouveaux objets : le produit mixte et le produit vectoriel (qui se définit à partir du produit mixte). Lorsque E est de dimension 3, on retrouve les expressions bien connues.

Lemme 73 – Produit mixte. L'application

$$f_{\mathscr{B}} : \begin{cases} \mathrm{E}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto \det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \end{cases}$$

est indépendante de la base $\mathscr{B}$ orthonormée directe choisie. On note « vol » cette application. Elle est appelée *produit mixte*.

Preuve. Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormées directes, on a

$$f_{\mathscr{B}'}(v_1, \ldots, v_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) f_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) .$$

Or la matrice obtenue en écrivant les vecteurs de $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}'$ est une matrice orthogonale puisque $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases orthonormées. Ainsi $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \pm 1$. Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont directes, on a $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) > 0$, ce qui donne le résultat.

Grâce à cette application vol, on peut définir le produit vectoriel [40], en utilisant le théorème de Riesz 47.

Proposition-Définition 74 – Produit vectoriel. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{E}})$ est un espace vectoriel euclidien **orienté** de dimension n. Soit $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathrm{E}$, le produit vectoriel $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ est l'unique vecteur $z \in \mathrm{E}$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \qquad \mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_{n-1}, x) = \langle z, x \rangle .$$

Preuve. Le propriété du déterminant assurent que l'application $x \mapsto \mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_{n-1}, x)$ est une forme linéaire sur E. Il existe donc un unique z vérifiant la propriété souhaitée d'après le théorème de Riesz.

Remarque 75 – Quelques propriétés du produit vectoriel. Dans un espace vectoriel de dimension n, on sait définir le produit vectoriel de $n-1$ vecteurs. En particulier, dans un espace vectoriel de dimension 3, on sait définir le produit vectoriel de deux vecteurs ; et dans un espace vectoriel de dimension 2, on sait définir le produit vectoriel de **un** vecteur. En reprenant la définition pour un espace de dimension 2, on obtient que le produit vectoriel du vecteur u est 0 si $u = 0$ et sinon c'est le vecteur v de même norme que u tel que $(u/\|u\|, v/\|v\|)$ soit une base orthonormée directe.

Le fait que le déterminant soit une forme alternée assure que $(v_1, \ldots, v_{n-1}) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ est une forme alternée et que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}$ est orthogonal à tous les v_i.

En particulier, si la famille $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est liée alors $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} = 0$. Si $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ est libre, on peut compléter la famille $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ en une base : $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v)$. On a donc

$$\mathrm{vol}(v_1, \ldots, v_{n-1}, v) = \langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}, v \rangle \neq 0.$$

On en déduit que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1} \neq 0$.

De plus, $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1})$ est une base directe puisque

38. C'est bien une relation d'équivalence car $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})$, $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')^{-1}$ et $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}'') = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}'')$.

39. En effet, si je choisis une classe, je n'ai qu'à choisir l'un des éléments de la classe, inversement, si je choisis une base, je choisis sa classe d'équivalence.

40. de $n-1$ vecteurs dans un espace de dimension n

$$\mathrm{vol}(v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}) = \|v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}\|^2 > 0.$$

Remarque 76 — Le cas de la dimension 3. En dimension 3, soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe, (x, y, z) les coordonnées de v_1 dans la base $\mathscr{B}$ et (x', y', z') les coordonnées de v_2 dans la base $\mathscr{B}$. Les coordonnées de $v_1 \wedge v_2$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(yz' - y'z, x'z - xz', xy' - yx')$.

En effet, si $v \in \mathrm{E}$, on note (a, b, c) ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. En développant le déterminant dans la base $\mathscr{B}$ par rapport à la dernière colonne, on a

$$\mathrm{vol}(v_1, v_2, v) = a(yz' - y'z) + b(x'z - xz') + c(xy' - yx') = \langle z, v \rangle$$

où z est le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont $(yz' - y'z, x'z - xz', xy' - yx')$.

Ce calcul montre en particulier que si v_1 et v_2 sont deux vecteurs orthogonaux de norme 1 alors $(v_1, v_2, v_1 \wedge v_2)$ est une base orthonormée directe : il suffit d'effectuer le calcul dans la base $\mathscr{B}$ orthonormée directe qui commence par (v_1, v_2).

Si f est une isométrie directe, on a $f(v_1 \wedge v_2) = f(v_1) \wedge f(v_2)$ pour tout $v_1, v_2 \in \mathrm{E}$. En effet, pour tout $z \in \mathrm{E}$, il existe $w \in \mathrm{E}$ tel que $z = f(w)$ (puisque f est bijective), on a donc

$$\langle f(v_1 \wedge f(v_2), z \rangle = \langle f(v_1) \wedge f(v_2), f(w) \rangle = \mathrm{vol}(f(v_1), f(v_2), f(w)) = \det(f)\mathrm{vol}(v_1, v_2, w) = \langle v_1 \wedge v_2, w \rangle .$$

L'avant-dernière égalité résulte de la définition de $\det f$. La dernière du fait que $\det f = 1$ (puisque f est directe). Comme f est une isométrie, on a aussi

$$\langle v_1 \wedge v_2, w \rangle = \langle f(v_1 \wedge v_2), f(w) \rangle = \langle f(v_1 \wedge v_2), z \rangle .$$

ce qui permet de conclure.

Si f est une isométrie indirecte, on a $f(v_1 \wedge v_2) = -f(v_1) \wedge f(v_2)$ pour tout $v_1, v_2 \in \mathrm{E}$. La preuve est la même que la précédente sauf que $\det f = -1$.

Exercice 53 Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien orienté et $u \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$.

a) On suppose que $\dim \mathrm{E} = 2$. Montrer que la matrice de u ne dépend pas de la base orthonormée **directe** choisie : si on ne s'autorise que les changements de base orthonormée directe alors « b » est bien déterminé.

b) On suppose que $\dim \mathrm{E} = 3$. Montrer que même si on effectue des changements de base orthonormées **directes** alors b n'est pas déterminée.

3.6 L'algorithme de Gram-Schmidt et ses conséquences

Dans cette section, on étudie l'algorithme de Gram-Schmidt (qui permet de transformer une base quelconque en une base orthonormée) et ses conséquences géométriques. On illustre ces résultats par la notion de polynômes orthogonaux. Avant d'énoncer et de démontrer l'algorithme de Gram-Schmidt, on écrit quelques lemmes qui nous serviront notamment pour la propriété d'unicité de l'algorithme de Gram-Schmidt.

3.6.1 Isométrie et bases orthonormées

Le premier lemme nous permet de lier les notions de base orthonormée et d'isométrie vectorielle. C'est une version préliminaire au lemme 83 de caractérisation des isométries par leur action sur les bases orthonormées.

Lemme 77 — Isométries vectorielles et base orthonormée. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application linéaire.

Si u est une isométrie alors pour toute base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Inversement, supposons que $\mathscr{B}$ soit une base orthonormée de E telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit une base orthonormée de E alors u est une isométrie.

Preuve. Si u est une isométrie, on a $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$ pour tout $(i, j) \in [\![1 , n]\!]^2$. Ainsi $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est bien une base orthonormée, si $\mathscr{B}$ l'est.

Montrons à présent la deuxième assertion, on considère $x \in \mathrm{E}$, on décompose x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée, on a $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2$. Par ailleurs, la linéarité de u donne $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i)$. Or $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une base orthonormée, donc

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 = \|x\|^2.$$

Ainsi, u conserve la norme et est donc une isométrie.

Lemme 78 – Une caractérisation des isométries vectorielles. Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ deux bases orthonormées de E. Alors il existe une unique isométrie vectorielle u telle que $u(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Preuve. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe une unique application linéaire u telle que $u(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. De plus, la deuxième assertion du lemme 77 montre que u est une isométrie.

Lemme 79 – Changement de base orthonormée. Soient $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est une matrice orthogonale.

Preuve. On note $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est aussi la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de l'endomorphisme u de E défini par $u(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\, n]\!]$. D'après le lemme 78, u est une isométrie. Sa matrice dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ est donc orthogonale.

3.6.2 L'algorithme et ses conséquences

Proposition 80 – Algorithme de Gram-Schmidt. Soit E un espace vectoriel euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique base orthonormée $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure avec des coefficients positifs sur la diagonale.

Pour une telle base, on a en particulier pour tout $i = 1, \ldots, n$

$$\operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_i) = \operatorname{vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i).$$

Preuve. La démonstration de l'existence se décompose en deux étapes. Dans la première étape, on construit une base $(v_1, \ldots, v_n)$ orthogonale telle que la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $(v_1, \ldots, v_n)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. La deuxième étape consiste à normaliser cette base en divisant les vecteurs obtenus à la fin de la première étape par leur norme.

Étape 1. On cherche donc un changement de base avec une matrice de passage triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Cela signifie qu'on cherche donc les vecteurs v_i sous la forme

$$\begin{cases} v_1 &= e_1 \\ v_2 &= e_2 + \lambda_{2,1} e_1 \\ v_3 &= e_3 + \lambda_{3,2} e_2 + \lambda_{3,1} e_1 \\ \vdots &= \vdots \\ v_i &= e_i + \lambda_{i,i-1} e_{i-1} + \cdots + \lambda_{i,1} e_1 \\ \vdots &= \vdots \\ v_n &= e_n + \lambda_{n,n-1} e_{n-1} + \cdots + \lambda_{n,1} e_1 \end{cases}$$

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, elle est donc inversible et $(v_1, \ldots, v_n)$ est donc une base de E quelque soit les valeurs des $\lambda_{i,j}$. Par ailleurs, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale si et seulement si la matrice de passage de la base $(v_1, \ldots, v_n)$ à la base $\mathscr{B}$ l'est. Or il est plus malin de chercher cette dernière matrice de passage, on cherche donc des coefficients $\mu_{i,j}$ pour $i > j$ tel que[41]

41. La matrice de passage de $(v_1, \ldots, v_n)$ à $\mathscr{B}$ est en fait $\begin{bmatrix} 1 & -\mu_{2,1} & \cdots & \cdots & -\mu_{n,1} \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & -\mu_{n,n-1} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} v_1 &= e_1 \\ v_2 &= e_2 + \mu_{2,1}v_1 \\ v_3 &= e_3 + \mu_{3,2}v_2 + \mu_{3,1}v_1 \\ \vdots &= \vdots \\ v_i &= e_i + \mu_{i,i-1}v_{i-1} + \cdots + \mu_{i,1}v_1 \\ \vdots &= \vdots \\ v_n &= e_n + \mu_{n,n-1}v_{n-1} + \cdots + \mu_{n,1}v_1 \end{cases}$$

Pour mener à bien cette première étape de la preuve, on cherche donc les coefficients $\mu_{i,j}$ pour $i > j$ (il y a donc $1 + \cdots + n - 1 = n(n-1)/2$ inconnues) de telle façon que la base $(v_1, \ldots, v_n)$ soit orthogonale c'est-à-dire telle que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$ ce qui fait $n(n-1)/2$ équations (il y en a a priori $n(n-1)$ mais l'équation $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ est bien sûr équivalente à $\langle v_j, v_i \rangle = 0$) sur les $\lambda_{i,j}$. Il n'y a plus qu'à espérer que le système obtenu soit un système de Cramer. Il l'est bien car il est en fait triangulaire : on le résout de proche en proche. De façon explicite, montrons par récurrence sur i le résultat suivant : pour tout $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, il existe une famille $(\mu_{k,\ell})_{1 \leqslant \ell < k \leqslant i}$ telle que la famille $(v_1, \ldots, v_i)$ soit orthogonale [42].

Pour $i = 1$, il n'y a rien à faire. On suppose à présent l'existence une famille $(\mu_{k,\ell})_{\ell < k \leqslant i}$ telle que la famille $(v_1, \ldots, v_i)$ soit orthogonale. Comme la famille $(v_1, \ldots, v_i)$ est déjà orthogonale, il s'agit de construire la famille $(\mu_{i+1,j})_{j < i+1}$ telle que v_{i+1} soit orthogonal à chacun des vecteurs $v_1, \ldots, v_i$. On doit donc avoir $\langle v_{i+1}, v_j \rangle = 0$ pour tout $j \in [\![1\,,\, i]\!]$. Comme la famille $(v_1, \ldots, v_i)$ est orthonormée, on obtient l'égalité

$$\langle v_j, v_j \rangle \mu_{i+1,j} + \langle e_{i+1}, v_j \rangle = 0$$

pour tout $j \in [\![1\,,\, i]\!]$. Comme v_j est non nul pour tout j, on en déduit que $\langle v_j, v_j \rangle \neq 0$ et $\mu_{i+1,j}$ est bien déterminé. On construit ainsi, par récurrence, la base orthogonale $(v_1, \ldots, v_n)$.

Étape 2. On pose $\varepsilon_i = v_i / \|v_i\|$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. La famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ devient une base orthonormée de E.

Prouvons pour finir que la base orthonormée $\mathscr{B}'$ telle que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}$ soit triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale est unique. Soit $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ est une base orthonormée vérifiant les conditions du théorème. La matrice P de passage de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ à $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ est une matrice orthogonale puisque c'est la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre (lemme 79). Par ailleurs, la matrice P est aussi triangulaire supérieure avec des coefficients positifs sur la diagonale puisque c'est le produit de l'inverse de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et de la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$.

Or une matrice orthogonale qui est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux positifs est l'identité. En effet, comme la matrice est triangulaire, les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice. Comme la matrice est orthogonale, les valeurs propres sont nécessairement 1 ou -1. La positivité des coefficients diagonaux impose que tous les coefficients diagonaux soient des 1. Enfin comme la matrice est orthogonale, la somme des carrés des coefficients d'une colonne est 1 et comme le coefficient sur la diagonal est égal à 1, tous les autres coefficients sont nuls.

Finalement, on obtient bien $(\varepsilon_1, \ldots, e_n) = (\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$.

Voyons à présent des conséquences du procédé de Gram-Schmidt. Il permet en particulier de montrer qu'un espace euclidien admet une base orthonormée ce qui n'est pas évident. L'existence d'une base dans un espace vectoriel de dimension finie repose sur le théorème de la base incomplète. Le théorème de Gram-Schmidt peut ainsi être vu comme un théorème de la base orthonormée incomplète.

Corollaire 81 — Quelques conséquences de Gram-Schmidt. Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

(*i*) E admet une base orthonormée.

(*ii*) Toute famille libre orthonormée commence une base orthonormée.

(*iii*) Tout vecteur unitaire commence une base orthonormée.

(*iv*) Si u et v sont deux vecteurs unitaires, il existe une isométrie qui envoie u sur v.

(*v*) Si F et F′ sont deux sous-espaces de même dimension de E, il existe une isométrie qui envoie F sur F′.

Preuve.

42. De façon moins formelle, on construit la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ par récurrence sur i en supposant les premiers vecteurs de la base construits.

(*i*) On applique le procédé de Gram-Schmidt à une base de E[43].

(*ii*) *Preuve 1 en utilisant le point* (*i*). Soit $(e_1, \dots, e_i)$ une famille libre orthonormée de E. On note $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(e_1, \dots, e_i)$. On considère la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$. D'après le point (*i*), $\mathrm{F}^\perp$ admet une base orthonormée $(e_{i+1}, \dots, e_n)$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est alors une base de E. De plus, c'est une base orthonormée car tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de $\mathrm{F}^\perp$.

Preuve 2 en réutilisant Gram-Schmidt. Dans la preuve précédente du point (*ii*), l'algorithme de Gram-Schmidt est caché dans l'utilisation du point (*i*). Dans cette preuve, on va l'utiliser de façon explicite. Soit $(e_1, \dots, e_i)$ une famille libre orthonormée de E. On la complète en une base de E : $(e_1, \dots, e_n)$. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à cette base. On obtient ainsi une base orthonormée $\mathscr{B}$. Comme $(e_1, \dots, e_i)$ est une famille libre orthonormée, l'algorithme de Gram-Schmidt ne modifie pas ces vecteurs. Ainsi $\mathscr{B}$ commence par $(e_1, \dots, e_i)$.

(*iii*) On applique le point (*ii*) à la famille libre orthonormée formée par notre vecteur.

(*iv*) Grâce au point (*ii*), on peut construire une base orthonormée $\mathscr{B}$ qui commence par u et une autre $\mathscr{B}'$ qui commence par v. D'après le lemme 78, il existe une isométrie qui envoie $\mathscr{B}$ sur $\mathscr{B}'$. Cette isométrie envoie donc u sur v.

(*v*) On prend $(e_1, \dots, e_i)$ une base de F et $(e'_1, \dots, e'_i)$ une base de F′. On complète ces familles en des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E. On applique le procédé de Gram-Schmidt à $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ pour obtenir des bases orthonormées $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$. On a vu qu'il existe une isométrie f telle que $f(\varepsilon_i) = \varepsilon'_i$ pour tout i. En particulier, on a $f(\mathrm{vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)) = \mathrm{vect}\,(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_i)$. Mais $\mathrm{vect}\,(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i) = \mathrm{vect}\,(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{F}$ et de même $\mathrm{vect}\,(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_i) = \mathrm{F}'$ et donc $f(\mathrm{F}) = \mathrm{F}'$.

Remarque 82 — Existence d'une base orthonormée. L'utilisation du procédé de Gram-Schmidt pour assurer l'existence d'une base orthonormée dans un espace euclidien n'est pas nécessaire. On peut utiliser un simple raisonnement par récurrence.

Soit $(\mathrm{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Montrons par récurrence sur $\dim \mathrm{E}$ que E admet une base orthonormée. Si $\dim \mathrm{E} = 0$ c'est évident. Si $\dim \mathrm{E} = 1$, on choisit x un vecteur non nul de E et $x/\|x\|$ est une base orthonormée de E. On suppose que tout espace vectoriel euclidien de dimension n admet une base. Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$. Soit $x \in \mathrm{E}$ un vecteur non nul, on note $\mathrm{D} = \mathbb{R}x$ et $\mathrm{D}^\perp$ l'orthogonal de D. C'est un espace vectoriel de dimension n qui vérifie $\mathrm{E} = \mathrm{D} \oplus \mathrm{D}^\perp$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{D}^\perp$ admet une base orthonormée $(e_2, \dots, e_{n+1})$, la famille $(x/\|x\|, e_2, \dots, e_{n+1})$ est une base orthonormée de E.

L'avantage du procédé de Gram-Schmidt en comparaison de cette méthode est qu'il offre un algorithme pour le calcul explicite d'une base orthonormée.

Grâce à l'existence de base orthonormée, on en déduit la caractérisation suivante des isométries.

Lemme 83 — Isométries vectorielles et base orthonormée. Soit $u \colon \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application linéaire. On a équivalence

(*i*) u est une isométrie

(*ii*) il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

(*iii*) pour toute base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Preuve. Le lemme 77 assure que (*i*) $\Rightarrow$ (*iii*) et (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*). L'implication (*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*) résulte quant à elle de l'existence de base orthonormée dans E c'est-à-dire du point (*i*) de la corollaire 81 ou de la remarque 82

La proposition suivante est simplement une reformulation matricielle de l'algorithme de Gram-Schmidt.

Proposition 84 — Décomposition QR. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Il existe un unique couple de matrices $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\mathrm{Q} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, R est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs et $\mathrm{M} = \mathrm{QR}$.

L'écriture $\mathrm{M} = \mathrm{QR}$ est appelée décomposition QR de la matrice M.

Preuve. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme M est inversible, les vecteurs colonnes de M forment une base de $\mathbb{R}^n$ qu'on note

43. L'existence d'une base de E repose sur le théorème de la base incomplète.

$\mathscr{B}'$. On note $\mathscr{B}''$ la base orthonormée obtenue à partir du procédé de Gram-Schmidt appliqué à $\mathscr{B}'$.

Or M peut être vue comme la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on note alors Q la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}''$ et R la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}''$. Les relations sur les matrices de passage donnent alors $\mathrm{Q} = \mathrm{MR}$.

D'après le théorème de Gram-Schmidt, R est triangulaire supérieure avec des coefficients strictement positifs sur la diagonale. Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}''$ sont orthonormées, Q est une matrice orthogonale. Comme R^{-1} est aussi triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux positifs, on en déduit l'existence de la décomposition : on a $\mathrm{M} = \mathrm{QR}^{-1}$.

Supposons à présent qu'on a $\mathrm{M} = \mathrm{QR} = \mathrm{Q}'\mathrm{R}'$ avec Q, Q' orthogonale et R, R' triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs. On écrit $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Q}' = \mathrm{RR}'^{-1}$. Cette matrice est donc à la fois orthogonale et triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs. Or, on a vu dans la preuve de l'unicité du théorème de Gram-Schmidt qu'une matrice orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs est l'identité. Ainsi $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{Q}' = \mathrm{id} = \mathrm{RR}'^{-1} = \mathrm{id}$ et donc $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$ et $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$.

3.6.3 Polynôme orthogonaux.

On considère la situation suivante : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $a < b$ les bornes de I, on peut avoir $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ et I peut être ouvert ou fermé en chacune de ses bornes. On note ω une fonction continue positive sur I qui n'est pas la fonction nulle sur I. On l'appelle poids. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n\omega(x)$ est intégrable sur I.

L'application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega : \begin{cases} \mathbb{R}[\mathrm{X}] \times \mathbb{R}[\mathrm{X}] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) & \longmapsto \displaystyle\int_{\mathrm{I}} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\omega(t)\mathrm{d}t \end{cases}$$

est bien définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \langle \cdot, \cdot \rangle_\omega)$, on applique l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$, on note $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ la base obtenue. L'algorithme de Gram-Schmidt assure que la famille $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est étagée en degré.

Par ailleurs, pour $m \in \mathbb{N}$, on obtient de la même façon une base $(\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_m)$ de $\mathbb{R}_m[\mathrm{X}]$ étagée en degré. Le fonctionnement de l'algorithme de Gram-Schmidt assure que $\mathrm{Q}_0 = \mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{Q}_{\inf(m,n)} = \mathrm{P}_{\inf(m,n)}$: les familles $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ et $(\mathrm{Q}_0, \ldots, \mathrm{Q}_m)$ coïncident sur les indices communs. En appliquant ainsi la construction précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient une famille orthonormée $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $\deg \mathrm{P}_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ appelée *famille des polynômes orthogonaux pour le poids* ω.

Proposition 85 – Relation de récurrence. Il existe trois suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\mathrm{P}_{n+1} = a_n\mathrm{XP}_n + b_n\mathrm{P}_n + c_n\mathrm{P}_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. La famille $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n, \mathrm{XP}_n)$ est étagée en degré. C'est donc une base de $\mathbb{R}_{n+1}[\mathrm{X}]$. On peut donc écrire

$$\mathrm{P}_{n+1} = a_n\mathrm{XP}_n + b_n\mathrm{P}_n + c_n\mathrm{P}_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_{i,n}\mathrm{P}_i$$

où $a_n, b_n, c_n, \alpha_{i,n} \in \mathbb{R}$. Montrons que pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, on a $\alpha_{i,n} = 0$. Pour cela, on calcule pour $i \leqslant n-1$, $\langle \mathrm{P}_{n+1}, \mathrm{P}_i \rangle_\omega$ qui est nul puisque la famille $(\mathrm{P}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est orthonormée. On a alors

$$a_n\langle \mathrm{XP}_n, \mathrm{P}_i \rangle_\omega + b_n\langle \mathrm{P}_n, \mathrm{P}_i \rangle_\omega + c_n\langle \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_i \rangle_\omega + \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_{j,n}\langle \mathrm{P}_j, \mathrm{P}_i \rangle_\omega = 0$$

Toujours comme la famille $(\mathrm{P}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est orthonormée, la relation précédente devient

$$a_n\langle \mathrm{XP}_n, \mathrm{P}_i \rangle_\omega + \alpha_{j,n} = 0$$

Or la forme du produit scalaire assure que $\langle \mathrm{XP}_n, \mathrm{P}_i \rangle = \langle \mathrm{P}_n, \mathrm{XP}_i \rangle$. Or P_n est orthogonal aux éléments de la famille $(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{n-1})$ qui est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, il est donc orthogonal à tout $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$; en particulier à XP_i puisque $i \leqslant n-2$. Ainsi, on obtient bien que $\alpha_{i,n} = 0$.

Proposition 86 – Racines des polynômes orthogonaux. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme est scindée à racines simples dans l'intérieur de I.

Preuve. On note $a_1, \ldots, a_p$ (avec $p \leqslant n$) les racines de multiplicité impaire de P_n qui appartiennent à l'intérieur de I. On peut ainsi écrire

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{Q} \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - a_i)$$

où Q est un polynôme dont les racines qui appartiennent à I sont de multiplicité paire. En particulier Q est de signe constant sur I.

Si $p < n$ alors le polynôme $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{p} (\mathrm{X} - a_i) \in \mathbb{R}_p[\mathrm{X}]$ est orthogonal à P_n. De plus, PP_n est de signe constant sur I. On en déduit que la fonction continue $\mathrm{P}_n\mathrm{P}\omega$ est de signe constant sur I et d'intégrale nulle et ne n'annule pas sur un intervalle de longueur non nulle. NON. Ainsi $p = n$ et P_n a n racines distinctes dans l'intérieur de I qui sont donc toutes simple.

Exemple 87 – Polynômes de Legendre. $\mathrm{I} = [\,-1\,,1\,]$, $\omega = 1$.

Exemple 88 – Polynômes de Tchebichev. $\mathrm{I} =]\,-1\,,1\,[$, $\omega = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Exemple 89 – Polynômes de Laguerre. $\mathrm{I} = [\,0\,,+\infty\,[$, $\omega = \exp(-x)$.

Exercice 54 – Densité des zéros. On suppose que I est un intervalle compact et que ω ne s'annule pas sur I. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Z} = \{x \in \mathrm{I}, \exists n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}_n(x) = 0\}$ est dense (Z est l'ensemble des zéros des P_n pour $n \in \mathbb{N}$).

Chapitre 4

Géométrie affine

L'objectif de ce chapitre est de présenter la théorie élémentaire des espaces affines : définitions, sous-espaces affines, applications affines et barycentres. Il se clôt sur le ou plutôt les théorèmes de Thalès. La définition que nous donnons des espaces affines peut paraître éloignée de l'image que nous en avons par son formalisme ; ce qu'il faut en retenir c'est que les espaces affines sont faits pour que la relation de Chasles soit vérifiées. En géométrie affine, on manipule deux types d'objets : les points et les vecteurs. Les axiomes des espaces affines expriment les liens entre ces deux types d'objets.

4.1 La définition

Définition 90 — Espace affine. Soit $\mathscr{E}$ un ensemble. Munir $\mathscr{E}$ d'une structure d'**espace affine**, c'est se donner un espace vectoriel E (sur un corps k [1]) et une application $\Theta : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathrm{E}$ vérifiant les deux axiomes suivants :

Axiome 1 : Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, l'application

$$ {}_{\mathrm{A}}\Theta : \begin{cases} \mathscr{E} \longrightarrow \mathrm{E} \\ \mathrm{B} \longmapsto \Theta(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \end{cases} $$

est bijective.

Axiome 2 : Pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{E}$, $\Theta(\mathrm{A}, \mathrm{B}) + \Theta(\mathrm{B}, \mathrm{C}) = \Theta(\mathrm{A}, \mathrm{C})$ (cette axiome est appelé « relation de Chasles »).

Définition 91 — Direction et dimension. Si $\mathscr{E}$ est un espace affine (ou plutôt si $\Theta : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to \mathrm{E}$ munit $\mathscr{E}$ d'une structure d'espace affine). On dit que E est la **direction de** $\mathscr{E}$ et on appelle **dimension de** $\mathscr{E}$ la dimension de E.

Un espace affine de dimension 0 est appelé un **point** [2]. Un espace affine de dimension 1 est appelé une **droite affine**. Un espace affine de dimension 2 est appelé une **plan affine**.

4.1.1 Commentaires et interprétations.

On peut donner une première interprétation heuristique de la définition d'espace affine : c'est un ensemble de points (les éléments de $\mathscr{E}$) et un moyen (la fonction Θ) de transformer un couple de points en un vecteur : le vecteur $\Theta(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ s'interprète comme le vecteur qui fait passer de A à B. De façon légèrement plus précise, l'axiome 1 dit qu'on peut placer n'importe quel vecteur à partir de n'importe quelle origine et que les extrémités décrivent alors l'ensemble des points de l'espace affine. L'axiome 2 explique ce qui se passe quand on place un premier vecteur à partir du point A puis un deuxième vecteur à partir de l'extrémité du premier vecteur.

Remarque 92 — Simplifier la notation. La notation $\Theta(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ est lourde à utiliser et ne donne pas d'information sur la nature de $\Theta(\mathrm{A}, \mathrm{B})$: on ne voit pas que c'est un vecteur. Pour cela et pour garder à l'esprit que $\Theta(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ fait passer de A à B, on utilise la notation $\Theta(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ [3].

1. Tout au long de notre propos, le corps k sera le corps $\mathbb{R}$ des réels.
2. On verra bien sûr que les éléments d'un espace affine (qu'on a choisi d'appeler « point ») seront bien des espaces affines de dimension 0... Ouf !
3. Il s'agit bien d'une notation

Définition 93 — Vocabulaire. Les éléments de $\mathscr{E}$ s'appellent les points.

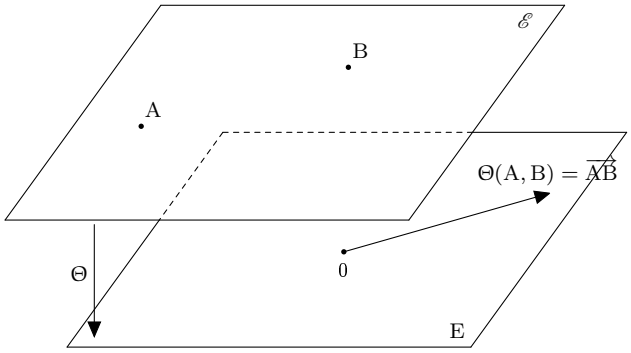
Les éléments de E s'appellent les vecteurs (normal puisque ce sont des éléments d'un espace vectoriel).

On dit que A est *l'***origine** du vecteur $\Theta(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et B *son* **extrémité** (ce sont bien les définitions dont on a l'habitude).

L'application ${}_{\mathrm{A}}\Theta$ est alors l'application qui à point B associe le vecteur d'origine A et d'extrémité B c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

On remarquera l'abus de langage à propos de *l'*origine et *l'*extrémité d'un vecteur. En effet, il est tout à fait malvenu d'utiliser un article défini pour parler de l'origine et de l'extrémité d'un vecteur puisque, précisément l'axiome 1 affirme que pour tout A dans $\mathscr{E}$, on peut « placer » le vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$ avec pour origine A. Ainsi chaque point de $\mathscr{E}$ peut être une origine de $\overrightarrow{u}$: il n'en a pas qu'une. On peut raisonner de même avec les extrémités (voir à ce propos la remarque 100).

On peut représenter la définition d'espace affine donnée ci-dessus sous cette forme : l'espace $\mathscr{E}$ qui contient les points (ici A et B) et en dessous l'espace vectoriel E qui contient les vecteurs. L'application Θ fait passer du haut vers le bas.



Remarque 94 — La représentation. Le dessin ci-dessus induit un gros implicite : les ensembles $\mathscr{E}$ et E se ressemblent. C'est précisément ce que dit l'axiome 1 : les ensembles E et $\mathscr{E}$ sont en bijection.

On dispose même de plein de bijections entre E et $\mathscr{E}$ puisque chaque point A de $\mathscr{E}$ fournit une bijection (la bijection ${}_{\mathrm{A}}\Theta$). Avec ce point de vue, la relation de Chasles exprime une relation entre les ${}_{\mathrm{A}}\Theta$ pour différents A[4].

Remarque 95 — Autres formulations du premier axiome. Si $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$ est un vecteur, alors pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, il existe une unique extrémité C (qui dépend de A) tel que $\overrightarrow{u}$ soit un vecteur d'origine A et d'extrémité C c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \Theta(\mathrm{A},\mathrm{C})$.

Ou encore, tout point de $\mathscr{E}$ peut être l'origine de n'importe quel vecteur ; tout élément de $\mathscr{E}$ est l'extrémité d'un vecteur issu de A ; deux vecteurs issus de A qui ont des extrémités différentes sont différents.

De façon simplifiée, cet axiome dit qu'on peut choisir A (ou plutôt n'importe quel point) comme origine. Ainsi l'un des intérêts de la structure affine est que chaque point y joue un rôle similaire et qu'on peut suivant la situation particulariser l'un des points comme origine si on souhaite lui faire jouer un rôle différent des autres. On trouve ici la différence fondamentale avec la géométrie vectorielle qui a par nature un point spécifique : 0 l'élément neutre qui joue un rôle particulier. Par exemple, toutes les droites vectorielles passent par lui.

4.1.2 Relation de Chasles

Définition 96 — Ajouter un vecteur à un point. Les axiomes des espaces vectoriels définissent l'addition de deux vecteurs. En géométrie affine, nous avons de nouveaux objets : les points. Cela n'a aucun sens d'ajouter deux points[5]. Mais il est tout à fait possible de définir l'addition d'un point et d'un vecteur qui est alors un point. La question est donc : quel sens donner à $\mathrm{A} + \overrightarrow{u}$ pour $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$?

4. C'est d'ailleurs un bon exercice de calculer ${}_{\mathrm{A}}\Theta \circ {}_{\mathrm{B}}\Theta^{-1}$ et ${}_{\mathrm{B}}\Theta^{-1} \circ_{\mathrm{A}} \Theta$.

5. Au moins tant qu'on ne dispose pas de l'enveloppe vectorielle de notre espace affine et cette construction n'est pas proposée dans ces notes. Ainsi nous nous interdisons d'ajouter des points.

Grâce à la bijectivité de ${}_{\mathrm{A}}\Theta$, il existe un unique C dans $\mathscr{E}$ tel que ${}_{\mathrm{A}}\Theta(\mathrm{C}) = \overrightarrow{u}$ c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \Theta(\mathrm{A}, \mathrm{C}) = \overrightarrow{u}$. On **définit** alors $\mathrm{A} + \overrightarrow{u}$ comme étant le point C (un point + un vecteur = un point).

Autrement dit, pour définir $\mathrm{A} + \overrightarrow{u}$, on écrit $\overrightarrow{u}$ comme un vecteur d'origine A. Le point $\mathrm{A} + \overrightarrow{u}$ est alors l'extrémité de ce vecteur.

En particulier, on a $\mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{B}$ pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$.

Remarque 97 – Autres écritures du deuxième axiome. En utilisant la notation simplifiée pour $\Theta(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (voir la remarque 92), le deuxième axiome s'écrit

$$\forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{E}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

On reconnaît l'écriture classique de la relation de Chasles.

Il s'interprète de la façon suivante : si je vais de A à B puis de B à C, c'est la même chose que d'aller de A à C ou encore : pour aller de A à C, je peux faire un détour par n'importe quel point B.

La relation de Chasles est un axiome calculatoire : c'est lui qui permet les calculs dans un espace affine. Il explique comment passer d'une origine à une autre : pour passer de l'origine B à l'origine A, il faut ajouter le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. C'est même le seul axiome calculatoire, ainsi toute la géométrie affine repose sur lui. Nous verrons son omniprésence pour la définition, l'associativité et la désassociativité du barycentre.

La relation de Chasles est le seul axiome où intervient la structure d'espace vectoriel de E. D'ailleurs, elle n'intervient pas totalement : seul la structure de groupe abélien de E est utilisée (via le +). La multiplication par les scalaires interviendra dans les notions de sous-espaces affines et d'applications affines.

Lemme 98 – Des calculs indispensables. On a les relations suivantes pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}', \mathrm{B}' \in \mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathrm{E}$:

(*i*) $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0$ [6]
(*ii*) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}$
(*iii*) $\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = \overrightarrow{\mathrm{BB}'}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$
(*iv*) $\mathrm{A} + 0 = \mathrm{A}$
(*v*) $(\mathrm{A} + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = \mathrm{A} + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$.

Preuve.

(*i*) En appliquant la relation de Chasles avec $\mathrm{B} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{A}$ [7], on obtient $\overrightarrow{\mathrm{AA}} + \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}}$. En ajoutant le vecteur $-\overrightarrow{\mathrm{AA}}$, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0$.

(*ii*) En appliquant la relation de Chasles avec $\mathrm{C} = \mathrm{A}$, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0$ (la dernière égalité résulte du point (*i*)). Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ est donc l'opposé de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: on a $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

(*iii*) On suppose que $\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = \overrightarrow{\mathrm{BB}'}$. Montrons que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$. On applique la relation de Chasles, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}'} + \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'} + \overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}$$

Le point (*ii*) et l'hypothèse $\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = \overrightarrow{\mathrm{BB}'}$ montre que $\overrightarrow{\mathrm{AA}'} + \overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}} = 0$ et on obtient bien $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$. Pour obtenir l'autre sens de l'équivalence, on reformule ce qu'on vient de démontrer : lorsqu'on a une égalité entre deux vecteurs, on peut échanger l'origine du deuxième vecteur avec l'extrémité du premier et on conserve une égalité de vecteur. En appliquant ce principe à partir de l'égalité, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$, on obtient $\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = \overrightarrow{\mathrm{BB}'}$ [8].

(*iv*) On écrit 0 à partir de l'origine A. D'après (*i*), on a $0 = \overrightarrow{\mathrm{AA}}$. Alors $\mathrm{A} + 0$ est l'extrémité de ce vecteur. Ainsi $\mathrm{A} + 0 = \mathrm{A}$. Ouf !

6. Le symbole 0 désigne ici le vecteur nul. Nous ne mettrons pas de flèche sur le vecteur nul. Il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le sens du 0 : c'est un vecteur et pas un point.

7. Lorsqu'on a une égalité valable pour n'importe quel triplet, il est naturel de regarder ce qui se passer pour des triplets particuliers. Ici on regarde quand les trois points sont les mêmes. Pour le point (*ii*), on étudiera ce qui se passe lorsque le premier et le troisième point sont identiques.

8. On peut bien sûr démontrer l'autre sens de l'équivalence comme on fait le premier sens, à l'aide de la relation de Chasles. D'ailleurs de quel autre outil disposons-nous ?

(v) Pour calculer $\mathrm{A}+\overrightarrow{u}$, on écrit $\overrightarrow{u}$ à partir de A : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. On a alors $\mathrm{A}+\overrightarrow{u}=\mathrm{B}$. Ainsi pour calculer $(\mathrm{A}+\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v}$, on écrit $\overrightarrow{v}$ avec $\mathrm{A}+\overrightarrow{u}=\mathrm{B}$ comme origine : $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. On a alors $(\mathrm{A}+\overrightarrow{u})+\overrightarrow{v}=\mathrm{B}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\mathrm{C}$.

Pour calculer $\mathrm{A}+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})$, on écrit $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ avec A comme origine. Or les constructions de B et C donne $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. La relation de Chasles assure alors $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. On a écrit $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ avec A comme origine et donc $\mathrm{A}+(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=\mathrm{C}$.

Remarque 99 L'écriture $\mathrm{A}=\mathrm{B}+\overrightarrow{u}$ est équivalente à pour tout C, on a $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{u}$.

En effet, $\mathrm{A}=\mathrm{B}+\overrightarrow{u}$ est équivalent (par définition) à $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{u}$.

Ainsi si $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{u}$ alors pour tout C, on a $\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ grâce à la relation de Chasles. Inversement, si pour C, on a $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{u}$ alors $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$.

Remarque 100 — Échanger origine et extrémité. Le point (ii) du lemme 98 montre qu'en désignant par Θ_{A} l'application qui à B associe le vecteur d'origine B et d'extrémité A, on a $\Theta_{\mathrm{A}}=-{}_{\mathrm{A}}\Theta$. Ainsi Θ_{A} est aussi une bijection comme composée de ${}_{\mathrm{A}}\Theta$ avec la bijection $x\in\mathrm{E}\longmapsto -x\in\mathrm{E}$.

Ainsi, tout vecteur peut avoir comme extrémité A... l'origine étant alors définie de façon unique.

Exercice 55 Soit $\mathscr{E}$ un espace affine[9] et $\mathrm{A}_1,\dots,\mathrm{A}_n\in\mathscr{E}$. Montrer que

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n}=\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_n}$$

Exercice 56 — Entraînement.

a) Soit ABC un (vrai) triangle. Construire D et E tels que $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DE}}=3\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Peut-on trouver un réel k tel que $2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$? Les points A, E et C sont-ils alignés.

b) Soit ABC un (vrai) triangle. On considère les points M et N tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CN}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-3\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Que dire des points M et N ?

c) Soit [AB] un segment de milieu I. Montrer que l'égalité $3\overrightarrow{\mathrm{AM}}=2\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ déterminer un unique point M. Idem pour l'égalité $3\overrightarrow{\mathrm{NB}}=2\overrightarrow{\mathrm{NA}}$. Montrer que I est le milieu de [MN]. Les nombres 2 et 3 jouent-ils un rôle particulier : peut-on remplacer 3 par un nombre réel quelconque x et 2 par un nombre réel quelconque y et conserver le résultat ?

d) Soit ABC un (vrai) triangle et E, I et F tels que $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CI}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Montrer que I, E, F sont alignés (on pourra exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IF}}$ en fonction de l'un des vecteurs donné sur la figure).

Exercice 57 — Entraînement. Soit ABCD un rectangle. On définit les points I, J, K, et L par les relations

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{BJ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{CK}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\quad\text{et}\quad \overrightarrow{\mathrm{DL}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$$

a) Montrer que IJKL est un parallélogramme dont le centre est le même que celui de ABCD.

b) Donner une condition sur ABCD pour que IJKL soit un losange, un rectangle, un carré.

c) Que se passe-t-il si on change 1/5 en $x\in[0,1]$ et 1/3 en $y\in[0,1]$?

Exercice 58 — Pour ceux qui aiment ou ont envie de comprendre les actions de groupes. Montrer que l'application

$$\begin{cases}\mathrm{E}\times\mathscr{E} & \longrightarrow \mathscr{E}\\ (\mathrm{A},\overrightarrow{u}) & \longmapsto \mathrm{A}+\overrightarrow{u}\end{cases}$$

définit une action du groupe abélien E sur $\mathscr{E}$ et que cette action est simplement transitive.

9. On voit ici un abus de langage classique : je ne précise ni E si Θ.

4.1.3 Des exemples d'espaces affines

Exemple 101 – Un espace vectoriel est aussi un espace affine. Dans cet exemple, on décrit l'exemple le plus classique d'espace affine : on peut munir un espace vectoriel d'une structure d'espace affine. Si cet exemple a l'avantage d'être celui qu'on connaît et qu'on utilise le plus, il a l'inconvénient de confondre l'espace affine et sa direction et rend plus difficile à entrevoir ce qui relève de l'affine et ce qui relève du vectoriel. Par exemple, un élément de E est à la fois un point et un vecteur... [10]

Soit E un espace vectoriel. L'application

$$\Theta\colon \begin{cases} \mathrm{E}\times\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E} \\ (u,v) \longmapsto v-u \end{cases}$$

munit E d'une structure d'espace affine : elle vérifie les deux axiomes.

En effet, si on fixe u, l'application $v \mapsto v-u$ est une bijection de E sur E d'inverse $v \mapsto v+u$. Ainsi l'axiome 1 est vérifié.

De plus, on a $\Theta(u,v)+\Theta(v,w) = (v-u)+(w-v) = w-u = \Theta(w-u)$ et l'axiome 2 est vérifié.

Exemple 102 – Espace affine produit. Cet exemple permet de construire de nouveaux espaces affines à partir de deux espaces affines. On peut bien sûr généraliser à plus de deux espaces affines et même un nombre infinis d'espaces affines.

Soient $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ deux espaces affines de direction respective E_1 et E_2. Montrer que l'application

$$\Theta\colon \begin{cases} (\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2)\times(\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2) \longrightarrow \mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2 \\ ((\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2),(\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2)) \longmapsto (\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1},\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}) \end{cases}$$

définit une structure d'espace affine sur $\mathscr{E}_1\times\mathscr{E}_2$.

Exemple 103 – Fonctions à valeurs dans un espace affine. Un exemple classique : l'espace des fonctions à valeurs dans un espace affine. Cet exemple continue d'illustrer le principe « l'ensemble des fonctions à valeurs dans un truc à la même structure que le truc ». Par exemple, l'ensemble des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel est un espace vectoriel, l'ensemble des fonctions à valeurs dans un anneau est un anneau... Pour X, Y deux ensembles, on note $\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ l'ensemble des fonctions de X dans Y.

Soit X un ensemble et $\mathscr{E}$ un espace affine. Montrer que l'application

$$\Theta\colon \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{X},\mathscr{E})\times\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathscr{E}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathrm{X},\mathrm{E}) \\ (f,g) \longmapsto (x\mapsto \overrightarrow{f(x)g(x)}) \end{cases}$$

définit une structure d'espace affine sur $\mathscr{F}(\mathrm{X},\mathscr{E})$.

4.2 Applications affines

Proposition-Définition 104 – Application affine. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines et $f:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$. On note E la direction de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ la direction de F. On dit que f est *affine* s'il existe une application linéaire $\varphi:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ telle que pour tous $\mathrm{A},\mathrm{M}\in\mathscr{E}$, on ait $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{A})+\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$.

L'application linéaire $\varphi:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ de la définition est entièrement définie par f. Elle est noté $\overrightarrow{f}$ et est appelée **la flèche de** f.

Preuve. Il s'agit de montrer que l'application linéaire u est uniquement définie par le relation $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{A})+\varphi(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$ pour tous $\mathrm{A},\mathrm{M}\in\mathscr{E}$.

Pour cela, on fixe $\overrightarrow{v}\in\mathrm{E}$ et on veut calculer $\varphi(\overrightarrow{v})$. D'après l'axiome 1 de la définition des espaces affines, on peut écrire le vecteur $\overrightarrow{v}$ comme un vecteur d'origine A : il existe $\mathrm{M}\in\mathscr{E}$ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{AM}}$. On en déduit alors que $\varphi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{M})}$. La valeur de $\varphi(\overrightarrow{v})$ est donc bien déterminée : c'est $\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{M})}$ dès que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

Exercice 59 – Autre formulation. Soient $\mathscr{E},\mathscr{F}$ deux espaces affines de direction respective E et F et $f:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

10. Dans un espace affine, de cette nature, on se retrouve à pouvoir ajouter des points ce qui rajoute à la confusion...

(i) $\exists\varphi\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \forall\mathrm{O},\mathrm{M}\in\mathscr{E},\quad f(\mathrm{M})=f(\mathrm{O})+\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ (c'est-à-dire f est affine)

(ii) $\exists\varphi\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \forall\mathrm{O},\mathrm{M}\in\mathscr{E},\quad \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{M})}=\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$

(iii) $\exists\varphi\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \forall\mathrm{A}\in\mathscr{E},\ \forall\overrightarrow{u}\in\mathrm{E},\quad f(\mathrm{A}+\overrightarrow{u})=f(\mathrm{A})+\varphi(\overrightarrow{u})$

(iv) $\exists\varphi\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \exists\mathrm{O}\in\mathscr{E},\ \forall\mathrm{M}\in\mathscr{E},\quad f(\mathrm{M})=f(\mathrm{O})+\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$

(v) $\exists\varphi\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \exists\mathrm{O}\in\mathscr{E},\ \forall\mathrm{M}\in\mathscr{E},\quad \overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{M})}=\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$

(vi) $\exists\varphi\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \exists\mathrm{A}\in\mathscr{E},\ \forall\overrightarrow{u}\in\mathrm{E},\quad f(\mathrm{A}+\overrightarrow{u})=f(\mathrm{A})+\varphi(\overrightarrow{u})$

Savoir passer d'une écriture à l'autre est indispensable pour la résolution des exercices.

Remarque 105 – Montrer qu'une application est affine. La définition donne immédiatement la façon de montrer qu'une application est affine : il s'agit de montrer que l'application

$$\begin{cases}\mathrm{E} & \longrightarrow \mathrm{F}\\ \overrightarrow{\mathrm{AM}} & \longmapsto \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{M})}\end{cases}$$

est linéaire. On remarquera que cette application n'est pas forcément bien définie : on pourrait très bien avoir que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{BN}}$ sans que $\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{M})}=\overrightarrow{f(\mathrm{B})f(\mathrm{N})}$. Lorsqu'on veut montrer que f est une application, on essaie justement de trouver une expression de $\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{M})}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ (à l'aide de la relation de Chasles) et ensuite de montrer que cette expression est linéaire.

Le théorème suivant est fondamental. Il sert en permanence et permet de montrer très facile que des applications sont affines une fois qu'on dispose d'un catalogue assez riche d'exemple. La création de ce catalogue sera précisément l'objectif de la sous-section suivante.

Proposition 106 – Composition d'applications affines. Soient $\mathscr{E},\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ trois espaces affines de direction E, F et G et $f:\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ et $g:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ deux applications affines. Alors $g\circ f$ est affine et

$$\overrightarrow{g\circ f}=\overrightarrow{g}\circ\overrightarrow{f}.$$

De plus, $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ est affine et $\overrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{E}}}=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Preuve. Pour $\mathrm{A}\in\mathscr{E}$ et $\overrightarrow{u}\in\mathrm{E}$, on écrit $f(\mathrm{A}+\overrightarrow{u})=f(\mathrm{A})+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ puisque f est affine. Comme g est affine, on a

$$g\circ f(\mathrm{A}+\overrightarrow{u})=g(f(\mathrm{A})+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}))=g(f(\mathrm{A}))+\overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}))=g\circ f(\mathrm{A})+\overrightarrow{g}\circ\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$$

Comme l'application $\overrightarrow{g}\circ\overrightarrow{f}$ est linéaire (puisque c'est la composée de deux applications linéaire), on en déduit que $g\circ f$ est affine et $\overrightarrow{g\circ f}=\overrightarrow{g}\circ\overrightarrow{f}$ [11].

On a $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}(\mathrm{A}+\overrightarrow{u})=\mathrm{A}+\overrightarrow{u}=\mathrm{A}+\mathrm{id}_{\mathrm{E}}(\overrightarrow{u})$ pour tout $\mathrm{A}\in\mathscr{E}$ et tout $\overrightarrow{u}\in\mathrm{E}$, ce qui montre que $\mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ est affine.

La proposition suivante est un exemple typique de propriétés des applications affines : de nombreuses propriétés des applications affines peuvent se lire sur leur flèche. Ici, on montre que l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une application est équivalente à celle de leur flèche (et donc à celle d'une application linéaire). Dans la suite, nous verrons que le fait d'être une translation, une homothétie, une isométrie affine peut aussi se lire sur la flèche.

Proposition 107 – Injectivité, surjectivité, bijectivité. Soit $f\in\mathscr{E}\to\mathscr{F}$ une application affine. Alors f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\overrightarrow{f}$ l'est.

Par ailleurs, si f est bijective alors f^{-1} est affine et $\overrightarrow{f^{-1}}=\overrightarrow{f}^{-1}$.

Preuve. On suppose f injective. Montrons que $\overrightarrow{f}$ injective. Soit $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})=\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$. On a alors

$$f(\mathrm{M}+\overrightarrow{u})=f(\mathrm{M})+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})=f(\mathrm{M})+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})=f(\mathrm{M}+\overrightarrow{v}).$$

Comme f est injective, on a $\mathrm{M}+\overrightarrow{u}=\mathrm{M}+\overrightarrow{v}$ et donc $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}$ [12].

Inversement, supposons $\overrightarrow{f}$ est injective. Soit M,N tel que $f(\mathrm{M})=f(\mathrm{N})$. On a alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{MN}})=0$ (puisque $f(\mathrm{M})=f(\mathrm{N})+\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{MN}})$). On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=0$ puisque $\overrightarrow{f}$ est injective. Ainsi $\mathrm{M}=\mathrm{N}$.

Étudions à présent le cas de la surjectivité. Supposons $\overrightarrow{f}$ surjective. Soit $\mathrm{N}\in\mathscr{F}$ un point de l'espace d'arrivée et $\mathrm{M}\in\mathscr{E}$ un point de l'espace de départ. Comme $\overrightarrow{f}$ est surjective, il existe $\overrightarrow{u}\in\mathrm{E}$

11. Il est intéressant de comparer cette preuve à celle du fait que la dérivée de deux fonctions dérivables est dérivable.
12. Sans en avoir l'air, on utilise ici l'injectivité de ${}_{\mathrm{M}}\Theta$.

tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{f(\mathrm{M})\mathrm{N}}$. On a alors $f(\mathrm{M}+\overrightarrow{u}) = f(\mathrm{M}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(\mathrm{M}) + \overrightarrow{f(\mathrm{M})\mathrm{N}} = \mathrm{N}$. Ainsi N est bien dans l'image de f.

Inversement supposons que f est surjective. Soit $\overrightarrow{v} \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{N} \in \mathscr{F}$. Comme f est surjective, les points N et $\mathrm{N}+\overrightarrow{v}$ sont dans l'image de f. Il existe donc M et M′ dans $\mathscr{E}$ tel que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$ et $f(\mathrm{M}') = \mathrm{N}+\overrightarrow{v}$. Montrons que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{MM}'}) = \overrightarrow{v}$. Comme f est affine, on a $\mathrm{N}+\overrightarrow{v} = f(\mathrm{M}') = f(\mathrm{M}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{MM}'}) = \mathrm{N} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{MM}'})$. Ainsi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{MM}'})$ [13] et $\overrightarrow{v}$ est bien dans l'image de $\overrightarrow{f}$.

Enfin, l'équivalence de f bijective avec $\overrightarrow{f}$ bijective est immédiate avec ce qui précède.

On suppose que f est bijective. Montrons que f^{-1} est affine. Soit $\mathrm{N}, \mathrm{N}' \in \mathscr{F}$. On pose $f^{-1}(\mathrm{N}) = \mathrm{A}$ et $f^{-1}(\mathrm{N}') = \mathrm{B}$. On a alors $\mathrm{N}' = f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \mathrm{N} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$. Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{NN}'} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ et donc puisque $\overrightarrow{f}$ est bijective, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{\mathrm{NN}'})$. Comme $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, on en déduit que $f^{-1}(\mathrm{N}') = f^{-1}(\mathrm{N}) + \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{\mathrm{NN}'})$ pour tous $\mathrm{N}, \mathrm{N}' \in \mathscr{E}$. Comme la bijection réciproque d'une application linéaire (ici $\overrightarrow{f}$) est linéaire [14], on en déduit que f^{-1} est affine et que $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$.

Corollaire 108 Soit $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux espaces affines tels que $\dim \mathscr{E} = \dim \mathscr{F}$ [15] et $f \in \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. Alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

Preuve. Soit E et F les directions de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$. Par hypothèse, on a $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$. D'après la proposition 107, on a f injective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ injective. Comme $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$, le théorème du rang assure que $\overrightarrow{f}$ est injective si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est surjective (resp. bijective). Or la proposition 107 assure que $\overrightarrow{f}$ surjective (resp. $\overrightarrow{f}$ bijective) si et seulement si f surjective resp. bijective.

4.2.1 Des exemples d'applications affines

Pour se faire la main, on commence par un exemple présentant peu d'intérêt : les fonctions constantes.

Exemple 109 – Application constante. Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux espaces affines et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application constante. L'application f est affine et on a $\overrightarrow{f} = 0$. Réciproquement, si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est affine et $\overrightarrow{f} = 0$ alors f est constante [16]. En conclusion de cet exemple, les applications constantes sont donc exactement les applications affines dont la flèche est nulle.

Exemple 110 – Application affine dans un espace vectoriel. Soient E et F deux espaces vectoriels munis de leur structure d'espace affine (voir l'exemple 101 et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. L'application f est affine si et seulement s'il existe $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire et un vecteur $\overrightarrow{v}$ de F telle que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} + \varphi(\overrightarrow{u})$ pour tout $\overrightarrow{u}$ dans E [17]. En terme matriciel, f est affine s'il existe une matrice A et un vecteur B tel que s'écrit $f(\mathrm{X}) = \mathrm{AX} + \mathrm{B}$. La flèche de f est alors φ et en terme matriciel, c'est A.

Translation

Proposition-Définition 111 – Translation. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$ un vecteur de la direction de l'espace affine $\mathscr{E}$. L'application

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : \begin{cases} \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E} \\ \mathrm{A} \longmapsto \mathrm{A} + \overrightarrow{u} \end{cases}$$

est une application affine vérifiant $\overrightarrow{\tau_{\overrightarrow{u}}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Elle s'appelle la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$

Preuve. Calculons $\tau_{\overrightarrow{u}}(\mathrm{A}+\overrightarrow{v}) = \mathrm{A}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u} = \mathrm{A}+\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v} = \tau_{\overrightarrow{u}}(\mathrm{A}) + \overrightarrow{v}$. On a bien $\tau_{\overrightarrow{u}}(\mathrm{A}+\overrightarrow{v}) = \tau_{\overrightarrow{u}}(\mathrm{A}) + \varphi(\overrightarrow{v})$ avec $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ qui est une application linéaire.

Proposition 112 – Application affine dont la flèche est l'identité. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine tel que $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Alors f est une translation. Plus précisément, f est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})}$. En particulier, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})}$ ne dépend pas de A.

13. On utilise ici l'injectivité de ${}_{\mathrm{N}}\Theta$
14. À savoir démontrer
15. On appliquera ce corollaire essentiellement lorsque $\mathscr{F} = \mathscr{E}$ auquel cas l'hypothèse sur la dimension est superflue !
16. Montrer les deux implications !
17. Pour voir cela, on utilise la caractérisation (*iv*) de l'exercice 59 avec $\mathrm{O} = 0$ l'origine de l'espace vectoriel et $\overrightarrow{v}$ désigne $f(\mathrm{O})$.

Preuve. Posons $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})}$. Montrons que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ c'est-à-dire que pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{E}$, on a $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B} + \overrightarrow{u}$.

Comme f est affine, on a $f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{E}$. Et comme $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, on obtient $f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Or $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A} + \overrightarrow{u}$ et donc

$$f(\mathrm{B}) = \mathrm{A} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{u} = \mathrm{B} + \overrightarrow{u}\,.$$

Exemple 113 – Translation. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E. Pour $t \in \mathrm{E}$, on note τ_t la translation de vecteur t

a) Soient $t, u \in \mathrm{E}$. Montrer que $\tau_t = \tau_u$ si et seulement si $t = u$ (voir le lien avec le fait que Θ est bijective).

b) Soient $t, u \in \mathrm{E}$. Montrer que $\tau_{t+u} = \tau_t \circ \tau_u$ [18] et que $\tau_0 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ (faire le lien avec la relation de Chasles).

c) En déduire que, pour $t \in \mathrm{E}$, τ_t est une bijection affine de $\mathscr{E}$ dans lui-même de bijection inverse τ_{-t}.

d) Montrer que l'application $t \mapsto \tau_t$ est un isomorphisme de groupes entre le groupe additif sous-jacent à E et le groupe des translations, qui est aussi le groupe des bijections affines f de $\mathscr{E}$ dans lui-même telles que $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Cet isomorphisme est donné par $t \mapsto \tau_t$.

Exercice 60 Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. On note $\mathscr{GA}(\mathscr{E})$ l'ensemble des bijections affines de $\mathscr{E}$.

a) Montrer que $\mathscr{GA}(\mathscr{E})$ est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathscr{E}$.

b) Montrer que l'application

$$\overrightarrow{\cdot} : \begin{cases} \mathscr{GA}(\mathscr{E}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \\ \quad f \quad \longmapsto \overrightarrow{f} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes dont on déterminera le noyau (voir la proposition 112) et l'image (voir la proposition 116).

Homothétie

Proposition-Définition 114 – Homothétie. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application

$$h_{\mathrm{A},\lambda} : \begin{cases} \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E} \\ \mathrm{M} \longmapsto \mathrm{A} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AM}} \end{cases}$$

est une application affine vérifiant $\overrightarrow{h_{\mathrm{A},\lambda}} = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Elle s'appelle l'homothétie de centre A et de rapport λ.

Le point A est un point fixe de f. De plus si $\lambda \neq 1$ alors A est l'unique point fixe de f.

Si $\lambda = 1$ alors $h_{\mathrm{A},\lambda} = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Si $\lambda = 0$ alors $h_{\mathrm{A},\lambda}$ est constante.

Preuve. Pour B et C dans $\mathscr{E}$, calculons $h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{B}) = \mathrm{A} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{C}) = \mathrm{A} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AC}}$. Ainsi $h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{B}) = h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{C}) + \lambda(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{C}) + \lambda\overrightarrow{\mathrm{CB}}$.

L'application $\overrightarrow{u} \mapsto \lambda\overrightarrow{u}$ étant linéaire, on en déduit que $h_{\mathrm{A},\lambda}$ est affine et que $\overrightarrow{h_{\mathrm{A},\lambda}} = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

On a bien sûr $h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. Inversement si $h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$, on a $\mathrm{A} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \mathrm{M}$ et donc $(\lambda - 1)\overrightarrow{\mathrm{AM}}$. Comme $\lambda \neq 1$, on en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ et $\mathrm{M} = \mathrm{A}$.

Si $\lambda = 1$, on a $h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{M}) = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \mathrm{M}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ et si $\lambda = 0$, on a $h_{\mathrm{A},\lambda}(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.

Proposition 115 – Application affine dont la flèche est une homothétie (vectorielle). Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine tel que $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ **avec** $\lambda \neq 1$. Alors f est une homothétie. Plus précisément, il existe un unique point A du plan tel que f soit l'homothétie de centre A et de rapport λ.

Le point A est l'unique point fixe de f.

18. En particulier, cela dit que la composée de deux translations est une translation.

Preuve. Cherchons un point fixe pour f. On fixe un point B et on cherche M tel que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$. Pour tout M dans $\mathscr{E}$, on a $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{B}) + \lambda\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ (puisque $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$). Ainsi on a donc $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ si et seulement si

$$\mathrm{M} = f(\mathrm{B}) + \lambda\overrightarrow{\mathrm{BM}}.$$

Or $\mathrm{M} = f(\mathrm{B}) + \lambda\overrightarrow{\mathrm{BM}}$ est équivalent à $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{B}f(\mathrm{B})} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{BM}}$; ce qui est encore équivalent à $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = (1-\lambda)^{-1}\overrightarrow{\mathrm{B}f(\mathrm{B})}$ ce qui définit bien[19] un (unique) point M fixe par f. Notons le A.

Pour une point N de $\mathscr{E}$, $f(\mathrm{N}) = f(\mathrm{A}) + \lambda\overrightarrow{f}(\mathrm{AN}) = \mathrm{A} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AN}}$ puisque $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ et $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Ainsi $f = h_{\mathrm{A},\lambda}$ et d'après la proposition 114, A est l'unique point fixe de f puisque $\lambda \neq 1$.

Exercice 61 — Homothétie : compléments. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine.

a) Montrer qu'une homothétie est bijective si et seulement si son rapport est non nul. Déterminer la bijection inverse de l'homothétie de rapport λ et de centre A.

b) Montrer que la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation (on pourra faire le calcul à la main ou utiliser les propositions 106, 115 et 112). Dans le cas où il s'agit d'une translation, on déterminera le vecteur de la translation. Dans le cas où il s'agit d'une homothétie, on déterminera le rapport et le centre. Pour commencer, on pourra distinguer le cas où les homothétie sont de même centre.

c) Montrer que la composée d'une homothétie et d'une translation est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport (on considérera la composition dans les deux sens).

d) Montrer que l'ensemble formé des homothéties de rapport non nul et des translations (muni de la composition des applications) est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathscr{E}$. Il est souvent noté $\mathscr{H}\mathscr{T}$ ou $\mathscr{H}\mathscr{T}(\mathscr{E})$ et appelé groupe des homothéties-translations (de $\mathscr{E}$). Montrer que les translations forment un sous-groupe distingué de $\mathscr{H}\mathscr{T}$. L'ensemble des homothéties forment-elles un sous-groupe de $\mathscr{H}\mathscr{T}$?

Les exemples d'applications affines (applications constantes, translation et homothéties) peuvent se résumer ainsi par si f est une application affine telle que $\overrightarrow{f}$ soit une homothétie de E alors f est constante si le rapport est nul, une translation si le rapport est 1, une homothétie affine sinon.

Exercice 62 — Une application géométrique. Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}', \mathrm{B}'$ quatre points distincts du plan.

a) Déterminer toutes les homothéties qui envoient A sur A′. Indication : on pourra commencer par déterminer où se situe les centres possibles et une fois le centre fixé, combien de rapport sont possibles ?

b) Donner une condition nécessaire est suffisante sur $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}', \mathrm{B}'$ pour qu'il existe une translation f tel que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$. Lorsque cette condition est remplie, déterminer le vecteur de la translation.

c) Donner une condition nécessaire est suffisante sur $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A}', \mathrm{B}'$ pour qu'il existe une homothétie f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$. Lorsque cette condition est remplie, construire le centre de la translation.

d) On considère deux points supplémentaires C et C′. Montrer qu'il existe une homothétie ou une translation qui envoie A sur A′, B sur B′ et C sur C′ si et seulement si $(\mathrm{AB})//(\mathrm{A'B'})$, $(\mathrm{AC})//(\mathrm{A'C'})$ et $(\mathrm{BC})//(\mathrm{B'C'})$ (c'est-à-dire les côtés des triangles sont deux à deux parallèles).

Exercice 63 — Triangle homothétique. Soit ABC un triangle.

a) Soit A′B′C′ un triangle. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une homothétie ou une translation qui envoie A sur A′, B sur B′ et C sur C′. Déterminer à quelle condition, il s'agit d'une homothétie et à quelle condition il s'agit une translation.

b) MNP un triangle inscrit dans ABC c'est-à-dire $\mathrm{M} \in]\mathrm{BC}[$, $\mathrm{N} \in]\mathrm{AC}[$, $\mathrm{P} \in]\mathrm{AB}[$. Déterminer les triangles A′B′C′ inscrit dans MNP tel que les côtés de A′B′C′ soient parallèles aux côtés de ABC.

Exercice 64 — Principe de conjugaison. Soit f est une bijection affine de $\mathscr{E}$.

19. car $\lambda \neq 1$ et donc $(1-\lambda)$ est non nul.

a) Montrer que $f \circ h_{\mathrm{A},\lambda} \circ f^{-1}$ est une homothétie de rapport λ. Quel est son centre ?

b) Montrer que $f \circ \tau_u \circ f^{-1}$ est une translation. Quel est le vecteur de cette translation ?

Exercice 65 — Une nouvelle version du cercle d'Euler. Soit $\mathscr{E}$ un plan euclidien.

a) Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles d'un plan euclidien. Combien y a-t-il d'homothétie-translation qui envoient $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$.

b) Soit ABC un triangle et $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ les milieux des côtés de ABC. Déterminer les homothéties qui envoient le cercle circonscrit $\mathscr{C}$ au triangle ABC sur le cercle circonscrit $\mathscr{C}'$ au triangle $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$. En déduire que les milieux de [AH], [BH] et [CH] sont sur $\mathscr{C}'$ et que A'' (resp. B'', C'') le symétrique de H par rapport à A' (resp. B', C') sont sur $\mathscr{C}$ et diamétralement opposé à A (resp. B, C).

Exercice 66 — Homothéties et translations. Soit ABC un triangle d'un plan affine. On note A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC], C' le milieu de [AB] et G le barycentre de $(\mathrm{A}, 1)$, $(\mathrm{B}, 1)$ et $(\mathrm{C}, 1)$.

a) Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en G.

b) Déterminer les images de A, B et C par l'homothétie de centre de G et de rapport $-1/2$.

c) Soit $k \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0, 1\}$ et M un point du plan. On appelle P l'image de M par l'homothétie de centre A' de rapport k, Q l'image de M par l'homothétie de centre B' de rapport k et R l'image de M par l'homothétie de centre C' de rapport k. Déterminer les images de P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport $1/(1-k)$.

d) En déduire qu'il existe une homothétie ou une translation qui envoie P sur A, Q sur B et R sur C. Pour quelles valeurs de k, cette transformation est-elle une homothétie ? une translation ?

e) Que dire des droites (AP), (BQ) et (CR) ?

Corrigé

a) Par définition, A' est le barycentre de $(\mathrm{B}, 1)$ et $(\mathrm{C}, 1)$. Par associativité G est le barycentre de $(\mathrm{A}, 1)$ et $(\mathrm{A}', 2)$ et donc G est sur la droite (AA'). De même, G est sur la droite (BB') et sur la droite (CC'). Ainsi G est le point de concours des trois médianes.

b) Comme G est le barycentre de $(\mathrm{A}, 1)$ et $(\mathrm{A}', 2)$, on a $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{GA}'} = 0$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{GA}'} = -1/2\overrightarrow{\mathrm{GA}}$, ce qui dit précisément que A' est l'image de A par l'homothétie h de centre G de rapport $-1/2$. Le calcul est le même pour B et C.

c) Soit P' l'image de P par l'homothétie h' de centre M et de rapport $1/(1-k)$. Par définition, on a

$$\mathrm{P}' = \mathrm{M} + \frac{1}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{MP}}.$$

Mais $\mathrm{P} = \mathrm{A}' + k\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{M}}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}'} + k\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{M}} = (1-k)\overrightarrow{\mathrm{MA}'}$. On en déduit que

$$\mathrm{P}' = \mathrm{M} + \frac{1}{1-k}(k-1)\overrightarrow{\mathrm{MA}'} = \mathrm{M} + \overrightarrow{\mathrm{MA}'} = \mathrm{A}'.$$

Par des calculs analogues, on obtient que $\mathrm{Q}' = \mathrm{B}'$ et $\mathrm{R}' = \mathrm{C}'$.

d) Soit $h'' = h^{-1}$ la bijection réciproque de h. On a vu que h'' est une homothétie de centre G et de rapport -2.[20] On a $h'' \circ h'(\mathrm{P}) = h''(\mathrm{A}') = \mathrm{A}$ (puisque $h(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$). De même, $h'' \circ h'(\mathrm{Q}) = \mathrm{B}$ et $h'' \circ h'(\mathrm{R}) = \mathrm{C}$.

20. On retrouve ce résultat de la façon suivante : soit h l'homothétie de centre A et de rapport α et h' l'homothétie de centre A et de rapport α^{-1}. On va montrer que $h \circ h' = h' \circ h = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ ce qui montrera que h est bijective et que $h^{-1} = h'$. Par définition, on a

$$h''(\mathrm{M}) = \mathrm{G} + \alpha^{-1}\overrightarrow{\mathrm{GM}} \qquad \text{puis} \qquad h(h''(\mathrm{M})) = h(\mathrm{G} + \alpha^{-1}\overrightarrow{\mathrm{GM}}) = h(\mathrm{G}) + \alpha(\alpha^{-1}\overrightarrow{\mathrm{GM}}) = \mathrm{G} + \overrightarrow{\mathrm{GM}} = \mathrm{M}.$$

De même, on a $h'(\mathrm{M}) = \mathrm{G} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ puis $h''(h(\mathrm{M})) = h''(\mathrm{G} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{GM}}) = h''(\mathrm{G}) + \alpha^{-1}(\alpha\overrightarrow{\mathrm{GM}}) = \mathrm{G} + \overrightarrow{\mathrm{GM}} = \mathrm{M}$.

Par ailleurs, la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation [21]. Ainsi $h''\circ h$ est une homothétie ou une translation et $h''\circ h$ convient. Par ailleurs, $h''\circ h$ est une translation si et seulement si le produit des rapports de h'' et h est égal à 1 (dans les autres cas, c'est une homothétie). On obtient ainsi $h''\circ h$ est une translation si et seulement si $-2/(1-k)=1$ si et seulement si $k=3$.

e) Si $k\neq 3$ alors $h''\circ h$ est une homothétie. Soit N le centre de cette homothétie. Mais on a alors N qui est sur la droite (AP) puisque $\overrightarrow{\mathrm{NA}}=-2/(1-k)\overrightarrow{\mathrm{NP}}$. De même N est sur la droite (BQ) et sur la droite (CR). Ainsi les trois droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

Si $k=3$ alors $h''\circ h$ est une translation. Appelons $\overrightarrow{u}$ le vecteur de cette translation. Comme A (resp. B,C) est l'image de P (resp. Q,R), on a $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{QB}}=\overrightarrow{\mathrm{RC}}$. Ainsi les droites (AP), (BQ) et (CR) sont parallèles.

Remarque. On peut calculer $\overrightarrow{u}$ en fonction des données du problème : on a $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ où G est l'isobarycentre de ABC. En effet, on a $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}$. Mais, par définition de P, on a $\overrightarrow{\mathrm{A'P}}=3\overrightarrow{\mathrm{A'M}}$ (puisque $k=3$). On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{MP}}=3\overrightarrow{\mathrm{A'M}}-\overrightarrow{\mathrm{A'M}}=2\overrightarrow{\mathrm{A'M}}$. On a ainsi $\overrightarrow{u}=-2\overrightarrow{\mathrm{A'M}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}=2\overrightarrow{\mathrm{MA'}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}}$. Mais comme G est barycentre de $(\mathrm{A},1)$ et $(\mathrm{A'},2)$, on en déduit que $\overrightarrow{u}=3\overrightarrow{\mathrm{MG}}$. En particulier, on en déduit que $h''\circ h=\mathrm{id}$ si et seulement si $k=3$ et $\mathrm{M}=\mathrm{G}$.

Exercice 67 Soit $\mathscr{D}$ une droite et $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$ trois points sur $\mathscr{D}$. On considère $\mathscr{D}_\mathrm{A},\mathscr{D}_\mathrm{B},\mathscr{D}_\mathrm{C}$ trois droites parallèles et non parallèles à $\mathscr{D}$ passant respectivement par $\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}$. On note alors $\mathscr{D}'_\mathrm{B}$ une droite passant par B qui n'est ni parallèle à $\mathscr{D}_\mathrm{A}$ ni parallèle à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'_\mathrm{C}$ la parallèle à $\mathscr{D}'_\mathrm{B}$ passant par C. On note alors $\mathrm{M}=\mathscr{D}_\mathrm{A}\cap\mathscr{D}'_\mathrm{B}$ et $\mathrm{N}=\mathscr{D}_\mathrm{B}\cap\mathscr{D}'_\mathrm{C}$. Enfin, on considère P point d'intersection de la parallèle à (AN) passant par B avec $\mathscr{D}_\mathrm{C}$.

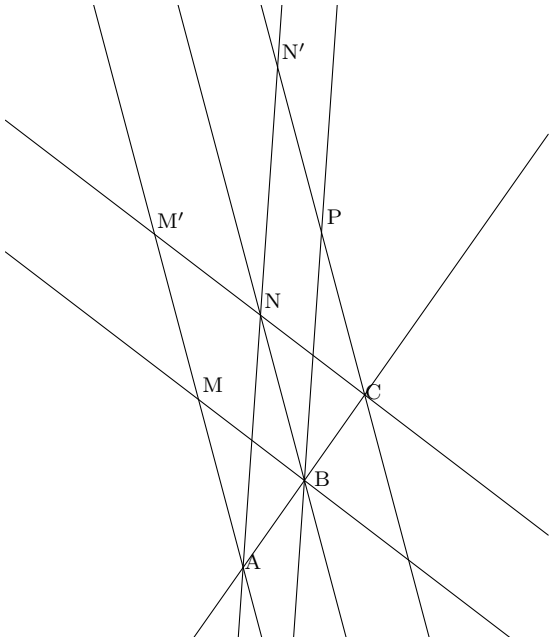
a) Faire une figure.

b) Montrer qu'il existe une unique homothétie de centre A envoyant B sur C. On la note h_A. Tracer les images M′ et N′ de M et N par h_A.

c) Déterminer les images de M et N par $t_{\overrightarrow{\mathrm{NB}}}\circ h_\mathrm{A}$. En déduire que M, N et P sont alignés et déterminer les caractéristiques géométriques de $t_{\overrightarrow{\mathrm{NB}}}\circ h_\mathrm{A}$.

Corrigé

a) La figure



21. Ce résultat s'obtient simplement en regardant la flèche de la composée : si h_1 et h_2 sont les deux homothéties (de rapport α_1 et α_2) en question, on a $\overrightarrow{h_1\circ h_2}=\overrightarrow{h_1}\circ\overrightarrow{h_2}=\alpha_1\mathrm{id}_\mathrm{E}\circ\alpha_2\mathrm{id}_\mathrm{E}=\alpha_1\alpha_2\mathrm{id}_\mathrm{E}$. La flèche de $h_1\circ h_2$ est donc une homothétie vectorielle ou l'identité (si $\alpha_1=\alpha_2{}^{-1}$). Ainsi $h_1\circ h_2$ est une homothétie ou une translation.

b) Une homothétie est déterminée par son centre et son rapport. Ainsi pour déterminer une homothétie de centre A, il suffit de déterminer son rapport. Or pour une homothétie de centre A et de rapport λ qui envoie B sur C, on a $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$. Ainsi λ est le rapport de proportionnalité entre $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ (c'est-à-dire $\overline{AC}/\overline{AB}$) qui est bien défini de façon unique puisque A, B, C sont alignés et A et B distincts.

Pour une homothétie, le centre, un point et son image sont alignés ; ainsi $M' \in (AM)$ et $N' \in (AN)$. De plus, une homothétie envoie une droite sur une droite parallèle. Ainsi h_A envoie la droite (MB) (resp. (NB)) sur la parallèle à (MB) (resp. à (NB)) passant par $h_A(B) = C$. La droite (AM) (resp. (AN)) et la parallèle à (MB) (resp. à (NB)) passant par C ne sont pas parallèles sinon (AM) (resp. (AN)) serait parallèle à (BM) (resp. à (BN)) mais ces deux droites se rencontrent en M (resp. en N). Elles seraient donc confondues et M (N) serait sur (AB) ce qui n'est pas le cas. On obtient ainsi que M' (resp. N') est l'intersection de (AM) (resp. (AN)) avec la parallèle à (BM) (resp. (BN)) passant par C.

c) La composée d'une homothétie de rapport λ et d'une translation est une homothétie de rapport λ. Ainsi $\tau_{\overrightarrow{NB}} \circ h_A$ est une homothétie de rapport $\overline{AC}/\overline{AB}$.

d) La construction de M' assure que $(AM) = (MM')//(NB)$ et $(BM)//(CM') = (M'N)$. Ainsi $MM'NB$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{NB}$. On en déduit que $\tau_{\overrightarrow{NB}} \circ h_A(M) = \tau_{\overrightarrow{NB}}(M') = \tau_{M'M}(M') = M$.

De même, la construction de N' assure que $(BN)//(CP) = (N'P)$ et $(AN) = (NN')//(BP)$. Ainsi $BNN'P$ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{N'P}$. On en déduit que $\tau_{\overrightarrow{NB}} \circ h_A(N) = \tau_{\overrightarrow{NB}}(N') = \tau_{N'P}(N') = P$.

L'homothétie $\tau_{\overrightarrow{NB}} \circ h_A$ est donc une homothétie de centre M et de rapport $\overline{AC}/\overline{AB}$. Elle envoie N sur P et les points M, N et P sont donc alignés (puisque le centre, un point et son image sont alignés).

Exercice 68 Soit $\mathscr{P}$ un plan affine.

a) Soit $M \in \mathscr{P}$ et s la symétrie centrale de centre M. Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{P}$. Montrer que $s(\mathscr{D})$ est une droite parallèle à $\mathscr{D}$.

b) Montrer que $\mathscr{D}$ est stable par s (c'est-à-dire $s(\mathscr{D}) \subset \mathscr{D}$) si et seulement si $\mathscr{D}$ passe par M.

c) Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites sécantes et $I \notin \mathscr{D}' \cup \mathscr{D}$. Déterminer $A \in \mathscr{D}$ et $B \in \mathscr{D}'$ tels que I soit le milieu de [AB] (on pourra considérer la symétrie de centre I).

d) Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles, est-il possible de trouver $A \in \mathscr{D}$ et $B \in \mathscr{D}'$ tels que I soit le milieu de [AB] ?

e) On suppose à nouveau $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sécantes. Est-il possible de déterminer $A \in \mathscr{D}$ et $B \in \mathscr{D}'$ tels que I soit au tiers du segment [AB] ?

Exercice 69 — Trois cercles. Soient $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ trois cercles de rayons distincts. On note P_1 (resp. P_2 ; P_3) le centre de l'homothétie h_1 (resp. h_2 ; h_3) de rapport positif qui envoie $\mathscr{C}_2$ sur $\mathscr{C}_3$ (resp $\mathscr{C}_3$ sur $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_1$ sur $\mathscr{C}_2$). On note N_1 (resp. N_2 ; N_3) le centre de l'homothétie h'_1 (resp. h'_2 ; h'_3) de rapport négatif qui envoie $\mathscr{C}_2$ sur $\mathscr{C}_3$ (resp $\mathscr{C}_3$ sur $\mathscr{C}_1$; $\mathscr{C}_1$ sur $\mathscr{C}_2$). Voir la question **a** de l'exercice 65 pour l'existence de ces homothéties.

a) Montrer que P_1, P_2, P_3 sont alignés.

b) Montrer que N_1, N_2, P_3 sont alignés (resp. P_1, N_2, N_3 ; N_1, P_2, N_3).

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$ pour que N_1, N_2, N_3 soient alignés.

Exercice 70 Soient A, B, C, D quatre points distincts d'un plan affine. On note A' l'isobarycentre de BCD, B' l'isobarycentre de ACD, C' l'isobarycentre de ABD et D' l'isobarycentre de ABC. Montrer que $A'B'C'D'$ est un quadrilatère homothétique de ABCD et déterminer le centre et le rapport de l'homothétie envoyant ABCD sur $A'B'C'D'$.

Corrigé Si jamais il existe une homothétie h qui envoie ABCD sur A′B′C′D′, on a nécessairement $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{h(A)h(B)} = \overrightarrow{h}(\overrightarrow{AB}) = \lambda\overrightarrow{AB}$ où λ est le rapport de h.

On calcule alors $3\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{DB'}$ puisque A′ est l'isobarycentre de BCD. Mais B′ est l'isobarycentre de ACD donc $\overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{DB'} = -\overrightarrow{AB'}$. Finalement, $3\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BA}$.

Ainsi, si une telle homothétie existe le rapport est $-1/3$.

Cherchons à présent le centre éventuel de l'homothétie. *Intuition 1 : vu que le problème est symétrique en* A, B, C *et* D, *le point cherché doit aussi vérifié une propriété de symétrie... cela incite à penser à l'isobarycentre de* ABCD.

Intuition 2 : si jamais l'homothétie existe, le centre est sur la droite (AA′) *qui relie* A *à son image et pour les mêmes raisons sur la droite* (BB′), *sur la droite* (CC′) *et sur la droite* (DD′). *Ainsi ces quatre droites devraient être concourantes ce qu'un dessin nous confirme : si jamais l'homothétie existe, le centre est ce point-là.*

Vérifions à présent nos intuitions : appelons O l'isobarycentre de ABCD. Par définition, on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 0$. La définition de A′ donne alors

$$\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OA'} = 0 \qquad (\mathbf{1})$$

où encore $\overrightarrow{OA'} = -1/3\overrightarrow{OA}$ ce qui s'interprète comme A′ est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $-1/3$. Un calcul analogue montre que B′ (resp. C′, D′) est l'image de B (resp. C, D) par la même homothétie.

On obtient ainsi le résultat souhaité !

Remarque. Par ailleurs, la relation (**1**) *montre que* O *est sur la droite* (AA′), *de même il sera sur* (BB′), (CC′) *et* (DD′) *et les quatre droites seront concourantes en* O.

4.2.2 Construire des applications affines

Proposition 116 Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines. Soit $A \in \mathscr{E}$, $B \in \mathscr{F}$ et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Il existe une unique application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $f(A) = B$ et $\overrightarrow{f} = \varphi$; cette application est définie par

$$f : \begin{cases} \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \\ M \longmapsto B + \varphi(\overrightarrow{AM}) \end{cases}$$

Remarque 117 — Reformulation de la proposition. Cette proposition signifie qu'une fois une « origine » choisie dans l'espace de départ, pour définir une application affine, il suffit de se donner un point de l'espace d'arrivée (qui sera l'image de notre « origine ») et une application linéaire (de E dans F) qui sera la flèche de notre application affine.

Une fois A fixé, on décrit ainsi une bijection entre l'ensemble des applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et les couples formés d'un éléments de $\mathscr{F}$ et d'un élément de $\mathscr{L}(E, F)$ c'est-à-dire l'ensemble $\mathscr{F} \times \mathscr{L}(E, F)$.

Preuve. Montrons que la formule donnée définit bien une application affine telle que $f(A) = B$ et $\overrightarrow{f} = \varphi$. On a bien $f(A) = B$ (puisque $\varphi(0) = 0$, φ étant linéaire). Par ailleurs, pour $M, N \in \mathscr{E}$, on a

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{AN}) - \varphi(\overrightarrow{AM}) = \varphi(\overrightarrow{MN})$$

puisque φ est linéaire. On en déduit que f est affine et que $\overrightarrow{f} = \varphi$.

Montrons à présent l'unicité d'une telle application. Si g est une application affine vérifiant les propriétés souhaitées, on a

$$g(M) = g(A) + \overrightarrow{g}(\overrightarrow{AM}) = B + \varphi(\overrightarrow{AM}).$$

et donc $g = f$ [22].

Application 118 — Construction d'une application affine à partir d'un repère cartésien. Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espace affines de direction E et F. Soit $(O, e_1, \ldots, e_n)$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$ (c'est-à-dire $O \in \mathscr{E}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E).

22. C'est d'ailleurs comme ça qu'on a trouvé la formule donnant f

Pour construire une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$, il suffit de se donner $n+1$ points de $\mathscr{F}$. De façon précise, pour tout $(\mathrm{M}_0, \ldots, \mathrm{M}_n)$, il existe une unique application affine tel que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{M}_0$ et $f(\mathrm{O} + e_i) = \mathrm{M}_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\, n]\!]$.

En effet, une telle application affine vérifie nécessairement $\overrightarrow{f}(e_i) = \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_i}$ pour tout i et $f(\mathrm{O}) = \mathrm{M}_\mathrm{O}$. Comme $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, il existe bien une unique application linéaire φ de E dans F telle que $\varphi(e_i) = \overrightarrow{\mathrm{M}_0\mathrm{M}_i}$ pour tout i. La proposition 116 assure alors l'existence et l'unicité d'une telle application.

Application 119 – Application affine qui part d'une droite. Soit A, B deux points distincts d'une droite affine $\mathscr{D}$ et $\mathscr{F}$ un espace affine. Pour tous M, N de $\mathscr{F}$, il existe une unique application affine $f : \mathscr{D} \to \mathscr{F}$ telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{M}$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{N}$.

En effet, $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}})$ est un repère cartésien de $\mathscr{D}$ puisque $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$.

En résumé, pour construire une application affine qui part d'une droite, il suffit de se donner l'image de deux points distincts.

Application 120 – Application affine qui part d'un plan. Soit A, B, C trois points non alignés d'un plan affine $\mathscr{P}$ et $\mathscr{F}$ un espace affine. Pour tous M, N, P de $\mathscr{P}$, il existe une unique application affine $f : \mathscr{P} \to \mathscr{F}$ telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{M}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{N}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{P}$.

En effet, $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ est un repère cartésien de $\mathscr{P}$ puisque A, B, C non alignés.

En résumé, pour construire une application affine qui part d'un plan, il suffit de se donner l'image de trois points non alignés.

Application 121 – Application affine qui part d'un espace de dimension 3. Soit A, B, C, D quatre points non coplanaires d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension 3 et $\mathscr{F}$ un espace affine. Pour tous M, N, P, Q de $\mathscr{P}$, il existe une unique application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ tel que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{M}$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{N}$, $f(\mathrm{C}) = \mathrm{P}$ et $f(\mathrm{D}) = \mathrm{Q}$.

En effet, $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}})$ est un repère cartésien de $\mathscr{P}$ puisque A, B, C, D non coplanaires.

En résumé, pour construire une application affine qui part d'un espace affine de dimension 3, il suffit de se donner l'image de quatre points non coplanaires.

Application 122 – Représentation matricielle d'une application affine. Soit $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espace affines de direction E et F. Soit $\mathcal{R} = (\mathrm{O}, e_1, \ldots, e_n)$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$ et $\mathcal{R}' = (\mathrm{O}', f_1, \ldots, f_m)$ un repère cartésien de $\mathscr{F}$.

On identifie un point de $\mathscr{E}$ avec ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ et un point de $\mathscr{F}$ avec ses coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$. Les applications affines s'écrivent alors sous la forme $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX} + \mathrm{B}$ où $\mathrm{B} \in \mathbb{R}^m$ représente l'image de O et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ l'application flèche de l'application linéaire identifiée à sa matrice dans les bases $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et $(f_1, \ldots, f_m)$ de F.

Exercice 71

a) Soit $\mathscr{D}$ une droite affine et $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ deux points de $\mathscr{D}$. Démontrer qu'il existe une unique application affine de $\mathscr{D}$ sur elle-même qui envoie A sur B et B sur A. Donner une interprétation géométrique de cette application affine.

b) Soit ABC un (vrai) triangle d'un plan affine. Déterminer le nombre d'applications affines qui envoient l'ensemble $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ sur l'ensemble $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$.

4.3 Sous-espace affine

Définition 123 – Sous-espace affine. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $\mathscr{F}$ un sous-ensemble de $\mathscr{E}$. On dit que $\mathscr{F}$ est un *sous-espace affine* de $\mathscr{E}$ s'il existe $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que $\mathscr{F} = \{\mathrm{A} + \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{u} \in \mathrm{F}\}$ [23]. En particulier, un sous-espace affine est non vide.

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, on a $\mathscr{F} = \{\mathrm{A} + \overrightarrow{u}, \quad \overrightarrow{u} \in \mathrm{F}\}$ où F est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, on a alors $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \in \mathrm{F}$ pour tout $(\mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathscr{F}$ et même $\mathrm{F} = \{\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{F}\}$. En particulier, F est entièrement déterminé par $\mathscr{F}$.

23. Autrement dit un sous-espace affine est l'ensemble des points de la forme « un point fixe + un vecteur » où le vecteur décrit un sous-espace vectoriel de E.

En effet, il est clair que $\{\overrightarrow{BC},\ B, C \in \mathscr{F}\}$ contient $F = \{\overrightarrow{AB}, B \in \mathscr{F}\}$. Montrons qu'il y a égalité. Il s'agit de montrer que si $B, C \in \mathscr{F}$ alors $\overrightarrow{BC} \in F$. Pour cela, on écrit $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et comme F est un sous-espace vectoriel, on a bien $\overrightarrow{BC} \in F$.

On peut ainsi définir l'application

$$\begin{cases} \mathscr{F} \times \mathscr{F} \longrightarrow F \\ (A, B) \longmapsto \overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Elle vérifie les axiomes 1 et 2 des espaces affines [24]. Ainsi un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ est lui-même un espace affine.

Ainsi (voir la définition 91), F est la direction de $\mathscr{F}$ et la dimension de $\mathscr{F}$ est celle de l'espace vectoriel F.

Un sous-espace affine de dimension 0 est simplement un point. Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite. Un sous-espace affine de dimension 2 est un plan. Un sous-espace affine de dimension $\dim \mathscr{E} - 1$ est appelé hyperplan affine. Ainsi, un hyperplan d'un plan affine est une droite, un hyperplan d'un espace affine de dimension trois est un plan.

Remarque 124 — D'autres formulations. Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E et $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{E}$. Les conditions suivantes sont équivalentes

(*i*) $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$

(*ii*) $\mathscr{F} \neq \varnothing$ et pour tout $A \in \mathscr{F}$, l'ensemble $\{\overrightarrow{AB}, B \in \mathscr{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

(*iii*) Il existe $A \in \mathscr{F}$ tel que $\left\{\overrightarrow{AB},\quad B \in \mathscr{F}\right\}$ soit un sous-espace vectoriel de E.

4.3.1 Intersection de sous-espaces affines

4.3.2 Sous-espace affine engendré

Lemme 125 — Intersection de sous-espaces affines. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de direction respective F_i. L'intersection $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$ est soit vide [25] soit un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} F_i$ [26].

Preuve. Soit $A \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$. Montrons que $\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i = A + \bigcap_{i\in I} F_i$. Pour cela, on considère $B \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$.
On a donc $A, B \in \mathscr{F}_i$ pour tout i, soit $\overrightarrow{AB} \in F_i$ pour tout i. Ainsi $\overrightarrow{AB} \in \bigcap_{i\in I} F_i$ et $B \in A + \bigcap_{i\in I} F_i$.
Inversement si $\overrightarrow{u} \in \bigcap_{i\in I} F_i$, on a $\overrightarrow{u} \in F_i$ pour tout i et donc $A + \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}_i$ pour tout i et donc $A + \overrightarrow{u} \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$.

Corollaire 126 — Sous-espace affine engendré. Soit X une partie **non vide** de $\mathscr{E}$, il existe alors un plus petit sous-espace affine de $\mathscr{E}$ contenant X. On le note $\langle X \rangle_{\text{aff}}$ et on dit que c'est le sous-espace affine engendré par X.

De plus, $\langle X \rangle_{\text{aff}}$ est l'ensemble des barycentres de X et pour tout $A \in X$, la direction de $\langle X \rangle_{\text{aff}}$ est engendrée (en tant qu'espace vectoriel) par l'ensemble des $\{\overrightarrow{AB}, B \in X\}$.

Preuve. D'après le lemme 125, l'intersection des sous-espaces affines qui contiennent X est un sous-espace affine qui contient X et c'est bien sûr le plus petit.

La direction de $\langle X \rangle_{\text{aff}}$ contient évidemment l'ensemble des $\{\overrightarrow{AB}, B \in X\}$. Réciproquement, $A + \text{vect}\,(\{\overrightarrow{AB}, B \in X\})$ est un sous-espace affine qui contient X.

24. La vérification est immédiate puisque c'est l'application induite par $\Theta : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \to E$. Attention, ce n'est pas tout à fait la restriction de Θ puisqu'on change l'espace d'arrivée.

25. Il ne faut pas oublier ce cas ! Penser au cas de deux droites parallèles

26. Dans ce cas, on sait non seulement que l'intersection est un sous-espace affine mais on connait en plus sa dimension

Application 127 – Où l'on retrouve ce que l'on sait. Si $A \neq B$ alors $\langle A, B\rangle_{\text{aff}}$ est une droite. En effet, d'après le corollaire 126, $\langle A, B\rangle_{\text{aff}}$ est un sous-espace affine dirigé par $\text{vect}(\overrightarrow{AB})$ c'est-à-dire une droite.

Par deux points distincts d'un espace affine, il passe une unique droite. En effet, le plus petit sous-espace affine qui contient les deux points est un droite d'après ce qu'on vient de voir. Toute droite qui contient A et B contient donc ce plus petit sous-espace affine et donc lui est égal par raison de dimension.

Une droite affine qui a deux points contenus dans un plan affine est entièrement contenue dans ce plan. Soit A et B les deux points en question et $\mathscr{D}$ la droite correspondante. On a $\mathscr{D} = \langle A, B\rangle_{\text{aff}}$. Comme le plan contient A et B, on a $\langle A, B\rangle_{\text{aff}}$ et donc $\mathscr{D}$ qui est contenue dans le plan.

4.3.3 Intersection de deux sous-espaces affines

Lemme 128 – Intersection de deux sous-espaces affines. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de direction respective F et G. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$;

(*ii*) Pour tout $A \in \mathscr{F}$ et tout $B \in \mathscr{G}$, $\overrightarrow{AB} \in F + G$;

(*iii*) Il existe $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{G}$ tel que $\overrightarrow{AB} \in F + G$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $C \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. Pour $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{G}$, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Comme $A, C \in \mathscr{F}$ et $C, B \in \mathscr{G}$, on a $\overrightarrow{AC} \in F$ et $\overrightarrow{CB} \in G$. Ainsi $\overrightarrow{AB} \in F + G$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ résulte du fait que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont non vide.
$(iii) \Rightarrow (i)$. On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in F$ et $\overrightarrow{v} \in G$. On pose alors $C = A + \overrightarrow{u}$. Comme $A \in \mathscr{F}$ et $\overrightarrow{u} \in F$, on a $C \in \mathscr{F}$. Par ailleurs, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$. Ainsi $C = B - \overrightarrow{v}$. Comme $B \in \mathscr{G}$ et $\overrightarrow{v} \in G$, on a $C \in \mathscr{G}$. Finalement $C \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$.

Corollaire 129 – Condition suffisante d'intersection. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux sous-espaces affines non vides de $\mathscr{E}$ de direction respective F et G.

Si $F + G = E$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \varnothing$.

Si $F \oplus G = E$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton.

Preuve. Le premier point résulte immédiatement du lemme 128.

Le deuxième point résulte du fait que si une intersection de sous-espaces affines est non-vide, c'est un sous-espace affine de direction l'intersection des directions des sous-espaces affines en questions (proposition 125). Or le premier point assure que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est non vide, c'est donc un sous-espace affine de direction $F \cap G = \{0\}$ c'est-à-dire un point.

Exercice 72 – Droite et plan dans l'espace. À l'aide des lemmes 128 et corollaire 129, montrer les résultats bien connus suivants.

a) Montrer que deux droites non parallèles d'un plan affine se coupent en un seul point. Est-ce le cas dans l'espace ?

b) Montrer que dans un plan affine, deux droites sont parallèles ou se rencontrent.

c) Montrer que deux plans d'un espace affine de dimension 3 sont parallèles ou se rencontrent suivant une droite (faire un dessin des situations).

d) Monter que dans un espace de dimension 3 alors une droite et un plan se rencontrent en un seul point ou alors la droite est faiblement parallèle au plan (faire un dessin des situations).

e) *Généralisation en dimension plus grande des questions* **a** *et* **b**. Montrer que deux hyperplans non parallèles de $\mathscr{E}$ se coupent suivant un espace de codimension 2 (en particulier deux plans non parallèles d'un espace affine de dimension 3 se rencontrent suivant une droite (espace affine de dimension 3-2=1) et deux droites non parallèles d'un plan se rencontrent suivant un point (espace affine de dimension 2-2=0)).

4.4 Liens entre applications affines et sous-espaces affines

4.4.1 Obtenir des sous-espaces affines à partir d'applications affines

Proposition 130 – Image d'un sous-espace affine par une application affine. Soit $\mathscr{E}, \mathscr{G}$ deux espaces affines, $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{G}$ une application affine. On note F la direction de $\mathscr{F}$ et G celle de $\mathscr{G}$. Alors $f(\mathscr{F})$ est un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{f}(\mathrm{F})$.

En particulier $f(\mathscr{F})$ est un sous-espace affine de dimension $\dim \mathrm{F} - \dim(\mathrm{F} \cap \operatorname{Ker} \overrightarrow{f})$ inférieure ou égal à F. Lorsque f est bijective ($\overrightarrow{f}$ l'est aussi) et $f(\mathscr{F})$ est donc un sous-espace affine de même dimension que f.

Preuve. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{F}$. Montrons que $f(\mathscr{F}) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}(\mathrm{F})$.

Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{F}$, on a $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in \mathrm{F}$ et donc $f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \in f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}(\mathrm{F})$. Inversement, si $\mathrm{C} = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} \in \mathrm{F}$. On pose $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \overrightarrow{u} \in \mathscr{F}$. On a alors $f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{v} = \mathrm{C}$.

Il s'agit de calculer la dimension de $\overrightarrow{f}(\mathrm{F})$: c'est l'image de l'application induite par $\overrightarrow{f}$

$$\overrightarrow{f} : \begin{cases} \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G} \\ \overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{f}(\overrightarrow{u}) \end{cases}$$

dont le noyau est $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f} \cap \mathrm{F}$. Le théorème du rang donne alors le résultat.

Si f est bijective alors $\overrightarrow{f}$ l'est aussi et $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f} = \{0\}$.

Remarque 131 La proposition précédente 130 montre en particulier que l'image d'une droite par une homothétie (de rapport non nul[27]) ou une translation f est une droite parallèle à la droite de départ. En effet si $\mathscr{D}$ est de direction D alors $f(\mathscr{D})$ est un sous-espace affine de direction $\lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$.

Application 132 – Image d'une droite ou d'un plan.

(*i*) L'image d'une droite $\mathscr{D}$ par une application affine f est donc une droite ou un point suivant si la direction de $\mathscr{D}$ est contenue ou non dans le noyau de $\overrightarrow{f}$.

(*ii*) L'image d'un plan $\mathscr{P}$ par une application affine f est un plan, une droite ou un point suivant si la direction de $\mathscr{P}$ rencontre le noyau de $\overrightarrow{f}$ seulement en 0, suivant une droite ou est contenue dedans.

(*iii*) Si f est une application affine bijective, l'image d'une droite est une droite, l'image d'un plan est un plan[28].

(*iv*) Une application affine conserve l'alignement. De façon plus explicite, cela signifie que si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont alignés alors $f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}), f(\mathrm{C})$ sont alignés[29]. En effet, si on note $\mathscr{D}$ la droite qui contient A, B et C alors $f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})$ et $f(\mathrm{C})$ sont sur $f(\mathscr{D})$ qui est soit une droite (et ils sont bien alignés), soit un point (et ils sont confondus et donc alignés).

Donnons une autre démonstration du fait qu'une application affine conserve l'alignement. Contrairement à la précédente, cette deuxième démonstration n'utilise pas le fait que l'image d'une droite par une application affine est une droite ou un point. Supposons f affine et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ alignés. On peut alors écrire une relation $\lambda \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ avec $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. En appliquant $\overrightarrow{f}$, on obtient

$$\lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) + \mu \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 0\,.$$

Mais comme f est affine, on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{C})}$. Ainsi, on a $\lambda \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})} + \mu \overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{C})} = 0$ c'est-à-dire $f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B}), f(\mathrm{C})$ alignés.

27. dans toute la suite, on supposera implicitement quand on parlera d'homothétie que le rapport est non nulle et donc que l'homothétie est bijective

28. La remarque précédente explicitait cette propriété pour le cas particulier des homothéties et les translations (avec un complément sur le parallélisme). Mais il n'est jamais grave de se répéter.

29. Cette propriété est plus faible que le fait que l'image d'une droite par une application affine est un point ou une droite. Par ailleurs, on peut montrer qu'une application bijective d'un plan dans lui-même qui envoie trois points alignés sur trois points alignés est nécessairement affine : c'est ce qu'on appelle le « théorème fondamental de la géométrie affine » (voir le problème 1 du sujet 1 du CAPES 2014). De façon heuristique, ce résultat assure qu'on peut reconstruire la structure d'espace vectoriel (l'addition de vecteurs et la multiplication par un scalaire) à partir d'alignement de points

Lemme 133 – Image réciproque d'un espace affine par une application affine. Soit $\mathscr{E}, \mathscr{G}$ deux espaces affines, $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{G}$ et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{G}$ une application affine. On note F la direction de $\mathscr{F}$ et G celle de $\mathscr{G}$. Alors $f^{-1}(\mathscr{F})$ est soit **vide** [30] soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction $\overrightarrow{f}^{-1}(\mathrm{F})$.

Exemple 134 – Résolution de système linéaire. Soient $\mathrm{A} \in \mathscr{F}$ alors, s'il y en a, l'ensemble des solutions de l'équation $f(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ (qui est aussi l'image réciproque par f du sous-espace affine réduit à un point $\{\mathrm{A}\}$) est de la forme $\mathrm{M}_0 + \mathrm{Ker}\,\overrightarrow{f}$.

4.4.2 Parallélisme

Définition 135 – Parallélisme. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E. Soient $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de direction respective F et G. On dit que $\mathscr{F}$ est *faiblement parallèle* à $\mathscr{G}$ si $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ [31]. On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont *parallèles* si $\mathrm{F} = \mathrm{G}$.

Remarque 136 Si $\mathscr{F}$ est faiblement parallèle à $\mathscr{G}$ alors on a soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, soit $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \varnothing$.

En effet, supposons que $\mathrm{A} \in \mathscr{F} \cap \mathscr{G}$. On a alors $\mathscr{F} = \mathrm{A} + \mathrm{F} \subset \mathrm{A} + \mathrm{G} = \mathscr{G}$.

Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles alors soit $\mathscr{F} = \mathscr{G}$, soit $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} = \varnothing$ [32]. En effet, on a $\mathscr{F}$ qui est faiblement parallèle à $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}$ qui est faiblement parallèle à $\mathscr{F}$.

Exercice 73 – Espace affine, relation d'équivalence et postulat d'Euclide. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et F un sous-espace vectoriel de E.

a) Montrer que la relation $\mathscr{R}_{\mathrm{F}}$ définie par

$$\mathrm{A}\mathscr{R}_{\mathrm{F}}\mathrm{B} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathrm{F}$$

est une relation d'équivalence sur $\mathscr{E}$ et que les classes d'équivalences pour cette relation sont précisément les sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ de direction F.

b) Soit $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de direction F, et A dans $\mathscr{E}$. Montrer qu'il existe un unique sous-espace affine parallèle à $\mathscr{F}$ passant par A. Faire le lien avec le postulat d'Euclide dans le cas particulier où $\dim \mathscr{E} = 2$ et $\dim \mathscr{F} = 1$.

Exemple 137 Montrons que deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires.

On fixe $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ sur $\mathscr{D}$ et $\mathrm{C} \in \mathscr{D}'$. On note $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$. Montrons que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont incluses dans $\mathrm{A} + \mathrm{F}$.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{D}$, il existe λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Ainsi $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathrm{A} + \mathrm{F}$. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{D}'$, il existe λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{CM}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (puisque $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles). On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et donc $\mathrm{M} = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathrm{A} + \mathrm{F}$.

L'ensemble $\mathrm{A}+\mathrm{F}$ est bien sous-espace affine de dimension au plus 2. C'est une droite si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{C} \in \mathscr{D}$ ou encore $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$.

Proposition 138 – Parallélisme. Soit $f \in \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. Alors f conserve le parallélisme [33]. (resp. le parallélisme faible). De façon détaillée, cela signifie que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles (resp. faiblement parallèles) alors $f(\mathscr{D})$ et $f(\mathscr{D}')$ sont parallèles (resp. faiblement parallèles).

Preuve. Cela résulte immédiatement de la proposition 130. On note D et D′ les directions de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles (resp. faiblement parallèles), on a $\mathrm{D} = \mathrm{D}'$ (resp. $\mathrm{D} \subset \mathrm{D}'$). On déduit du paragraphe précédent que $f(\mathscr{D})$ et $f(\mathscr{D}')$ sont des sous-espaces affines de direction $\overrightarrow{f}(\mathrm{D})$ et $\overrightarrow{f}(\mathrm{D}')$ et on a bien $\overrightarrow{f}(\mathrm{D}) = \overrightarrow{f}(\mathrm{D}')$ (resp. $\overrightarrow{f}(\mathrm{D}) \subset \overrightarrow{f}(\mathrm{D}')$).

Exercice 74 – Une caractérisation des homothéties et des translations. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et E la direction de $\mathscr{E}$.

a) À savoir faire obligatoirement !!! Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ une application linéaire. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

30. On n'oubliera pas ce cas.
31. Ainsi dire qu'une droite est faiblement parallèle à un plan signifie que sa direction est contenue dans celle du plan.
32. L'exercice 73 donne une explication plus conceptuelle de ce résultat
33. On ne confondra pas cette propriété alors la propriété f transforme une droite $\mathscr{D}$ en une droite parallèle qui n'est vraie que pour les homothéties et les translations (voir l'exercice 74)

(*i*) Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a $u(x)$ est colinéaire à x ;

(*ii*) Toute droite (vectorielle) D de E est stable par u (*i.e.* $u(\mathrm{D}) \subset \mathrm{D}$ pour tout D droite vectorielle de E) ;

(*iii*) Il existe $\lambda \in k$ tel que $u = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

b) Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine qui transforme toute droite $\mathscr{D}$ en une droite parallèle à $\mathscr{D}$. Que peut-on dire que $\overrightarrow{f}$?

c) Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Que peut-on dire de f ? Attention au cas $\lambda = 1$!

d) Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine qui transforme toute droite $\mathscr{D}$ en une droite parallèle à $\mathscr{D}$. Que peut-on dire que f ?

e) Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une homothétie ou une translation. Montrer que pour toute droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ alors $f(\mathscr{D})$ est une droite parallèle à $\mathscr{D}$.

4.5 Des nouveaux types d'applications affines

4.5.1 Projection

Proposition-Définition 139 – Projection. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E, $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F et G un sous-espace vectoriel de E tel que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$ [34]

Pour $x \in \mathscr{E}$, on définit $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}(x)$ le *projeté de x sur $\mathscr{F}$ parallèlement à* G, de la façon suivante : soit $\mathscr{G}_x$ le sous-espace affine de direction G passant par x alors $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}(x)$ est l'unique élément de $\mathscr{G}_x \cap \mathscr{F}$.

L'application $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}$ est bien définie et est une application affine d'image $\mathscr{F}$ et vérifiant $\overrightarrow{p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}} = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ *la projection sur $\mathscr{F}$ parallèlement à* G [35].

L'ensemble des points fixes de $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}$ est $\mathscr{F}$ et on a $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}} \circ p_{\mathscr{F},\mathrm{G}} = p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}$.

Preuve. Le fait que $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}$ soit bien définie résulte directement du corollaire 129 : on a $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$ donc $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}_x$ est un singleton. Son image est $\mathscr{F}$ puisque par définition $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}(x) \in \mathscr{F}$ et $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}(x) = x$ si $x \in \mathscr{F}$.

Montrons à présent que $p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}$ est affine et $\overrightarrow{p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}} = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$. Pour raccourcir les notations, on note $p = p_{\mathscr{F},\mathrm{G}}$. Pour cela, il s'agit d'exprimer pour $x, y \in \mathscr{E}$, $\overrightarrow{p(x)p(y)}$ en fonction de $\overrightarrow{xy}$ et même plus précisément, on veut montrer que $\overrightarrow{p(x)p(y)} = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(\overrightarrow{xy})$. Pour cela, on note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{p(x)p(y)}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{xy} - \overrightarrow{p(x)p(y)}$. Il s'agit alors de montrer que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathrm{G}$ car on aura alors $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{u} \in \mathrm{F}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathrm{G}$ et donc $\overrightarrow{u} = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(\overrightarrow{xy})$; ce qui donne bien $\overrightarrow{p(x)p(y)} = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(\overrightarrow{xy})$.

Comme $p(x)$ et $p(y)$ sont dans $\mathscr{F}$, on a bien $\overrightarrow{p(x)p(y)} \in \mathrm{F}$. Par ailleurs, avec la relation de Chasles, on a

$$\overrightarrow{xy} - \overrightarrow{p(x)p(y)} = \overrightarrow{xp(x)} + \overrightarrow{p(y)y}$$

Or $p(x)$ et x sont dans $\mathscr{G}_x$, ainsi $\overrightarrow{xp(x)}$ est dans la direction de $\mathscr{G}_x$ qui est G. De même, $\overrightarrow{p(y)y} \in \mathrm{G}$ et finalement $\overrightarrow{xy} - \overrightarrow{p(x)p(y)} \in \mathrm{G}$.

Si x est un point fixe de p, on a $p(x) = x$. Or $p(x) \in \mathscr{F}$ par définition. Donc $x \in \mathscr{F}$. Inversement, si $x \in \mathscr{F}$, on a $\mathscr{G}_x \cap \mathscr{F} = \{x\}$ et donc $p(x) = x$ et x est bien un point fixe de p

Exercice 75 – Une forme de réciproque. Soit $p : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine telle que $p \circ p = p$. Montrer que p est une projection sur l'ensemble de ses points fixes qui est $\operatorname{Im} p$ et parallèlement à $\operatorname{Ker} \overrightarrow{p}$.

Exercice 76 – Tourniquet infernal. Soit ABC un triangle d'un plan affine et $\mathrm{M} = \mathrm{M}_0$ un point de (AB). On définit M_1 comme l'intersection de la parallèle à (AC) passant par M_0 avec la droite

34. On remarquera qu'on s'est donné un sous-espace de $\mathscr{E}$ (c'est $\mathscr{F}$) et un sous-espace de E (c'est G) : on n'a pas d'espace $\mathscr{G}$ « au-dessus » de G. En fait, la construction des projections va justement reposer sur le fait qu'on fait varier les espaces $\mathscr{G}$ au-dessus de G.

35. On retrouve la dissymétrie entre d'un côté $\mathscr{F}$ sous-espace **affine** et G sous-espace **vectoriel**.

(BC) puis M_2 comme l'intersection de la parallèle à (AB) passant par M_1 avec (AC), puis M_3 comme l'intersection de la parallèle à (BC) passant par M_2 avec (AB), etc.

a) Faire un grand dessin jusqu'à M_6. Qu'observez-vous ?

b) Montrer que l'application $f : M \mapsto M_3$ est une application affine de la droite (AB) dans elle-même.

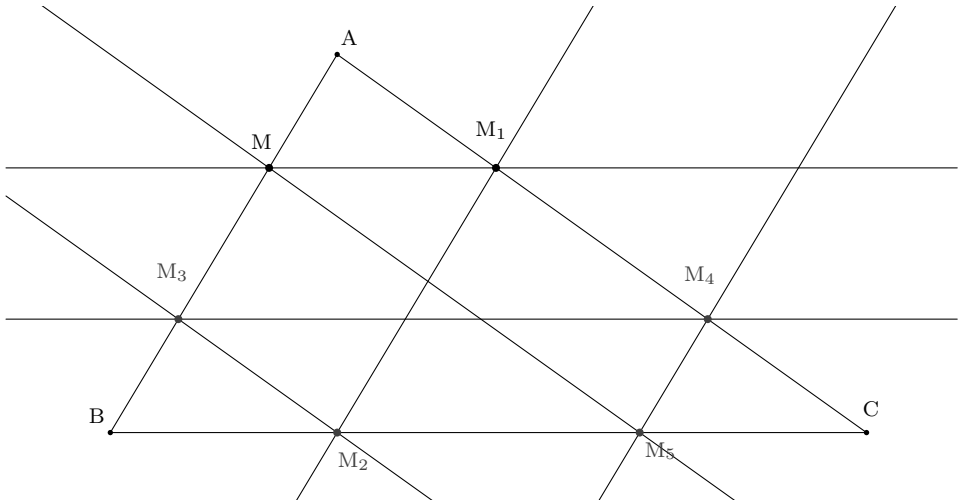
c) Calculer les images de A et B par cette application f.

d) En déduire que le milieu I de [AB] est un point fixe de f puis que f est la symétrie de centre I.

e) En déduire que $M_6 = M_0$ pour tout M.

Exercice 77 – Tourniquet infernal.

a) Sur le dessin, on observe que $M = M_6$.



b) Il s'agit de reconnaître f comme composées de projection. On commence par remarquer que l'application qui à M associe M_1 n'est autre que la restriction à (AB) de la projection sur (BC) parallèlement à (AC). C'est donc une application affine de la droite (AB) dans la droite (BC). De même, l'application qui à un point M_1 de (BC) associe M_2 n'est autre que la restriction à (BC) de la projection sur (AC) parallèlement à (AB). C'est donc une application affine de la droite (BC) dans la droite (AC). Et enfin, l'application qui à un point M_2 de (AC) associe M_3 n'est autre que la restriction à (AC) de la projection sur (AB) parallèlement à (BC). C'est donc une application affine. On en déduit par composition que f est la composée de trois applications affines. C'est donc une application affine.

c) On a $A_1 = C$ (la parallèle à (AC) passant par A est (AC) et coupe (BC) en C) puis $A_2 = C$ (la parallèle à (AB) passant par C coupe (AC) en C) puis $A_3 = B$ (la parallèle à (BC) passant par C (qui est (BC)) coupe (AB) en B). Ainsi $f(A) = B$. De même, on a $B_1 = B$ (puisque B est sur (BC)) puis $B_2 = A$ (la parallèle à (AB) passant par B est (AB) et coupe (AC) en A) et $B_3 = A$ (la parallèle à (BC) passant par A coupe (AB) en A) et donc $f(B) = A$.

d) Soit I le milieu de [AB]. On a I qui est barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$ donc $f(I)$ est barycentre de $(f(A), 1)$ et $(f(B), 1)$ puisque f conserve le barycentre. Comme $f(A) = B$ et $f(B) = A$, on obtient que $f(I)$ est barycentre de $(B, 1)$ et $(A, 1)$ et donc $f(I) = I$.

On a donc $\overrightarrow{f(I)f(B)} = \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ et comme f est affine, on a $\overrightarrow{f(I)f(B)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IB})$. Ainsi $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{IB}) = -\overrightarrow{IB}$. Mais $\overrightarrow{f}$ est un endomorphisme d'une droite vectorielle (la direction de (AB) : c'est la droite de E engendrée par $\overrightarrow{AB}$), ainsi $\overrightarrow{f}$ est donc de la forme $\lambda \mathrm{id}_E$ (en dimension 1, il n'y a que des homothéties vectorielles : l'image d'un vecteur est colinéaire à ce vecteur !). Comme $\overrightarrow{IB} \neq 0$, on en déduit que $\lambda = -1$ grâce à la relation $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IB})$. Ainsi $\overrightarrow{f} = -\mathrm{id}$ et $f(I) = I$. Donc f est la symétrie par rapport à I.

e) Par construction, on a $f(M_3) = M_6$. Mais $M_3 = f(M_0)$. On a donc $M_6 = f(f(M_0))$. Comme $f \circ f = \mathrm{id}$, on en déduit que $M_6 = M_0$.

4.5.2 Affinités

Définition 140 – Affinité d'espace directeur $\mathscr{F}$ et de direction G et de rapport $\alpha \in k$. Soient $\mathscr{E}$ un k-espace affine de direction E, $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F et G un sous-espace de E vérifiant $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ [36].

Pour $x \in \mathscr{E}$, on note $p(x)$ le projeté de x sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G. On note $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}(x)$ l'élément de $\mathscr{E}$ donné par

$$f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}(x) = p(x) + \alpha\overrightarrow{p(x)x}\,.$$

L'application $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha} : x \mapsto f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}(x)$ est affine. L'application $\overrightarrow{f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}}$ est l'application dont la restriction à F vaut id et la restriction à G vaut $\alpha\mathrm{id}$, L'ensemble des points fixes de $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha}$ est $\mathscr{F}$

On a $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},0} = p$ et $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},1} = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

On a $p \circ f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha} = p$ et donc $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha} \circ f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\beta} = f_{\mathscr{F},\mathrm{G},\alpha\beta}$.

On a ${f_{\mathscr{F},\mathrm{G},-1}}^2 = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. On dit que $f_{\mathscr{F},\mathrm{G},-1}$ est *la symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ de direction* G.

Exercice 78 – Une caractérisation des symétries. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine.

a) On suppose que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. Montrer que f est la symétrie par rapport à l'ensemble à des points fixes de f parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} + \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ [37].

b) On suppose que $\overrightarrow{f}^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, f est-elle une symétrie ? [38] On pourra penser aux symétries glissées.

4.5.3 Théorème de Thalès

Théorème 141 – Théorème de Thalès. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine, $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}, \mathscr{H}_{\mathrm{B}}, \mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ trois hyperplans parallèles distincts de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de $\mathscr{E}$ qui ne sont pas faiblement parallèles aux $\mathscr{H}_i$.

Pour $x \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ et $i \in \{1, 2\}$, les ensembles $\mathscr{H}_x \cap \mathscr{D}_i$ sont des singletons. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note $\mathscr{H}_{\mathrm{A}} \cap \mathrm{D}_i = \mathrm{A}_i$, $\mathscr{H}_{\mathrm{B}} \cap \mathrm{D}_i = \mathrm{B}_i$, $\mathscr{H}_{\mathrm{C}} \cap \mathrm{D}_i = \mathrm{C}_i$.

On a alors
$$\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}} = \frac{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2}}$$

Réciproquement, soit $\mathrm{D} \in \mathscr{D}_2 \smallsetminus \{\mathrm{A}_2\}$ tel que $\dfrac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}} = \dfrac{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{D}}}$

alors $\mathrm{D} = \mathrm{C}_2$ [39]

Preuve. On considère p la projection de $\mathscr{D}_1$ sur $\mathscr{D}_2$ parallèlement à la direction H des $\mathscr{H}_i$. Par définition, on a $p(\mathrm{A}_1) = \mathrm{A}_2$, $p(\mathrm{B}_1) = \mathrm{B}_2$ et $p(\mathrm{C}_1) = \mathrm{C}_2$.

Or $\dfrac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}}{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}}$ est le coefficient de proportionnalité entre $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}$. Comme $\overrightarrow{p}$ est linéaire, c'est aussi le coefficient de proportionnalité entre $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}) = \overrightarrow{p(\mathrm{A}_1)p(\mathrm{B}_1)} = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}$ et $\overrightarrow{p}(\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{C}_1}) = \overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2}$. Cela donne l'égalité souhaitée.

Réciproquement, en effet, on a $\dfrac{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{D}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}}{\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2}}$ et donc $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{C}_2} = \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{D}}$ c'est-à-dire $\mathrm{C}_2 = \mathrm{D}$.

Voici à présent ce que devient ce théorème dans le plan et retrouvons le théorème si connu.

Théorème 142 – Le premier théorème de Thalès dans le plan. Soient $\mathscr{D}_{\mathrm{A}}, \mathscr{D}_{\mathrm{B}}, \mathscr{D}_{\mathrm{C}}$ trois droites distinctes de $\mathscr{P}$ un plan affine et $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites de $\mathscr{P}$ qui ne sont ni l'une ni l'autre parallèle à $\mathscr{D}_{\mathrm{A}}$, $\mathscr{D}_{\mathrm{B}}$ ou $\mathscr{D}_{\mathrm{C}}$.

36. C'est exactement le même cadre que pour la définition d'une projection (voir la proposition-définition 139)

37. Les symétries affines sont caractérisées par le fait que leur carré soit l'identité, exactement comme le cas des symétries vectorielles.

38. Mais les symétries affines ne sont pas caractériser par leur flèche : il existe des applications affines dont la flèche est une symétrie vectorielle et qui ne sont pas des symétries affines.

39. Attention, dans cette généralité, on ne peut pas énoncer la réciproque du théorème de Thalès comme une condition de parallélisme sur les hyperplans. Cette condition ne marche que lorsque $\dim \mathscr{E} = 2$ car alors $\mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ est la droite $(\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2)$. En effet, si on fait tourner, par exemple $\mathscr{H}_{\mathrm{B}}$, autour de la droite $(\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2)$, on obtient des hyperplans qui ne sont plus parallèles à $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}$ et $\mathscr{H}_{\mathrm{C}}$ mais qui garde la même intersection avec $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Lorsqu'on est en dimension 2, il n'est plus possible de faire tourner $\mathscr{H}_{\mathrm{B}}$ qui est une droite autour d'elle même : le postulat d'Euclide nous dit qu'on n'a plus le choix.

On note $A_1 = \mathscr{D}_A \cap \mathscr{D}_1$, $A_2 = \mathscr{D}_A \cap \mathscr{D}_2$, $B_1 = \mathscr{D}_B \cap \mathscr{D}_1$, $B_2 = \mathscr{D}_B \cap \mathscr{D}_2$, $C_1 = \mathscr{D}_C \cap \mathscr{D}_1$, $C_2 = \mathscr{D}_C \cap \mathscr{D}_2$. On suppose que $A_1 \neq B_1$, que $A_2 \neq B_2$ et que $C_1 \neq C_2$. On suppose que $\mathscr{D}_A$ et $\mathscr{D}_B$ sont parallèles. On a alors $\mathscr{D}_C$ est parallèle à $\mathscr{D}_A$ et $\mathscr{D}_B$ si et seulement si $\dfrac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2B_2}}$.

Preuve. Si $\mathscr{D}_C$ et $\mathscr{D}_A$ sont parallèles, alors le théorème 141 donne le résultat [40].

Réciproquement, on considère la droite $\mathscr{D}$ parallèle à $\mathscr{D}_A$ et $\mathscr{D}_B$ passant par C_1. On note $D = \mathscr{D} \cap \mathscr{D}_2$ [41]. Le sens direct assure alors que

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{A_2D}}{\overline{A_2B_2}}.$$

L'hypothèse donne alors $\overline{A_2D} = \overline{A_2C_2}$ c'est-à-dire $D = C_2$. Ainsi $\mathscr{D} = (C_1C_2) = \mathscr{D}_C$ [42]

Théorème 143 – Le deuxième théorème de Thalès dans le plan. Soit ABC un (vrai) triangle et $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ avec $M \neq A$ et $N \neq A$.

Si (MN) est parallèle à (BC) alors $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$.

Inversement, si l'une des trois égalités ci-dessus est vérifiée alors (MN) est parallèle à (BC).

Preuve. On suppose (MN) parallèle à (BC). On considère l'homothétie h de centre A de rapport $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$. Par définition, elle envoie B sur M.

Par ailleurs, elle envoie la droite (AC) sur elle-même puisqu'elle contient le centre de l'homothétie. Par ailleurs, elle envoie aussi la droite (BC) sur une droite parallèle à (BC) (une homothétie transforme une droite en une droite qui lui est parallèle). Cette parallèle à (BC) contient l'image de B c'est-à-dire M. C'est donc la droite (MN).

Comme $C = (AC) \cap (BC)$, on en déduit que l'image de C est sur (AC) et sur (MN) c'est-à-dire que $h(C) = N$. On en déduit alors

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{h(B)h(C)}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

Remarque. Pour démontrer l'égalité $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$, on aurait pu appliquer le théorème 142 avec comme troisième droite la parallèle à (BC) passant par A. Mais cela n'aurait pas donné l'autre égalité qui résulte de l'utilisation d'une homothétie : ainsi le théorème 142 et le théorème 143 sont de nature différente : l'un est relié aux projections, l'autre aux homothéties.

Pour la réciproque, on considère la parallèle $\mathscr{D}$ à (BC) passant par M et on note N' l'intersection de $\mathscr{D}$ avec (AC). Le sens direct et la relation $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ assure que $\overline{AN} = \overline{AN'}$ et donc $N = N'$. Le sens direct et la relation $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ assure que $\overline{MN} = \overline{MN'}$ et donc $N = N'$. Enfin, si on suppose $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$, on considère la parallèle $\mathscr{D}'$ à (BC) passant par N et on note M' le point d'intersection de $\mathscr{D}'$ avec (AB). Le sens direct assure alors que $M = M'$.

Remarque 144 – Mesure algébrique sur une droite. Soit $\mathscr{D}$ une droite affine. On note D la direction de $\mathscr{D}$. Pour définir la mesure algébrique d'un couple de points de $\mathscr{D}$ (ou d'un vecteur de D), il **faut** choisir un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ de D et comme D est de dimension 1, cela revient à choisir une base de D. Et il faudrait ainsi parler de mesure algébrique dans la base $\overrightarrow{u}$ (ou selon $\overrightarrow{u}$), la définition étant alors $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\overrightarrow{u}$: la mesure algébrique est l'unique réel qui permet d'écrire $\overrightarrow{AB}$ comme un multiple de $\overrightarrow{u}$: c'est la (il n'y en a qu'une seule puisqu'on est sur une droite) coordonnée du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans la base $\overrightarrow{u}$.

De façon extrêmement temporaire (uniquement dans cette note), on notera $\overline{AB}^{\overrightarrow{u}}$ la mesure algébrique dans la base $\overrightarrow{u}$ pour rappeler la dépendance en $\overrightarrow{u}$.

Que se passe-t-il si on change de base de D ? Comment comparer $\overline{AB}^{\overrightarrow{u}}$ et $\overline{AB}^{\overrightarrow{v}}$ où $\overrightarrow{v}$ est un autre vecteur non nul de $\mathscr{D}$. On peut écrire $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{u}$. On a alors

40. On remarque qu'on n'a pas ici besoin de l'hypothèse $C_1 \neq C_2$
41. Le point D existe bien puisque $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à $\mathscr{D}_2$
42. c'est ici qu'on utilise l'hypothèse $C_1 \neq C_2$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AB}}^{\vec{v}}\,\vec{v} = \overline{\mathrm{AB}}^{\vec{v}}\,\mu\,\vec{u} = \overline{\mathrm{AB}}^{\vec{u}}\,\vec{u}$$

Ainsi $\overline{\mathrm{AB}}^{\vec{v}}\,\mu = \overline{\mathrm{AB}}^{\vec{u}}$ [43].

Le calcul précédent montre immédiatement que, si les mesures algébriques dépendent du choix d'un vecteur de référence, les rapports de mesure algébrique eux n'en dépendent pas ! Ce sont des données intrinsèques : on a pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in \mathscr{D}$

$$\frac{\overline{\mathrm{AB}}^{\vec{u}}}{\overline{\mathrm{CD}}^{\vec{u}}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}^{\vec{v}}}{\overline{\mathrm{CD}}^{\vec{v}}}\,.$$

Dans le cas où $\mathscr{D}$ est une droite affine dans un espace euclidien, on préfère choisir comme vecteur de référence l'un des deux vecteurs unitaires de D (mais cela n'évite pas le fait qu'il y ait toujours un choix : il faut choisir l'un des deux) ; la valeur absolue de la mesure algébrique $\overline{\mathrm{AB}}$ exprime alors la longueur AB et le signe le sens (opposé ou pas) au vecteur unitaire de référence.

4.6 Points fixes d'application affine

Proposition 145 Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. L'ensemble des points fixes de f est soit vide [44], soit un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dont la direction est $\mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$.

Preuve. Si f n'a pas de point fixe, on a terminé. Supposons que f admet un point fixe M et montrons que l'ensemble des points fixe est alors $\mathrm{M} + \mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{id})$.

Soit N un point fixe de f. Comme f est affine, on a $f(\mathrm{N}) = f(\mathrm{M}) + \vec{f}\,(\overrightarrow{\mathrm{MN}})$. Comme M et N sont fixe par f, on en déduit que $\mathrm{N} = \mathrm{M} + \vec{f}\,(\overrightarrow{\mathrm{MN}})$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \vec{f}\,(\overrightarrow{\mathrm{MN}})$ c'est-à-dire $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \in \mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{id})$ et donc $\mathrm{N} = \mathrm{M} + \overrightarrow{\mathrm{MN}}$ est bien dans $\mathrm{M} + \mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{id})$.

Inversement, si $\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{id})$ alors $f(\mathrm{M} + \vec{u}) = f(\mathrm{M}) + \vec{f}\,(\vec{u}) = \mathrm{M} + \vec{u}$ et donc $\mathrm{M} + \vec{u}$ est point fixe de f.

Proposition 146 — Condition nécessaire et suffisante d'existence et d'unicité. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Alors f admet un unique point fixe si et seulement si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

Preuve. D'après la proposition 145, si 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ alors l'ensemble des points fixes est réduit à un point ou vide. Montrons qu'il n'est pas vide.

Pour cela, on fixe une origine [45] A. On a alors $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{A}) + \vec{f}\,(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$. Ainsi M est un point fixe de f si et seulement si $\mathrm{M} = f(\mathrm{A}) + \vec{f}\,(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$ ce qu'on peut réécrire en $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} + \vec{f}\,(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$. On en déduit que M est un point fixe de f si et seulement si $(\vec{f} - \mathrm{id})(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{A})\mathrm{A}}$. Or 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$ donc $\mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{id}) = \{0\}$. Ainsi $\vec{f} - \mathrm{id}$ est un endomorphisme injectif de E [46]. C'est donc un automorphisme [47]. Ainsi M est un point fixe de f si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = (\vec{f} - \mathrm{id})^{-1}(\overrightarrow{f(\mathrm{A})\mathrm{A}})$. Cette dernière relation définit bien un unique point M.

Inversement, si f admet un unique point fixe alors d'après la proposition 145, $\mathrm{Ker}\,(\vec{f} - \mathrm{id}) = \{0\}$ (c'est la direction d'un espace affine réduit à un point), ce qui signifie que 1 n'est pas valeur propre de $\vec{f}$.

Exercice 79 Retrouver le fait qu'une homothétie de rapport différent de 1 a un unique point fixe.

Exercice 80 Trouver un exemple d'application affine f tel que $\vec{f}$ ait 1 comme valeur propre et f ait un point fixe. L'application f a-t-elle d'autres points fixes ?

43. on remarquera que le μ est cette fois-ci du côté du $\vec{u}$ alors qu'il était du côté du $\vec{u}$ dans la relation $\vec{v} = \mu\vec{u}$: c'est normal : si le vecteur de référence est plus long, le coefficient multiplicateur sera plus petit

44. On retrouve une nouvelle fois après les lemmes 125 et 133, l'apparition du vide.

45. Comme on l'a déjà fait dans la preuve qu'une application affine dont la flèche est une homothétie vectorielle est une homothétie affine.

46. On attire l'attention ici sur le fait que les espaces de départ et d'arrivée de $\vec{f} - \mathrm{id}$ sont les mêmes et ont donc même dimension.

47. Car E est de dimension finie

Exercice 81 – Application affine et point fixe. Soient A, B, C, A', B', cinq points d'un plan affine $\mathscr{E}$ de direction E. On suppose que A, B et C ne sont pas alignés.

a) Soit $C' \in \mathscr{E}$. Montrer qu'il existe une unique application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ tel que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$.

b) Placer les points A, B, C, A', B' sur une grande figure (on évitera que $(AB)//(B'A')$).

L'objectif de la suite de l'exercice est de construire un point $C' \in (A'B')$ telle que l'application f n'ait pas de point fixe. On suppose donc qu'une telle construction est possible.

c) Montrer qu'alors $\operatorname{Im} f = (A'B')$ et que la droite $(A'B')$ est stable par f.

d) Montrer que la restriction de f à la droite $(A'B')$ est une translation.

e) Montrer que 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$ et que le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la direction de $(A'B')$

f) Montrer que 0 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

g) En déduire que $\overrightarrow{f}$ est une projection.

h) Pour $\overrightarrow{u} \in E$, on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im} \overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{w} \in \operatorname{Ker} \overrightarrow{f}$. Calculer $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$.

i) Montrer que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'}$ est dans $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f}$. En déduire la direction de $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f}$.

j) Dessiner la décomposition de $\overrightarrow{AC}$ dans la somme directe $\operatorname{Ker} \overrightarrow{f} \oplus \operatorname{Im} \overrightarrow{f}$.

k) Construire C' et expliquer la construction effectuée.

l) Traiter le cas où $(AB)//(A'B')$.

4.7 Notion de repères

4.7.1 Repère cartésien

Dans un espace affine, on peut repérer les points à partir d'une origine et du déplacement pour aller de cette origine au point en question.

Définition 147 – Repère cartésien. Un *repère cartésien* est la donnée d'un point $O \in \mathscr{E}$ et d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Pour $M \in \mathscr{E}$, on a alors une unique décomposition de $\overrightarrow{OM}$ en tant que combinaison linéaire des e_i :

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

La famille $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est alors la famille des *coordonnées cartésiennes de* M (dans le repère $(O, \mathscr{B})$).

L'application

$$\begin{cases} \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ M \longmapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \end{cases}$$

définit une bijection (affine) entre M et $\mathbb{R}^n$.

Exercice 82 – Où l'on retrouve ce que l'on sait. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine et $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$.

a) Montrer que les droites de $\mathscr{E}$ sont les ensembles dont les équations sont de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ax + by + c = 0\}$.

b) Retrouver la condition de parallélisme de deux droites.

c) Énoncer aussi à l'aide de déterminant des conditions d'alignements de trois points.

4.7.2 Repère affine

Dans un espace affine, plutôt que de repérer les points à partir d'une origine et du déplacement pour aller de cette origine au point en question, on peut les repérer comme barycentre de points fixés.

Définition 148 — Famille affinement libre. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine et $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$. On dit qu'ils sont *affinement indépendants* si pour tout i, $A_i \notin \langle A_j, j \neq i \rangle_{\text{aff}}$. On dit que la famille $(A_1, \dots, A_n)$ est affinement libre.

Exercice 83 Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

(*i*) $A_1, \dots, A_n$ affinement indépendants ;
(*ii*) il existe i tel que $(\overrightarrow{A_jA_i})_{j \neq i}$ est libre dans E ;
(*iii*) pour tout i la famille $(\overrightarrow{A_jA_i})_{j \neq i}$ est libre dans E ;
(*iv*) pour tout i, A_i n'est pas barycentre des A_j pour $j \neq i$.

Remarque 149 Dans un espace affine de dimension n, une famille affinement libre est de cardinal au plus $n+1$.

Définition 150 — Famille affinement génératrice. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine et $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$. On dit que la famille $(A_1, \dots, A_n)$ est *affinement génératrice* si $\langle A_1, \dots, A_n \rangle_{\text{aff}} = \mathscr{E}$.

Exercice 84 Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$.

(*i*) $(A_1, \dots, A_n)$ est affinement génératrice ;
(*ii*) il existe i tel que la famille $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j \neq i}$ engendre E ;
(*iii*) pour tout $A \in \mathscr{E}$, la famille $(\overrightarrow{AA_i})_i$ engendre E ;
(*iv*) Tout point de $\mathscr{E}$ est barycentre des A_i.

Remarque 151 Dans un espace affine de dimension n, une famille affinement génératrice est de cardinal au moins $n+1$.

Définition 152 Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Un *repère affine* ou *repère barycentrique* de $\mathscr{E}$ est une famille de points de $\mathscr{E}$ qui est à la fois affinement libre et génératrice. Elle est alors de cardinal $\dim \mathscr{E} + 1$.

Exemple 153 — Repère en petite dimension. Un repère affine sur une droite est simplement deux points distincts. Un repère affine dans le plan est simplement trois points non alignés. Un repère affine dans l'espace est simplement quatre points non coplanaires.

Proposition 154 — Repère affine et applications affines. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine, $(A_1, \dots, A_{n+1})$ un repère affine de $\mathscr{E}$ et A un point de $\mathscr{E}$. Si A est barycentre du système $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_{n+1}, \lambda_{n+1})$ et du système $(A_1, \mu_1), \dots, (A_{n+1}, \mu_{n+1})$. Alors il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\mu_i = \lambda\lambda_i$ pour tout $i = 1, \dots, n+1$.

En particulier, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$ vérifiant $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$ et A barycentre de $(A_1, \lambda_1), \dots, (A_{n+1}, \lambda_{n+1})$. Le coefficient λ_i est alors appelé i^{e} **coordonnée barycentrique de** A dans le repère $(A_1, \dots, A_{n+1})$.

L'application

$$\begin{cases} \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ M \longmapsto (\lambda_1(M), \dots, \lambda_{n+1}(M)) \end{cases}$$

définit une bijection (affine) entre $\mathscr{E}$ et le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ formés des éléments dont la somme des coordonnées vaut 1.

Exercice 85 — Base incomplète en affine.

a) Montrer que toute famille affinement libre se complète en un repère affine.

b) Montrer que de toute famille affinement génératrice, on peut extraire un repère affine.

Exercice 86 Soit $(A_1, \dots, A_{n+1})$ un repère affine de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ un espace affine. Montrer que si $(B_1, \dots, B_{n+1}) \in \mathscr{F}^{n+1}$, il existe une unique application affine telle que $f(A_i) = B_i$ pour tout

$i = 1, \ldots, n+1$ [48].

Autrement dit, l'image d'un repère affine détermine de façon unique une application affine.

4.7.3 Équation barycentrique

Proposition 155 On se place dans $\mathscr{E}$ un plan affine et on fixe $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ un repère affine. Si (a, b, c) n'est pas proportionnel à $(1, 1, 1)$, alors l'ensemble des points M dont les coordonnées barycentriques (x, y, z) vérifient $ax + by + cz = 0$ est une droite.

Inversement, toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ admet une équation de la forme $ax + by + cz = 0$. On dit que c'est une *équation barycentrique de* $\mathscr{D}$. Les autres équations de $\mathscr{D}$ sont proportionnelles à celle-ci.

Exercice 87 Déterminer l'équation barycentrique des droites (AB), (AC) et (BC) dans le repère barycentrique $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$.

Que représente l'ensemble $\{x \geqslant 0\}$?

Déterminer les équations barycentriques des médianes de ABC.

Exercice 88 Soient A, B et C trois points non aligné d'un plan affine $\mathscr{P}$. Pour un point M du plan, on note (α, β, γ) ses coordonnées barycentriques dans le repère affine ABC.

a) Déterminer la forme d'une équation d'une droite de $\mathscr{P}$ en fonction de (α, β, γ).

b) Que se passe-t-il si l'un des coefficients est nul ? Si deux coefficients sont nuls ?

c) Que se passe-t-il si deux coefficients sont égaux ?

d) Déterminer les coordonnées barycentriques du points d'intersection d'une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ avec l'un des côtés du triangle ABC.

e) À quelle condition deux droites sont-elles parallèles ?

Exercice 89 Relier les coordonnées barycentriques de M dans le repère $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ aux coordonnées cartésiennes dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$.

Exercice 90 Montrer que (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 91 Montrer que les droites d'équation $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ sont parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Dans le cas où elle ne sont pas parallèles, déterminer les coordonnées barycentriques du point d'intersection.

Exercice 92 Montrer que les droites d'équation $ax+by+cz = 0$, $a'x+b'y+c'z = 0$ et $a''x+b''y+c''z = 0$ sont parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 93 – Coordonnées barycentriques. Soient ABC un triangle d'un plan affine $\mathscr{E}$. On note A′ le milieu de [BC], B′ le milieu de [AC] et C′ le milieu de [AB]. Pour un point M de $\mathscr{E}$, on note (α, β, γ) (resp. $(\alpha', \beta', \gamma')$) ses coordonnées barycentriques dans le repère affine ABC (resp. A′B′C′).

a) Exprimer $(\alpha', \beta', \gamma')$ en fonction de (α, β, γ) et inversement.

48. Faire le lien entre cet exercice, l'exemple 153 et les applications 119, 120 et 121

b) Déterminer l'équation de la droite (AA') dans le repère ABC puis dans le repère $A'B'C'$.

c) Déterminer les points du plan tel que $(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha', \beta', \gamma')$.

d) Donner une condition sur (α, β, γ) pour que M soit à l'intérieur du triangle ABC.

e) Donner une condition sur (α, β, γ) pour que M soit à l'intérieur du triangle $A'B'C'$.

Corrigé

a) On trouve effectivement que M est barycentre de $(A, (\beta'+\gamma')/2)$, $(B, (\alpha'+\gamma')/2)$ et $(C, (\alpha'+\beta')/2)$.

Ensuite, j'ai eu deux versions différentes certains ont conclu à la proportionnalité avec α, β, γ et d'autres à l'égalité directement sans aucun argument.

En fait, on a bien l'égalité mais il y a bien un argument à donner ! Le voici. Tout d'abord, on a proportionnalité (c'est un résultat général car ABC ne sont pas alignés). Ensuite, on peut dans ce cas montrer que le coefficient de proportionnalité est 1 et donc qu'il y a égalité.

Le coefficient de proportionnalité est aussi le coefficient de proportionnalité entre les sommes des coefficients. Or ici $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et $(\beta' + \gamma')/2 + (\alpha' + \gamma')/2 + (\alpha' + \beta')/2 = (2(\alpha' + \beta' + \gamma')/2 = 1$. Ainsi le coefficient de proportionnalité est 1 et on a égalité.

On inverse le système pour obtenir $\alpha' = \beta + \gamma - \alpha$, $\beta' = \alpha + \gamma - \beta$ et $\gamma' = \alpha + \beta - \gamma$.

b) On obtient $\beta - \gamma = 0$ et $\beta' - \gamma' = 0$

c) On résout le système et on obtient $\alpha = \beta = \gamma$ et comme $\alpha + \beta + \gamma = 1$, on a un seul point de coordonnée $(1/3, 1/3, 1/3)$ et on n'oublie de signaler que c'est le centre de gravité de ABC (et de $A'B'C'$).

d) On peut dire directement que M est à l'intérieur si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. On peut aussi le retrouver de la façon suivante : l'intérieur est l'intersection des trois demi-espaces suivants : le demiplan délimité par (BC) et contenant A, le demiplan délimité par (AC) et contenant B et le demiplan delimité par (AB) et contenant C. Or (BC) a pour équation $\alpha = 0$. Donc le demiplan délimité par (BC) et contenant A a pour équation $\alpha > 0$ ou $\alpha < 0$. On teste sur le point A, pour voir que c'est $\alpha > 0$. Cela fonctionne de la même façon pour les deux autres hyperplans.

e) Par l'argument de la question ci-dessus, on obtient les équations $\alpha' > 0$, $\beta' > 0$ et $\gamma' > 0$. Avec la question **a**, on obtient $\beta + \gamma - \alpha > 0$, $\alpha + \gamma - \beta > 0$ et $\alpha + \beta - \gamma > 0$.

Remarque. En ajoutant les équations deux à deux, on obtient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$. Ainsi un point à l'intérieur de $A'B'C'$ est aussi à l'intérieur de ABC ce qui se voyait sur le dessin !

Remarque. En utilisant $\alpha + \beta + \gamma = 1$, on obtient une autre façon d'écrire le domaine : $\alpha < 1/2$, $\beta < 1/2$ et $\gamma < 1/2$. La contrainte $\alpha + \beta + \gamma = 1$ redonne alors $\gamma > 0$ puisque $\alpha + \beta < 1$).

Exercice 94 — Interprétation géométrique des coordonnées barycentriques. Soit E un espace vectoriel de dimension 2 et $\mathscr{B}$ un base de E.

a) Montrer que l'application

$$\begin{cases} E^3 & \longrightarrow E \\ (u, v, w) & \longmapsto \det_{\mathscr{B}}(u, v)w + \det_{\mathscr{B}}(v, w)u + \det_{\mathscr{B}}(w, u)v \end{cases}$$

est une application trilinéaire alternée. En déduire qu'elle est nulle.

b) Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine $\mathscr{E}$ de direction E et $\mathscr{B}$ une base de E. Montrer que M est barycentre de $(A, \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}))$, $(B, \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}))$ et $(C, \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))$.

Exercice 95 — Adapté de CAPES 1969. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine, ABC un triangle dans $\mathscr{E}$ et p, q, r trois réels deux à deux distincts. On définit P, Q, R par les relations $r\overrightarrow{PB} - q\overrightarrow{PC} = 0$, $p\overrightarrow{QC} - r\overrightarrow{QA} = 0$ et $q\overrightarrow{RA} - p\overrightarrow{RB} = 0$.

a) On suppose que quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de $\mathscr{E}$ sont tels que le vecteur $\lambda_1\overrightarrow{M_4M_1} + \lambda_2\overrightarrow{M_4M2} + \lambda_3\overrightarrow{M_4M_3}$ est le vecteur nul ; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant des réels non tous nuls vérifiant $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Démontrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés.

b) Réciproquement, si M_1, M_2, M_3 sont alignés, comment faut-il choisir μ_1, μ_2, μ_3 pour que $\mu_1\overrightarrow{OM_1} + \mu_2\overrightarrow{OM_2} + \mu_3\overrightarrow{OM_3} = 0$ pour tout point O ;

c) Démontrer que, quel que soit le point O, le vecteur

$$p(q-r)\overrightarrow{OP} + q(r-p)\overrightarrow{OQ} + r(p-q)\overrightarrow{OR} = 0.$$

d) En déduire que P, Q, R sont alignés sur une droite D.

e) Étudier le cas particulier où l'un des nombres p, q, r est nul.

f) Déterminer les coordonnées barycentriques de P, Q, R dans le repère (A, B, C).

g) Déterminer l'équation barycentrique de la droite D.

h) Déterminer les équations barycentriques des droites $(AP), (BQ), (CR)$.

On suppose pour la suite que $(p+r)(p+q)(q+r)(pq+qr+rp) \neq 0$

i) On définit les points P', Q', R' par

$$\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} : \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = -1, \qquad \frac{\overline{Q'C}}{\overline{P'A}} : \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} : \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$$

Déterminer les coordonnées barycentrique de P', Q' et R'.

j) Démontrer que les droites $(AP'), (BQ'), (CR')$ sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées barycentriques.

Exercice 96 — Droite de Newton. Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine $\mathscr{E}$ et $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On note L le barycentre de $(B, 1)$ et $(C, -a)$; M le barycentre de $(C, 1)$ et $(A, -b)$ et N le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, -c)$. De même, on note L' le barycentre de $(C, 1)$ et $(B, -a)$; M' le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, -b)$ et N' le barycentre de $(B, 1)$ et $(A, -c)$.

a) Déterminer une relation géométrique entre L et L' (idem pour M et M' et N et N').

b) Déterminer l'équation barycentrique de la droite (LM).

c) En déduire une relation sur a, b, c pour que L, M, N soient alignés. Déterminer dans ce cas des coefficients λ et μ tel que N soient barycentre de (L, λ) et (M, μ).

d) Montrer que si L, M, N sont alignés alors L', M', N' le sont aussi.

e) On suppose que L, M, N sont alignés. Montrer que les milieux de [AL], [BM] et [CN] sont alignés sur une droite D (appelée droite de Newton).

f) On suppose toujours L, M, N alignés. Que dire des droites $(L'M')$ et D ?

4.8 Barycentre

Proposition-Définition 156 Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Soit $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ une famille de points pondérées (c'est-à-dire $A_i \in \mathscr{E}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$) [49]. On suppose que seul un nombre fini de λ_i est non nul. On peut alors définir l'application

$$S : \begin{cases} \mathscr{E} \longrightarrow E \\ M \longmapsto \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} \end{cases}$$

49. Tiens, le corps $\mathbb{R}$ intervient ici.

(*i*) Si $\sum_{i\in I}\lambda_i = 0$ alors l'application S est constante.

(*ii*) Si $\sum_{i\in I}\lambda_i \neq 0$ alors l'application S est bijective.

Dans le cas où $\sum_{i\in I}\lambda_i \neq 0$, l'unique antécédent (noté G) de 0 est appelé le *barycentre de la famille* $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$.

Par définition, il vérifie

$$S(G) = \sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{GA_i} = 0.$$

Et on a
$$\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{MG} = \sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{MA_i} \quad \text{pour tout } M \in \mathscr{E}.$$

Preuve. Grâce à la relation de Chasles, on a $S(M) = S(N) + \left(\sum_{i\in I}\lambda_i\right)\overrightarrow{MN}$.

Remarque 157 – Commutativité. Le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) est le même que celui de (B, β), (A, α) et (C, γ) : l'ordre des points pondérés ne compte pas.

Remarque 158 – Homogénéité. Si $\lambda \in k^\times$, le barycentre de (A, α), (B, β) et (C, γ) est le même que celui de $(A, \lambda\alpha)$, $(B, \lambda\beta)$ et $(C, \lambda\gamma)$: si on multiplie tous les poids par un même scalaire, le barycentre ne change pas : on peut donc toujours s'arranger pour que le poids soit 1.

Remarque 159 – Poids 0. Si G est barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ) alors G est aussi barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ) et $(D, 0)$ et réciproquement : on peut toujours ajouter ou enlever des points avec des poids nuls.

Remarque 160 – Points multiples. Si G est barycentre de (A, α), $(B, \beta + \beta')$, (C, γ) alors G est aussi barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ) et (B, β') et réciproquement.

4.8.1 Associativité du barycentre

Proposition 161 – Associativité. Soit G le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ) et (E, ε). On suppose que $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta + \varepsilon \neq$. On note M le barycentre de (A, α) et (B, β) et N le barycentre de (C, γ), (D, δ) et (E, ε).

Alors G est le barycentre de $(M, \alpha + \beta)$ et $(N, \gamma + \delta + \varepsilon)$.

Preuve. Par définition de G, on a $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} + \varepsilon\overrightarrow{GE} = 0$.

Par définition de M, on a $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{GM}$.

Par définition de N, on a $\gamma\overrightarrow{GC} + \delta\overrightarrow{GD} + \varepsilon\overrightarrow{GE} = (\gamma + \delta + \varepsilon)\overrightarrow{GN}$.

On obtient ainsi $(\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} + (\gamma + \delta + \varepsilon)\overrightarrow{GN} = 0$ c'est-à-dire G est le barycentre de $(M, \alpha + \beta)$ et $(N, \gamma + \delta + \varepsilon)$.

4.8.2 Désassociativité du barycentre

Proposition 162 – Désassociativité. Soit G le barycentre de (M, σ), (N, ρ). On suppose que M le barycentre de (A, α) et (B, β) et N le barycentre de (C, γ), (D, δ) et (E, ε).

Alors G est le barycentre de la famille $\mathscr{F}$:

$$\left(A, \frac{\sigma\alpha}{\alpha+\beta}\right), \left(B, \frac{\sigma\beta}{\alpha+\beta}\right), \left(C, \frac{\rho\gamma}{\gamma+\delta+\varepsilon}\right), \left(D, \frac{\rho\delta}{\gamma+\delta+\varepsilon}\right) \quad \text{et} \quad \left(E, \frac{\rho\varepsilon}{\gamma+\delta+\varepsilon}\right).$$

Preuve. Soit G′ le barycentre de la famille $\mathscr{F}$.

D'après l'homogénéité, M est barycentre de

$$\left(A, \frac{\sigma\alpha}{\alpha+\beta}\right), \left(B, \frac{\sigma\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

De même pour N. Ainsi, par associativité du barycentre G′ est barycentre de (M, σ) et (N, ρ).

4.8.3 Calcul du barycentre dans les espaces classiques

Exercice 97 – Espace vectoriel. Soit E un espace vectoriel muni de sa structure d'espace affine. Calculer le barycentre de la famille $(u_i, \lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

Exercice 98 – Espace produit. Soit $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$ deux espaces affines. Dans l'espace affine $\mathscr{E} \times \mathscr{E}'$, que vaut le barycentre de $((\mathrm{A}_i, \mathrm{A}'_i), \lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

Exercice 99 – Espace de fonctions. Soit X un ensemble et $\mathscr{E}$ un espace affine. On considère $f_i \in \mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathscr{E})$ des fonctions de X dans $\mathscr{E}$. Décrire la fonction f barycentre du système $(f_i, \lambda_i)_{i\in \mathrm{I}}$.

Exercice 100 – Associativité du barycentre – Théorème de Varignon. Soient $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ quatre points de $\mathscr{E}$. On note I_1 le milieu de [AB], I_2 le milieu de [BC], I_3 le milieu [CD] et I_4 le milieu de [DA]. Montrer que $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3\mathrm{I}_4$ est un parallélogramme.

Corrigé Il y a de très nombreux chemins pour arriver à la solution, en voici une utilisant l'associativité du barycentre. On va montrer que les diagonales de $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3\mathrm{I}_4$ se coupent en leur milieu.

Soit I le milieu de $[\mathrm{I}_1\mathrm{I}_3]$. Par définition, I est le barycentre de $(\mathrm{I}_1, 1)$, $(\mathrm{I}_3, 1)$. Comme I_1 est le barycentre de $(\mathrm{A}, 1/2)$ et $(\mathrm{B}, 1/2)$ (et que $1/2 + 1/2 = 1$) et que I_3 est le barycentre de $(\mathrm{C}, 1/2)$ et $(\mathrm{D}, 1/2)$ (et que $1/2 + 1/2 = 1$), on a I qui est le barycentre $(\mathrm{A}, 1/2)$, $(\mathrm{B}, 1/2)$, $(\mathrm{C}, 1/2)$ et $(\mathrm{D}, 1/2)$.

De la même façon, J le milieu de $[\mathrm{I}_2\mathrm{I}_4]$ est le barycentre $(\mathrm{A}, 1/2)$, $(\mathrm{B}, 1/2)$, $(\mathrm{C}, 1/2)$ et $(\mathrm{D}, 1/2)$. Ainsi $\mathrm{I} = \mathrm{J}$; les diagonales de $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3\mathrm{I}_4$ se coupent en leur milieu et $\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2\mathrm{I}_3\mathrm{I}_4$ est un parallélogramme.

Exercice 101 – Lieu de points. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois points d'un plan affine $\mathscr{E}$. On note A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. À un point $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$, on associe le point P tel que $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

a) Montrer que l'application $h : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{P}$ est une application affine. Quelle est sa nature ?

b) Pour cette question, on fixe un point $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$. Soient Δ_A (resp. Δ_B, Δ_C) la parallèle à MA' (resp. (MB'), (MC')) passant par A (resp. B, C). Montrer que $\Delta_\mathrm{A}, \Delta_\mathrm{B}, \Delta_\mathrm{C}$ sont concourantes. Déterminer le point d'intersection en fonction de M.

c) On considère $\mathscr{D}$ une droite affine de $\mathscr{E}$. Déterminer le lieu des points P vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$ lorsque M décrit $\mathscr{D}$.

Corrigé Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois points d'un plan affine $\mathscr{E}$. On note A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. À un point $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$, on associe le point P tel que $\overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}}$.

a) *Remarque.* Vu que l'application s'appelle h, on peut supposer que c'est une homothétie ! Soit $\mathrm{P} = h(\mathrm{M})$ et $\mathrm{P}' = h(\mathrm{M}')$. Pour montrer que h est affine, on veut exprimer $\overrightarrow{h(\mathrm{M})h(\mathrm{M}')} = \overrightarrow{\mathrm{PP}'}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$. Pour cela, on écrit

$$\overrightarrow{\mathrm{PP}'} = \overrightarrow{\mathrm{PM}} + \overrightarrow{\mathrm{MM}'} + \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{P}'}.$$

Par définition de P et P', on obtient

$$\overrightarrow{\mathrm{PP}'} = \overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} + \overrightarrow{\mathrm{CM}} + \overrightarrow{\mathrm{MM}'} + \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{C}}.$$

En utilisant la relation de Chasles pour $\overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{A}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{M}}$,

$$\overrightarrow{\mathrm{PP}'} = 3\overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{M}} + \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = 2\overrightarrow{\mathrm{M}'\mathrm{M}} = -2\overrightarrow{\mathrm{MM}'}.$$

L'application $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} \mapsto -2\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ est linéaire (c'est $-2\mathrm{id}$) et donc h est une application affine et $\overrightarrow{h} = -2\mathrm{id}$. Ainsi, comme $\overrightarrow{h}$ est de la forme $\lambda\mathrm{id}$, h est une homothétie. Le rapport de h est -2.

Déterminons enfin de la centre de h : c'est l'unique point fixe de h. Il vérifie donc $h(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ et ainsi $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = 0$. Autrement dit, M est l'isobarycentre de A, B et C : c'est le centre de gravité G du triangle ABC.

b) Soit A′ le milieu de [BC], l'image par h de A′ est A (on le retrouve avec la propriété de la médiane, ou sinon directement, soit P l'image de A′ par h, on a $\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}$. Comme $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = 0$ (puisque A′ est le milieu de [BC]), on obtient $\overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{A'A}$ et donc P = A).

Comme h est une homothétie, l'image de n'importe quelle droite $\mathscr{D}$ du plan par h est une droite parallèle à $(\mathscr{D})$ (cette propriété n'est vraie que pour les homothéties et les translations). L'image de (A′M) par h passe par $h(A') = A$ et est parallèle à (A′M), c'est donc Δ_A.

De même, l'image de (B′M) par h est Δ_B et l'image de (C′M) par h est Δ_C.

Les droites (A′M), (B′M) et (C′M) étant concourante en M, les droites Δ_A, Δ_B et Δ_C sont concourantes en $h(M) = P$.

c) On cherche le lieu des points $h(M)$ pour M décrivant $\mathscr{D}$ c'est-à-dire l'image de $\mathscr{D}$ par h, c'est donc une droite parallèle à $\mathscr{D}$. Il suffit alors de déterminer l'image d'un seul point de $\mathscr{D}$ pour trouver la droite cherchée.

Exercice 102 Soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{D}''$ trois droites parallèles d'un plan affine et $a, b, c \in \mathbb{R}$ vérifiant $a+b+c = 1$. Déterminer le lieu des barycentres des systèmes $(A, a), (B, b), (C, c)$ lorsque A parcourt $\mathscr{D}$, B parcourt $\mathscr{D}'$ et C parcourt $\mathscr{D}''$.

Corrigé Le tracé de quelques barycentres montre des points alignés... Vérifions ceci !

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur des droites $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{D}''$. On suppose que M est barycentre de $(A, a), (B, b), (C, c)$ avec $A \in \mathscr{D}$, $B \in \mathscr{D}'$ et $C \in \mathscr{D}''$ et que M′ est barycentre de $(A', a), (B', b), (C', c)$ avec $A' \in \mathscr{D}$, $B' \in \mathscr{D}'$ et $C' \in \mathscr{D}''$.

Montrons que $\overrightarrow{MM'}$ est proportionnel à $\overrightarrow{u}$.

On a $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MM'} + b\overrightarrow{MM'} + c\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{MA} + a\overrightarrow{AA'} + a\overrightarrow{AM'} + b\overrightarrow{MB} + b\overrightarrow{BB'} + b\overrightarrow{BM'} + c\overrightarrow{MC} + c\overrightarrow{CC'} + c\overrightarrow{CM'}$.

Par définition de M et M′, on a $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = 0$ et $a\overrightarrow{M'A} + b\overrightarrow{M'B} + c\overrightarrow{M'C} = 0$. Ainsi $\overrightarrow{MM'} = a\overrightarrow{AA'} + b\overrightarrow{BB'} + c\overrightarrow{CC'}$ qui est bien colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

Ainsi si M est un point du lieu cherché, tous les autres points sont sur la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par ce point. Montrons l'inclusion réciproque. Pour cela, il suffit de vérifier que $M + \lambda\overrightarrow{u}$ est barycentre de $(A + \lambda\overrightarrow{u}, a)$, $(B + \lambda\overrightarrow{u}, b)$ et $(C + \lambda\overrightarrow{u}, c)$ ce qui résulte immédiatement du fait que la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ conserve les barycentres puisque c'est une application affine.

4.8.4 Barycentre, application affine et sous-espace affine

Définition 163 Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$. On dit que f *conserve les barycentres* si pour toute famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ admettant un barycentre G, $f(G)$ est le barycentre de la famille $(f(A_i), \lambda_i)_{i\in I}$.

Théorème 164 Une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est affine si et seulement si elle conserve les barycentres.

Définition 165 On dit que $\mathscr{F}$ est *stable par barycentration* si pour toute famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ avec $A_i \in \mathscr{F}$ et $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$ alors le barycentre de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ est encore dans $\mathscr{F}$.

Proposition 166 Soit $\mathscr{F}$ un sous-ensemble d'un espace affine $\mathscr{E}$. On a équivalence entre $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ est non vide et stable par barycentration.

Ces deux derniers résultats montrent que les barycentres permettent de caractériser les principaux objets de la géométrie affines : les applications affines et les sous-espaces affines.

Exercice 103 — Barycentre. Soient A et B deux points d'un plan affine $\mathscr{E}$. On considère l'application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ qui à $M \in \mathscr{E}$ associe le point $f(M)$ barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(M, 1)$.

a) Montrer que f est affine. Déterminer $\overrightarrow{f}$.

b) En déduire la nature puis le centre de f ?

Corrigé

a) Proposons trois solutions pour cette question :

Solution 1 : le visionnaire géométrique. Le point $f(\mathrm{M})$ est l'isobarycentre du triangle ABM. En particulier, c'est l'image de M par l'homothétie de centre le milieu I de [AB] et de rapport 1/3. Ainsi f est l'homothétie de centre I et de rapport 1/3. C'est bien une application affine. On a $\overrightarrow{f} = 1/3\mathrm{id}$ et le centre de f est I et le rapport 1/3.

Solution 2 : par la définition usuelle des fonctions affines. Soient M et N deux points du plan. On a $f(\mathrm{M})$ qui est le barycentre de $(\mathrm{A},1)$, $(\mathrm{B},1)$ et $(\mathrm{M},1)$. On en déduit que $3\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{M})} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$. De même, $3\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{N})} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AN}}$. En soustrayant les deux équations[50], on obtient $3\overrightarrow{f(\mathrm{M})f(\mathrm{N})} = \overrightarrow{\mathrm{MN}}$. L'application $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \to 1/3\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ étant linéaire, on en déduit que f est affine et que $\overrightarrow{f} = 1/3\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Solution 3 : en utilisant l'associativité du barycentre. Par définition $f(\mathrm{M})$ est le barycentre de $(\mathrm{A},1)$, $(\mathrm{B},1)$ et $(\mathrm{M},1)$. C'est donc aussi le barycentre de $(\mathrm{I},2)$, $(\mathrm{M},1)$. On a donc $3\overrightarrow{\mathrm{I}f(\mathrm{M})} = \overrightarrow{\mathrm{IM}}$ ou encore $f(\mathrm{M}) = \mathrm{I} + 1/3\overrightarrow{\mathrm{IM}}$. On retrouve ainsi que f est l'homothétie de centre I et de rapport 1/3. Elle est affine et $\overrightarrow{f} = 1/3\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

b) La solution 1 donne toutes les réponses ! Par contre, pour les solutions 2 et 3, on en déduit que f est une homothétie de rapport 1/3. Il reste à trouver le centre de f qui est son point fixe. Si on ne pense pas tout de suite au milieu de [AB], on peut cependant remarquer que si M est sur la droite [AB], alors $f(\mathrm{M})$ est encore sur la droite [AB] (le triangle ABM est aplati et donc son isobarycentre est aussi sur la droite). Le centre de l'homothétie est alors sur la droite (AB). Par ailleurs comme le problème ne change pas si on échange A et B, il est alors naturel de penser au milieu de [AB]. Vérifions que I convient. Le barycentre de $(\mathrm{A},1)$, $(\mathrm{B},1)$ et $(\mathrm{I},1)$ est aussi (par associativité) le barycentre de $(\mathrm{I},2)$ et $(\mathrm{I},1)$ c'est-à-dire I et ainsi I est bien le point fixe cherché. Si on n'a pas l'intuition géométrique, on peut aussi résoudre l'équation : on cherche J tel que J soit le barycentre de $(\mathrm{A},1),(\mathrm{B},1)$ et $(\mathrm{J},1)$. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{JA}} + \overrightarrow{\mathrm{JB}} + \overrightarrow{\mathrm{JJ}} = 0$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{JA}} = \overrightarrow{-\mathrm{JB}}$ ce qui montre que $\mathrm{J} = \mathrm{I}$ est bien le milieu de [AB].

Exercice 104 — Convexité. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. On note E la direction de $\mathscr{E}$.

Soit $\mathrm{C} \subset \mathscr{E}$. On dit que C est *convexe* si C est non vide et pour tous $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{C}$ et tout $t \in [0,1]$, le barycentre de (A,t) et $(\mathrm{B},1-t)$ est dans C.

Dans les questions **a** et **b**, C désigne une partie non vide de $\mathscr{E}$.

a) Dessiner une partie convexe et une partie non convexe du plan.

b) Montrer que C est convexe si et seulement si pour tous $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{C}$ et tous $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ vérifiant $\lambda + \mu \neq 0$, le barycentre de (A,λ), (B,μ) est dans C.

c) Montrer que C est convexe si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_n \in \mathrm{C}$ et tous $\lambda_1 \geqslant 0,\ldots,\lambda_n \geqslant 0$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0$, le barycentre de la famille $(\mathrm{A}_1,\lambda_1),\ldots,(\mathrm{A}_n,\lambda_n)$ est dans C.

d) Montrer que l'image d'un convexe par une application affine est convexe.

e) Montrer que l'image réciproque d'un convexe par une application affine est vide ou convexe.

f) Soit $(\mathrm{C}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille de parties convexes de $\mathscr{E}$. Montrer que $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{C}_i$ est vide ou convexe.

g) Soit S une partie non vide de $\mathscr{E}$. Montrer qu'il existe une plus petite partie convexe de $\mathscr{E}$ contenant S. On la note Conv(S) et on l'appelle *enveloppe convexe de* S.

h) Montrer que l'enveloppe convexe de S est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des éléments de S.

Corrigé — Convexité.

a)

50. Ce qu'il est naturel de faire puisqu'on exprimer $\overrightarrow{f(\mathrm{M})f(\mathrm{N})}$ en fonction (linéaire) de $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$.

b) On suppose que C est convexe. Soit $A, B \in C$ et λ et μ positif tel que $\lambda + \mu \neq 0$. On considère G le barycentre de (A, λ) et (B, μ). Il s'agit de montrer que G est dans C. Mais, par homogénéité, G est aussi le barycentre de $(A, \lambda/(\lambda+\mu))$ et $(B, \mu/(\lambda+\mu))$ (on peut bien diviser par $\lambda + \mu \neq 0$). On a évidemment $0 \leqslant \lambda/\lambda + \mu \leqslant 1$ puisque $\mu \geqslant 0$. On peut ainsi poser $t = \lambda/(\lambda+\mu) \in [0, 1]$. Mais on a alors $1 - t = \mu/(\lambda+\mu)$ et G est donc le barycentre de (A, t) et $(B, 1-t)$ avec t qui est dans $[0, 1]$. On en déduit que G est dans C.

On suppose à présent que pour tous $A, B \in C$ et tous $\lambda, \mu \geqslant 0$ tel que $\lambda + \mu \neq 0$ alors le barycentre de (A, λ) et de (B, μ) est dans C. On veut montrer que C est convexe. On fixe A, B dans C et $t \in [0, 1]$. Comme $1 - t \geqslant 0$ et $t + (1-t) = 1 \neq 0$, l'hypothèse assure que le barycentre de (A, t) et $(B, 1-t)$ est dans C et donc C est convexe.

c) On suppose que C est convexe. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 1$, le barycentre de (A, λ) est A qui est dans C par hypothèse.[51] On considère à présent l'hypothèse vraie au rang n. On considère alors $A_1, \ldots, A_{n+1} \in C$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ des réels positifs dont la somme est non nulle. On veut montrer que le barycentre G de $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_{n+1}, \lambda_{n+1})$ est dans C. Si $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$ alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ et $G = A_{n+1} \in C$. Sinon, l'hypothèse de récurrence assure que le barycentre G' de $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)$ est dans C et G est aussi le barycentre de $(G', \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ et (A_{n+1}, λ_{n+1}) qui est dans C d'après la question **b**.

On suppose que C vérifie la propriété pour tous $A_1, \ldots, A_n \in C$ et tous $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ tel que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n > 0$, le barycentre de la famille $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)$ est dans C. Pour $n = 2$, il s'agit de la propriété de la question **b** et donc C est convexe.

d) Soit M et N appartenant à $f(C)$ et $t \in [0, 1]$. On veut montrer que le barycentre G' de (M, t) et $(N, 1-t)$ est dans C. Par hypothèse, il existe $A \in C$ et $B \in C$ tel que $M = f(A)$ et $N = f(B)$. Comme C est convexe, le barycentre G de (A, t) et $(B, 1-t)$ est dans C. Mais, puisque f est affine $f(G)$ est le barycentre de $(f(A), t) = (M, t)$ et $(f(B), 1-t) = (N, 1-t)$. Ainsi $G' = f(G)$ avec $G \in C$ et donc $G' \in f(C)$ et $f(C)$ est convexe.

e) Si $f^{-1}(C)$ est vide, c'est bon. Sinon, on considère A et B dans $f^{-1}(C)$ et $t \in [0, 1]$ et on veut montrer que le barycentre G de (A, t) et $(B, 1-t)$ est dans $f^{-1}(C)$ c'est-à-dire que $f(G) \in C$. Mais, comme f est affine, $f(G)$ est le barycentre de $(f(A), t)$ et de $(f(B), 1-t)$. Or $f(A)$ et $f(B)$ sont dans C puisque $A, B \in f^{-1}(C)$. Mais C est convexe donc le barycentre de $(f(A), t)$ et de $(f(B), 1-t)$ est dans C et donc $f(G)$ est dans C.

f) Si l'intersection des C_i est vide, c'est bon. Sinon, on considère A et B dans l'intersection des C_i et $t \in [0, 1]$ et on veut montrer que le barycentre G de (A, t) et $(B, 1-t)$ est dans l'intersection des C_i c'est-à-dire qu'il est dans tous les C_i. Mais comme A et B sont dans C_i et que C_i est convexe, on en déduit que G est dans C_i et ceci pour tout $i \in I$. Ainsi l'intersection des C_i est bien convexe.

g) L'ensemble des convexes qui contient S est non vide (il y a $\mathscr{E}$ par exemple). On pose alors

$$\mathrm{Conv}(S) = \bigcap_{X \text{ convexe de } \mathscr{E},\ S \subset X} X.$$

On définit ainsi Conv(S) comme l'intersection de tous les convexes de $\mathscr{E}$ qui contiennent S. Par définition, Conv(S) est une intersection de convexes. D'après la question **f**, Conv(S) est vide ou convexe. Mais comme S est contenu dans tous les X, l'intersection des convexes qui contiennent S contient S et donc Conv(S) est non vide (et même contient S). Ainsi Conv(S) est bien un convexe qui contient S. Il reste à montrer que c'est le plus petit. Mais si X est un convexe qui contient S. Il est dans la liste de l'intersection et donc il contient Conv(S) et Conv(S) est bien le plus petit des convexes de $\mathscr{E}$ qui contiennent S.

h) Commençons par montrer que l'ensemble $\mathscr{B}_+$ des barycentres à coefficients positifs des éléments de S est contenu dans Conv(S). Pour cela, on va montrer que $\mathscr{B}_+$ est contenu dans tous les X qui sont convexes et qui contiennent S. Ainsi $\mathscr{B}_+$ sera contenu dans l'intersection de ces convexes qui est précisément Conv(S). Soit donc X un convexe qui contient S et G qui est le barycentre de $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)$ avec $A_i \in S$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$. Comme $S \subset X$ et X est convexe, la question **c** assure que G est dans X, ce qui nous permet de conclure.

51. La question **b** traite précisément le cas $n = 2$

On veut montrer l'inclusion inverse c'est-à-dire que $\mathscr{B}_+$ contient Conv(S). Par définition de Conv(S), il suffit de montrer que $\mathscr{B}_+$ est convexe et contient S. Commençons par montrer que $\mathrm{S} \subset \mathscr{B}_+$. Il suffit pour cela de remarquer que si $\mathrm{A} \in \mathrm{S}$ alors A est le barycentre de $(\mathrm{A}, 1)$ avec $\mathrm{A} \in \mathrm{S}$ et $1 > 0$: A est bien barycentre à coefficients positifs d'éléments de S. La convexité de $\mathscr{B}_+$ relève quant à elle simplement de l'associativité du barycentre : on considère $\mathrm{G}, \mathrm{G}' \in \mathscr{B}_+$ et $t \in [\,0\,,1\,]$ et on veut montrer que le barycentre G'' de (G, t) et $(\mathrm{G}', 1-t)$ est dans $\mathscr{B}_+$. Comme G (resp. G') est dans $\mathscr{B}_+$ alors, G est barycentre de $(\mathrm{A}_1, \lambda_1), \ldots, (\mathrm{A}_n, \lambda_n)$ avec $\mathrm{A}_i \in \mathrm{S}$, $\lambda_i \geqslant 0$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq 0$ et G' est barycentre de $(\mathrm{A}'_1, \lambda'_1), \ldots, (\mathrm{A}'_m, \lambda'_m)$ avec $\mathrm{A}'_i \in \mathrm{S}$, $\lambda'_i > 0$ et $\lambda'_1 + \cdots + \lambda'_m \neq 0$. Par associativité, on en déduit que G'' est barycentre de $(\mathrm{A}_1, t\lambda_1), \ldots, (\mathrm{A}_n, t\lambda_n)$, $(\mathrm{A}'_1, (1-t)\lambda'_1), \ldots, (\mathrm{A}'_m, (1-t)\lambda'_m)$ avec $\mathrm{A}_i, \mathrm{A}'_i \in \mathrm{S}$, $t\lambda_i \geqslant 0$, $(1-t)\lambda'_i \geqslant 0$ et $t\lambda_1 + \cdots + t\lambda_m + (1-t)\lambda'_1 + \cdots + (1-t)\lambda'_m \neq 0$ [52].

52. Pour justifier la non nullité de la somme, on distinguera le cas $t \neq 0, 1$ et $t = 0$ ou $t = 1$

Chapitre 5

Géométrie affine euclidienne

5.1 Espace affine euclidien

Définition 167 – Espace affine euclidien. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie de direction E. On dit que $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien si E est muni d'une structure d'espace vectoriel euclidien.

Lemme 168 Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. On note $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ la direction de $\mathscr{E}$. L'application

$$d\colon \begin{cases} \mathscr{E}\times\mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{A},\mathrm{B}) \longmapsto \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| \end{cases}$$

est une distance sur $\mathscr{E}$ [1] [2].

Preuve. On a $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) \geqslant 0$ et $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = 0$ implique $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. De plus, on a $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = d(\mathrm{B},\mathrm{A})$ Enfin, pour $\mathrm{C} \in \mathscr{E}$, on a $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}\| \leqslant \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| + \|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\|$ et donc $d(\mathrm{A},\mathrm{B}) \leqslant d(\mathrm{A},\mathrm{C}) + d(\mathrm{C},\mathrm{B})$.

Notation 169 Plutôt que $d(\mathrm{A},\mathrm{B})$ ou $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$, on préfère la notation AB mais on n'oubliera pas que, par définition, $\mathrm{AB} = \sqrt{\langle\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rangle}$.

Exercice 105 – Alignement et égalité de distance, milieu.

a) Montrer que $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} + \mathrm{CB}$ si et seulement si A, B et C sont alignés et C est entre A et B [3].

b) Montrer que si I est le milieu de $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ alors $\mathrm{IA} = \mathrm{IB}$ [4].

5.1.1 Orthogonalité et sous-espaces affines

Les notions d'orthogonalité entre sous-espaces affines sont en fait des notions qui portent sur leur direction. Il y a trois cas distincts suivant que l'orthogonal d'un espace est contenu, égal ou contient le deuxième espace.

Définition 170 – Espaces affines orthogonaux. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de direction respective F et G.

On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont **orthogonaux** si $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}^{\perp}$ (ou encore si $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}^{\perp}$ [5]). [6]

On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont **supplémentaires orthogonaux** si $\mathrm{F} = \mathrm{G}^{\perp}$ (ou encore si $\mathrm{G} = \mathrm{F}^{\perp}$ [7]). [8]

1. Cela signifie qu'on peut parler dans un espace affine euclidien de la distance entre deux points.
2. La norme en question est bien sûr la norme associée au produit scalaire de E c'est-à-dire $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{\langle\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rangle}$
3. Le fait que d soit un distance résulte directement du fait que $\|\cdot\|$ soit une norme. Ce fait résultant luide l'inégalité de Cauchy-Schwarz (proposition 38). Le cas d'égalité dans la somme des distances est alors une interprétation géométrique du cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
4. Non, le milieu n'est pas défini par une propriété de distance mais par une propriété vectorielle ou barycentrique : c'est le point tel que $\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}} = 0$. Bien sûr au collège, on ne peut pas faire comme ça.
5. Cette relation est équivalente à la précédente car l'orthogonalité renverse les inclusions
6. Cela peut être le cas de deux droites dans $\mathbb{R}^3$. Lorsqu'on est dans ce cas, on a $\dim\mathscr{F} + \dim\mathscr{G} \leqslant \dim\mathscr{E}$.
7. Cette relation est équivalente à la précédente car l'orthogonalité renverse les inclusions
8. Cela peut être le cas d'un plan et d'une droite dans $\mathbb{R}^3$ ou de deux droites dans $\mathbb{R}^2$. Lorsqu'on est dans ce cas, on a $\dim\mathscr{F} + \dim\mathscr{G} = \dim\mathscr{E}$.

On dit que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont **perpendiculaires** si $\mathrm{F}^\perp \subset \mathrm{G}$ (ou encore si $\mathrm{G}^\perp \subset \mathrm{F}$ [9]). [10]

Propriété 171 – Des grands classiques. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien

(i) Deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ supplémentaires orthogonaux se rencontrent en un unique point.

(ii) Deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ perpendiculaires se rencontrent. Ils se rencontrent en un point unique si et seulement si ils sont supplémentaires orthogonaux.

(iii) Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, il existe un unique supplémentaire orthogonal de $\mathscr{F}$ passant par A.

On suppose à présent que $\dim \mathscr{E} = 2$ c'est-à-dire que $\mathscr{E}$ est un plan euclidien ; soit $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{D}'''$ des droites de $\mathscr{E}$.

(iv) Deux droites perpendiculaires à $\mathscr{D}$ sont parallèles.

(v) On suppose que $\mathscr{D} \perp \mathscr{D}'$. Alors $\mathscr{D}'' /\!/ \mathscr{D}'$ si et seulement si $\mathscr{D}'' \perp \mathscr{D}$.

(vi) On suppose $\mathscr{D} /\!/ \mathscr{D}'$. Alors $\mathscr{D}'' \perp \mathscr{D}$ si et seulement si $\mathscr{D}'' \perp \mathscr{D}'$.

(vii) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$. Il existe une unique droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par A.

Preuve. Les propriétés (iv) à (vi) résultent essentiellement du fait que si D est une droite de E alors $(\mathrm{D}^\perp)^\perp = \mathrm{D}$.

Dans ce cadre, le théorème de Pythagore est une évidence.

Théorème 172 – Théorème de Pythagore. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathscr{E}$ avec $\mathrm{B} \neq \mathrm{A}$ et $\mathrm{C} \neq \mathrm{A}$ [11] Alors (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$.

Preuve. Pour tous A, B, C Par définition, on a

$$\mathrm{BC}^2 = \langle \overrightarrow{\mathrm{BC}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \rangle = \mathrm{AB}^2 + 2\langle \mathrm{BA}, \mathrm{AC} \rangle + \mathrm{AC}^2$$

Ainsi $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$ si et seulement si $\langle \mathrm{BA}, \mathrm{AC} \rangle = 0$.

5.1.2 Projection et symétrie orthogonale affine

Dans le chapitre 4, on a défini (voir la proposition-définition 139) la notion de projection affine (projection parallèlement à une direction sur un sous-espace vectoriel) et de symétrie affine (symétrie par rapport à un sous-espace affine selon une direction). Pour cela, on avait besoin d'un sous-espace affine $\mathscr{F}$ (sur lequel on projetait ou par rapport auquel on faisait la symétrie) et d'une direction qui était un supplémentaire de la direction de $\mathscr{F}$. Lorsqu'on est dans un espace affine euclidien, la direction F d'un sous-espace affine $\mathscr{F}$ dispose naturellement d'un supplémentaire particulier : c'est $\mathrm{F}^\perp$. Ainsi, dans un espace euclidien, la simple donnée d'un sous-espace affine $\mathscr{F}$ permet de définir une certaine projection sur $\mathscr{F}$ et une certaine symétrie par rapport à $\mathscr{F}$: ce sont la projection orthogonale sur $\mathscr{F}$ et la symétrie par rapport à $\mathscr{F}$.

Définition 173 – Symétrie et projection orthogonale. Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine (de direction F) de $\mathscr{E}$. On définit la *projection orthogonale* $p_{\mathscr{F}}$ comme la projection sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathrm{F}^\perp$.

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, le point $p_{\mathscr{F}}(\mathrm{A})$ est caractérisé par

$$\mathrm{A}p_{\mathscr{F}}(\mathrm{A}) = \inf\{\mathrm{AB},\ \mathrm{B} \in \mathscr{F}\}$$

Autrement dit $p_{\mathscr{F}}(\mathrm{A})$ est le point de $\mathscr{F}$ le plus proche de A.

On définit *la symétrie orthogonale $s_{\mathscr{F}}$ par rapport à $\mathscr{F}$* comme la symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathrm{F}^\perp$. [12]

On a $s_{\mathscr{F}}(\mathrm{A})s_{\mathscr{F}}(\mathrm{B}) = \mathrm{AB}$ pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$: une symétrie orthogonale conserve les distances !

5.1.3 Hyperplan médiateur

Lemme 174 Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, $\mathrm{A} \neq \mathrm{B} \in \mathscr{E}$ et I le milieu de [AB]. Alors l'ensemble $\mathscr{H}$ des points de $\mathscr{E}$ à égale distance de A et B : $\mathscr{H} = \{\mathrm{M} \in \mathscr{E},\ \mathrm{MA} = \mathrm{MB}\}$ est l'hyperplan passant par I et perpendiculaire à (AB). Il est appelé *hyperplan médiateur* de [AB].

9. Cette relation est équivalente à la précédente car l'orthogonalité renverse les inclusions
10. Cela peut être le cas de deux planq dans $\mathbb{R}^3$. Lorsqu'on est dans ce cas, on a $\dim \mathscr{F} + \dim \mathscr{G} \geqslant \dim \mathscr{E}$.
11. pour pouvoir parler des droites (AB) et (AC).
12. On pourrait aussi parler d'affinité orthogonale.

L'ensemble $\{\mathrm{M} \in \mathscr{E},\ \mathrm{MA} \leqslant \mathrm{MB}\}$ est alors le demi-espace fermé délimité par l'hyperplan médiateur de [AB] contenant A.

Preuve. Dans le cas où $\mathscr{E}$ est un plan, c'est le résultat de la proposition 3. La troisième démonstration de la proposition 3 donne le résultat : on a

$$\mathrm{MA} = \mathrm{MB} \iff \mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2 \iff \langle \overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}} \rangle .$$

La bilinéarité du produit scalaire donne $\langle \overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \rangle = \langle \overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}} \rangle - \langle \overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}} \rangle$. On en déduit que

$$\mathrm{MA} = \mathrm{MB} \iff \langle \overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} \rangle = 0$$

Or la relation de Chasles assure que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ (voir la remarque 8 pour plus de détails sur cette égalité). Ainsi $\mathrm{MA} = \mathrm{MB} \iff \langle \overrightarrow{\mathrm{BA}}, 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \rangle = 0$. On en déduit que $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. L'ensemble des points M vérifiant cette dernière propriété étant clairement l'hyperplan orthogonal à (AB) passant par I.

Pour le cas du demi-espace, le calcul précédent s'adapte avec des inégalités au lieu d'égalité, on a Ainsi $\mathrm{MA} \leqslant \mathrm{MB} \iff \langle \overrightarrow{\mathrm{BA}}, 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \rangle \leqslant 0$.

5.2 Isométrie affine

Définition 175 — Isométrie. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application **affine** [13]. On dit que f est une *isométrie* si f conserve les distances c'est-à-dire si pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$, on a $d(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})) = d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ [14].

Comme de nombreuses propriétés sur les applications affines, le fait d'être une isométrie pour une application affine peut se lire sur sa flèche. C'est le sens du théorème suivant.

Proposition 176 — Caractérisation par la flèche. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Alors f est une isométrie si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est une isométrie de E (c'est-à-dire $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$).

Preuve. L'application f est une isométrie si et seulement si $d(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})) = d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$. La définition de la distance assure que ceci est équivalent à $\|\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$. Mais f est affine donc $\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})$. Ainsi f est une isométrie si et seulement si pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$, on a $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AB}})\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$. Or tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E peut s'écrire sous la forme $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Ainsi f est une isométrie si pour tout $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$, on a $\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})\| = \|\overrightarrow{u}\|$ c'est le point (vi) de la caractérisation du fait que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie (proposition 58).

Définition 177 — Déplacement-antidéplacement. Soit f une isométrie affine. On dit que f est une isométrie (affine) directe (on dit aussi un déplacément) si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ (autrement dit si $\overrightarrow{f}$ est une isométrie directe). On dit que f est une isométrie (affine) indirecte (on dit aussi un anti-déplacement) si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \smallsetminus \mathcal{SO}(\mathrm{E})$.

La proposition 176 et le point (i) des propriétés 61 assurent qu'une isométrie affine est soit un déplacement, soit un antidéplacement.

Exemple 178 — Translation. Les translations sont des isométries.

Donnons deux justifications de ce fait. La première en revenant à la définition : si f est une translation, on a $\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$ et donc $\|\overrightarrow{f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$ pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$. La deuxième en utilisant la caractérisation de la proposition 176 : si f est une translation, $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ est une isométrie vectorielle.

Exemple 179 — Le cas de la dimension 1. On suppose ici que $\mathscr{E}$ est un espace affine de dimension 1. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine [15]. L'application $\overrightarrow{f} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est donc un endomorphisme d'une

13. on peut en fait supprimer cette hypothèse : une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ vérifiant $d(f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})) = d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$, est nécessairement affine.

14. Cela est tout à fait conforme à la racine grecque : iso = même, metr- = longueur.

15. Dans un repère cartésien, une écriture d'une application affine est de la forme $x \mapsto ax + b$; b désigne la coordonnée de l'image de l'origine du repère et a désigne la flèche de l'application f. En particulier a est indépendant du repère choisi sur $\mathscr{E}$ alors que b ne l'est pas.

droite vectorielle. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{f} = \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. On en déduit que f est une homothétie ou une translation.

Or $\lambda \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ est une isométrie (vectorielle) de E si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$ [16].

Si $\lambda = 1$ alors f est une translation et une isométrie directe. Si $\lambda = -1$ alors f est une symétrie par rapport à un point (symétrie centrale) et une isométrie indirecte.

Ainsi les déplacements d'une droite affine sont les translations de vecteurs non nuls (qui n'ont pas de point fixe) et l'identité (dont tous les points sont fixes) ; les antidéplacement d'une droite affine sont les symétries par rapport à des points (homothétie de rapport -1 qui ont donc un unique point fixe). En particulier, la nature de l'isométrie peut être caractérisée par son nombre de points fixes.

Exercice 106 Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 1 et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine [17].

a) On suppose que f échange deux points c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$ tel que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$. Montrer que f est une symétrie centrale.

b) On suppose que f est la symétrie par rapport à $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$. Pour $\overrightarrow{v} \in \mathrm{E}$, montrer que $\tau_v \circ f$ est une symétrie dont on exprimera le centre en fonction de A et $\overrightarrow{v}$.

5.2.1 Les isométries du plan.

La structure simple des isométries vectorielles d'un plan vectoriel euclidien permet d'obtenir un théorème de classification des isométries affines d'un plan affine euclidien. On distingue ainsi cinq types d'isométries affines : trois types d'isométries directes qui se distinguent par leur nombre de points fixes, deux types d'isométries indirectes qui se distinguent aussi par leur nombre de points fixes. On notera cependant qu'il y a deux types d'isométries qui ne présentent pas de points fixes : les translations (qui sont des isométries directes) et les symétries glissées (qui sont des isométries indirectes).

Théorème 180 – Classification des isométries en dimension 2. On suppose que $\mathscr{E}$ est un **plan** affine euclidien. Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$ alors

- Si f est une isométrie directe, f est de l'un des trois types suivants
  - (i) l'identité (tous les points sont fixes)
  - (ii) une translation de vecteur non nul (pas de point fixe)
  - (iii) une rotation (un unique point fixe appelé *centre de la rotation*)
- Si f est une isométrie indirecte, f est de l'un des deux types suivants
  - (i) Une symétrie orthogonale par rapport à une droite (les points fixes forment une droite : l'axe de la symétrie)
  - (ii) Une symétrie glissée c'est-à-dire la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation parallèle à l'axe de la symétrie (pas de point fixe).

Preuve. Soit f une isométrie affine **directe** du plan affine euclidien $\mathscr{E}$.

Si $\overrightarrow{f} \neq \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ alors $\overrightarrow{f}$ n'admet pas 1 comme valeur propre (voir la proposition 67). Donc (voir la proposition 146) f admet un **unique point fixe**, notons le O. Comme f est affine, on a alors $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{M})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$. Or $\overrightarrow{f}$ est une isométrie vectorielle directe du plan euclidien E c'est-à-dire une rotation et f est donc bien une rotation.

Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}$ alors f est une translation qui n'a pas de point fixe si le vecteur de la translation est non nul. Si le vecteur de la translation est nul, $f = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

Si f est une isométrie affine **indirecte** du plan euclidien $\mathscr{E}$.

On a vu 66 que $\overrightarrow{f}$ est la symétrie orthogonale par rapport à une droite D de E.

Supposons que f ait un point fixe A alors f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathscr{D}$ de direction D et passant par A puisqu'on a $\overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{M})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})$. En particulier, l'ensemble des points fixes de f est $\mathscr{D}$. De plus, la direction de $\mathscr{D}$ est $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ (voir la proposition 145).

Supposons à présent que f n'a pas de point fixe. On considère un point $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} \neq 0$ et on note $\tau_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On a $\tau_{-\overrightarrow{u}} \circ f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. De plus, comme $\tau_{-\overrightarrow{u}}$

16. parce que $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
17. On ne suppose pas que c'est une isométrie.

est une isométrie directe, $g = \tau_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ est une isométrie indirecte dont A est un point fixe. Le point précédent montre que g est la symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ passant par A. On note D la direction de $\mathscr{D}$. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{D} = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$. Mais $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ puisque $\overrightarrow{\tau_{-\overrightarrow{u}}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Ainsi $\mathrm{D} = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ est bien déterminé par f (et ne dépend pas de A).

On a $f = \tau_u \circ g$. On décompose $\overrightarrow{u}$ suivant la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{D} \oplus \mathrm{D}^{\perp}$: on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in \mathrm{D}$ et $\overrightarrow{w} \in \mathrm{D}^{\perp}$. On a alors $f = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ (\tau_{\overrightarrow{w}} \circ g)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $g' = \tau_{\overrightarrow{w}} \circ g$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite de direction D. Or g est une isométrie indirecte et $\tau_{\overrightarrow{w}}$ une isométrie directe, ainsi g' est une isométrie indirecte. Si elle a un point fixe, elle sera, d'après ce qui précède une symétrie orthogonale par rapport à une droite de direction $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g'} - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}) = \mathrm{D}$. Il suffit donc de montrer que g' a un point fixe.

Pour cela, on considère la droite $\mathscr{D}'$ de direction $\mathrm{D}^{\perp}$ passant par A (ce qui est synonyme de la perpendiculaire à D passant par A). Cette droite est stable par g mais aussi par $\tau_{\overrightarrow{w}}$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \mathrm{D}^{\perp}$) et donc par g'. De plus, g' est une isométrie indirecte de cette droite (la restriction de $\overrightarrow{g'}$ à $\mathrm{D}^{\perp}$ est $-\mathrm{id}$). La classification des isométries d'une droite assure que c'est une symétrie par rapport à un point. La restriction de g' à $\mathscr{D}'$ admet donc un point fixe et g' aussi.

Exercice 107 – Symétrie et translation qui commutent. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien. Montrer que la symétrie orthogonale par rapport la droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathrm{E}$ commutent si et seulement si $\overrightarrow{v}$ est dans la direction de $\mathscr{D}$.

Exercice 108 – Décomposition des isométries en produit de symétrie. À l'aide de la classification, montrer qu'une isométrie affine d'un plan euclidien peut s'écrire comme produit d'au plus trois symétrie orthogonales.

Exercice 109 – Principe de conjugaison : le retour. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, r une rotation de centre $\mathrm{O} \in \mathscr{E}$ et d'angle θ (resp. symétrie d'axe $\mathscr{D}$) et f une isométrie de $\mathscr{E}$. Montrer que $f \circ r \circ f^{-1}$ est une rotation (resp. symétrie) dont on précisera le centre et l'angle (resp. l'axe). Que se passe-t-il lorsque r est une symétrie glissée ?

Exercice 110 Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien.

a) Soit $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ une application affine. Montrer que f conserve les milieux c'est-à-dire que si I est le milieu de [AB] alors $f(\mathrm{I})$ est le milieu de $[f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})]$.

b) Soit s une symétrie axiale et $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$. Justifier que le milieu de $[\mathrm{M}s(\mathrm{M})]$ est un point fixe de s.

c) Soit s_{Δ} une symétrie axiale d'axe Δ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur orthogonal à la direction de Δ. On note $\tau_{\overrightarrow{v}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{v}$. Montrer que $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$ est une isométrie. On précisera si elle est directe ou indirecte.

d) Parmi les différents types d'isométrie, quel est celui de $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$? Déterminer alors ses attributs géométriques (points fixes, centre, axe, vecteur,...). Indication : on pourra chercher si $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$ possède des points fixes.

Corrigé

a) Soit I le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{\mathrm{IA}} = \overrightarrow{\mathrm{BI}}$. On applique alors $\overrightarrow{f}$ pour obtenir $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{IA}}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{BI}})$. Or, par définition de $\overrightarrow{f}$, on a $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{IA}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{I})f(\mathrm{A})}$ et $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{BI}}) = \overrightarrow{f(\mathrm{B})f(\mathrm{I})}$. Ainsi, on a $\overrightarrow{f(\mathrm{I})f(\mathrm{A})} = \overrightarrow{f(\mathrm{B})f(\mathrm{I})}$ ce qui dit exactement que $f(\mathrm{I})$ est le milieu de $[f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})]$.

b) *Démonstration 1.* Par définition d'une symétrie axiale, le milieu de $[\mathrm{M}s(\mathrm{M})]$ est sur l'axe de symétrie et donc invariant par s c'est-à-dire un point fixe pour s.

Démonstration 2. Soit I le milieu de $[\mathrm{M}s(\mathrm{M})]$. D'après la question a, $s(\mathrm{I})$ est le milieu de $[s(\mathrm{M}), s \circ s(\mathrm{M})] = [s(\mathrm{M})\mathrm{M}]$ puisque $s \circ s = \mathrm{id}$. Ainsi $s(\mathrm{I}) = \mathrm{I}$.

c) La composée de deux isométries est une isométrie ; une translation et une symétrie axiale étant des isométries, $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$ est une isométrie. C'est une isométrie indirecte car $\tau_{\overrightarrow{v}}$ est directe et s est indirecte.

d) Les types d'isométries indirectes sont les symétries axiales et les symétries glissées. Les symétries axiales ont une droite de points fixes et les symétries glissées n'ont aucun point fixe. Pour déterminer le type, il suffit de déterminer si $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$ a un point fixe et auquel cas ce serait une symétrie axiale. La question **b** nous indique alors que si on veut chercher un point fixe, il suffit de vérifier si le milieu

du segment formé par un point et son image par $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$ est fixe. Un petit dessin nous convainc que c'est bien le cas. Vérifions-le par le calcul.

Soit M un point de l'axe Δ de s. On a $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \overrightarrow{v}$. Notons-le N. Le milieu I de [MN] est alors donné par $\mathrm{M} + \overrightarrow{v}/2$. Alors $s(\mathrm{I}) = s(\mathrm{M}) + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{\mathrm{MI}}) = \mathrm{M} + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{v})/2$. Or $\overrightarrow{v}$ est perpendiculaire à l'axe de s. Donc $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$. Ainsi $s(\mathrm{I}) = \mathrm{M} - \overrightarrow{v}/2$ et donc $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s(\mathrm{I}) = \mathrm{M} - \overrightarrow{v}/2 + \overrightarrow{v} = \mathrm{M} + \overrightarrow{v}/2 = \mathrm{I}$.

On a bien trouvé un point fixe ainsi $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$ est une symétrie axiale. Il reste à déterminer l'axe. On vient de voir que si $\mathrm{M} \in \Delta$ alors $\mathrm{M} + \overrightarrow{v}/2$ est fixe par $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$. Ainsi tout point de la translaté est Δ par le vecteur $\overrightarrow{v}/2$ est un point fixe de $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$ ce point forment une droite qui est donc l'axe de $tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$.

Remarque. On peut aussi conclure très rapidement en se souvenant de ce qui a été fait en TD. On peut écrire $\tau_{\overrightarrow{v}}$ comme la composée de deux symétries par rapport à des droites orthogonales à $\overrightarrow{v}$ (dont l'écart est $\overrightarrow{v}/2$) et en plus on peut choisir l'une des deux comme on souhaite : $\tau_{\overrightarrow{v}} = s' \circ s$ où s' est la symétrie par rapport à $\Delta + \overrightarrow{v}/2$. On obtient alors $\tau_{\overrightarrow{v}} \circ s = s' \circ s \circ s = s'$.

Exercice 111 – Isométrie. Soit $\mathscr{E}$ un **plan** affine euclidien.

a) Soit $\mathrm{O}, \mathrm{O}' \in \mathscr{E}$. Déterminer la composée de la symétrie centrale s_{O} de centre O et de la symétrie centrale de centre O′.

b) Soit $\mathscr{D}$ un droite de $\mathscr{E}$ et $\mathrm{O} \in \mathscr{D}$. Déterminer la composée de la rotation de centre O d'angle θ avec la symétrie (orthogonale) par rapport à $\mathscr{D}$.

Exercice 112 – Vecteur et axe d'une symétrie glissée. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien.

a) Montrer que les attributs géométriques d'une symétrie glissée sont bien définis : si $f = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ g$ où g est une symétrie orthogonale par rapport à une droite $\mathscr{D}$ dont la direction contient $\overrightarrow{v}$ alors $\overrightarrow{v}$ et $\mathscr{D}$ sont entièrement définis (on pourra montrer que $\mathscr{D}$ est la seule droite stable par f).

b) Montrer que g et $\tau_{\overrightarrow{v}}$ commutent (on pourra utiliser l'exercice 107)

Exercice 113 – Commutateur de rotations. Soit f et f' deux rotations d'un plan affine euclidien. Montrer que $f' \circ f \circ f'^{-1} \circ f^{-1}$ est une translation.

Exercice 114 Montrer qu'un isométrie du plan qui échange deux points est involutive.

Exercice 115 Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, A une partie **bornée** de $\mathscr{E}$ et f une isométrie de $\mathscr{E}$ telle que $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{\circ n}$ par récurrence de la façon suivante : $f^{\circ 0} = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ et pour $n \geqslant 1$, $f^{\circ n} = f \circ f^{\circ(n-1)}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f^{\circ n}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$.

b) En déduire que f ne peut être une translation.

c) Soit g une symétrie glissée. On écrit $g = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ s$ où $\tau_{\overrightarrow{v}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathrm{E}$ et s une symétrie axiale dont la direction de l'axe contient $\overrightarrow{v}$. Montrer que $s \circ \tau_{\overrightarrow{v}} \circ s^{-1}$ est une translation dont on déterminera le vecteur. En déduire que $\tau_{\overrightarrow{v}}$ et s commutent. En déduire que $g \circ g$ est une translation dont on déterminera le vecteur.

d) En déduire que f n'est pas symétrie glissée.

e) En déduire que f a un point fixe.

5.2.2 Isométries de l'espace.

La structure simple des isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 3 permet d'obtenir un théorème de classification des isométries affines d'un espace affine euclidien de dimension 3. La situation n'est pas aussi simple qu'en dimension 3. Mais la complexité reste limitée. On distingue ainsi sept types d'isométries affines : quatre types d'isométries directes qui contrairement à la dimension 2 ne se distinguent plus par leur nombre de points fixes ; trois types d'isométries indirectes qui, elles se distinguent par leur nombre de points fixes.

Théorème 181 – Classification des isométries en dimension 3. On suppose que $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien de dimension 3. On note E la direction de $\mathscr{E}$. Soit f une isométrie de $\mathscr{E}$.

- Si f est une isométrie directe, f est de l'un des quatre types suivants
  - (i) L'identité (tous les points sont fixes)
  - (ii) Une translation de vecteur non nul (pas de points fixes)
  - (iii) Une rotation (une droite de points fixes)
  - (iv) Un vissage c'est-à-dire la composée d'une rotation et d'une translation parallèle à l'axe (pas de point fixe).

- Si f est une isométrie indirecte, f est de l'un des trois types suivants
  - (i) Une antirotation (un unique point fixe)
  - (ii) Une symétrie par rapport à un plan (un plan de points fixes)
  - (iii) Une symétrie glissée c'est-à-dire la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan et d'une translation parallèle à l'axe de la symétrie (pas de points fixes).

Preuve. Soit f une isométrie affine **directe** de $\mathscr{E}$. On remarque que $\overrightarrow{f}$ est une isométrie directe de E. La classification des isométries d'un espace vectoriel euclidien assure alors que 1 est valeur propre de $\overrightarrow{f}$. En particulier, f ne peut avoir un unique point fixe.

Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ alors f est une translation et éventuellement l'identité si le vecteur de la translation est nul.

Si $\overrightarrow{f} \neq \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ alors on a vu que $\overrightarrow{f}$ est une rotation autour d'un axe donné par $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$. Si f a un point fixe (appelons le O) alors f est bien une rotation : on a $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{M})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$. De plus, l'ensemble des points fixes est la droite passant par O dirigée par $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$ (voir la proposition 145). On suppose à présent que f n'a pas de point fixe (et que $\overrightarrow{f} \neq \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$) et on veut montrer que f est un vissage.

On raisonne de façon très similaire à la preuve de la classification des isométries affines en dimension 2 (théorème 180). Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} \neq 0$ et on note $\tau_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On a $\tau_{-\overrightarrow{u}} \circ f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. De plus, l'application $g = \tau_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ est une isométrie directe dont A est un point fixe et vérifiant $\overrightarrow{g} \neq \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ puisque $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ (car $\overrightarrow{\tau_{-\overrightarrow{u}}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$).

On en déduit que g est une rotation dont l'axe est la droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{E}$ passant par A de direction $\mathrm{D} = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$. En particulier, D ne dépend pas du choix de A.

On a $f = \tau_u \circ g$. On décompose $\overrightarrow{u}$ suivant la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{D} \oplus \mathrm{D}^{\perp}$ [18] : on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in \mathrm{D}$ et $\overrightarrow{w} \in \mathrm{D}^{\perp}$. On a alors $f = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ (\tau_{\overrightarrow{w}} \circ g)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $g' = \tau_{\overrightarrow{w}} \circ g$ est une rotation dont l'axe est une droite de direction D. Or $\overrightarrow{g'} = \overrightarrow{g}$ (puisque la flèche d'une translation est l'identité), ainsi g' est une isométrie directe vérifiant $\overrightarrow{g'} = \overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} \neq \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Si elle a un point fixe, elle sera, d'après ce qui précède, une rotation d'axe la droite de direction $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g'} - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}) = \mathrm{D}$. Il suffit donc de montrer que g' a un point fixe.

Pour cela, on considère le plan $\mathscr{P}$ de direction $\mathrm{D}^{\perp}$ passant par A. Ce plan est stable par g et la restriction de g à ce plan est une rotation non triviale. Mais $\mathscr{P}$ est aussi stable par $\tau_{\overrightarrow{w}}$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \mathrm{D}^{\perp}$). On en déduit que $\mathscr{P}$ est stable par g' et que la restriction de g' à $\mathscr{P}$ est la composé d'une rotation plane non triviale et d'une translation. En particulier, la flèche de cette restriction n'est pas l'identité. D'après la classification des isométries affines d'un plan (théorème 180), on en déduit que la restriction de g' à $\mathscr{P}$ est une rotation et qu'elle a donc un (unique) point fixe. Ainsi, on a bien trouvé un point fixe de g'.

Soit f une isométrie affine **indirecte** de $\mathscr{E}$. D'après le théorème de réduction des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien de dimension 3 (proposition 71), il existe une base orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E dans laquelle la matrice de $\overrightarrow{f}$ est

$$\begin{bmatrix} -1 & & \\ & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

En particulier, si $\theta \neq 0[2\pi]$, 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$ et donc f a un unique point fixe. Appelons le O. On a alors pour tout M de $\mathscr{E}$, $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{M})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$: f est bien une antirotation.

18. Maintenant $\mathrm{D}^{\perp}$ est un plan

Si $\theta = 0[2\pi]$ alors $\overrightarrow{f}$ est la symétrie par rapport au plan $\mathrm{P} = \mathrm{vect}\,(e_2, e_3)$. Ainsi si f a un point fixe (on l'appelle O) alors f est la symétrie par rapport au plan $\mathscr{P}$ de direction P et passant par O puisque $\overrightarrow{\mathrm{O}f(\mathrm{M})} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{OM}})$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.

On suppose à présent que $\theta = 0[2\pi]$ et que f n'a pas de point fixe. On veut montrer que f est une symétrie glissée.

On raisonne de façon très similaire à la preuve de la classification des isométries affines en dimension 2 (théorème 180) ou à la preuve, vue plus haut, du fait qu'une isométrie affine directe dont la flèche n'est pas l'identité et qui n'a pas de point fixe est un vissage. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\mathrm{A}f(\mathrm{A})} \neq 0$ et on note $\tau_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. On a $\tau_{-\overrightarrow{u}} \circ f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$. De plus, l'application $g = \tau_{-\overrightarrow{u}} \circ f$ est une isométrie indirecte dont A est un point fixe et vérifiant $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ (car $\overrightarrow{\tau_{-\overrightarrow{u}}} = \mathrm{id_E}$).

On en déduit que g est la symétrie par rapport à un plan passant par A de direction $\mathrm{P} = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g} - \mathrm{id_E}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id_E})$. En particulier, P ne dépend pas du choix de A.

On a $f = \tau_u \circ g$. On décompose $\overrightarrow{u}$ suivant la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{P} \oplus \mathrm{P}^{\perp}$ [19] : on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec $\overrightarrow{v} \in \mathrm{P}$ et $\overrightarrow{w} \in \mathrm{P}^{\perp}$. On a alors $f = \tau_{\overrightarrow{v}} \circ (\tau_{\overrightarrow{w}} \circ g)$. Pour conclure, il suffit de montrer que $g' = \tau_{\overrightarrow{w}} \circ g$ est une symétrie par rapport à un plan de direction P. Or $\overrightarrow{g'} = \overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ (puisque la flèche d'une translation est l'identité), ainsi g' est une isométrie indirecte dont la flèche est la symétrie orthogonale vectorielle par rapport à P. Si g' a un point fixe, elle sera, d'après ce qui précède, une symétrie par rapport à un plan de $\mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g'} - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{g} - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(\overrightarrow{f} - \mathrm{id}) = \mathrm{P}$. Il suffit donc de montrer que g' a un point fixe.

Pour cela, on considère la droite $\mathscr{D}$ de direction $\mathrm{P}^{\perp}$ passant par A. Cette droite est stable par g (la restriction de g à cette droite est la symétrie par rapport à A. Mais $\mathscr{D}$ est aussi stable par $\tau_{\overrightarrow{w}}$ (puisque $\overrightarrow{w} \in \mathrm{P}^{\perp}$). On en déduit que $\mathscr{P}$ est stable par g' est que la restriction de g' est à $\mathscr{P}$ est la composé de la symétrie par rapport à A et d'une translation. En particulier, c'est une isométrie indirecte de $\mathscr{D}$ (composée d'une isométrie indirecte de $\mathscr{D}$ avec une isométrie directe). D'après la classification des isométries affines d'une droite (voir l'exemple 179), on en déduit que la restriction de g' à $\mathscr{P}$ est une symétrie par rapport à un point. Elle a donc unpoint fixe. Ainsi, on a bien trouvé un point fixe de g'.

Exercice 116 – Commutation symétrie et translation. Montrer qu'une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathscr{P}$ et une translation de vecteur $\overrightarrow{v}$ commutent si et seulement si $\overrightarrow{v}$ est dans la direction de $\mathscr{P}$.

Exercice 117 – Décomposition d'une isométrie en produit de réflexion. À l'aide de la classification, montrer qu'une isométrie peut s'écrire comme produit d'au plus quatre symétrie orthogonales par rapport à des plans.

Exercice 118 – Principe de conjugaison : le retour du retour. Soit r une rotation d'axe $\mathscr{D}$ et d'angle θ (resp. symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{P}$) et f une isométrie de $\mathscr{E}$. Montrer que $f \circ r \circ f^{-1}$ est une rotation (resp. symétrie) dont on précisera l'axe et l'angle (resp. le plan). Que se passe-t-il pour une symétrie glissée ? Pour un vissage ?

Exercice 119 – Caractérisation géométrique des symétries glissées. Montrer que les attributs géométriques d'une symétrie glissée sont bien définis : si $f = \tau_v \circ g$ où g est une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathscr{P}$ dont la direction contient v alors v et $\mathscr{P}$ sont entièrement définis (on pourra montrer que $\mathscr{P}$ est le seul plan stable par f). Montrer que g et τ_v commutent.

Exercice 120 – Caractérisation géométrique des vissages. Montrer que les attributs géométriques d'un vissage sont bien définis : si $f = \tau_v \circ g$ où g est une rotation par rapport à une droite $\mathscr{D}$ dont la direction contient v alors v et $\mathscr{D}$ sont-ils entièrement définis ?

Montrer que g et τ_v commutent. Plus généralement, montrer qu'une rotation par rapport à un axe $\mathscr{D}$ commute avec une translation de vecteur v si et seulement si v est dans la direction de $\mathscr{D}$.

Exercice 121 – Qu'est-ce qu'un cube ?. Dans les exercices qui suivent, le cube de référence sera le cube dont les sommets sont $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. On note aussi $\mathrm{O} = (0, 0, 0)$ l'origine de $\mathbb{R}^3$.

a) Que représente, du point de vue de la géométrie affine, l'origine O par rapport au sommet du cube ?

b) Déterminer l'équation des (plans contenant les) faces du cube puis celles des arêtes (au fait, c'est

19. Maintenant $\mathrm{P}^{\perp}$ est une droite.

quoi une arête ?).

Exercice 122 — Isométrie du cube version 1.

a) Déterminer les différentes distances possibles entre deux sommets du cube.

b) En déduire qu'une isométrie du cube envoie un couple de sommets symétrique par rapport à O sur un autre couple ou encore une grande diagonale du cube sur une autre.

c) Que dire d'une isométrie du cube qui envoie toutes les grandes diagonales du cube sur elles-mêmes ?

d) Vérifier qu'une isométrie du cube permute les grandes diagonales du cube.

e) Quelle permutation peut-on obtenir ? Et si on se restreint aux isométries directes ?

f) Déterminer les réalisations géométriques des isométries du cube.

Exercice 123 — Isométrie du cube version 2.

a) Déterminer les différentes distances possibles entre deux sommets du cube.

b) En déduire qu'une isométrie du cube envoie une arête sur une arête.

c) Déterminer les coordonnées des vecteurs portant les arêtes du cube.

d) En déduire les matrices des isométries du cube.

e) À chaque matrice, donner la transformation géométrique correspondante.

Exercice 124 — Géométrie dans le cube.

a) Deux grandes diagonales du cube sont-elles orthogonales ? Sinon, déterminer leur angle.

b) On considère les triangles dont les trois sommets du cube. Combien de types de tels triangles à isométrie près existe-t-il ? Quels sont ces types ? Combien y a-t-il de triangles de chaque type ?

c) Déterminer les patrons du cube, à isométrie près ; à isométrie directe près.

d) Déterminer la distance en restant sur les faces du cube entre les points $(1,1,1)$ et $(-1,0,-1)$.

5.3 Angle non orienté

Définition 182 — Angle non orienté de demi-droites. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit d, d' deux demi-droites de E. L'angle non orienté de (d, d') est la classe d'équivalence de (d, d') pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(d, d')\mathscr{R}(d_1, d_1') \iff \exists f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \quad \text{avec} \quad f(d) = d_1 \text{ et } f(d') = d_1'.$$

Définition 183 — Angle non orienté de droites. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit D, D' deux droites de E. L'angle non orienté de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ est la classe d'équivalence de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(\mathrm{D}, \mathrm{D}')\mathscr{R}(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_1') \iff \exists f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \quad \text{avec} \quad f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}_1 \text{ et } f(\mathrm{D}') = \mathrm{D}_1'.$$

Définition 184 — Angle non orienté de vecteurs unitaires. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}$ deux vecteurs unitaires de E. L'angle non orienté de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ est la classe d'équivalence de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})\mathscr{R}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) \iff \exists f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \quad \text{avec} \quad f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \text{ et } f(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}.$$

Ainsi par définition les isométries conservent les angles non orientés ! Et un angle est simplement un ensemble de couples (de droites, de demi-droites ou de vecteurs unitaires) tel que je peux envoyer le premier couple sur le deuxième par une isométrie ou de façon équivalente si les deux couples sont superposables.

On commence par se simplifier l'étude en remarquant que angle de demi-droites et angle de vecteurs unitaires sont très simplement liés puisque demi-droites et vecteurs unitaires le sont : c'est le sens du lemme suivant. Pour le cas des droites, il faudrait faire plus attention.

Lemme 185 – Demi-droite, vecteur unitaire. Soit E un espace vectoriel euclidien. On a deux bijections réciproque l'une de l'autre entre l'ensemble des vecteurs unitaires de E et l'ensemble des demi-droites de E. Elles sont données par

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Vecteurs unitaires de E}\} & \longleftrightarrow & \{\text{demi-droites de E}\} \\ \overrightarrow{u} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ u \\ \overrightarrow{v}/\|\overrightarrow{v}\| & \longleftarrow & d = \mathbb{R}_+ v \end{array}$$

De plus si f est une isométrie alors $f(d) = d'$ si et seulement si $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u'}$ où u et u' sont les vecteurs unitaires correspondant à d et d'.

On en déduit une bijection entre les angles non orientés de vecteurs unitaires et les angles non orientés de demi-droites.

Définition 186 – Angle non orienté de vecteurs. Soit E un espace vectoriel euclidien (de dimension 2 ou 3). Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}$ deux vecteurs de E. On définit l'angle non orienté de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ comme l'angle non orienté de $(\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|, \overrightarrow{u'}/\|\overrightarrow{u'}\|)$.

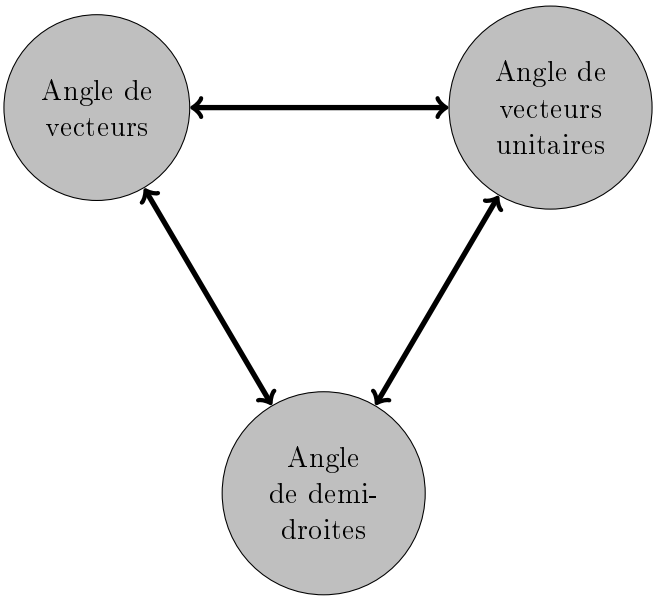
Remarque 187 – Attention. L'angle de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ n'est pas la classe d'équivalence de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})\mathscr{R}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) \iff \exists f \in \mathcal{O}(\mathrm{E}) \quad \text{avec} \quad f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \text{ et } f(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}.$$

Car on veut pouvoir dire que l'angle de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ est le même que celui de $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'})$ même si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ n'ont pas la même norme.

On vérifie alors simplement que les isométries conservent aussi les angles de vecteurs.

Ainsi, les trois notions d'angles non orientés de vecteurs, de vecteurs unitaires et de demi-droites sont en fait la même.



Notation 188 – Angle non orienté. Pour désigner les angles non orientés, on utilisera la notation $\overline{}$: $\overline{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})}$ désigne l'angle non orienté du couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ c'est-à-dire la classe d'équivalence ou encore l'ensemble des couples équivalent à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$.

Remarque 189 – Conservation des angles. Comme on l'a déjà écrit, par définition, les isométries conservent les angles non orientés.

5.3.1 Le problème des angles non orientés.

La question centrale est de déterminer un critère pour savoir quand deux angles sont égaux. Par exemple avec des angles de demi-droites savoir que l'angle de (d, d') et le même que celui de (d_1, d'_1)

revient à savoir s'il existe une isométrie qui envoie d sur d_1 et dans le même temps d' sur d'_1. Finalement, nous sommes donc à la recherche de critères pour construire des isométries envoyant certaines demi-droites sur d'autres.

Dans la suite, on s'intéressera aux angles non orientés de vecteurs unitaires.

Remarque 190 — Le critère numérique. Soit E un espace vectoriel euclidien et (u, u') deux vecteurs unitaires. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz (proposition 38), on a

$$-1 = -\|u\|\|u'\| \leqslant \langle u, u'\rangle \leqslant \|u\|\|u'\| = 1.$$

Il existe donc un unique nombre θ compris entre 0 et π tel que $\langle u, u'\rangle = \cos(\theta)$ (c'est évidemment $\theta = \arccos\langle u, u'\rangle$). Ce nombre θ dépend bien entendu du couple (u, u'). Lorsqu'on aura besoin de spécifier cette dépendance, on écrira $\theta_{u,u'}$.

Il s'avère que le nombre $\theta_{u,u'}$ est caractéristique de l'angle : ainsi l'existence d'une isométrie vérifiant certaines propriétés se résume à l'égalité entre deux nombres (compris entre $[0, \pi]$). De façon précise, on a la proposition suivante.

Théorème 191 — Angle non orienté. Soit (u, u') et (v, v') deux couples de vecteurs unitaires de E, on a

$$\overline{(u, u')} = \overline{(v, v')} \iff \theta_{u,u'} = \theta_{v,v'}$$

De façon plus précise, on a les équivalences

(i) il existe $f \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$, $f(u) = v$ et $f(u') = v'$;
(ii) $\overline{(u, u')} = \overline{(v, v')}$;
(iii) $\langle u, u'\rangle = \langle v, v'\rangle$;
(iv) $\theta_{u,u'} = \theta_{v,v'}$.

Preuve. On a évidemment $(i) \Leftrightarrow (ii)$ (c'est la définition des angles) et $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ (car cos et arccos sont deux bijections inverse l'une de l'autre entre $[0, \pi]$ et $[0, 1]$). Il s'agit de faire le lien entre (i) et (iii).

L'implication $(i) \Rightarrow (iii)$ repose simplement sur la conservation du produit scalaire par les isométries. Comme f est une isométrie, on a

$$\langle v, v'\rangle = \langle f(u), f(u')\rangle = \langle u, u'\rangle$$

Cela montre que la quantité $\langle u, u'\rangle$ ou $\theta_{u,u'}$ ne dépend que de la classe d'équivalence de (u, u') modulo la relation $\mathscr{R}$ c'est-à-dire de l'angle de (u, u').

Montrons que $(iv) \Rightarrow (ii)$. Il s'agit de construire une isométrie vérifiant certaines conditions. Le lemme 78 nous permet de le faire lorsqu'on dispose de base orthonormée. Or justement ici, la famille (u, u') n'est pas orthonormée. C'est le procédé de Gram-Schmidt (proposition 80) qui va nous permettre de nous y ramener.

On considère donc u, u', v, v' quatre vecteurs unitaires de E tels que $\langle u, u'\rangle = \langle v, v'\rangle$. On veut montrer qu'il existe une isométrie f telle que $f(u) = v$ et $f(u') = v'$.

Si (u, u') est une famille liée alors $u = u'$ ou $u = -u'$. Dans le premier cas, on a $\langle u, u'\rangle = \langle v, v'\rangle = 1$ et donc $v = v'$ par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Dans le deuxième cas, on a $\langle u, u'\rangle = \langle v, v'\rangle = -1$ et donc $v = -v'$ par le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Or, d'après le corollaire 81 il existe une isométrie qui envoie u sur v. Par linéarité, une telle isométrie envoie, dans chacun des deux cas, u' sur v'.

Examinons à présent le cas où (u, u') est une famille libre et donc $|\langle u, u'\rangle| < 1$. On a alors $|\langle v, v'\rangle| < 1$ et donc (v, v') est aussi une famille libre. On complète alors chacune des deux familles (u, u') et (v, v') en deux bases de E qu'on orthonormalise suivant le procédé de Gram-Schmidt. On obtient ainsi deux bases orthonormées $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n)$ avec

$$\varepsilon_1 = u, \quad \varepsilon_2 = \frac{u' - \langle u, u'\rangle u}{\|u' - \langle u, u'\rangle u\|}, \quad \varepsilon'_1 = v, \quad \varepsilon'_2 = \frac{v' - \langle v, v'\rangle v}{\|v' - \langle v, v'\rangle v\|}$$

D'après le lemme 78, il existe une isométrie f qui envoie ε_i sur ε'_i pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Vérifions alors que $f(u) = v$ et $f(u') = v'$. Comme $\varepsilon_1 = u$ et $\varepsilon'_1 = v$, on a $f(u) = v$. Par ailleurs, comme u, u', v, v' sont unitaires, on a

$$\|u' - \langle u, u'\rangle u\|^2 = 1 - \langle u, u'\rangle^2 = 1 - \langle v, v'\rangle^2 = \|v' - \langle v, v'\rangle v\|^2$$

La relation $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2'$ donne alors $f(u') - \langle u, u'\rangle f(u) = v' - \langle v, v'\rangle v$ et donc $f(u') = v'$ puisque $\langle u, u'\rangle = \langle v, v'\rangle$ et $f(u) = v$.

La proposition précédente donne immédiatement le cas des angles non orientés de demi-droites grâce à la bijection du lemme 185.

Proposition 192 – Angle non orienté de demi-droites. Soient (d, d') deux demi-droites de E. Soit $u \in \mathrm{D} \smallsetminus \{0\}$ et $u' \in \mathrm{D}' \smallsetminus \{0\}$. La quantité $\theta_{d,d'} = \arccos(\langle u, u'\rangle / \|u\|\|u'\|)$ ne dépend pas du choix des vecteurs de u et u' sur les demi-droites d et d'.

De plus, si (d_1, d_1') est une autre paire de demi-droites de E, on a

$$\overline{(d, d')} = \overline{(d_1, d_1')} \iff \theta_{d,d'} = \theta_{d_1,d_1'}\,.$$

Preuve. Il suffit de considérer les vecteurs unitaires dirigeant d, d', d_1 et d_1' et d'utiliser le résultat précédent.

Le gros du travail a été fait dans le théorème 191, on en déduit rapidement le cas des angles non orientés de droites : un angle non orienté de droite est caractérisé par un nombre entre $[\,0\,, \pi/2\,]$.

Proposition 193 – Angle non orienté de droites. Soient $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ deux droites de E. Soit $u \in \mathrm{D} \smallsetminus \{0\}$ et $u' \in \mathrm{D}' \smallsetminus \{0\}$. La quantité $\theta_{\mathrm{D},\mathrm{D}'} = \arccos(|\langle u, u'\rangle| / \|u\|\|u'\|)$ ne dépend pas du choix des vecteurs de u et u' sur les droites D et D′.

De plus, si $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_1')$ est une autre paire de demi-droites de E, on a

$$\overline{(\mathrm{D}, \mathrm{D}')} = \overline{(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_1')} \iff \theta_{\mathrm{D},\mathrm{D}'} = \theta_{\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1'}\,.$$

Preuve. Lorsqu'on remplace u par λu avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{|\langle \lambda u, u'\rangle|}{\|\lambda u\|\|u'\|} = \frac{|\lambda|\,\langle u, u'\rangle}{|\lambda|\,\|u\|\|u'\|} = |\langle u, u'\rangle| / \|u\|\|u'\|\,.$$

On obtient une égalité analogue en changeant u' en $\mu u'$ avec $\mu \in \mathbb{R}^*$

Montrons à présent l'équivalence souhaitée.

(⇒) Soit f une isométrie telle que $f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}_1$ et $f(\mathrm{D}') = \mathrm{D}_1'$. On choisit alors un vecteur unitaire u sur D et u' un vecteur unitaire sur D′. Alors $f(u)$ est un vecteur unitaire (car f est une isométrie) sur D_1 (car $f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}'$). De même, $f(u')$ est un vecteur unitaire sur D_1'. On a alors

$$\theta_{\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1'} = |\langle f(u), f(u')\rangle| = |\langle u, u'\rangle| = \theta_{\mathrm{D},\mathrm{D}'}.$$

(⇐) Soient u et u' des vecteurs unitaires sur D et D′ et v et v' des vecteurs unitaires sur D_1 et D_1'. Par hypothèse, on a

$$\langle u, u'\rangle = \langle v, v'\rangle \qquad \text{ou} \qquad \langle u, u'\rangle = -\langle v, v'\rangle = \langle v, -v'\rangle.$$

Dans le premier cas, le théorème 191 donne une isométrie qui envoie u sur v et u' sur v' et donc D sur D_1 et D′ sur D_1'. Dans le deuxième cas, ce même théorème 191 donne une isométrie qui envoie u sur v et u' sur $-v'$ et donc D sur D_1 et D′ sur D_1'. Dans les deux cas, on a bien $\overline{(\mathrm{D}, \mathrm{D}')} = \overline{(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_1')}$.

Les résultats qui précèdent (théorème 191 et proposition 193) se résume de façon imprécise en : un angle non orienté de demi-droites revient à la donnée d'un nombre compris entre -1 et 1 ou d'un nombre entre 0 et π ; un angle non orienté de droites revient à la donnée d'un nombre compris entre 0 et 1 ou d'un nombre entre 0 et $\pi/2$.

Remarque 194 – Inversion de l'ordre. Grâce à la symétrie du produit scalaire, on obtient que $\overline{(d, d')} = \overline{(d', d)}$ puisque $\theta_{d,d'} = \theta_{d',d}$ (que d et d' soient des demi-droites de E ou des droites de E).

Cette égalité $\overline{(d, d')} = \overline{(d', d)}$ peut s'obtenir directement en considérant la symétrie s par rapport à $(u - u')^\perp$ où u et u' sont des vecteurs unitaires directeurs de d et d' : on vérifie que s est donnée par

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad s(x) = x - 2\frac{\langle u - u', x\rangle}{\|u - u'\|^2}(u - u')$$

En effet, l'expression donnée ci-dessus vérifie bien $s(x) = x$ si x est orthogonal à $u - u'$ et $s(u - u') = u' - u$. On calcule alors

$$s(u) = u - 2\frac{\langle u - u', u\rangle}{\|u - u'\|^2}(u - u') = u - 2\frac{1 - \langle u, u'\rangle}{1 - 2\langle u, u'\rangle + 1}(u - u') = u - (u - u') = u'\,.$$

et de même $s(u') = s \circ s(u) = u$. On a donc trouvé s une isométrie qui envoie d sur d' et d' sur d ce qui signifie bien $\overline{(d, d')} = \overline{(d', d)}$.

Exercice 125 — Cube. Soit ABC trois sommets d'un cube. Déterminer les valeurs possibles pour l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$.

5.4 Angles orientés

On comparera les définitions qui suivent à leur équivalent non orienté.

Définition 195 — Angle orienté de demi-droites. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit d, d' deux demi-droites de E. L'angle orienté de (d, d') est la classe d'équivalence de (d, d') pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(d, d')\mathscr{R}(d_1, d_1') \iff \exists f \in \mathcal{SO}(\mathrm{E}) \quad \text{avec} \quad f(d) = d_1 \text{ et } f(d') = d_1'.$$

Définition 196 — Angle orienté de droites. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit D, D' deux droites de E. L'angle orienté de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ est la classe d'équivalence de $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$ pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(\mathrm{D}, \mathrm{D}')\mathscr{R}(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_1') \iff \exists f \in \mathcal{SO}(\mathrm{E}) \quad \text{avec} \quad f(\mathrm{D}) = \mathrm{D}_1 \text{ et } f(\mathrm{D}') = \mathrm{D}_1'.$$

Définition 197 — Angle orienté de vecteurs unitaires. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}$ deux vecteurs unitaires de E. L'angle orienté de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ est la classe d'équivalence de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie par

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})\mathscr{R}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}) \iff \exists f \in \mathcal{SO}(\mathrm{E}) \quad \text{avec} \quad f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} \text{ et } f(\overrightarrow{u'}) = \overrightarrow{v'}.$$

Définition 198 — Angle orienté de vecteurs unitaires. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}$ deux vecteurs de E. L'angle orienté de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ est l'angle orienté de $(\overrightarrow{u}/\|\overrightarrow{u}\|, \overrightarrow{u'}/\|\overrightarrow{u'}\|)$.

Remarque 199 — Demi-droites, vecteurs unitaires et vecteurs. Le lemme 185 assure l'existence d'une bijection naturelle entre les angles orientés de demi-droite et les angles orientés de vecteurs unitaires. Et par définition, on a une bijection entre les angles de vecteurs et les angles de vecteurs unitaires. Ainsi, les trois concepts qu'on vient de définir sont équivalents.

Remarque 200 — Conservation des angles. Par définition, les isométries directes conservent les angles orientés.

Notation 201 Pour désigner les angles orientés, on utilisera la notation $\widehat{\ }$: $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})}$ désigne l'angle orienté du couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ c'est-à-dire la classe d'équivalence ou encore l'ensemble des couples équivalent à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$.

5.4.1 Angles orientés en dimension 3

Au contraire de la dimension 2 où la notion d'angle orientée est extrêmement riche (grâce à la commutativité de $\mathcal{SO}_2$), en dimension 3, la situation est très simple : angles orientés et angles non orientés coïncident (parce qu'on peut composer par la symétrie par rapport à un plan contenant les deux vecteurs unitaires du couple que l'on considère).

Proposition 202 — Angle orienté de demi-droites en dimension 3. Soient (d, d') et (d_1, d_1') quatre demi-droites de E. On a $\widehat{(d, d')} = \overline{(d, d')}$. De façon équivalente,

$$\widehat{(d, d')} = \widehat{(d_1, d_1')} \iff \overline{(d, d')} = \overline{(d_1, d_1')} \iff \theta_{d,d'} = \theta_{d_1,d_1'}.$$

Preuve. Une isométrie directe qui envoie d sur d_1 et d' sur d_1' est en particulier une isométrie. Ainsi

$$\widehat{(d, d')} = \widehat{(d_1, d_1')} \implies \overline{(d, d')} = \overline{(d_1, d_1')}$$

Réciproquement on suppose que $\overline{(d, d')} = \overline{(d_1, d_1')}$. Il existe donc une isométrie f envoyant d sur d_1 et d' sur d_1'. Si f est directe alors on a bien $\widehat{(d, d')} = \widehat{(d_1, d_1')}$. Si f est indirecte, on pose $g = s \circ f$ où s qui est la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par d_1 et d_1'. L'isométrie g est directe et envoie d sur d_1 et d' sur d_1'.

L'équivalence $\overline{(d,d')} = \overline{(d_1,d_1')} \iff \theta_{d,d'} = \theta_{d_1,d_1'}$ est quant à elle simplement le théorème 191.

Proposition 203 – Angle orienté de droites en dimension 3. Soient (D,D') et $(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')$ quatre droites de E. On a les équivalences

$$\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \widehat{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')} \iff \overline{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \overline{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')} \iff \theta_{\mathrm{D},\mathrm{D}'} = \theta_{\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1'}\,.$$

Preuve. Une isométrie directe qui envoie D sur D_1 et D' sur D_1' est en particulier une isométrie. Ainsi

$$\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \widehat{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')} \implies \overline{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \overline{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')}$$

Réciproquement on suppose que $\overline{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \overline{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')}$. Il existe donc une isométrie f envoyant D sur D_1 et D' sur D_1'. Si f est directe alors on a bien $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \widehat{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')}$. Si f est indirecte, on pose $g = s \circ f$ où s qui est la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par D_1 et D_1'. L'isométrie g est directe et envoie D sur D_1 et D' sur D_1'.

L'équivalence $\overline{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \overline{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')} \iff \theta_{\mathrm{D},\mathrm{D}'} = \theta_{\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1'}$ est quant à elle simplement la proposition 193.

Exercice 126 Calculer les angles entre les différentes droites ou demi-droites d'un cube (arêtes, grandes diagonales, diagonales des faces) et d'un tétraèdre régulier.

5.4.2 Le cas des angles orientés dans le plan.

L'étude des angles non orientés et des angles orientés dans les espaces de dimension supérieure à 3 assure qu'un angle peut se résumer par un nombre (entre 0 et π pour les angles de vecteurs (demi-droites, unitaires) et entre 0 et $\pi/2$ pour des angles de droites). Le cas des angles orientés de vecteurs unitaires dans le plan est plus complexe : ce n'est pas un nombre qui résume un angle mais une rotation : l'unique rotation qui fait passer du premier vecteur du couple au deuxième. On commence donc par montrer qu'étant donné un couple de vecteurs unitaires, il existe bien une unique rotation qui envoie le premier vecteur sur le deuxième : c'est le lemme suivant.

Lemme 204 Soit (u,u') un couple de vecteurs unitaires de E. Alors il existe une unique rotation f (c'est-à-dire un unique élément f de $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$) tel que $f(u) = u'$.

Preuve. D'après le corollaire 81, il existe v tel que (u,v) soit une base orthonormée de E. De même, il existe v' tel que (u',v') soit une base orthonormée de E[20]

Le lemme 78 permet construire deux isométries f et f' qui envoient u sur u' de la façon suivante : on pose $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$ ou $f'(u) = u'$ et $f'(v) = -v'$. L'une des deux à pour déterminant 1 et l'autre pour déterminant -1 (en fait, on a $f' = s \circ f$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}u'$). On en déduit l'existence d'une isométrie directe qui envoie u sur u' (et d'ailleurs aussi l'existence d'une isométrie indirecte qui envoie u sur u').

Démontrons à présent l'unicité. Soient f et f' deux isométries directes vérifiant $f(u) = u'$ et $f'(u) = u'$. Alors u est vecteur propre pour la valeur propre 1 de $f'^{-1} \circ f$. La proposition 67 assure qu'une rotation qui admet 1 comme valeur propre est id_E. On en déduit que $f = f'$.

On montre à présent que l'angle orienté d'un couple de vecteurs unitaires est caractérisé par la rotation qui lui est associé. Cette caractérisation résulte de façon fondamentale de la commutativité du groupe $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$.

Proposition 205 – Caractérisation des angles. Soit (u,u') un couple de vecteurs unitaires de E. On note $r_{u,u'}$ l'unique rotation qui envoie u sur u'. Soit (v,v') un couple de vecteurs unitaires de E. On a

$$\widehat{(u,u')} = \widehat{(v,v')} \iff r_{u,u'} = r_{v,v'}.$$

Preuve. (⇒) Par hypothèse, il existe $g \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ tel que $gu = v$ et $gu' = v'$. Par ailleurs, on a $r_{u,u'}u = u'$ et donc

$$v' = g(u') = g \circ r_{u,u'}(u) = g \circ r_{u,u'} \circ g^{-1}(v)\,.$$

Ainsi, $g \circ r_{u,u'} \circ g^{-1}$ est une isométrie directe qui envoie v sur v'. Par unicité, on a $r_{v,v'} = g \circ r_{u,u'} \circ g^{-1}$. Comme $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ est commutatif, on en déduit que $r_{v,v'} = r_{u,u'}$.

20. en dimension 2, il n'est pas nécessaire d'invoquer Gram-Schmidt : il suffit de considérer v un vecteur unitaire de la droite orthogonale à $\mathbb{R}u$.

(⇐) On cherche une isométrie directe telle que $gu = v$ et $gu' = v'$. D'après le lemme, il existe une (unique) isométrie directe g telle que $gu = v$. On veut montrer que $gu' = v'$. Mais $u' = r_{u,u'}u$ et $v' = r_{v,v'}v$. On a donc $g(u') = g \circ r_{u,u'}(u)$. Mais $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ est commutatif donc $g(u') = r_{u,u'} \circ g(u) = r_{u,u'}v$ Or $r_{u,u'} = r_{v,v'}$ donc $g(u') = r_{v,v'}v = v'$.

Finalement, dans le plan, un angle orienté de demi-droites (ou de vecteurs unitaires) revient à la donnée de la rotation qui envoie la première demi-droite sur la deuxième. Ainsi, finalement comme un angle s'identifie une rotation, on peut définir une addition des angles qui correspond à la composition des rotations. De façon plus précise, on a la définition suivante.

Définition 206 – Groupe des angles orientés. Pour $\widehat{(u,u')}$ et $\widehat{(v,v')}$ deux angles orientés de vecteurs unitaires, on définit l'angle somme de $\widehat{(u,u')}$ et $\widehat{(v,v')}$ comme

$$\widehat{(u,u')} + \widehat{(v,v')} = (w, \widehat{r_{v,v'} \circ r_{u,u'}}(w)) .$$

Lemme 207 L'addition de vecteur est bien définie et les angles orientés forment une groupe pour $+$.

L'application $\mathrm{A} \colon \widehat{(u,u')} \mapsto r_{u,u'}$ est un isomorphisme entre le groupe des angles orientés dans le plan et le groupe $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$.

Preuve. Si on a $\widehat{(u,u')} = \widehat{(u_1,u_1')}$ et $\widehat{(v,v')} = \widehat{(v_1,v_1')}$, on a $r_{u,u'} = r_{u_1,u_1'}$ et $r_{v,v'} = r_{v_1,v_1'}$. Ainsi $r_{v,v'} \circ r_{u,u'} = r_{v_1,v_1'} \circ r_{u_1,u_1'}$ et $(w, \widehat{r_{v,v'} \circ r_{u,u'}}(w)) = (w, \widehat{r_{v_1,v_1'} \circ r_{u_1,u_1'}}(w))$. La somme des angles ne dépend donc pas des représentants choisis. Par ailleurs, si on change w en un autre vecteur unitaire w', on a bien sûr

$$(w, \widehat{r_{v,v'} \circ r_{u,u'}}(w)) = (w', \widehat{r_{v,v'} \circ r_{u,u'}}(w'))$$

d'après le sens réciproque de la proposition 205. Ainsi l'addition est bien définie sur les angles.

L'opération $+$ est associative car la composition des rotations est associative : on a

$$(\widehat{(u,u')} + \widehat{(v,v')}) + \widehat{(w,w')} = (x, \widehat{r_{v,v'} \circ r_{u,u'}}(x)) + \widehat{(w,w')} = (x, \widehat{r_{w,w'} \circ r_{v,v'} \circ r_{u,u'}}(x))$$

et $$\widehat{(u,u')} + (\widehat{(v,v')} + \widehat{(w,w')}) = \widehat{(u,u')} + (x, \widehat{r_{w,w'} \circ r_{v,v'}}(x)) = (x, \widehat{r_{w,w'} \circ r_{v,v'} \circ r_{u,u'}}(x)) .$$

L'opération $+$ est commutative car $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ l'est :

$$\widehat{(u,u')} + \widehat{(v,v')} = (x, \widehat{r_{v,v'} \circ r_{u,u'}}(x)) = (x, \widehat{r_{u,u'} \circ r_{v,v'}}(x)) = \widehat{(v,v')} + \widehat{(u,u')} .$$

L'élément neutre est $\widehat{(u,u)} = (u, \widehat{\mathrm{id}_{\mathrm{E}}(u)})$ puisque

$$\widehat{(v,v')} + \widehat{(u,u)} = (v, \widehat{r_{v,v'} \mathrm{id}_{\mathrm{E}}}(v)) = \widehat{(v,v')} .$$

La deuxième égalité résulte de la définition de la somme en prenant $w = v$: on a vu qu'on pouvait choisir le premier vecteur du couple comme on le souhaitait. Ainsi $\widehat{(u,u)}$ est un élément neutre à droite pour $+$. Comme $+$ est commutative, c'est aussi un élément neutre à gauche et donc un élément neutre pour $+$.

L'opposé de $\widehat{(u,v)}$ est $\widehat{(v,u)}$ car la composée de la rotation qui envoie u sur v avec la rotation qui envoie v sur u est la rotation qui envoie u sur u c'est-à-dire id_{E}.

Enfin, d'après la proposition 205, l'application A est bien définie et injective (le fait qu'elle soit bien définie relève du sens direct, l'injectivité de la réciproque). C'est un morphisme de groupe par la définition même de la loi $+$. Enfin, la surjectivité de A résulte du fait que $\mathrm{A}(u, r(u)) = r$ pour tout $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$.

Propriété 208 Soit (u, v, w, u', v') cinq vecteurs unitaires de E et s est une isométrie indirecte de E. On a les relations suivantes

(*i*) $\widehat{(u,v)} + \widehat{(v,w)} = \widehat{(u,w)}$ (cette propriété est appelée relation de Chasles)

(*ii*) $(\widehat{s(u), s(v)}) = -\widehat{(u,v)}$ (une isométrie indirecte change un angle orienté en son opposé)

(*iii*) $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')} \iff \widehat{(u,u')} = \widehat{(v,v')}$.

Preuve.

(*i*) La composée de la rotation qui envoie sur u sur v avec celle qui envoie v sur w est la rotation qui envoie u sur w.

(*ii*) Soit f l'isométrie directe qui envoie u sur v. On a $(s \circ f \circ s^{-1})(s(u)) = s \circ f(u) = s(v)$. Mais $s \circ f \circ s^{-1}$ est une isométrie directe. C'est donc l'isométrie directe qui envoie $s(u)$ sur $s(v)$. Mais $s \circ f$ est une isométrie indirecte, c'est donc, comme s, une symétrie axiale (voir la proposition 66). Ainsi $(s \circ f) \circ (s \circ f) = \mathrm{id}$ et donc $s \circ f \circ s^{-1} = f^{-1}$ et envoie donc v sur u.

(*iii*) Bien entendu, le sens direct implique la réciproque. Il suffit de montrer le sens direct. Or on a

$$\widehat{(u,u')} = \widehat{(u,v)} + \widehat{(v,v')} + \widehat{(v',u')} = \widehat{(u,v)} + \widehat{(v,v')} - \widehat{(u',v')} = \widehat{(u,v)} - \widehat{(u,v)} + \widehat{(v,v')}\,.$$

5.4.3 Bissectrice de demi-droites, angle moitié, angle droit

La notion de bissectrice est naturellement reliée à celle de symétrie orthogonale (on retrouve ici la façon dont on a défini la bissectrice au chapitre 1, voir la proposition 21). Les résultats qui suivent présentent ce lien.

Lemme 209 – Une écriture simple d'une symétrie orthogonale. Soit u un vecteur unitaire de E. La symétrie orthogonale par rapport à la droite orthogonale à u s'écrit

$$s(x) = x - 2\langle u, x\rangle u\,.$$

Preuve. En effet, si x est orthogonal à u, on a bien $s(x) = x$. De plus, $s(u) = u - 2u = -u$. Ainsi s coïncide bien avec la symétrie orthogonale sur la droite engendré par u et son orthogonal et donc partout.

Remarque 210 Si $u \neq 0$ n'est pas unitaire, la symétrie orthogonale par rapport à la droite orthogonale à u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite orthogonale au vecteur unitaire $u/\|u\|$, on a donc

$$s(x) = x - 2\frac{\langle u, x\rangle}{\|u\|^2}u\,.$$

Proposition 211 Soient u, u' deux vecteurs unitaires de E, il existe une unique symétrie orthogonale qui envoie u sur u'.

Lorsque u et u' ne sont pas égaux, c'est la symétrie par rapport à la droite portée par $u + u'$ qui est orthogonale à la droite portée par $u - u'$.

Preuve. Commençons par montrer l'unicité. Si s et s' sont deux telles symétries orthogonales alors $s'^{-1} \circ s(u) = u$. Ainsi $s'^{-1} \circ s$ est une isométrie directe qui admet 1 comme valeur propre, c'est donc id_{E} (proposition 67).

Dans la preuve du lemme 204, on a vu qu'il existe une telle isométrie indirecte.

De façon plus précise, si $u \neq u'$, la symétrie [21] définie par

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad s(x) = x - 2\frac{\langle x, u - u'\rangle}{\|u - u'\|^2}(u - u')$$

vérifie $s(u) = u - 2\dfrac{\|u\|^2 - \langle u, u'\rangle}{\|u\|^2 + \|u'\|^2 - 2\langle u, u'\rangle}(u - u') = u - (u - u') = u'$ puisque u et u' sont unitaires.

Définition 212 – Bissectrice. On appelle bissectrices d'un couple de demi-droites (d, d') (ou de vecteurs unitaires (u, u')) [22] les deux demi-droites opposées qui forment l'axe de la symétrie qui envoie d sur d'. Elles sont portés par $u + u'$ et $-(u + u')$ où u est le vecteur unitaire de d et u' celui de d'.

On fait à présent le lien entre bissectrice et angle moitié. Avant de faire le lien, on étudie plus précisément les équations $2x = z$ où y est fixé et x l'inconnue dans le groupe A. De façon précise, on fixe un angle (disons $\widehat{(u,u')}$) et on s'intéresse dans le groupe des angles à l'équation $2x = \widehat{(u,u')}$ d'inconnue x. Combien y a-t-il de solutions ? Quelles sont-elles ? Comment les décrire ?

Remarque 213 – Nombre de solutions. Si x et y sont deux solutions alors $2x = 2y$ et donc $2(x - y) = 0$. Ainsi $y = x + z$ où z est solution de l'équation $2z = 0$. Inversement si x est une solution de $2x = \widehat{(u,u')}$ et z une solution de $2x = 0$, on a $x + z$ qui est solution de $2x = \widehat{(u,u')}$. Ainsi, toutes

21. voir le lemme 209 pour justifier qu'il s'agit de la symétrie par rapport à la droite orthogonale à $u - u'$

22. Ainsi, en toute rigueur, on ne parle pas de bissectrice d'un angle.

les équations du type $2x = \widehat{(u,u')}$ qui ont au moins une solution ont le même nombre de solutions : le nombre de solutions de l'équation $2x = 0$.

La remarque précédente incite à nous intéresser pour commencer à l'équation $2x = 0$. En utilisant l'isomorphisme A, cette équation se transforme dans $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ en $f^2 = \mathrm{id}$. Mais f est alors diagonalisable puisqu'elle annule le polynôme $\mathrm{X}^2 - 1$ scindé à racines simples. En particulier, elle a des valeurs propres et donc (proposition 67) $f = \pm\mathrm{id}$ (qui vérifient tous les deux $f^2 = \mathrm{id}$). Il y a donc deux solutions. Dans le groupe des angles, elles deviennent l'angle nul $\widehat{(u,u)}$ et l'angle plat $\widehat{(u,-u)} = \widehat{(u,-\mathrm{id}(u))}$ (c'est l'unique solution non nulle de l'équation $2x = 0$ dans le groupe des angles).

Montrons maintenant que l'équation $2x = \widehat{(u,u')}$ admet toujours au moins une solution. Soit s la symétrie orthogonale qui envoie u sur u' et v un vecteur directeur de la droite de points fixes de s.

Montrons que $2\widehat{(u,v)} = \widehat{(u,u')}$. On a $\widehat{(u,u')} = \widehat{(u,v)} + \widehat{(v,u')}$. Mais

$$\widehat{(v,u')} = -\widehat{(u',v)} = \widehat{(s(u'),s(v))} = \widehat{(u,v)}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Proposition-Définition 214 — Bilan. Soit $\widehat{(u,u')}$ un angle orienté de vecteurs unitaires. L'équation $2x = \widehat{(u,u')}$ admet deux solutions qui diffèrent d'un angle plat. On peut les écrire sous la forme $\widehat{(u,v)}$ et $\widehat{(u,-v)}$ où v est un vecteur unitaire porté par la droite $\mathbb{R}(u+u')$. Les demi-droites correspondantes à v et $-v$ sont les bissectrices de (u,u').

Exemple 215 — Angle droit. Considérons l'équation $2x = \widehat{(u,-u)}$. Les solutions sont $\widehat{(u,v)}$ et $\widehat{(u,-v)}$ où v est porté par la droite de la symétrie qui envoie u sur $-u$ c'est-à-dire la droite orthogonale à u. Les solutions sont donc les angles $\widehat{(u,v)}$ avec u et v orthogonaux.

Par ailleurs, dans ce cas, ces deux solutions sont opposées. En effet, si s est la symétrie par rapport à la droite portée par v, on a $\widehat{(s(u),s(v))} = -\widehat{(u,v)}$. Mais $s(u) = -u$ et $s(v) = v$. Ainsi $\widehat{(s(u),s(v))} = \widehat{(-u,v)} = \widehat{(-\widehat{(-u)},-v)} = \widehat{(u,-v)}$ [23].

Exercice 127 — Somme des angles orientés d'un triangle. Soit ABC un triangle de $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien. Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AC}})} + \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BC}},\overrightarrow{\mathrm{BA}})} + \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}$ est un angle plat.

Exercice 128 — Angle au centre.

a) Soit A, B, C trois points distincts d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Montrer que $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}$ (indication : on pourra considérer les symétries par rapport aux médiatrices de [AC] et [BC]).

b) Soit $\mathscr{D}$ est la tangente en B au cercle $\mathscr{C}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathscr{D}$. Montrer que $2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{BA}},\overrightarrow{u})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{OA}},\overrightarrow{\mathrm{OB}})}$.

c) Déterminer les quatre ensembles de points M suivants :

(i) $\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})} = \widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}$

(ii) $2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}$

(iii) $\overline{\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})}} = \overline{\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}}$

(iv) $2\overline{\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{MA}},\overrightarrow{\mathrm{MB}})}} = 2\overline{\widehat{(\overrightarrow{\mathrm{CA}},\overrightarrow{\mathrm{CB}})}}$

Exercice 129 Soit ABC un triangle rectangle en C et ABED un carré construit tel que C et (DE) soient de part et d'autre de (AB). Montrer que la bissectrice de l'angle en C passe par le centre de ABED. Indication : on pourra considérer le cercle circonscrit à ABC.

Corrigé Comme ABC est rectangle en C, le cercle de diamètre [AB] est le cercle circonscrit à ABC. Il passe aussi par le centre O du carré puisque OAB est rectangle en O. Ainsi A, B, O, C sont cocycliques. L'angle $\widehat{\mathrm{OCA}}$ est donc égal à $\widehat{\mathrm{OBA}}$ et donc égal à 45° puisque OBA est un triangle rectangle isocèle. On en déduit que (CO) partage l'angle droit $\widehat{\mathrm{C}}$ en deux parties égales : c'est la bissectrice.

23. On fera attention à l'endroit où se trouvent les $-$: à l'intérieur ou à l'extérieur du chapeau !

Corrigé On écrit $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) + (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}})$. En utilisant le résultat précédent et en notant p l'angle plat. On a

$$\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}} = p - (\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}}) - (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO}}) + p - (\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC}}) - (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CO}})$$

En utilisant la symétrie par rapport à la médiatrice de [CA] et de [BC], on obtient

$$(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}}) = (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO}}) \qquad \text{et} \qquad (\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CO}})\,.$$

D'où
$$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = -2(\widehat{\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CA}}) - 2(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CO}})\,.$$

Et on obtient le résultat grâce à la relation de Chasles.

On a $2(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{u}) = 2(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}) + 2(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{u}) = 2(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}) + p$. En appliquant le résultat précédent et la symétrie par rapport à la médiatrice de [AB], on obtient $2(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

Exercice 130 Soient A, B, C, D quatre points d'un plan euclidien. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si $2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}})$.

5.4.4 Angle orienté de droites dans le plan.

On s'intéresse à présent aux angles orientés de droites qui ont l'avantage de permettre l'expression simple de propriétés géométriques (alignement, cocyclicité,...). On retrouve le même cheminement que pour les angles orientés de demi-droites ; le groupe $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$ étant remplacé par son quotient $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\{\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}\}$. Ainsi, on montre d'abord qu'étant donné deux droites, il existe exactement deux rotations qui envoient la première sur la deuxième et que ces deux rotations sont opposées l'une de l'autre.

Lemme 216 Soient D, D′ deux droites de E. Il existe exactement deux rotations r et r' qui envoient D sur D′. De plus, on a $r' = -r$.

Preuve. Soit u un vecteur unitaire de D et u' un vecteur unitaire de D′. On a vu qu'il existe une (unique) rotation r qui envoie u sur u'. On a alors $r(\mathrm{D}) = \mathrm{D}'$. On a bien sûr aussi $-r(\mathrm{D}) = -\mathrm{D}' = \mathrm{D}'$ avec $-r$ qui est bien une rotation.

À présent, on considère r et r' deux rotations qui envoient D sur D′. On a $r'^{-1} \circ r(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$. Ainsi tout vecteur de D est vecteur propre pour la rotation $r'^{-1} \circ r$. On en déduit (proposition 67) que $r'^{-1} \circ r = \pm\mathrm{id}$ c'est-à-dire $r' = \pm r$.

Remarque 217 Si D est une droite de E et r est une rotation alors $r(\mathrm{D})$ est une droite de E. Mais, $-r(\mathrm{D})$ est la même droite de E. Ainsi, si $x \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})/\langle\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}\rangle$ et D est une droite de E, on peut définir la droite $x(\mathrm{D})$ qui est la droite D′ telle que $\mathrm{D}' = r(\mathrm{D})$ pour $r \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ tel que l'image de r dans $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\langle\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}\rangle$ est x.

Ainsi le lemme précédent se reformule de la façon suivante.

Corollaire 218 – Reformulation. Pour D, D′ deux droites de E, il existe un unique $x \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})/\langle\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}\rangle$ tel que $x(\mathrm{D}) = \mathrm{D}'$.

Tout comme un angle orienté de demi-droites ou de vecteurs unitaires est caractérisé par une rotation c'est-à-dire un élément de $\mathcal{SO}(\mathrm{E})$, un angle de droites est caractérisé par un couple de rotations opposées c'est-à-dire un élément de $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\{\pm 1\}$: c'est le sens de la proposition suivante.

Proposition 219 – Caractérisation des angles orientés de droites dans le plan. Soit (D, D′) un couple de droites de E. On note $x_{\mathrm{D},\mathrm{D}'}$ l'unique élément de $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\langle\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}\rangle$ qui envoie D sur D′.

Soit $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_1')$ un couple de droites de E. On a

$$(\widehat{\mathrm{D},\mathrm{D}'}) = (\widehat{\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1'}) \iff x_{\mathrm{D},\mathrm{D}'} = x_{\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1'}\,.$$

Preuve. C'est la même preuve que celle de la proposition 219 : le point crucial est la commutativité du groupe $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\langle\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}\rangle$.

Finalement, un angle de droites, c'est la même chose qu'un élément de $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\langle \pm \mathrm{id}_\mathrm{E}\rangle$ c'est-à-dire un ensemble de deux rotations de la forme $\{r, -r\}$.

Remarque 220 — Groupe des angles de droites. Comme pour les angles de demi-droites, on peut additionner des angles orientés de droites dans le plan : on fixe $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$ et $\widehat{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')}$ et on veut définir l'angle somme : on pose

$$\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}+\widehat{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')} = (\mathrm{D}'', \widehat{x_{\mathrm{D},\mathrm{D}'}x_{\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1'}}(\mathrm{D}''))$$

En fait, les angles orientés forment une groupe pour $+$: l'élément neutre (qui correspond à $\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}$ est $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D})}$) et l'opposé de $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$ est $\widehat{(\mathrm{D}',\mathrm{D})}$ car la composée d'une rotation qui envoie D sur D′ avec une rotation qui envoie D′ sur D est une rotation qui envoie D sur D c'est-à-dire $\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}$.

Ce groupe des angles de droite est isomorphe au groupe $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\{\pm 1\}$.

Exactement comme pour les angles de demi-droites ou de vecteurs unitaires, on a la liste de propriétés suivantes.

Propriété 221 Soit $(\mathrm{D},\mathrm{D}',\mathrm{D}'',\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')$ cinq droites de E et s est une isométrie indirecte de E. On a les relations suivantes

(*i*) $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} + \widehat{(\mathrm{D}',\mathrm{D}'')} = \widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}'')}$: cette propriété est appelée relation de Chasles.

(*ii*) $\widehat{(s(\mathrm{D}),s(\mathrm{D}'))} = -\widehat{(\mathrm{D}',\mathrm{D})}$: les isométries indirectes changent les angles orientés de droites en leur opposé.

(*iii*) $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \widehat{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')} \iff \widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}_1)} = \widehat{(\mathrm{D}',\mathrm{D}_1')}$.

Preuve. cf. le cas des demi-droites (propriétés 208)

5.4.5 Bissectrices, angle moitié

Pour définir la notion d'angles orientés de demi-droites, on s'est intéressé aux rotations qui envoient une demi-droite sur une autre, pour définir la notion de bissectrices de couples de demi-droites, on s'est intéressé aux symétries qui transforment la première demi-droite du couple en la deuxième. On suit la même logique pour les droites : pour définir la notion d'angle orienté de droites, on s'intéresse aux rotations qui envoient une droite sur une autre, pour définir la notion de bissectrice d'un coupe de droites, on s'intéresse aux symétries qui envoient la première droite sur la deuxième. On relie ensuite cette question à celle de l'angle moitié.

Proposition 222 Soient D,D' deux droites de E, il existe précisément deux symétries orthogonales qui envoient D sur D′. Les axes de ces deux symétries sont orthogonaux.

Preuve. Soit u (resp. u') un vecteur unitaire de D (resp. D′). D'après ce qu'on a vu, il existe une (unique) symétrie orthogonale s qui envoie u sur u'. On a alors $s(\mathrm{D}) = \mathrm{D}'$.

Par ailleurs, $-s$ est aussi une symétrie orthogonale (dont l'axe est orthogonal à celui de s) qui envoie D sur D′.

Enfin, si s, s' sont deux telles symétries alors $s'^{-1} \circ s$ est une rotation qui envoie D sur elle-même donc $s'^{-1} \circ s = \pm\mathrm{id}_\mathrm{E}$ (proposition 67) et $s' = -s$ ou $s' = s$.

Définition 223 — Bissectrices. Soit D,D' deux droites de E. Les bissectrices de (D,D') [24] sont les deux droites perpendiculaires qui sont les axes des symétries orthogonales qui envoient D sur D′.

Proposition 224 — Équidistance. Soit D,D' deux droites distinctes de E, alors les bissectrices de D et D′ sont l'ensemble des points de E équidistants de D et D′.

Preuve. Voir la proposition 23.

On cherche à présent à relier la notion de bissectrice à celle d'angle moitié. Pour cela, on commence par étudier de façon approfondie l'équation $2x = \widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$ dans le groupe des angles orientés de droites. Le comportement est très proche de celui dans le groupe des angles des angles orientés de demi-droites. On note Δ et Δ' les deux bissectrices de (D,D'). Alors $\widehat{(\mathrm{D},\Delta)}$ et $\widehat{(\mathrm{D},\Delta')}$ sont deux solutions. En particulier, on a toujours au moins deux solutions. Par ailleurs, deux solutions diffèrent d'une solution de l'équation $2x = \widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D})} = 0$. Résolvons donc cette équation. On passe dans $\mathcal{SO}(\mathrm{E})/\langle\pm\mathrm{id}_\mathrm{E}\rangle$. On doit résoudre $x^2 = 1$. Soit r une rotation représentant x. On a $r^2 = \pm\mathrm{id}_\mathrm{E}$. Si $r^2 = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ alors $r = \pm\mathrm{id}_\mathrm{E}$ et

24. Ce sont bien les bissectrices du couple et non de l'angle.

$x = 1$ (heureusement qu'on trouve cette solution). Sinon, $r^2 = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ et on a vu que cette équation avait deux solutions qui différaient de $-\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. Ainsi on trouve une deuxième solution $x \neq 1$. Finalement, les deux solutions de $2x = 0$ sont $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D})}$ et $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}^{\perp})}$ et les deux solutions de $2x = \widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$ sont $\widehat{(\mathrm{D},\Delta)}$ et $\widehat{(\mathrm{D},\Delta')}$ et sont donc fournies pas les bissectrices du couple (D,D').

5.4.6 Lien entre angle de droites et de demi-droites

Les liens entre groupes des angles de demi-droites et angles de droites sont multiples et complexes : ce sont des groupes isomorphes mais l'application la plus naturelle à laquelle on peut penser n'est pas un isomorphisme entre les deux. En particulier, pour réaliser géométriquement l'isomorphisme souhaité, il faut doubler ou diviser par deux les angles suivant si on passe des droites au demi-droites ou inversement.

Détaillons le premier lien géométrique évident entre les deux qui n'est pas un isomorphisme.

Proposition 225 – Lien entre vecteurs unitaires et droites. Soient u, u' deux vecteurs unitaires de E et D et D′ les droites portant u et u'. L'application $\widehat{(u,u')} \mapsto \widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')}$ est un morphisme surjectif de groupes dont le noyau est formé de l'angle nul et de l'angle plat.

Pour décrire un isomorphisme, on a besoin d'utiliser les bissectrices de façon précise, on a la situation suivante.

Proposition 226 – Un isomorphisme. Soit u, u' deux vecteurs unitaires et δ une des deux demi-droites bissectrices de (u, u'). On note D la droite dirigée par u et Δ celle portée par δ [25].

L'application $\widehat{(u,u')} \mapsto \widehat{(\mathrm{D},\Delta)}$ est un isomorphisme de groupes dont l'isomorphisme réciproque est donné par $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} \mapsto 2\widehat{(u,u')}$ où u, u' sont des vecteurs unitaires de D et D′.

Preuve. Il s'agit de montrer que les applications construites sont bien définies.

Commençons par remarquer que les deux bissectrices de (u, u') sont opposées. Ainsi la droite Δ ne dépend pas du choix de la bissectrice. Par ailleurs, on suppose que $\widehat{(u,u')} = \widehat{(v,v')}$. On a alors $g \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ tel que $g(u) = v$ et $g(u') = v'$ et évidemment $g(\delta)$ est une bissectrice de (v, v'). Ainsi, si on note D_1 la droite portée par v et Δ' la droite portée par $g(\delta)$. On a alors $\widehat{(\mathrm{D},\Delta)} = (\widehat{g(\mathrm{D}), g(\Delta)}) = \widehat{(\mathrm{D}_1,\Delta')}$. La première application est donc bien définie.

Montrons que la deuxième application est bien définie. Les vecteurs unitaires de D sont $\pm u$, ceux de D′ sont $\pm u'$. Mais

$$2\widehat{(\pm u, \pm u')} = 2\widehat{(\pm u, u)} + 2\widehat{(u,u')} + 2\widehat{(u', \pm u')} = 2\widehat{(u,u')}\,.$$

Ainsi l'angle $2\widehat{(u,u')}$ ne dépend pas du choix des vecteurs unitaires sur D et D′. De plus, si $\widehat{(\mathrm{D},\mathrm{D}')} = \widehat{(\mathrm{D}_1,\mathrm{D}_1')}$, on a $g \in \mathcal{SO}(\mathrm{E})$ tel que $g\mathrm{D} = \mathrm{D}_1$ et $g\mathrm{D}' = \mathrm{D}_1'$ et donc (gu, gu') est un couple de vecteurs unitaires sur D_1 et D_1'. Ainsi $2\widehat{(u,u')} = 2\widehat{(gu,gu')}$ et l'application est bien définie.

Montrons à présent que les deux applications sont inverses l'une de l'autre. Cela résulte simplement des remarques suivantes : si $2\widehat{(u,u')} = \widehat{(u,v)}$ alors u' est une bissectrice de (u, v). Si δ est une bissectrice de (u, u'), on a $2\widehat{(u,\delta)} = \widehat{(u,u')}$.

Grâce à la relation de Chasles, la deuxième application est évidemment un morphisme de groupes. La première l'est donc aussi.

Finalement, le groupe des angles orientés de demi-droites et celui des angles orientés de droites sont isomorphes. Mais l'isomorphisme entre les deux, n'est pas le morphisme naturel qui consiste à envoyer une demi-droite sur la droite correspondante. Pour passer de l'un à l'autre, il faut « multiplier ou diviser par 2 ».

En particulier, on obtient le résultat

Proposition 227 – Cocyclicité. Soient A, B, C, D quatres points du plan affine euclidien E alors A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(\widehat{(\mathrm{AB}),(\mathrm{AC})}) = (\widehat{(\mathrm{DB}),(\mathrm{DC})})$.

Exercice 131 Soit ABCD un quadrilatère et I le point d'intersection de ses diagonales. On note P, Q, R, S les projetés orthogonaux de I sur les côtés de ABCD.

25. On remarque que Δ ne dépend pas de la demi-droite δ choisie.

a) Montrer que $(\widehat{PS),(PQ}) = (\widehat{AD),(AC}) + (\widehat{BD),(BC})$ (on pourra passer par (PI) et utiliser des triangles rectangles).

b) En déduire une relation du même type sur $(\widehat{RQ),(RS})$.

c) En déduire que P, Q, R et S sont cocycliques si et seulement si (AC) et (BD) sont orthogonales.

Exercice 132 — Triangle orthique. Soit ABC un triangle et I, J, K les pieds des trois hauteurs de ce triangle. Montrer que (IJ) et (IK) sont symétriques par rapport à (AI). Indication : on pourra considérer les triangles rectangle AIB, ABJ et BHI et BHK.

Exercice 133 Soit ABC un triangle et α, β, γ trois réels appartenant à $]\,0\,,\pi\,[$ et vérifiant $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. On construit, extérieurement à ABC, trois triangle BPC, CQA et ARB tel que $\widehat{BPC} = \alpha$, $\widehat{CQA} = \beta$ et $\widehat{ARB} = \gamma$.

a) Montrer que les cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ circonscrits respectivement à BPC, CQA et ARB sont concourants en un point noté I.

b) On note O_i le centre de $\mathscr{C}_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que les égalités $(\widehat{O_1O_2, O_1O_3}) = (\widehat{(IC),(IB)})$ et $(\widehat{(O_1O_2),(O_1O_3)}) = (\widehat{(PB),(PC)})$. (Indication : on pourra considérer le triangle O_1IX où X est le point d'intersection de (O_1O_2) avec (IB).

c) En déduire le théorème de Napoléon : si BPC, CQR et ARB sont équilatéraux alors $O_1O_2O_3$ aussi.

Exercice 134 Soit $\mathscr{C}$ un cercle, A et B sur $\mathscr{C}$. Lieu des centres des cercles inscrits à ABC lorsque C parcourt $\mathscr{C}$.

5.4.7 Mesure des angles

Pour mesurer les angles orientés dans le plan, on a besoin de quelque chose de plus : il faut orienter le plan c'est-à-dire choisir une base (ou plutôt une classe d'équivalence de basesou encore une base orthonormée (ou plutôt une classe d'équivalence de bases orthonormées) ou encore l'un des deux angles droits (de demi-droites).

Une fois que ce choix est fait, on peut alors écrire un isomorphisme explicite entre $\mathcal{SO}(E)$ et l'ensemble des matrices de la forme

$$r_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a^2 + b^2 = 1$$

puis avec $\mathbb{U}$ par $a + ib \mapsto r_{a,b}$. Enfin, grâce à l'exponentielle complexe, on écrit un isomorphisme entre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et $\mathbb{U}$. Finalement par composition, on obtient un isomorphisme entre $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et le groupe des angles orientés de demi-droites.

De même, on obtient un isomorphisme entre le groupes des angles orientés de droites et $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$: le groupes des angles orientés de droites est isomorphe à $\mathcal{SO}(E)/\langle \pm \mathrm{id}_E \rangle$ qui va être isomorphe au groupe formée par les matrices $r_{a,b}$ quotienté par $\pm\mathrm{id}_2$ lui-même isomorphe à $\mathbb{U}/\langle \pm 1 \rangle$ lui-même isomorphe à $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})/(\pi\mathbb{Z}/2\pi\mathbb{Z})) = \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$.

L'application géométrique naturelle qui consiste à passer d'une demi-droite à la droite qui porte la demi-droite se traduit dans ce langage par l'application de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ qui envoie la classe modulo 2π sur la classe modulo π (Cette application a bien un sens car $2\pi\mathbb{Z} \subset \pi\mathbb{Z}$.).

Remarquons pour finir que l'application $[\times 2]$ définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui correspond via les isomorphismes ci-dessus à l'isomorphisme entre le groupe des angles de droites et celui des angles de demi-droites décrit ci-dessus.

Exercice 135 — Droite de Simson. Soit ABC un triangle et M un point du plan. On note M_A (resp. M_B, M_C) le projeté orthogonal de M sur (BC) (resp. (AC), (AB)). Montrer l'équivalence de

(*i*) M est sur le cercle circonscrit à ABC ;

(*ii*) M_A, M_B et M_C sont alignés.

Exercice 136 Soit ABC un triangle et $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ et $F \in (AB)$. Montrer que les cercles circonscrits au triangle AEF, BFD et CDE sont concourants.

Exercice 137 – Théorème de Miquel. Soient C_1, C_2, C_3, C_4 quatre cercles. On note A_1, B_1 les points d'intersections de C_1 et C_2 ; A_2, B_2 ceux de C_2 et C_3, A_3, B_3 ceux de C_3 et C_4 et A_4, B_4 ceux de C_4 et C_1. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques si et seulement si B_1, B_2, B_3 et B_4 le sont.

Chapitre 6

Similitude

Dans tout ce chapitre, $\mathscr{E}$ désigne un espace affine euclidien de direction $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Définition 228 – Similitude. Une application affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une similitude s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$, on ait $f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) = \lambda \mathrm{AB}$ [1].

Remarque 229 On écrit souvent la relation de caractérisation des similitudes sous la forme : pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ avec $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$ [2], on a

$$\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A'C'}}{\mathrm{AC}} \quad \text{ou encore} \quad \frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{A'C'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$$

où $\mathrm{A'} = f(\mathrm{A}), \mathrm{B'} = f(\mathrm{B}), \mathrm{C'} = f(\mathrm{C})$ [3].

Remarque 230 Si $\mathscr{E}$ n'est pas réduit à un point, λ est bien défini et est appelé *rapport de la similitude*. On a $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda = 0$ si et seulement si f est constante. Lorsque $\lambda \neq 0$, on a f est injective et donc bijective (corollaire 108).

Exemple 231 – Homothétie et isométrie. Une homothétie de rapport λ est un similitude de rapport $|\lambda|$ [4].

Une isométrie est une similitude de rapport 1. Réciproquement, une similitude de rapport 1 est une isométrie.

Proposition 232 – Groupe des similitude. Soit f une similitude de rapport λ et g une similitude de rapport μ alors $g \circ f$ est une similitude de rapport $\lambda\mu$.

Si f est une similitude de rapport $\lambda \neq 0$ alors f^{-1} est une similitude de rapport $\lambda \neq 0$.

L'ensemble des similitudes de rapport non nul forme un groupe appelé *groupe des similitudes* pour la composition.

Remarque 233 – Lien entre isométrie, homothétie et similitude. La composée d'une similitude de rapport λ avec une homothétie de rapport λ^{-1} est une isométrie. On en déduit que le groupe des similitudes est engendré par les isométries et les homothéties et même mieux qu'une similitude de rapport λ est la composée d'une homothétie de rapport λ et d'une isométrie. [5]

Proposition 234 – Caractérisation des similitude par leur flèche. Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine. Alors f est une similitude de rapport λ si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ tel que $\overrightarrow{f} = \lambda g$.

Lorsque f est une similitude de rapport $\lambda \neq 0$, g est uniquement déterminé (c'est $\lambda^{-1}\overrightarrow{f}$).

On dit que f est une *similitude directe* si g est une isométrie directe ou ce qui revient au même si $\det \overrightarrow{f} > 0$.

On dit que c'est une *similitude indirecte* si g est une isométrie indirecte c'est-à-dire si $\det \overrightarrow{f} < 0$.

1. Par définition, une similitude est donc une application affine qui multiplie les distances par un facteur constant.
2. on va diviser par AB et AC.
3. On remarquera que cette dernière écriture n'a de sens que si $\lambda \neq 0$ car sinon $\mathrm{A'} = \mathrm{C'}$.
4. On prendra garde à ne pas oublier la valeur absolue : le rapport d'une similitude est un nombre positif puisque c'est un rapport de longueur
5. En se souvenant qu'une application vérifiant $f(\mathrm{A})f(\mathrm{B}) = \mathrm{AB}$ pour tous $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{E}$ est nécessairement affine, on en déduit aussi qu'une application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ telle qu'il existe λ vérifiant $\mathrm{A'B'} = \lambda\mathrm{AB}$ pour tous A, B est nécessairement affine et donc une similitude.

Preuve. Supposons que f soit une similitude. La remarque 233 montre que $f = h \circ f'$ où h est une homothétie et g une isométrie. En prenant la flèche, on obtient le résultat souhaité.

Inversement, supposons que f soit telle qu'il existe $g \in \mathcal{O}(\mathrm{E})$ telle que $\overrightarrow{f} = \lambda g$. Si $\lambda = 0$ alors $\overrightarrow{f} = 0$ et f est constante : c'est bien une similitude de rapport 0. Si $\lambda \neq 0$, on considère h une homothétie de rapport λ. L'application $h^{-1} \circ f$ affine (comme composée d'applications affines) et sa flèche est $\lambda^{-1}\overrightarrow{f} = g$ (voir la proposition 106). Ainsi la proposition 176 montre que $h^{-1} \circ f$ est une isométrie et donc une similitude de rapport 1. En composant par h, la proposition 232 donne alors le résultat.

6.1 Classification des similitudes

6.1.1 Similitude et point fixes

Proposition 235 Soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une similitude de rapport $\lambda \neq 1$ alors f a un unique point fixe.

Preuve. Si $\lambda = 0$ alors f est constante. Notons $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ le point tel que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{A}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$. C'est évidemment le seul point fixe de M. Si $\lambda \neq 0$, il suffit de montrer que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$. Mais si $x \in \mathrm{E}$ vérifie $\overrightarrow{f}(x) = x$ alors $\lambda g(x) = x$ et $g(x) = \lambda^{-1}(x)$. Ainsi λ^{-1} est valeur propre d'une isométrie donc $\lambda = \pm 1$. Comme $\lambda \geqslant 0$, on en déduit que $\lambda = 1$. NON.

Proposition 236 – Structure des similitudes. Soit f une similitude de rapport $\lambda \neq 0, 1$. On note Ω son point fixe. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport λ. Alors il existe une unique isométrie g laissant Ω fixe telle que $f = g \circ h = h \circ g$.

Preuve. Si g existe alors $g = h^{-1} \circ f$ est donc uniquement définie. Il suffit donc de montrer que $h^{-1} \circ f$ (qu'on note g) est une isométrie avec Ω comme point fixe et commute avec h. Mais g est une similitude de rapport $\lambda^{-1}\lambda = 1$ donc une isométrie, De plus, $g(\Omega) = h^{-1}(f(\Omega)) = h^{-1}(\Omega) = \Omega$. Enfin, on sait que (voir l'exercice 64) $g \circ h \circ g^{-1}$ est l'homothétie de centre $g(\Omega) = \Omega$ de rapport λ c'est-à-dire h.

6.1.2 Classification

Corollaire 237 – Similitude en dimension 1. Les applications affines sont des homothéties ou des translations : ce sont des similitudes.

Corollaire 238 – Similitude en dimension 2. Une similitude directe de rapport $\lambda \neq 0, 1$ est produit (de façon unique) d'une homothétie (de rapport λ) et d'une rotation de même centre (voir le théorème 180).

Une similitude indirecte de rapport $\lambda \neq 0, 1$ est produit (de façon unique) d'une homothétie h (de rapport λ) et d'une symétrie orthogonale de droite D contenant le centre de h (voir le théorème 180).

Corollaire 239 – Similitude en dimension 3. Une similitude directe de rapport $\lambda \neq 0, 1$ est produit (de façon unique) d'une homothétie (de rapport λ) et d'une rotation d'axe D contenant le centre de l'homothétie.

Une similitude indirecte de rapport $\lambda \neq 0, 1$ est produit (de façon unique) d'une homothétie (de rapport $-\lambda$) et d'une rotation d'axe D contenant le centre de l'homothétie. Les deux transformations commutent (voir le théorème 181).

Preuve. Pour le cas « indirect », On pose h' l'homothétie de centre Ω (le centre de f) et de rapport $-\lambda$ et $g' = h'^{-1} \circ f$. Alors g' est une similitude de rapport $|-\lambda|^{-1}\lambda = 1$ qui fixe Ω et $\det \overrightarrow{g'} = \det \overrightarrow{f} \det \overrightarrow{h'}^{-1} = (-\lambda)^3 \det \overrightarrow{f} > 0$. Finalement, g' est une isométrie directe ayant un point fixe : c'est une rotation.

L'unicité de la décomposition résulte du fait que le centre de h' est forcément le point fixe de f.

La commutativité résulte du fait que $g' \circ h' \circ g'^{-1}$ est une homothétie de même rapport que h' et de centre $g'(\Omega) = \Omega$ (voir l'exercice 64).

6.2 Similitude du plan affine euclidien

Proposition 240 — Points fixes d'une similitude plane. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien. Une similitude directe de $\mathscr{E}$ ayant deux points fixes est l'identité.

Preuve. Le rapport d'une similitude ayant deux points fixes est 1 : en effet, c'est $f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})/\mathrm{AB}$ où A et B sont deux points fixes de f. C'est donc une isométrie. Elle est directe et à deux points fixes : c'est l'identité (voir la proposition 180).

Proposition 241 — Double transitivité des similitude. Soient $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$ des points du plan. Il existe unique similitude directe (resp. indirecte) f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ et $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$. Son rapport est $\mathrm{A}'\mathrm{B}'/\mathrm{AB}$.

Preuve. *Unicité.* Si f et f' sont deux similitudes directes (resp. indirectes) alors $f'^{-1} \circ f$ est une similitude directe qui a deux points fixes A et B. C'est l'identité.

Existence. Par une translation, on envoie A sur A′. Par une rotation de centre A′, on envoie [AB) sur [A′B′) (voir le lemme 204) puis par une homothétie (de rapport $\mathrm{A}'\mathrm{B}'/\mathrm{AB}$) de centre A′, on envoie B sur B′. La composée est une similitude directe qui convient.

Pour le cas indirect, on considère la similitude directe qui envoie A sur B′ et B sur A′ et on la compose avec la symétrie par rapport à la médiatrice de [A′B′].

Exercice 138 — Déterminer une similitude.

a) Vérifier qu'une similitude directe du plan est uniquement déterminée par un centre, un rapport et un angle (orienté de demi-droite).

b) Vérifier qu'une similitude directe du plan est uniquement déterminée par une homothétie et une rotation de même centre.

c) Vérifier qu'une similitude directe du plan est uniquement déterminée par un centre, un point A (distinct du centre) et son image A′.

d) Vérifier qu'une similitude directe est uniquement déterminée deux points $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et leurs images $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$.

e) Reprendre les mêmes questions pour les similitudes indirectes ?

Proposition 242 Une similitude directe conserve les angles orientés. Une similitude indirecte change un angle orienté en son opposé.

Preuve. Une homothétie de rapport positif transforme un vecteur en un vecteur colinéaire de même sens.

Exercice 139 Soit $\mathscr{P}$ un plan affine euclidien et s une similitude de $\mathscr{P}$. Soit M, N deux points distincts de $\mathscr{P}$ et M′ et N′ leur image par s.

a) Soit M, N deux points distincts de $\mathscr{P}$ et M′ et N′ leur image par s. On suppose que $(\mathrm{MM}')//(\mathrm{NN}')$. Montrer que le centre de s est sur (MN)

b) Soit MNPQ un carré. Justifier que $s(\mathrm{M})s(\mathrm{N})s(\mathrm{P})s(\mathrm{Q})$ est un carré. On note R l'intersection de (MN) avec (M′N′), S l'intersection (NP) avec (N′P′), T l'intersection de (PQ) avec (P′Q′) et U l'intersection de (QM) avec (Q′M′). Montrer que le centre de s est l'intersection de (RT) et (SU)

Exercice 140 On se donne deux couples de points (A, B) et $(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$ avec $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}' \neq \mathrm{B}'$. Le but de l'exercice est de déterminer le centre Ω de la similitude directe s qui envoie A sur A′ et B sur B′.

a) Que peut-on dire d'une similitude directe qui transforme une droite en une droite parallèle ?

b) Démontrer que deux similitude directes de même centre commutent.

c) Montrer que si un point, son image par une similitude directe et le centre de la similitude sont alignés alors cette similitude est une homothétie.

d) Montrer que Ω est aussi le centre de la similitude directe s' qui envoie A sur B et A′ sur B′ (on pourra considérer l'unique similitude directe de centre Ω qui envoie A sur B ; pourquoi existe-t-elle ? pourquoi est-elle unique ? pourquoi envoie-t-elle A′ sur B′).

e) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}}) = (\widehat{\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega B'}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$. Montrer que le point d'intersection E de (AB) et (A′B′) vérifie $((\widehat{EA), (EA'})) = ((\widehat{EB), (EB'})) = ((\widehat{AB), (A'B'})))$. En déduire que Ω est à la fois sur le cercle circonscrit EAA′ et EBB′. Est-ce que Ω peut-être égal à E (montrer que dans ce cas (AA′)//(BB′) : on pourra utiliser les questions **c** et **d**) ? Proposer une construction de Ω.

f) Retrouver le théorème de Miquel.

Exercice 141 – Cercle et similitude. Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une similitude.

a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre de $O \in \mathscr{E}$ et de rayon $R \geqslant 0$. Montrer que $f(\mathscr{C})$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

b) Soient $A, B \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un similitude de rapport λ qui envoie A sur B.

c) Soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de rayon strictement positifs. Montrer qu'il existe une similitude $g : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ telle que $g(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

Corrigé

a) On note λ le rapport de f.

Si $M \in \mathscr{C}$, on a $OM = R$. Comme f est une similitude, on a $f(O)f(M) = \lambda OM = \lambda R$. Ainsi $f(M)$ est sur le cercle de centre $f(O)$ et de rayon λR.

On a donc montré que si f est une similitude de rapport λ alors $f(\mathscr{C}(O, R)) \subset \mathscr{C}(f(O), \lambda R)$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit N sur le cercle de centre O de rayon λR. Si $\lambda = 0$, le cercle est réduit à $f(O)$ qui est bien l'image de n'importe quel point de $\mathscr{C}$ par f.

Si $\lambda \neq 0$ alors f est bijective, donc il existe M tel que $f(M) = N$: le point M est $f^{-1}(N)$. De plus, f^{-1} est une similitude de rapport λ^{-1}. On applique alors ce qu'on vu au-dessus à f^{-1}. On a $f^{-1}(\mathscr{C}(f(O), \lambda R)) \subset \mathscr{C}(f(f^{-1}(O), \lambda^{-1}\lambda R) = \mathscr{C}(O, R)$.

En appliquant f, on obtient $\mathscr{C}(f(O), \lambda R) \subset f(\mathscr{C}(O, R))$ et on a bien que l'image par f de $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $f(O)$ et de rayon λR.

b) On peut raisonner en complexe : soit z_A et z_B les affixes de A et B. On cherche donc a et b dans $\mathbb{C}$ tel que $az_A + b = z_B$ avec $|a| = \lambda$.

On peut prendre $a = \lambda$ et $b = z_B - \lambda z_A$. On a ainsi même construit une homothétie (si $\lambda \neq 1$) ou une translation (si $\lambda = 0$).

Sinon, on considère la composition de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de l'homothétie de centre B de rapport λ de centre B (c'est la même que l'écriture complexe).

c) On note O et O′ les centres respectifs de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et R, R′ leur rayon respectif. D'après la question **b**, il existe une similitude f de rapport R'/R qui envoie O sur O′. D'après la question **a**, $f(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.

Exercice 142

a) Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de $\mathscr{E}$. Déterminer les centres des similitudes qui envoient $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$.

b) On suppose que les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont deux points communs A et B. Soit s la similitude de centre A qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. Démontrer que pour tout point M de $\mathscr{C}$, les points $M, s(M)$ et B sont alignés.

Chapitre 7

Cercle

Dans tout ce chapitre, on se place dans un plan affine **euclidien** $\mathscr{E}$ de direction $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Définition 243 – Cercle-Disque. Soit $\mathrm{O} \in \mathscr{E}$ et $\mathrm{R} \geqslant 0$. On appelle cercle de centre O et de rayon R, l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$. On le note $\mathscr{C}(\mathrm{O}, \mathrm{R})$.

On appelle disque (fermé, resp. ouvert) de centre O de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$, l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{OM} \leqslant \mathrm{R}$ (resp. $\mathrm{OM} < \mathrm{R}$).

Cette définition (de façon moins formelle bien sûr) arrive pour les élèves à partir du CE2 avec l'introduction du compas. Les années avant le CE2, on parle de rond (même si dans les nouveaux programmes de maternelle, on parle de cercle et disque) : l'enjeu des apprentissages pour les élèves de cet âge est de construire une image mentale de la forme « rond » à partir de perceptions variées (toucher (sans voir), vision, manipulation,...). Le concept de « rond-cercle » construit par les élèves de maternelle est sans doute plus proche de celui de courbe arrondie partout de la même façon [1] que de celle d'ensemble des points à distance fixée d'un point fixe.

7.1 Quelques représentations du cercle

Dans ce paragraphe, on choisit un repère orthonormé $(\mathrm{A}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ [2]. Les coordonnées d'un point M sont le couple de réels (x, y) définis par la décomposition de $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ dans la base orthonormée $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$: $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$.

7.1.1 Représentation implicite cartésienne

Une représentation implicite d'un ensemble de points $\mathscr{S}$ est la description de cet ensemble $\mathscr{S}$ comme lieu des zéros d'une fonction (éventuellement à valeurs vectorielles : par exemple pour les droites de l'espace, on a besoin de deux équations : une droite de l'espace est le lieu des zéros d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Par exemple, la droite $\mathrm{O}z$ est le lieu des zéros de la fonction qui a (x, y, z) associe (x, y), elle est décrite par le système d'équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Lemme 244 – Équation cartésienne. Un cercle a une équation implicite de la forme $x^2 + y^2 + ax + bx + c = 0$ (c'est-à-dire que si $\mathscr{C}$ est un cercle, il existe trois réels a, b, c tels que $\mathscr{C}$ soit l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant la relation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$).

Inversement, l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) vérifiant $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est

(i) le cercle de centre A de coordonnées $(-a/2, -b/2)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ si $a^2 + b^2 - 4c \geqslant 0$.

(ii) l'ensemble vide si $a^2 + b^2 - 4c < 0$.

Preuve. Notons O de coordonnées $(x_{\mathrm{O}}, y_{\mathrm{O}})$ le centre du cercle et R son rayon. Un point M appartient au cercle si et seulement si $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$. Pour effectuer des calculs avec les longueurs, il est bien souvent

1. C'est correct du point de vue mathématique : les arcs de cercles sont les seules courbes de classe $\mathscr{C}^2$ dont la courbure est une constante non nulle.

2. Nous avons choisi A comme origine du repère pour garder O comme nom de centre de cercle.

préférable de passer au carré (voir la remarque 40). Ainsi M de coordonnées (x, y) appartient au cercle $\mathscr{C}(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ si et seulement si $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{R}^2$. Ainsi M appartient au cercle si et seulement si

$$(x - x_{\mathrm{O}})^2 + (y - y_{\mathrm{O}})^2 = \mathrm{R}^2 .$$

On obtient la forme voulue avec $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ et $c = {x_0}^2 + {y_0}^2 - \mathrm{R}^2$ en développant les carrés.

Inversement, on met sous forme canonique la partie en x et la partie en y : on a

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} .$$

Ainsi $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.$$

En notant O le point de coordonnées $(-a/2, -b/2)$, cela se traduit par

$$\mathrm{OM}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c .$$

7.1.2 Représentation implicite polaire

Toujours dans le registre des équations implicites, on va maintenant s'intéresser au cas des représentations polaires d'un cercle : trois cas seront à distinguer suivant si le cercle est centré en l'origine du repère, passe par l'origine du repère ou non.

Le choix d'un repère orthonormé du plan permet de repérer un point de plusieurs façons, soit par son abscisse et son ordonnée (c'est-à-dire au signe près les distances aux axes), soit par un couple formé par la distance à l'origine (A dans notre choix) et par l'angle avec l'axe des abscisses (dirigé par $\overrightarrow{u}$). De façon précise, tout point du plan autre que A est repéré par un unique couple (ρ, θ) où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (θ est la classe modulo 2π d'un nombre réel). Les nombres ρ et θ sont définis par $\mathrm{AM} = \rho$ et $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}})$. Le point A n'a pas lui une représentation unique : on doit avoir $\rho = 0$ mais n'importe quelle valeur de θ convient.

Les coordonnées cartésiennes de M sont reliées au coordonnées polaires de M par les relations

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

Ces formules permettent de calculer l'abscisse et l'ordonnée lorsqu'on connait ρ et θ. Inversement, si on connaît l'abscisse et l'ordonnée, on détermine ρ et θ par $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ et } y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

Comme précédemment, une équation polaire d'un ensemble $\mathscr{E}$ va être une relation entre les coordonnées polaires ρ et θ de M qui sera vérifiée par tous les points de l'ensemble $\mathscr{E}$ et uniquement par ces points-là. Par exemple, l'ensemble décrit par l'équation $\theta = \pi/2$ est la demi-droite d'origine A de direction $\overrightarrow{v}$. Attention, lors de la description d'un ensemble par une équation polaire, il se peut que ρ prennent des valeurs négatives. La convention est alors de considérer que (ρ, θ) avec $\rho < 0$ désigne le point de coordonnées polaires $(-\rho, \theta + \pi)$.

Proposition 245 – Équation polaire d'un cercle. Le cercle $\mathscr{C}(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ de centre O de coordonnées $(x_{\mathrm{O}}, y_{\mathrm{O}})$ et de rayon R a pour équation polaire

$$(\rho - x_{\mathrm{O}}\cos(\theta) - y_{\mathrm{O}}\sin(\theta))^2 = \mathrm{R}^2 - (x_{\mathrm{O}}\sin(\theta) - y_{\mathrm{O}}\cos(\theta))^2$$

Si O = A, l'équation se simplifie en $\rho = \mathrm{R}$. Si $\mathscr{C}$ passe par A, l'équation se simplifie en $\rho = 2a\cos(\theta) + 2b\sin\theta$.

Preuve. Le point M de coordonnées polaires (ρ, θ) a pour coordonnées cartésiennes $(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$. Ainsi il est sur $\mathscr{C}(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ si et seulement si $(x_{\mathrm{O}} - \rho\cos(\theta))^2 + (y_{\mathrm{O}} - \rho\sin(\theta))^2 = \mathrm{R}^2$.

En développant les carrés, on obtient que $\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ si et seulement si

$$\rho^2 - 2\rho(\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O) + {x_O}^2 + {y_O}^2 = R^2 \qquad (\mathbf{1})$$

On reconnaît ensuite dans $\rho^2 - 2\rho(\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O)$ le début du développement d'un carré et on obtient :

$$\rho^2 - 2\rho(\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O) = (\rho - (\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O))^2 - (\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O)^2.$$

Ainsi $M \in \mathscr{C}(O, R)$ si et seulement si $(\rho - (\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O))^2 - (\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O)^2 + x_O^2 + y_O^2 = R^2$. Or

$$x_O^2 + y_O^2 - (\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O)^2 = {x_O}^2 \sin^2(\theta) - 2x_O y_O \sin\theta\cos\theta + {y_O}^2\cos^2(\theta)$$

et
$$ {x_O}^2 \sin^2(\theta) - 2x_O y_O \sin\theta\cos\theta + {y_O}^2\cos^2(\theta) = (x_O\sin(\theta) - y_O\cos(\theta))^2 .$$

Si $O = A$, on a $x_O = y_O = 0$ et la relation devient $\rho^2 = R^2$ qui se simplifie aussi $\rho = R$ (l'équation $\rho = -R$ donnant le même ensemble).

Si $\mathscr{C}(O, R)$ passe par A alors on a ${x_O}^2 + {y_O}^2 = R^2$ (qu'on suppose non nul sinon on est dans le cas précédent) et la relation $(\mathbf{1})$ devient $\rho(\rho - 2(\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O) = 0$. Comme le point A de paramètre $\rho = 0$ est représenté par l'équation $\rho = 2(\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O)$ [3], on en déduit la relation voulue.

7.1.3 Représentation implicite de nature géométrique : fonction de Leibniz.

Lemme 246 — Une famille de cercles. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ et $A \neq B$ deux points du plan. On suppose que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. L'ensemble des points M du plan tels que $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ est

(*i*) Une droite perpendiculaire à (AB) si $\alpha + \beta = 0$. C'est la médiatrice de [AB] dans le cas où $k = 0$.
(*ii*) Un cercle (éventuellement vide) centré sur la droite (AB) si $\alpha + \beta \neq 0$.

Preuve. On définit la fonction de Leibniz (associée à A, B,α et β) par

$$L : \begin{cases} \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P} \\ M \longmapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2 . \end{cases}$$

Calculons $f(M) - f(N)$. On a

$$f(M) - f(N) = \alpha(MA^2 - NA^2) + \beta(NA^2 - NB^2) = \alpha\langle\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{NA}, \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NA}\rangle + \beta\langle\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NB}\rangle$$

c'est-à-dire
$$f(M) - f(N) = \langle\overrightarrow{MN}, \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NB}\rangle$$

Si $\alpha + \beta = 0$, on a alors $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = \alpha\overrightarrow{BA}$ et donc

$$f(M) - f(N) = 2\alpha\langle\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BA}\rangle$$

Ainsi les valeurs de f en M et N sont égales si et seulement si $\overrightarrow{MN}$ est perpendiculaire à (BA). On obtient ainsi le résultat voulu [4].

Si $\alpha + \beta = 0$ et $k = 0$, l'égalité se réécrit $MA^2 = MB^2$ c'est-à-dire M est sur la médiatrice. On pourrait aussi appliquer ce qu'on vient de démontrer que dire que c'est donc une droite perpendiculaire à (AB) et que le milieu de [AB] est évidemment dessus.

Si $\alpha + \beta \neq 0$, par une technique déjà rencontrée, il existe un unique point I tel que $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta IB = 0$. Ce point vérifie $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{PI}$ pour tout point P du plan. Ainsi

$$f(M) - f(N) = (\alpha + \beta)\langle\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI}\rangle .$$

En écrivant $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN}$, on obtient

$$f(M) - f(N) = (\alpha + \beta)(MI^2 - NI^2) .$$

En particulier, on obtient que f prend les mêmes valeurs en M et N si et seulement si $MI = NI$. Mais aussi que $f(M) = f(I) + (\alpha + \beta)MI^2$. On retrouve ainsi le résultat.

3. On écrit $(\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O) = \sqrt{{x_O}^2 + {y_O}^2}(\cos(\theta)x'_O + \sin(\theta)y'_O)$ où $(x'_O, y'_O) = \dfrac{1}{\sqrt{{x_O}^2 + {y_O}^2}}(x_O, y_O)$ est un vecteur de norme 1, qu'on peut donc écrire $(x'_O, y'_O) = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. On a alors $(\cos(\theta)x_O + \sin(\theta)y_O) = \sqrt{{x_O}^2 + {y_O}^2}\cos(\theta + \alpha)$ qui s'annule pour $\theta = \pi/2 - \alpha$.

4. il faut quand même vérifier qu'il existe un point M tel que $f(M) = k$ ce qui est laissé au lecteur qui pourra fixer un point M et considérer N de la forme $N = M + t\overrightarrow{AB}$ et choisir convenablement t en fonction de $f(M)$ pour obtenir $f(N) = k$

Exercice 143 – Une autre fonction de Leibniz. Soit $k \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois points du plan. Déterminer l'ensemble des points du plan tel que $\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 + \mathrm{MC}^2 = k$.

Exercice 144 Soit ABCD un parallélogramme.

a) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un point P tel que $\mathrm{AM}^2 - \mathrm{BM}^2 = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{PM}} \rangle$. Même chose pour $\mathrm{CM}^2 - \mathrm{DM}^2$.

b) En déduire que l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{AM}^2 - \mathrm{BM}^2 + \mathrm{CM}^2 - \mathrm{DM}^2$ est constante.

c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur ABCD pour que cette application soit nulle.

Corrigé

a) On raisonne par récurrence : pour $n = 0$, on a $\mathrm{id}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ qui est bien inclus dans A. Si $f^{\circ n}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$, on a $f^{\circ n+1}(\mathrm{A}) = f(f^{\circ n}(\mathrm{A}))$. Or $f^{\circ n}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$, donc $f^{\circ n+1}(\mathrm{A}) \subset f(\mathrm{A})$. Comme $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$, on en déduit que $f^{\circ n+1}(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$ comme souhaité.

b) Supposons que f soit une translation ; on note $\overrightarrow{v}$ le vecteur de la translation. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{A}$, d'après la question **a**, $f^{\circ n}(\mathrm{M}) \in \mathrm{A}$ c'est-à-dire $\mathrm{M} + n\overrightarrow{v} \in \mathrm{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or A est borné, donc il existe $\mathrm{R} > 0$ tel que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$. Si $v \neq 0$ alors pour $n > \mathrm{R}/\|v\|$, on a $d(\mathrm{M}, \mathrm{M} + n\overrightarrow{v}) > \mathrm{R}$ ce qui contredit le fait que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}(\mathrm{M}, \mathrm{R})$. Ainsi $\overrightarrow{v} = 0$ et $f = \mathrm{id}$ n'est pas une translation.

c) On calcule, pour $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$,

$$s \circ \tau_{\overrightarrow{v}} \circ s^{-1}(\mathrm{M}) = s \circ \tau_{\overrightarrow{v}} \circ s(\mathrm{M}) = s(\tau_{\overrightarrow{v}}(s(\mathrm{M})) = s(s(\mathrm{M}) + \overrightarrow{v}) = s(s(\mathrm{M})) + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) = \mathrm{M} + \overrightarrow{s}(\overrightarrow{v})$$

Or $\overrightarrow{v}$ est dans la direction de l'axe de s et donc $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$. Ainsi $s \circ \tau_{\overrightarrow{v}} \circ s^{-1}(\mathrm{M}) = \mathrm{M} + \overrightarrow{v}$ pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$ c'est-à-dire $s \circ \tau_{\overrightarrow{v}} \circ s^{-1} = \tau_{\overrightarrow{v}}$.

En composant à droite par s, on en déduit que s et $\tau_{\overrightarrow{v}}$ commutent.

On obtient alors $g \circ g = s \circ \tau_{\overrightarrow{v}} \circ s \circ \tau_{\overrightarrow{v}} = s \circ s \circ \tau_{\overrightarrow{v}} \circ \tau_{\overrightarrow{v}} = \tau_{2\overrightarrow{v}}$ puisque $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$.

d) Si f est une symétrie glissée alors $f \circ f$ vérifie $f \circ f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{A}$ (d'après la question **a** avec $n = 2$) et $f \circ f$ est une translation (d'après la question **c**). La question **b** montre que ce n'est pas possible.

e) La classification des isométries assure que f est l'identité, une rotation ou une symétrie qui ont toutes au moins un point fixe.

7.1.4 Une autre représentation implicite de nature géométrique

Lemme 247 Soit $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $k \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des points M du plan tel que $\mathrm{MA}/\mathrm{MB} = k$ est

(i) La médiatrice de [AB] si $k = 1$
(ii) Un cercle centré sur (AB) si $k \neq 1$.

Preuve. L'égalité $\mathrm{MA}/\mathrm{MB} = k$ est équivalente à $\mathrm{MA}^2 - k\mathrm{MB}^2 = 0$. Le résultat découle alors immédiatement du lemme 246.

Exercice 145 Soit $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points du plan tels que $\mathrm{MA}/\mathrm{MB} = k$.

a) Sans utiliser que $\mathscr{C}$ est un cercle (d'après le lemme 247), montrer que la droite (AB) rencontre $\mathscr{C}$ en deux points U, V. Déterminer, en fonction de k des couples non nuls de réels (x, y) et (x', y') tel que $x\overrightarrow{\mathrm{UA}} + y\overrightarrow{\mathrm{UB}} = 0$ et $x'\overrightarrow{\mathrm{VA}} + y'\overrightarrow{\mathrm{UB}} = 0$.

b) Soit Ω le centre de $\mathscr{C}$. Déterminer un couple non nul de réels (α, β) tel que $\alpha\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}} + \beta\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} = 0$. En déduire la position de Ω sur la droite (AB).

c) Pour $\mathrm{C} \in \mathscr{C}$ que peut-on dire des pieds des bissectrices intérieures et extérieures au triangle ABC ?

7.1.5 Encore deux autres représentations implicites de nature géométrique

Lemme 248 – Cercle de diamètre donné. Soit A, B deux points du plan. L'ensemble des points M tel que $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Preuve. C'est l'ensemble des points tels que l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est droit : c'est donc le cercle de diamètre [AB]. On peut le retrouver par le calcul en introduisant I le milieu de [AB]. On a

$$\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = \langle \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}, \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \rangle.$$

Comme $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$, on a $\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = MI^2 - IA^2$ et l'ensemble cherché est le cercle de centre I passant par A.

Lemme 249 Soit A, B, C trois points du plan. L'ensemble des points M tels que

$$(\widehat{(MA), (MB)}) = (\widehat{(CA), (CB)})$$

est le cercle circonscrit au triangle ABC privé de A et B si A, B, C ne sont pas alignés : la droite ABC privée de A et B si A, B, C alignés.

Preuve. C'est la proposition 227.

7.1.6 Représentation paramétrique transcendante

Une représentation paramétrique d'un sous-ensemble $\mathscr{E}$ de points d'un « grand » ensemble X est la description de cet ensemble comme image d'une fonction à valeurs dans X. L'ensemble de départ est appelé l'espace ou l'ensemble des paramètres. Cette description a l'inconvénient qu'un point de $\mathscr{E}$ peut être obtenu pour plusieurs valeurs du paramètre. C'est un point auquel il faut être vigilant.

Notre objectif est de décrire le cercle comme sous-ensemble d'un plan affine euclidien. Ainsi, le cercle sera décrit comme l'image d'une fonction de $\mathbb{R}$ (ou un intervalle de $\mathbb{R}$) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire comme une courbe paramétrée.

Lemme 250 Une représentation paramétrique du cercle de centre O de coordonnées (x_O, y_O) de rayon R est donnée par

$$\begin{cases} x(\theta) = x_O + R\cos(\alpha\theta) \\ y(\theta) = y_O + R\sin(\alpha\theta) \end{cases}$$

où θ décrit $\mathbb{R}$ ou un intervalle de longueur au moins $2\pi/\alpha$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ est fixé.

Preuve. On a bien $(x(\theta) - x_O)^2 + (y(\theta) - y_O)^2 = R^2$. Ainsi toutes les points de la courbe paramétrée sont sur le cercle $\mathscr{C}(O, R)$. Inversement, comme θ décrit un intervalle de longueur au moins $2\pi/\alpha$, on obtient bien tous les points du cercle.

Remarque 251 Le mot transcendant signifie ici que la représentation utilise les fonctions sinus et cosinus, exponentielle,...

7.1.7 Représentation paramétrique rationnelle

Remarque 252 Le mot rationnelle signifie ici que la représentation utilise des fractions rationnelles.

Lemme 253 Une représentation paramétrique du cercle de rayon R et de centre O (de coordonnées (x_O, y_O)) privé du point $(x_O - R, y_O)$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = x_O + R\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = y_O + R\,\dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Preuve. *Preuve (partielle) 1.* C'est très facile de montrer que la courbe est contenue dans le cercle de centre O de rayon R. Si on note $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$, on a

$$OM(t)^2 = (x(t) - x_O)^2 + (y(t) - y_O)^2 = R^2\frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = R^2\frac{1 + 2t^2 + t^4}{(1+t^2)^2} = R^2.$$

Il s'agit à présent de montrer que tout point du cercle s'écrit sous cette forme. Nous ne le faisons pas directement : ce sera fait dans les autres preuves.

Preuve 2 : une preuve géométrique. On considère le point de coordonnées $(x_O - R, y_O)$ et d_t la droite de pente t passant par ce point. Elle recoupe le cercle en un unique point [5]. Déterminons les coordonnées de ce nouveau point $N(t)$.

Les coordonnées (X, Y) de $N(t)$ vérifient les équations $Y = t(X - x_O + R) + y_O$ [6] et $(X - x_O)^2 + (Y - y_O) = R^2$ [7]. En reportant Y dans la seconde équation, on obtient que X est solution de l'équation

$$(X - x_O)^2 + t^2(X - x_O + R)^2 = R^2$$

L'une des solutions de cette équation de degré deux est $x_O - R$ [8]. Le terme en X de l'équation est $-2(x_O + t^2(x_O - R))$. Les relations coefficients-racines assurent alors que l'autre solution est

$$2\frac{x_O + t^2(x_O - R)}{1 + t^2} - (x_O - R) = \frac{(1 + t^2)x_O + (1 - t^2)R}{1 + t^2} = x_O + R\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,.$$

On obtient
$$Y = y_O + R\frac{2t}{1 + t^2}$$

en reportant la valeur de X dans l'équation de d_t.

Inversement, un point (X, Y) du cercle autre que $(x_O - R, y_O)$ est sur le cercle et sur la droite d_t où t est donné par $(Y - y_0)/(X - (x_O - R))$ [9]. C'est précisément ce calcul qu'il manquait dans la première preuve pour trouver le (ou les) paramètre(s) [10] t associé à un point du cercle.

Preuve 3 : une preuve trigonométrique. On va utiliser les formules trigonométriques suivantes (à connaître et à savoir démontrer vite bien sûr !) :

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \qquad \sin(\theta) = \frac{2\tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}.$$

Donnons une démonstration calculatoire : on a

$$\frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} = \frac{\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)}{1} = \cos(2\theta/2) = \cos(\theta)\,.$$

et
$$\frac{2\tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} = 2\frac{\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{1} = \sin(\theta)\,.$$

ces formules n'étant valables que lorsque $\tan(\theta/2)$ est défini c'est-à-dire $\theta \neq \pi[2\pi]$.

On reprend la paramétrisation du lemme 250 et pour $\alpha\theta \neq \pi$, on pose $t = \tan(\alpha\theta/2)$. Les formules trigonométriques ci-dessus montrent que $x(\theta)$ et $y(\theta)$ sont bien de la forme

$$\begin{cases} x(\theta) = x_O + R\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y(\theta) = y_O + R\dfrac{2t}{1 + t^2} \end{cases}$$

et ce raisonnement est valable pour les points tel que $\alpha\theta \neq \pi$ c'est-à-dire tous les points du cercle sauf $(x_O - R, y_O)$.

Exercice 146 Déterminer une équation paramétrique de l'ensemble obtenu en faisant rouler sans glisser un cercle de rayon R sur un autre cercle de rayon R.

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 4R. Montrer que l'ensemble précédent peut être obtenu en fixant un point O sur un cercle de rayon 2R et en considérant le lieu des points M tel que M est sur la tangente d_N à $\mathscr{C}$ en N et sur la perpendiculaire à d_N passant par O.

5. Nous justifierons ce fait un peu plus loin.
6. car $N(t)$ est sur la droite d_t
7. car $N(t)$ est sur le cercle $\mathscr{C}(O, R)$.
8. car le point $(x_O - R, y_O)$ est en même temps sur d_t et $\mathscr{C}(O, R)$.
9. Le dénominateur n'est pas nul puisque justement on a écarté le point $(x_O - R, y_O)$.
10. Le calcul qu'on vient de faire révèle qu'il n'en existe qu'un.

7.2 Le problème de l'intersection de deux cercles

Commençons par énoncer le résultat bien connu que nous avons en vu.

Proposition 254 — Intersection de deux cercles. On considère $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ et $\mathscr{C}' = \mathscr{C}(\mathrm{O}', \mathrm{R}')$. On a $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' \neq \varnothing$ si et seulement si $|\mathrm{R} - \mathrm{R}'| \leqslant \mathrm{OO}' \leqslant \mathrm{R} + \mathrm{R}'$.

Preuve. (⇒) La preuve de ce résultat repose uniquement sur l'inégalité triangulaire. On considère $\mathrm{M} \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$, l'inégalité triangulaire donne alors

$$|\mathrm{OM} - \mathrm{O'M}| \leqslant \mathrm{OO}' \leqslant \mathrm{OM} + \mathrm{O'M}\,.$$

Comme M est sur les deux cercles, on a $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$ et $\mathrm{O'M} = \mathrm{R}'$ et donc le résultat souhaité.
(⇐) L'objectif de ce qui suit va être de montrer la réciproque : si $|\mathrm{R} - \mathrm{R}'| \leqslant \mathrm{OO}' \leqslant \mathrm{R} + \mathrm{R}'$ alors les deux cercles se rencontrent. La preuve de ce résultat est loin d'être évidente : elle repose sur les propriétés du corps $\mathbb{R}$ (soit algébrique : un nombre réel positif est un carré ou de manière équivalente une équation polynomiale de degré 2 à discriminant positif a des racines, soit topologique : le théorème des valeurs intermédiaires). Si on ne considérait que des points à coordonnées rationnelles, le théorème ne serait plus vrai : par exemple les cercles d'équation $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 1$ et $(\mathrm{X}-1)^2 + \mathrm{Y}^2 = 1$ se rencontrent en $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ et $(1/2, \sqrt{3}/2)$ qui ne sont pas à coordonnées rationnelles.

Les étapes de la démarche sont les suivantes : la forme spécifique des équations de cercle permet de remplacer l'intersection de deux cercles par l'intersection d'un cercle et d'une droite (sauf dans le cas particulier trivial où les deux cercles ont le même centre). On a ainsi remplacer le problème (difficile) d'intersection de deux courbes de degré 2 par celui d'une courbe de degré 2 et d'une courbe de degré 1. On étudie ensuite l'intersection d'une droite et d'un cercle (proposition 255) en fonction de la distance du centre du cercle à la droite. On revient ensuite au problème initial pour obtenir le résultat souhaité.

Pour la première étape du raisonnement, on cherche donc l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ (on suppose $\mathrm{R} \geqslant \mathrm{R}'$) sous la forme des solutions du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x_{\mathrm{O}}x - 2y_{\mathrm{O}}y + {x_{\mathrm{O}}}^2 + {y_{\mathrm{O}}}^2 - \mathrm{R}^2 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x_{\mathrm{O}'}x - 2y_{\mathrm{O}'}y + {x_{\mathrm{O}'}}^2 + {y_{\mathrm{O}'}}^2 - \mathrm{R}'^2 &= 0 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations, on obtient le système équivalent (la forme spécifique des équations de cercle (en degré 2, on a juste $x^2 + y^2$) assure qu'on tombe bien sur du degré 1 ou 0)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x_{\mathrm{O}}x - 2y_{\mathrm{O}}y + {x_{\mathrm{O}}}^2 + {y_{\mathrm{O}}}^2 - \mathrm{R}^2 &= 0 \\ (x_{\mathrm{O}} - x_{\mathrm{O}'})x + (y_{\mathrm{O}} - y_{\mathrm{O}'})y + c &= 0 \end{cases}$$

avec $c = \dfrac{1}{2}({x_{\mathrm{O}'}}^2 + {y_{\mathrm{O}'}}^2 - {x_{\mathrm{O}}}^2 - {y_{\mathrm{O}}}^2 + \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2)$.

On remarque que l'équation $(x_{\mathrm{O}} - x_{\mathrm{O}'})x + (y_{\mathrm{O}} - y_{\mathrm{O}'})y + c = 0$ est bien celle d'une droite sauf si $x_{\mathrm{O}} - x_{\mathrm{O}'} = 0$ et $y_{\mathrm{O}} - y_{\mathrm{O}'} = 0$ c'est-à-dire sauf si les coordonnées de O et O′ sont les mêmes ou encore que $\mathrm{O} = \mathrm{O}'$. Autrement dit, si les cercles sont de centre distincts alors la deuxième équation est celle d'une droite qui vérifie de plus qu'un vecteur normal à cette droite est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$. On s'est ainsi ramené à l'intersection d'une droite (orthogonale à la droite des centres) et d'un des deux cercles.

Dans le cas où les deux centres sont les mêmes, la situation est très simple : un point ne peut pas être à deux distances différentes du centre. Ainsi si les rayons sont différents, l'intersection est vide. Si les rayons sont les mêmes, il n'y a qu'un seul cercle et l'intersection est le cercle tout entier.

Il s'agit à présent d'étudier l'intersection d'une droite et d'un cercle.

7.2.1 Intersection d'une droite et d'un cercle

Proposition 255 — Intersection d'une droite et d'un cercle. Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathrm{O}, \mathrm{R})$ un cercle et $\mathscr{D}$ une droite. Alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ est

(*i*) vide si $d(\mathrm{O}, \mathscr{D}) > \mathrm{R}$;
(*ii*) réduit à un singleton si $d(\mathrm{O}, \mathscr{D}) = \mathrm{R}$; dans ce cas, on dit que la droite $\mathscr{D}$ est *tangente* à $\mathscr{C}$;
(*iii*) un ensemble à deux éléments si $d(\mathrm{O}, \mathscr{D}) < \mathrm{R}$.

Preuve. Soit H le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}$. Pour $\mathrm{M} \in \mathscr{D}$, on a $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{MH}^2$. Or $\mathrm{OH} = d(\mathrm{O}, \mathscr{D})$ (voir la proposition 173). Ainsi

(*i*) si $d(\mathrm{O}, \mathscr{D}) > \mathrm{R}$ alors $\mathrm{OM} \geqslant \mathrm{OH} > \mathrm{R}$. Un point M de la droite est donc trop loin du centre pour être sur le cercle.

(*ii*) si $d(\mathrm{O},\mathscr{D}) = \mathrm{R}$ alors $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{R}^2$ si et seulement si $\mathrm{MH} = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{M} = \mathrm{H}$ et H est le seul point de $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}$ et (OH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.

(*iii*) Dans le dernier cas $d(\mathrm{O},\mathscr{D}) < \mathrm{R}$, donnons plusieurs preuve du fait que le cercle et la droite s'intersectent en deux points.

Preuve 1 topologique : théorème des valeurs intermédiaires. Par le théorème des valeurs intermédiaires. On considère sur chacune des deux demi-droites portées par $\mathscr{D}$ issue de H, la fonction suivante : $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{OM}^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{MH}^2 + \mathrm{R}^2 - \mathrm{OH}^2$. C'est une fonction strictement croissante de MH qui est négative en $\mathrm{M} = \mathrm{H}$ et tend vers $+\infty$ lorsque M tend vers l'infini. Elle s'annule donc en un unique point sur chaque demi-droite : il y a exactement deux points de la droite $\mathscr{D}$ qui sont sur $\mathscr{C}$.

Preuve 2 algébrique : tout nombre strictement positif admet deux racines carrées réelles. On choisit un repère orthonormé convenable : on prend l'origine du repère au centre du cercle. On prend comme premier vecteur de base, un vecteur unitaire porté par $\mathscr{D}$ et comme deuxième vecteur de base, un vecteur orthogonal au premier. L'équation de $\mathscr{C}$ est alors $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = \mathrm{R}^2$, comme (OH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$, les coordonnées de H sont $(0, h)$ avec $|h| < \mathrm{R}$ et $\mathscr{D}$ a pour équation $\mathrm{Y} = h$. Comme $\mathrm{R}^2 - h^2 > 0$, les points d'intersection sont donnés par $(\sqrt{\mathrm{R}^2 - h^2}, h)$ et $(-\sqrt{\mathrm{R}^2 - h^2}, h)$.

Preuve 3 algébrique : le nombre de solutions d'une équation du second degré est donné par le signe du discriminant. Ici, on ne réfléchit pas au choix du repère. Cela va impliquer beaucoup de calculs. L'équation du cercle est donné par

$$x^2 + y^2 - 2x_{\mathrm{O}}x - 2y_{\mathrm{O}}y + {x_{\mathrm{O}}}^2 + {y_{\mathrm{O}}}^2 - \mathrm{R}^2 = 0$$

L'équation de la droite est donnée par $ax+by+c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Grâce à l'équation de la droite, on peut exprimer, pour les points de la droite (et donc en particulier ceux de l'intersection), x en fonction de y ou y en fonction de x (suivant si a ou b est nul ou non). On suppose par exemple que $b \neq 0$. Pour un point de $\mathscr{D}$ de coordonnées (x, y), on a donc $y = (-c-ax)/b$. On reporte ainsi cette valeur dans l'équation du cercle pour obtenir une équation (dites équation aux abscisses) d'inconnue x dont les solutions seront les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec le cercle. Après réduction et multiplication par b^2, cette équation est donnée par

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2(ac - 2x_{\mathrm{O}}b^2 + 2y_{\mathrm{O}}bc + 2aby_{\mathrm{O}})x + b^2{x_{\mathrm{O}}}^2 + b^2{y_{\mathrm{O}}}^2 - b^2\mathrm{R}^2 + c^2 + 2y_{\mathrm{O}}bc = 0\,.$$

Cette équation a autant de solutions que le nombre de points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}$ (lorsqu'on connaît l'abscisse d'un point de $\mathscr{D}$, on connaît aussi son ordonnée puisque $y = (-c - ax)/b$).

Il suffit donc à présent pour connaître le nombre de point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ d'étudier le signe du discriminant (réduit). Après calcul et réduction, le discriminant s'écrit

$$\Delta = b^2[(a^2 + b^2)\mathrm{R}^2 - (ax_{\mathrm{O}} + by_{\mathrm{O}} + c)^2] = b^2(a^2 + b^2)(\mathrm{R}^2 - d(\mathrm{O},\mathscr{D})^2)\ ^{11}\,.$$

Ainsi le discriminant est strictement positif et il y a deux points d'intersection si et seulement si $\mathrm{R}^2 > d(\mathrm{O},\mathscr{D})^2$. Le discriminant est nul et il y a un seul point d'intersection si et seulement si $\mathrm{R}^2 = d(\mathrm{O},\mathscr{D})^2$. Le discriminant est négatif et $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ ne se rencontrent pas si et seulement si $\mathrm{R}^2 < d(\mathrm{O},\mathscr{D})^2$.

7.2.2 Retour au problème initial : intersection de deux cercles

Calculons $d(\mathrm{O},\mathscr{D})$ où $\mathscr{D}$ est la droite d'équation

$$(x_{\mathrm{O}} - x_{\mathrm{O}'})x + (y_{\mathrm{O}} - y_{\mathrm{O}'})y + c = 0$$

On a $d(\mathrm{O},\mathscr{D}) = \dfrac{|(x_{\mathrm{O}} - x_{\mathrm{O}'})x_{\mathrm{O}} + (y_{\mathrm{O}} - y_{\mathrm{O}'})y_{\mathrm{O}} + c|}{\sqrt{(x_{\mathrm{O}} - x_{\mathrm{O}'})^2 + (y_{\mathrm{O}} - y_{\mathrm{O}'})^2}}$ [12]. Avec la valeur de c, on obtient

$$d(\mathrm{O},\mathscr{D}) = \frac{\mathrm{OO}'^2 + \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2}{2\mathrm{OO}'}.$$

On en déduit alors $d(\mathrm{O},\mathscr{D}) \leqslant \mathrm{R}$ si et seulement si $(\mathrm{R} - \mathrm{OO}')^2 - \mathrm{R}'^2 \leqslant 0$ c'est-à-dire $|\mathrm{R} - \mathrm{OO}'| \leqslant \mathrm{R}'$. Or $|\mathrm{R} - \mathrm{OO}'| \leqslant \mathrm{R}'$ est équivalent à $\mathrm{R} - \mathrm{OO}' \leqslant \mathrm{R}'$ et $\mathrm{OO}' - \mathrm{R} \leqslant \mathrm{R}'$ c'est-à-dire

11. De façon générale, si M est un point de coordonnée (u, v) et $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ alors $d(\mathrm{M},\mathscr{D}) = |au + bv + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$

12. C'est la note de bas de page précédente qui justifie le calcul ! À savoir faire à tout prix !

$$\mathrm{R}-\mathrm{R}' = |\mathrm{R}-\mathrm{R}'| \leqslant \mathrm{OO}' \leqslant \mathrm{R}+\mathrm{R}'.$$

De plus, l'égalité $d(\mathrm{O},\mathscr{D}) = \mathrm{R}$ est équivalent à $\mathrm{OO}' = \mathrm{R}-\mathrm{R}' = |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$ ou à $\mathrm{OO}' = \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

Définition 256 – Cercles tangents. On dit que deux cercles sont tangents s'ils se rencontrent en un seul point.

D'après les calculs précédents, $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ sont tangents si et seulement si $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'| = \mathrm{OO}'$ ou $\mathrm{OO}' = \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

Dans le premier cas, on dit que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents intérieurement. Dans le second cas, on dit que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents extérieurement.

En conclusion de toute cette section, on obtient la proposition suivante

Proposition 257 – Intersection de deux cercles. Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}' = \mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ alors $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ est

(*i*) vide si $\mathrm{OO}' < |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$ ou $\mathrm{R}+\mathrm{R}' < \mathrm{OO}'$. Le premier cas arrive en particulier si $\mathrm{O} = \mathrm{O}'$ et $\mathrm{R} \neq \mathrm{R}'$.

(*ii*) réduit à un point si $\mathrm{OO}' = |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$ ou $\mathrm{OO}' = \mathrm{R}+\mathrm{R}'$. Cela arrive en particulier si $\mathrm{R} = 0$ et O est sur $\mathscr{C}'$ et inversement.

(*iii*) réduit à deux points si $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'| < \mathrm{OO}' < \mathrm{R}+\mathrm{R}'$. Cela impose en particulier $\mathrm{O} \neq \mathrm{O}'$. Les deux points sont d'intersection sont alors symétriques par rapport à la droite (OO').

(*iv*) infini si $\mathrm{O} = \mathrm{O}'$ et $\mathrm{R} = \mathrm{R}' > 0$.

Exercice 147 Montrer que $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R}) = \mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ implique $\mathrm{O}' = \mathrm{O}$ et $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$.

Exercice 148 Soit a, b, c trois réels positifs. Peut-on toujours tracer un triangle dont les longueurs des côtés sont a, b, c ?

Exercice 149 On considère les cercles $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ et on note $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les disques fermés correspondant.

a) On suppose que $\mathrm{OO}' \leqslant |\mathrm{R}-\mathrm{R}'|$. Montrer que l'un des deux disques est inclus dans l'autre.

b) On suppose que $\mathrm{R}+\mathrm{R}' < \mathrm{OO}'$. Montrer que les deux disques ne se rencontrent pas.

Exercice 150 Dans un plan affine euclidien, on considère ABC un triangle et M un point du plan. On note respectivement $\mathscr{C}_\mathrm{A}$, $\mathscr{C}_\mathrm{B}$ et $\mathscr{C}_\mathrm{C}$ les cercles de centre M de rayon MA, MB et MC. Chacun de ces cercles recoupent le cercle circonscrit à ABC respectivement en A′, B′ et C′. Que dire du triangle A′B′C′ ?

Exercice 151 – Tangente. On suppose $\mathrm{R} > 0$.

a) Soit M un point strictement intérieur à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Montrer qu'il n'existe pas de tangente à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ passant par M.

b) Soit M un point de $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Montrer qu'il existe une unique tangente à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ passant par M. Déterminer cette droite.

c) Montrer que par tout point M strictement extérieur à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$, on peut mener exactement deux tangentes à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ symétrique par rapport à (MO). Donner une construction à la règle et au compas d'une telle tangente.

Exercice 152 – Cercle et tangence. Soit $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2$ deux droites sécantes et A n'appartenant pas à ces droites. Construire un cercle $\mathscr{C}$ passant par A et tangent à D_1 et D_2 (on pourra construire un cercle tangent à D_1 et D_2 puis utiliser une homothétie).

Application 258 – Une évidence ! Vraiment ?. Soit $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ deux cercles. On suppose qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ qui est intérieur à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathrm{M}' \in \mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ qui est extérieur à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Alors $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ sont sécants en deux points.

En effet, on a les inégalités suivantes

(*i*) $\mathrm{OO}' \leqslant \mathrm{OM}' + \mathrm{O}'\mathrm{M}' < \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

(*ii*) $\mathrm{R} < \mathrm{OM}' \leqslant \mathrm{OO}' + \mathrm{O}'\mathrm{M}' \leqslant \mathrm{OO}' + \mathrm{R}'$

(*iii*) $\mathrm{R}' = \mathrm{O}'\mathrm{M} \leqslant \mathrm{OO}' + \mathrm{OM} < \mathrm{OO}' + \mathrm{R}$

qui sont équivalentes au fait que $|\mathrm{R}-\mathrm{R}'| < \mathrm{OO}' < \mathrm{R}+\mathrm{R}'$.

Inversement, si $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ sont deux cercles sécants en deux points alors il existe $\mathrm{M} \in \mathscr{C}'(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ qui est intérieur à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathrm{M}' \in \mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ qui est extérieur à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$.

On considère la droite (OO'). Elle rencontre $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ (puisqu'elle passe par O' : sa distance à O' est nulle) en deux points. On note M le point de $(\mathrm{OO}') \cap \mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ qui est du même côté de O' que O et M' l'autre point d'intersection. On a $\mathrm{OM}' = \mathrm{OO}' + \mathrm{O}'\mathrm{M}' > \mathrm{R} - \mathrm{R}' + \mathrm{R}' = \mathrm{R}$. Ainsi M' est à l'extérieur de $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Pour le point M, soit O', O et M sont dans cet ordre, soit O', M et O sont dans cet ordre. On a alors $\mathrm{OM} = \mathrm{O}'\mathrm{M} - \mathrm{OO}' < \mathrm{R}' - (\mathrm{R}' - \mathrm{R}) = \mathrm{R}$ ou $\mathrm{OM} = \mathrm{OO}' - \mathrm{O}'\mathrm{M} < \mathrm{R} + \mathrm{R}' - \mathrm{R}' = \mathrm{R}$. Ainsi, dans les deux cas $\mathrm{OM} < \mathrm{R}$ et M est intérieur à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$.

7.3 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Proposition-Définition 259 Soit M un point et $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ un cercle. On considère une droite $\mathscr{D}$ qui rencontre $\mathscr{C}$ en deux points M_1 et M_2. On appelle puissance de M par rapport à $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ le réel

$$\langle \overrightarrow{\mathrm{MM}_1}, \overrightarrow{\mathrm{MM}_2} \rangle = \overline{\mathrm{MM}_1} \cdot \overline{\mathrm{MM}_2}\,,$$

et on le note $\mathscr{P}_{\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})}(\mathrm{M})$. Il ne dépend pas de la droite $\mathscr{D}$ considérée et est égal $\mathrm{OM}^2 - \mathrm{R}^2$.

Preuve. Soit H le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{D}$, on a alors

$$\overline{\mathrm{MM}_1} = \overline{\mathrm{MH}} + \overline{\mathrm{HM}_1} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{MM}_2} = \overline{\mathrm{MH}} + \overline{\mathrm{HM}_2} = \overline{\mathrm{MH}} - \overline{\mathrm{HM}_1}$$

On obtient donc $\mathscr{P}_{\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})}(\mathrm{M}) = \mathrm{MH}^2 - \mathrm{HM}_1^2 = \mathrm{MH}^2 - (\mathrm{R}^2 - \mathrm{OH}^2) = \mathrm{OM}^2 - \mathrm{R}^2$ (grâce au théorème de Pythagore).

Remarque 260 Pour un point, être sur le cercle $\mathscr{C}$ signifie avoir puissance 0 à rapport à $\mathscr{C}$. Être à l'intérieur de $\mathscr{C}$ signifie avoir puissance négative par rapport à $\mathscr{C}$, enfin être à l'extérieur de $\mathscr{C}$ signifie avoir puissance positive par rapport à $\mathscr{C}$.

7.3.1 Axe radical de deux cercles

Proposition 261 Soient $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}'(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ deux cercles de centre distincts. Alors l'ensemble des points M du plan tels que $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}) = \mathscr{P}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{M})$ est une droite orthogonale à (OO') appelé *axe radical de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$*.

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se rencontrent en deux points A et B alors l'axe radical est (AB).

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont tangents (c'est-à-dire se rencontrent en un seul point) alors l'axe radical est la perpendiculaire à (OO') passant par ce point.

Preuve. On a $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M}) = \mathscr{P}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{M}) \iff \mathrm{OM}^2 - \mathrm{R}^2 = \mathrm{O}'\mathrm{M}^2 - \mathrm{R}'^2$ ce qui encore équivalent à $\mathrm{OM}^2 - \mathrm{O}'\mathrm{M}^2 = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2$ puis à $\langle \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{M}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{M}} \rangle = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2$ c'est-à-dire à $2\langle \overrightarrow{\mathrm{IM}}, \overrightarrow{\mathrm{OO}'} \rangle = \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2$ où I est le milieu de $[\mathrm{OO}']$ (on aurait aussi pu utiliser directement le lemme 246 : on a reproduit sa preuve).

Exercice 153 – Calcul analytique d'une puissance. Soit M un point et $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ un cercle d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Calculer la puissance de M par rapport à $\mathscr{C}(0,\mathrm{R})$ à l'aide de f où $f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$.

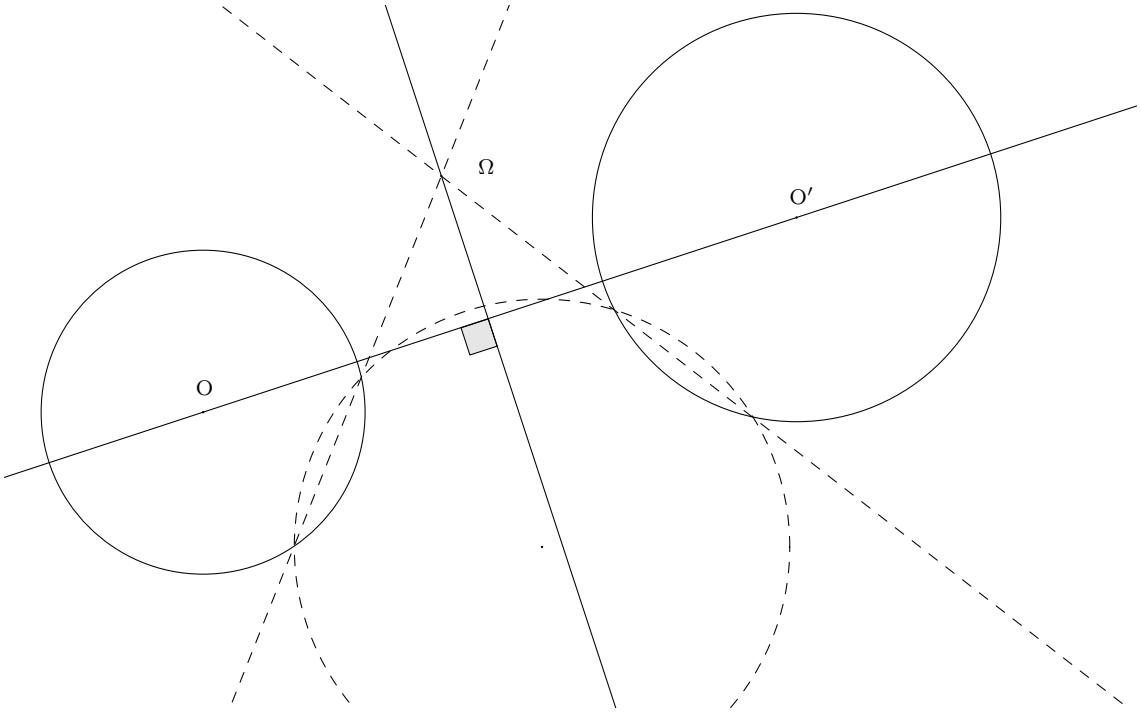
Retrouver alors le résultat de la proposition 261.

Exercice 154 – Puissance et tangence. Soit M un point de l'axe radical de deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Montrer que si M est à l'extérieur de $\mathscr{C}$, il est aussi à l'extérieur de $\mathscr{C}'$ et qu'alors les points de contact avec $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ des tangentes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ issues de M sont sur le cercle de centre M de rayon $\sqrt{\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(\mathrm{M})} = \sqrt{\mathscr{P}_{\mathscr{C}'}(\mathrm{M})}$.

Exercice 155 – Avec trois cercles.

a) Soit $\mathscr{C}, \mathscr{C}', \mathscr{C}''$ trois cercles dont les centres sont non alignés. Montrer qu'il existe un unique point Ω vérifiant $\mathscr{P}_{\mathscr{C}}(\Omega) = \mathscr{P}_{\mathscr{C}'}(\Omega) = \mathscr{P}_{\mathscr{C}''}(\Omega)$ et que les trois axes radicaux sont concourants en ce point.

b) On considère deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ disjoints. Expliquer, en utilisant la question précédente pourquoi la figure suivante justifie la construction de l'axe radical de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.



7.4 Cercle et transformations géométriques

Proposition 262 L'image d'un cercle par un isométrie est un cercle.
De façon précise, soit f une isométrie, l'image de $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ par f est $\mathscr{C}(f(\mathrm{O}),\mathrm{R})$.

Preuve. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Comme f est une isométrie (c'est-à-dire conserve les distance), on a $f(\mathrm{O})f(\mathrm{M}) = \mathrm{OM} = \mathrm{R}$ et donc $f(\mathrm{M})$ appartient au cercle de centre $f(\mathrm{O})$ de rayon R. L'image du cercle de centre O de rayon R est donc contenue dans $\mathscr{C}(f(\mathrm{O}),\mathrm{R})$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\mathrm{N} \in \mathscr{C}(f(\mathrm{O}),\mathrm{R})$. Comme f est bijective, on peut écrire N sous la forme $\mathrm{N} = f(\mathrm{M})$ (N admet un antécédent par f). Montrons que $\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Comme f est une isométrie, on a $f(\mathrm{O})f(\mathrm{M}) = \mathrm{OM}$. Or $f(\mathrm{O})f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{O})\mathrm{N} = \mathrm{R}$ puisque $\mathrm{N} \in \mathscr{C}(f(\mathrm{O}),\mathrm{R})$. Ainsi $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. On en déduit que $\mathrm{N} \in f(\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R}))$.

Proposition 263 L'image d'un cercle par une homothétie est un cercle.
De façon précise, soit f une homothétie de rapport λ, l'image de $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ par f est $\mathscr{C}(f(\mathrm{O}),|\lambda|\mathrm{R})$ [13].

Preuve. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Comme f est une homothétie, on a $\overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{M})} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et donc en prenant la norme $f(\mathrm{O})f(\mathrm{M}) = |\lambda|\mathrm{OM} = \mathrm{R}$ [14] et donc $f(\mathrm{M})$ appartient au cercle de centre $f(\mathrm{O})$ de rayon $|\lambda|\mathrm{R}$. L'image du cercle de centre O de rayon R est donc contenue dans $\mathscr{C}(f(\mathrm{O}),|\lambda|\mathrm{R})$.

Montrons l'inclusion réciproque. Si $\lambda = 0$, elle est évidente car $\mathscr{C}(f(\mathrm{O}),|\lambda|\mathrm{R})$ est réduit à un point qui est atteint par n'importe quel élément de $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ puisque f est constante. On suppose $\lambda \neq 0$ Soit $\mathrm{N} \in \mathscr{C}(f(\mathrm{O}),|\lambda|\mathrm{R})$. Comme f est bijective, on peut écrire N sous la forme $\mathrm{N} = f(\mathrm{M})$ (N admet un antécédent par f). Montrons que $\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. Comme f est une homothétie, on a $\overrightarrow{f(\mathrm{O})f(\mathrm{M})} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Or $f(\mathrm{O})f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{O})\mathrm{N} = |\lambda|\mathrm{R}$ puisque $\mathrm{N} \in \mathscr{C}(f(\mathrm{O}),|\lambda|\mathrm{R})$. Ainsi $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$. On en déduit que $\mathrm{N} \in f(\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R}))$. On remarquera la ressemblance avec la preuve de la proposition 262.

Corollaire 264 L'image d'un cercle par une similitude est un cercle. De façon précise, soit f une similitude de rapport λ, l'image de $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ par f est $\mathscr{C}(f(\mathrm{O}),|\lambda|\mathrm{R})$.

Remarque 265 – Rapport et valeur absolue. Comme pour les homothéties, on prendra bien garde à la valeur absolue du rapport : un rayon ne peut pas être négatif !

Preuve. On pourrait bien sûr reproduire la preuve des propositions 262 et 263. C'est un excellent exercice à faire !

13. On prendra bien garde à la valeur absolue du rapport : un rayon ne peut pas être négatif !
14. On voit ici la raison de la valeur absolue : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

Mais on peut aussi utiliser ces deux propositions : f est une similitude de rapport λ, c'est donc la composée $h \circ g$ d'une isométrie g et d'une homothétie de rapport λ (voir la proposition 233).

On a donc $f(\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})) = h(g(\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R}))$. La proposition 262 assure que $g(\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})) = \mathscr{C}(g(\mathrm{O}),\mathrm{R})$. Ainsi $f(\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})) = h(\mathscr{C}(g(\mathrm{O}),\mathrm{R})) = \mathscr{C}(h(g(\mathrm{O})),|\lambda|\mathrm{R})$; La dernière égalité résultant de la proposition 263. Comme $h(g(\mathrm{O})) = f(\mathrm{O})$, on obtient le résultat cherché.

Exercice 156 – Image d'un cercle. Soit $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$.

a) Déterminer les homothéties-translations qui envoient $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ sur lui-même.

b) En déduire les homothéties-translations qui envoient $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ sur $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$. Construire les centres de ces homothéties (on distinguera les cas $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$ et $\mathrm{R} \neq \mathrm{R}'$).

c) On suppose que $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ se rencontrent en deux points distincts A et B et $\mathrm{R} \neq \mathrm{R}'$. On note Ω et Ω' les centres des homothéties qui envoient $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ sur $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$. Montrer que le cercle de diamètre $\Omega\Omega'$ passe par A et B et que $(\mathrm{A}\Omega)$ et $(\mathrm{A}\Omega')$ sont les bissectrices issues de A dans le triangle AOO' (on pourra introduire l'ensemble des points M tel que $\mathrm{MO}/\mathrm{MO}' = \mathrm{R}/\mathrm{R}'$). En déduire une autre construction de Ω et Ω'.

d) On suppose que $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ sont distincts. Déterminer le nombre de droites qui sont tangentes aux deux cercles (on pourra distinguer le cas des droites parallèles à (OO') et celui des droites qui rencontrent (OO')).

e) Soit ABC un triangle et $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ le triangle médian (c'est-à-dire A' milieu de [BC], B' milieu de [AC] et C' milieu de [AB]). Déterminer les homothéties qui envoient le cercle circonscrit à ABC sur le cercle circonscrit à $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$.

f) Déterminer les rotations qui envoie $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ sur lui-même et $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ sur $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$. À quelle condition en existe-t-il ? Déterminer le lieu des centres de ces rotations.

g) Déterminer les symétries (axiales) qui envoient $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ sur lui-même.

h) Déterminer le lieu des centres des similitudes qui envoient $\mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ sur $\mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$ (on distinguera les cas $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$ et $\mathrm{R} \neq \mathrm{R}'$).

Exercice 157 – Cercle et homothétie. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles de $\mathscr{E}$ de centre O et O' et de rayon R et R'.

a) Démontrer qu'il y a exactement deux homothéties ou translations qui transforment $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. À quelle condition, s'agit-il de deux homothéties ? à quelle condition y a-t-il une translation ?

b) Lorsqu'il s'agit de deux homothéties, démontrer que les centres des deux homothéties et des deux cercles sont alignés.

c) Soit ABC un triangle de $\mathscr{E}$, $\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. Déterminer les centres et les rapports des homothéties qui envoie le cercle circonscrit à ABC sur le cercle circonscrit à $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$.

d) Soit T une droite tangente simultanément à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. On note $\mathrm{P} \in \mathscr{C}$ (resp. $\mathrm{P}' \in \mathscr{C}'$) les points de tangence. À quelle condition, T rencontre-t-elle la droite (OO') ? Dans ce cas, démontrer que le point d'intersection de (OO') avec T est le centre d'un homothétie transformant O en O'.

e) Déterminer alors une méthode de construction de la tangente commune.

f) Étudier le cas où T ne rencontre pas (OO').

Exercice 158 Soit R, R' deux réels strictement positifs. On note $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\mathrm{O},\mathrm{R})$ et $\mathscr{C}' = \mathscr{C}(\mathrm{O}',\mathrm{R}')$. On suppose choisi un repère orthonormé $\mathcal{R}$ et on note $f(x,y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$ la fonction telle que $f(x,y) = 0$ soit l'équation de $\mathscr{C}$ et $f'(x,y) = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c'$ la fonction telle que $f'(x,y) = 0$ soit l'équation de $\mathscr{C}'$.

a) Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

(*i*) $\mathrm{OO}'^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2$

(*ii*) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en deux points A et B et la tangente en A à $\mathscr{C}$ est perpendiculaire en la tangente en B à $\mathscr{C}$

(*iii*) $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en deux points A et B et la tangente en A à $\mathscr{C}$ passe par O'.

(iv) $f(\mathrm{O}') = \mathrm{R}'^2$
(v) $f'(\mathrm{O}) = \mathrm{R}^2$
(vi) $aa' + bb' = 2c + 2c'$

Des cercles vérifiant cette propriété sont dits orthogonaux.

b) Soit Ω un point du plan. Montrer que Ω est le centre d'un cercle orthogonal à $\mathscr{C}$ si et seulement si Ω est extérieur à $\mathscr{C}$. Montrer que lorsque Ω est extérieur à $\mathscr{C}$, le cercle orthogonal à $\mathscr{C}$ de centre Ω est unique. En donner une construction à la règle et au compas.

Exercice 159 Soit $\mathscr{C}$ une cercle de centre O et $\mathrm{A} \in \mathscr{C}$. Quel est le lieu des milieux des cordes [AB] pour B parcourant $\mathscr{C}$?

Chapitre 8

Coniques

C'est quoi une conique ? Combien y a-t-il de coniques ? Comment les différentier ?

Contrairement aux objets qu'on a pu manipuler jusqu'ici (droites, triangles,...), la définition de coniques (en prépa CAPES) nécessite l'introduction de coordonnées. La première vérification à faire est alors bien sûr que la définition ne change pas lorsqu'on change de repères.

Définition 266 Une conique est un polynôme de degré 2 en deux variables à proportionnalité près. Si P est un polynôme de degré 2 en deux variables, on note [P] la conique correspondante.

Exemple 267 $\mathrm{P}(x,y) = 2x^2 + 5xy + 6y^2 + 3x + 6y + 3$ définit une conique, $\mathrm{Q}(x,y) = 8x^2 - 3xy + 5y^2$ aussi, $\mathrm{R}(x,y) = (3x + 5y + 2)(2y + 4x + 2)$ aussi.

Par contre, $x^3 + 6yx^2 - 5$ n'en défini pas une. Pas plus d'ailleurs que $3x + 5y + 2$.

Les polynômes $\mathrm{Q}(x,y) = 8x^2 - 3xy + 5y^2$ et $2\mathrm{Q}(x,y) = 16x^2 - 6xy + 10y^2$ définissent la même conique : deux polynômes proportionnels définissent la même conique.

Par définition si $\lambda \in \mathbb{R}^\times$, on a $[\mathrm{P}] = [\lambda \mathrm{P}]$.

Lemme 268 – Les points d'une conique. Une fois un repère cartésien fixé dans un plan affine $\mathscr{E}$. Chaque conique [P] définit un ensemble de points dans $\mathscr{E}$: l'ensemble des points (x,y) tels que $\mathrm{P}(x,y) = 0$.

Bien entendu, si je change P en λP, j'obtiens le même ensemble de points qui dépend bien de la conique et pas seulement du polynôme.

Remarque 269 Les ensembles du plans qui sont définis par une conique ne dépendent pas du choix du repère. Plus explicitement, soit [P] une conique, $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère cartésien du plan et C est l'ensemble des points du plan tels que $\mathrm{P} = 0$.

Si $\mathscr{R}' = (\mathrm{O}', \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ est un autre repère cartésien du plan, alors l'ensemble C est aussi décrit par une conique dans les nouvelles coordonnées : si (x,y) désigne les coordonnées de M dans $\mathscr{R}$ et (x',y') celles dans $\mathscr{R}'$. On peut écrire $x = ax' + by' + e$ et $y = cx' + dy' + f$ (avec $ad - bc \neq 0$) et donc

$$\mathrm{C} = \{(x',y'), \quad (\mathrm{P}(ax' + by' + e, cx' + d'y + f) = 0\}$$

et $\mathrm{P}(ax' + by' + e, cx' + d'y + f)$ est un polynôme de degré 2 en $(x,' y')$.

Par exemple, si je pars de la conique $[x^2 + y^2 - 1]$ et que je fais le changement de repère donné par $x = ax' + by' + e$ et $y = cx' + dy' + f$, on obtient la conique d'équation

$$[(a^2 + c^2)x^2 + (2ab + 2cd)xy + (b^2 + d^2)y^2 + (2ae + 2cf)x' + (2be + 2df)y' + e^2 + f^2 - 1]$$

Remarque 270 Attention, il se peut que deux coniques différentes définissent le même ensemble de points. Par exemple $[x^2 + 1]$ et $[x^2 + y^2 + 1]$ définissent toutes deux l'ensemble vide.

Remarque 271 – Classification. Quelles ensembles de points trouve-t-on ? une droite (« double »), deux droites distinctes, un point, l'ensemble vide, trois genres nouveaux « ellipse, parabole, hyperbole », l'ensemble vide.

8.1 Classification

On considère la conique $\mathrm{C} = [ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f]$

8.1.1 Méthode matricielle.

Étape 1 : Passage de la dimension 2 à la dimension 3 : homogénéisation. On commence par considérer les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

La matrice A est la matrice de la forme quadrique q_{C} sur $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$q_{\mathrm{C}}(x,y,t) = ax^2 + bxy + cy^2 + dxt + eyt + ft^2.$$

La forme quadratique q_{C} est obtenue à partir de la conique en ajoutant une variable t et en rendant homogène le polynôme qui définit la conique. La matrice B est la matrice de la forme quadratique $q_{\mathrm{C}}(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

On a alors

$$q_{\mathrm{C}}(x,y,t) = \begin{bmatrix} x & y & t \end{bmatrix} \mathrm{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}.$$

L'ensemble des points du plan défini par la conique C c'est-à-dire

$$\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\}$$

se décrit alors par $\{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad ax^2 + bxy + cy^2 + dxt + eyt + ft^2 = 0,\ t = 1\}$

Remarque 272 En fait, les matrices A et B ne sont pas associées à la conique C mais simplement au polynôme définissant C : si on change $\mathrm{P} = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ en $\lambda\mathrm{P}$, on change A et B en $\lambda\mathrm{A}$ et $\lambda\mathrm{B}$.

Dans la suite, on va s'intéresser aux valeurs propres de A et B et plus précisément aux nombres de valeurs propres de chaque signe. Le changement de A et B en $\lambda\mathrm{A}$ et $\lambda\mathrm{B}$ n'a donc pas d'influence.

Étape 2 : On diagonalise A en base orthonormée.

On écrit ainsi ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ avec $\mathrm{P} \in \mathcal{O}(3)$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A. En posant

$$\begin{bmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{bmatrix} = \mathrm{P}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix}.$$

On obtient
$$q_{\mathrm{C}}(x,y,t) = \lambda_1 \mathrm{X}^2 + \lambda_2 \mathrm{Y}^2 + \lambda_3 \mathrm{Z}^2\,.$$

Étape 3 : Conclusion.

Cas 1 : Les trois valeurs propres sont de même signe (strictement positive ou négative). L'équation $q(x,y,t) = 0$ donne $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{Z} = 0$ et donc $(x,y,t) = 0$. Ainsi l'ensemble $\mathscr{C}$ est vide.

Cas 2 : Les trois valeurs propres sont non nulles mais pas de même signe. On diagonalise B.
- Si $\det \mathrm{B} = 0$, on obtient que $\mathscr{C}$ est une parabole.
- Si $\det \mathrm{B} > 0$, on obtient que $\mathscr{C}$ est une ellipse.
- Si $\det \mathrm{B} < 0$, on obtient que $\mathscr{C}$ est un hyperbole.

Cas 3 : L'une des valeurs propres (disons λ_3 est nulle).
- λ_1 et λ_2 sont de même signe. L'équation $q(x,y,z) = 0$ devient $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = 0$. L'équation $q(x,y,z) = 0$ décrit donc l'intersection de deux plans vectoriels c'est-à-dire une droite. Finalement l'ensemble $\mathscr{C}$ l'intersection de cette droite avec le plan $t = 1$ c'est-à-dire un point.
- λ_1 et λ_2 de signe contraire. L'équation $q(x,y,z) = 0$ donne la réunion de deux plans. L'intersection avec le plan $t = 1$ donne ainsi deux droites. Ainsi l'ensemble $\mathscr{C}$ est la réunion de deux droites.

Cas 4 : Deux des valeurs propres sont nulles (disons $\lambda_3 = \lambda_2 = 0$). Ainsi $q(x,y,z) = 0$ donne $\mathrm{X} = 0$ c'est-à-dire un plan. On obtient ainsi que $\mathscr{C}$ est une droite (double).

8.1.2 Méthode calculatoire.

On considère l'ensemble $\mathscr{C}$ définit par $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Étape 1 : Changement de repères orthonormés.
On commence par diagonaliser B en base orthonormée : on effectue un changement de repère orthonormé pour découpler l'équation (c'est-à-dire enlever le terme en xy). On note (X, Y) les coordonnées dans le nouveau repère. On obtient alors une équation de la forme $s\mathrm{X}^2 + t\mathrm{Y}^2 + u\mathrm{X} + v\mathrm{Y} + w = 0$ où s et t sont les valeurs propres de B.

Étape 2 : Changement d'origine.
On effectue la mise sous forme canonique en les variables X et Y : $s(\mathrm{X}+u/2s)^2+t(\mathrm{Y}^2+v/2t)^2+w-u^2/s-v^2/4t = 0$. Attention au cas $s = 0$ ou $t = 0$ (c'est-à-dire $\det \mathrm{B} = 0$). On pose alors $\mathrm{X}' = \mathrm{X}+u/2s$ et $\mathrm{Y}' = \mathrm{Y}+v/2t$ et on obtient une équation de la forme $s\mathrm{X}'^2 + t\mathrm{Y}'^2 + u' = 0$. Attention si par exemple $t = 0$, on obtient $s\mathrm{X}'^2 + v\mathrm{Y} + w = 0$. Si $v = 0$, on obtient deux droites si $w \neq 0$ et une droite si $w = 0$. Si $v \neq 0$, on obtient une parabole.

Remarque 273 Si on s'intéresse juste au type de la conique : la manipulation suivante est suffisante : si $a \neq 0$, on écrit $a(x + b/2ay)^2 + (c - b^2/4a)y^2 + dx + ey + f$. et on compare alors les signes de a et $(c - b^2/4a) = \det(\mathrm{B})/a$.

Exercice 160 Montrer que l'ensemble des matrices symétriques de trace 1 de determinant 0 est l'ensemble des points d'une conique dont on déterminera la nature.

Exercice 161 Déterminer la nature des coniques $[x^2 - 2xy + y^2 + \lambda(x + y)]$; $[x^2 + xy + y^2 - 1]$, $[xy + \lambda(x + y) + 1]$, $[y^2 = \lambda x^2 - 2x]$, $[x^2 + xy - 2y + \lambda x + 1]$.

8.2 Attributs géométriques

8.2.1 Ellipse

Une ellipse a un centre de symétrie, deux axes de symétries (qui sont les directions des vecteurs propres de B). L'un s'appelle le grand axe (celui qui correspond à la plus petite valeur propre) et l'autre le petit axe (celui qui correspond à la plus grande valeur propre). L'équation réduite se met sous la forme $\mathrm{X}^2/a^2 + \mathrm{Y}^2/b^2 = 1$ avec $a \geqslant b$. On dit que a est le demi-grand axe et b le demi-petit axe.

Deux ellipses sont isométriques si et seulement si elles ont les mêmes demi-grand axe et demi-petit axe.

L'ellipse est une partie compacte et connexe du plan : c'est l'image d'un cercle par une affinité orthogonale.

Définition par foyer-directrice. Soit $\mathscr{D}$ une droite et F un point et $0 < e < 1$. L'ensemble des points du plan M tel que $\mathrm{MF}/\mathrm{MH} = e$ est une ellipse (où H est le projeté orthogonale de M sur $\mathscr{D}$). Le nombre e s'appelle l'excentricité de l'ellipse, F le foyer et $\mathscr{D}$ la directrice. On choisit comme repère un vecteur unitaire de $\mathscr{D}$ et un vecteur orthogonal et l'origine en F. On trouve l'équation de $\mathscr{D}$ est de la forme $y = d$. L'équation de l'ellipse est alors $e^2(y+d)^2 = (x^2+y^2)$ c'est-à-dire $x^2+y^2(1-e^2)+2dy+d^2 = 0$. En mettant sous forme réduite, on obtient $e = c/a$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. L'équation de la directrice est $x = a^2/c$.

Deux ellipses sont images l'une de l'autre par une similitude si et seulement si elle ont même excentricité.

Définition bifocale. Soit F, F' deux points du plan et $a \in \mathbb{R}$ tel que $2a > \mathrm{FF}'$. l'ensemble $\mathscr{C}$ des points du plan vérifiant $\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a$ est une ellipse dont les foyers sont F et F'. La tangente en M à $\mathscr{C}$ est la bissectrice extérieure de $(\widehat{(\mathrm{MF}), (\mathrm{MF}')})$.

8.2.2 Hyperbole

Une hyperbole a un centre de symétrie, deux axes de symétries (qui sont les directions des vecteurs propres de B). L'équation réduite se met sous la forme $\mathrm{X}^2/a^2 - \mathrm{Y}^2/b^2 = 1$. On dit que a est le demi-grand axe et b le demi-petit axe.

Deux hyperboles sont isométriques si et seulement si elles ont les mêmes demi-grand axe et demi-petit axe.

L'ellipse est une partie non bornée et non connexe du plan : elle a deux branches.

Elle a deux asymptotes qui sont les droites d'équation $X/a - Y/b = 0$ et $X/a + Y/b = 0$. Dans le repère formé par les asymptotes, l'équation de $\mathscr{C}$ est de la forme $X'Y' = 1$. L'hyperbole est dite *équilatère* si les asymptotes sont orthogonales c'est-à-dire si et seulement si $a = b$.

Définition par foyer-directrice. Soit $\mathscr{D}$ une droite et F un point et $e > 1$. L'ensemble des points du plan M tel que $MF/MH = e$ est une hyperbole (où H est le projeté orthogonale de M sur $\mathscr{D}$). Le nombre e s'appelle l'excentricité de l'hyperbole, F le foyer et $\mathscr{D}$ la directrice. On a $e = c/a$ où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Deux hyperboles sont images l'une de l'autre par une similitude si et seulement si elle ont même excentricité.

Définition bifocale. Soit F, F' deux points du plan et $a \in \mathbb{R}$ tel que $2a > FF'$. l'ensemble $\mathscr{C}$ des points du plan vérifiant $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole dont les foyers sont F et F'. La tangente en M à $\mathscr{C}$ est la bissectrice intérieure de $(\widehat{(MF), (MF')})$.

8.2.3 Parabole

Une hyperbole a un axe de symétrie, L'équation réduite se met sous la forme $X^2 = 2pY$. On dit que p est le paramètre.

Deux paraboles sont isométriques si et seulement si elles ont le même paramètre.

L'ellipse est une partie non bornée mais elle est connexe.

Définition par foyer-directrice. Soit $\mathscr{D}$ une droite et F un point. L'ensemble des points du plan M tel que $MF/MH = 1$ est une parabole (où H est le projeté orthogonale de M sur $\mathscr{D}$). On dit que F est le foyer et $\mathscr{D}$ la directrice. On a p qui est la distance entre F et $\mathscr{D}$.

Deux paraboles sont images toujours l'une de l'autre par une similitude.

Exercice 162 Déterminer les attributs géométriques des coniques de l'exercice 161.

Chapitre 9

Annexe A : Algèbre linéaire

Dans cette partie, k désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

9.1 Éxercices de révision

Exercice 163 – Droite dans $\mathbb{R}^2$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

a) Rappeler comment est définie la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et comment est définie la multiplication d'un élément de $\mathbb{R}^2$ par un élément de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'ensemble $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x + 3y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la dimension et une base de cet espace vectoriel (faire un dessin).

c) On fixe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{D}_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ ax + by = 0\}$ est un sous-espace vectoriel. Déterminer une base et la dimension de cet espace vectoriel (on prendra garde au cas $(a, b) = (0, 0)$).

d) Déterminer à quelles conditions sur a et b, on a $\mathrm{D}_{a,b} = \mathrm{D}$?

e) Montrer que $\mathrm{D} \cap \mathrm{D}_{1,2}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dont on déterminera la dimension.

f) Montrer que $\mathrm{D} \cap \mathrm{D}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ dont on déterminera la dimension en fonction de a et b.

g) On considère $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{D}_{a,b} \neq \mathrm{D}$ (voir la question **d**). On choisit un vecteur $e_1 \in \mathrm{D}_{a,b} \setminus \{0\}$ et $e_2 \in \mathrm{D} \setminus \{0\}$. Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. Que se passe-t-il lorsque a et b sont tels que $\mathrm{D}_{a,b} = \mathrm{D}$?

Exercice 164 – Sous-espace vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

a) Rappeler comment est définie la somme de deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et comment est définie la multiplication d'un élément de $\mathbb{R}^3$ par un élément de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que l'ensemble $\mathrm{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + 3y + 4z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la dimension et une base de cet espace vectoriel (faire un dessin : on représentera aussi le vecteur de coordonnées $(2, 3, 4)$).

c) On fixe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que l'ensemble $\mathrm{P}_{a,b,c} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0\}$ est un sous-espace vectoriel. Montrer que $\mathrm{P}_{a,b,c} = \mathbb{R}^3$ si et seulement si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$.

d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que $\mathrm{P}_{a,b,c} = \mathrm{P}$.

e) Déterminer la dimension et une base de $\mathrm{P}_{a,b,c}$.

f) Montrer que $\mathrm{P}_{-4,2,2} \cap \mathrm{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera la base et la dimension.

g) Déterminer une condition sur a, b, c pour que $\mathrm{P}_{a,b,c}$ contienne $\mathrm{P}_{-4,2,2} \cap \mathrm{P}$.

h) On suppose que $\mathrm{P}_{a,b,c}$ ne contient pas $\mathrm{P}_{-4,2,2} \cap \mathrm{P}$. Que peut-on dire de $\mathrm{P}_{a,b,c} \cap \mathrm{P}_{-4,2,2} \cap \mathrm{P}$. Dans ce cas, construire une base à partir d'une base de $\mathrm{P}_{a,b,c}$ et de $\mathrm{P}_{-4,2,2} \cap \mathrm{P}$.

i) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) et (a', b', c') pour que $\mathrm{P}_{a,b,c} = \mathrm{P}_{a',b',c'}$.

j) Lorsque $\mathrm{P}_{a,b,c} \neq \mathrm{P}_{a',b',c'}$ et $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(a',b',c') \neq (0,0,0)$, montrer que $\mathrm{P}_{a,b,c} \cap \mathrm{P}_{a',b',c'}$ est un espace vectoriel de dimension 1 dont une base est $(c'b - b'c, ca' - c'a, ab' - b'a)$.

k) Soit $v = (0,2,4)$. Déterminer toutes les valeurs de (a,b,c) telles que $v \in \mathrm{P}_{a,b,c}$.

l) Soit $w = (1,3,5)$. Déterminer toutes les valeurs de (a,b,c) telles que $w \in \mathrm{P}_{a,b,c}$ et $v \in \mathrm{P}_{a,b,c}$. Pour de tels (a,b,c) déterminer, sans calcul une base $\mathscr{B}$ de $\mathrm{P}_{a,b,c}$. Comparer à la base de la question **e** : écrire les vecteurs de la base de la question **e** en fonction de ceux de $\mathscr{B}$ et inversement.

Exercice 165 Soit E un espace vectoriel. On rappelle qu'une famille $(x_1, \ldots, x_r) \in \mathrm{E}^r$ est dite *libre* si pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0$ implique $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

a) À quelle condition une famille de un seul vecteur est-elle libre ?

b) Montrer qu'une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

c) En déduire que la famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ formée des vecteurs $((1,1,0),(0,1,1))$ est libre.

d) On note F l'espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $(1,1,0)$ et $(0,1,1)$. Quelle est sa dimension ? Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour que $\mathrm{F} = \{(x,y,z),\ ax + by + cz = 0\}$.

e) Déterminer les valeurs de m pour que $(1,m,1)$ soit dans F.

f) Montrer que si $(1,m,1)$ n'est pas dans F alors $((1,1,0),(0,1,1),(1,m,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 166 — Matrice d'une application linéaire. Déterminer les matrices (dans les bases canoniques) des applications linéaires suivantes

a) $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto (x-y, y-z) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto x - 5y + 4z \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & \longmapsto \mathrm{P} - \mathrm{XP}' \end{cases}$ (on vérifiera que l'image de cette application est bien contenue dans $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$).

Exercice 167 — Où l'on voit que connaître ses formules de trigonométrie est utile. Montrer que, pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la famille de trois fonctions $f_a \colon x \mapsto \cos(x+a)$, $f_b \colon x \mapsto \cos(x+b)$, $f_c \colon x \mapsto \cos(x+c)$ n'est pas libre (on dit qu'elle est *liée*).

Exercice 168 — Suites et espaces vectoriels. Soit a un nombre réel.

a) Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est un espace vectoriel qu'on notera E. Montrer qu'une telle suite est déterminée par son terme u_0. En déduire la dimension et une base de l'espace vectoriel E.

b) Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est un espace vectoriel qu'on notera F. Montrer que l'application

$$\Delta \colon \begin{cases} \mathrm{F} & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto (u_0, u_1) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel (c'est-à-dire est linéaire (vérifie $\Delta(u+v) = \Delta(u) + \Delta(v)$ et $\Delta(\lambda u) = \lambda\Delta(u)$) et bijective)[1]. En déduire la dimension de F.

c) Chercher les suites géométriques qui sont dans F (on montrera qu'il n'existe que deux raisons possibles pour de telles suites et qu'un couple formé d'une suite géométrique de chacune de ces deux raisons est une base de F).

d) Reprendre la question **b** avec l'ensemble G des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les suites géométriques qui sont dans G. Montrer que la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est constante. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

1. La bijectivité dit en particulier qu'une suite de F est déterminée par ces deux premiers termes.

9.2 Projection

9.2.1 Somme et somme directe

Définition 274 – Sous-espace vectoriel somme. Soit E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_\ell$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On note $F_1 + \cdots + F_\ell$ le sous-ensemble de E donné par

$$F_1 + \cdots + F_\ell = \{v_1 + \cdots + v_\ell, \quad \forall i \in [\![1\,,\,\ell]\!], \quad v_i \in F_i\}$$

De façon équivalente, $F_1 + \cdots + F_\ell$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent comme une somme de vecteurs appartenant aux F_i.

L'ensemble $F_1 + \cdots + F_\ell$ est un sous-espace vectoriel de E [2] qui contient F_i pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ [3]. C'est même le plus petit sous-espace vectoriel contenant les F_i pour $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ [4]. Le sous-espace $F_1 + \cdots + F_\ell$ est appelé *sous-espace vectoriel somme des* F_i *pour* $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$.

Soit E un espace vectoriel et $F_1, \dots, F_\ell$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. En général, pour un vecteur v de $F_1 + \cdots + F_\ell$ on peut le décomposer de plusieurs façons différentes comme somme de vecteurs des F_i pour $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$: on peut avoir $v = v_1 + \cdots + v_\ell = v'_1 + \cdots + v'_\ell$ avec $v'_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ sans avoir $v_i = v'_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$. Par exemple, on considère dans $E = \mathbb{R}^3$ les sous-espaces vectoriels $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\}$ et $F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y = 0\}$. On a $F_1 + F_2 = \mathbb{R}^3$ puisque pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire $(x,y,z) = (0,y,z) + (x,0,0)$ avec $(0,y,z) \in F_1$ et $(x,0,0) \in F_2$. Le vecteur $(1,2,3)$ se décompose alors comme précédemment $(1,2,3) = (0,2,3) + (1,0,0)$ ou sous la forme $(1,2,3) = (0,2,0) + (1,0,3)$ avec $(0,2,3), (0,2,0) \in F_1$ et $(1,0,0), (1,0,3) \in F_2$ [5]. Lorsque ce n'est pas le cas et qu'un vecteur de $F_1 + \cdots + F_\ell$ n'admet qu'une seule écriture sous la forme $v_1 + \cdots + v_\ell$ avec $v_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$, on dit que la somme est *directe* et on écrit $F_1 \oplus \ldots \oplus F_\ell$. Ainsi cette écriture signifie que pour tout $v \in F_1 + \cdots + F_\ell$, si $v = v_1 + \cdots + v_\ell = v'_1 + \cdots + v'_\ell$ avec $v_i, v'_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$, on a $v_i = v'_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ En particulier, il n'est pas difficile de démontrer que la somme $F_1 + \cdots + F_\ell$ est une somme directe si et seulement si pour toute décomposition de la forme $v_1 + \cdots + v_\ell = 0$ avec $v_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$, on a $v_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ [6] .

Lorsque $\ell = 2$, la condition $F_1 + F_2$ est une somme directe est équivalente à la condition ensembliste $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. En effet, supposons que $F_1 + F_2$ est une somme directe, on considère alors $v \in F_1 \cap F_2$. On peut écrire $v = v + 0$ avec $v \in F_1$ et $0 \in F_2$ et $v = 0 + v$ avec $0 \in F_1$ et $v \in F_2$. L'unicité de la décomposition assure que $v = 0$. Inversement supposons $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et considérons une décomposition $v_1 + v_2 = 0$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$. On a alors $v_1 = -v_2$. Comme $-v_2 \in F_2$, on en déduit que $v_1 \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Ainsi $v_1 = 0$ et v_2 aussi est nul. Cette condition extrêmement simple et purement ensembliste ne se généralise pas lorsque $\ell \geqslant 3$: dans le plan R^2, on considère les droites $F_1 = \{(x,y),\ x = 0\}$, $F_2 = \{(x,y),\ y = 0\}$ et $F_3 = \{(x,y),\ x = y\}$. On a bien $F_1 \cap F_2 = \{0\}$, $F_2 \cap F_3 = \{0\}$ et $F_1 \cap F_3 = \{0\}$ mais la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe. Par exemple, on peut écrire $(1,1) = (1,0) + (0,1) + (0,0)$ avec $(1,0) \in F_1$, $(0,1) \in F_2$ et $(0,0) \in F_3$ ou $(1,1) = (0,0) + (0,0) + (1,1)$ avec $(0,0) \in F_1$, $(0,0) \in F_2$ et $(1,1) \in F_3$ [7]. Pour résumer ce qui précède, on a la proposition-définition suivante

Proposition-Définition 275 – Somme directe. Soit E un espace vectoriel, $\ell \in \mathbb{N}$ et $F_1, \dots, F_\ell$ des sous-espaces vectoriels de E. Les propositions suivantes sont équivalentes

(*i*) Soit $v \in F_1 + \cdots + F_\ell$, il existe une unique famille $(v_1, \dots, v_\ell)$ vérifiant $v_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ telle que $v = v_1 + \cdots + v_\ell$.

2. Soit $z, z' \in F_1 + \cdots + F_\ell$ et $\lambda \in k$. On écrit $z = v_1 + \cdots + v_\ell$ et $z' = v'_1 + \ldots + v'_\ell$ avec $v_i, v'_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$. On a alors $z + \lambda z' = (v_1 + \lambda v'_1) + \cdots + (v_\ell + \lambda v'_\ell)$. Or, pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$, on a $v_i + \lambda v'_i \in F_i$. Ainsi $z + \lambda z'$ est bien dans $F_1 + \cdots + F_\ell$

3. Si $v \in F_i$, on considère $v_j = 0 \in F_j$ si $j \neq i$ et $v_i = v$ et on a $v = v_1 + \cdots + v_\ell \in F_1 + \cdots + F_\ell$ puisque $v_j \in F_j$ pour tout $j \in [\![1\,,\,\ell]\!]$

4. Un sous-espace vectoriel contenant tous les F_i pour $i[\![1\,,\,\ell]\!]$ doit contenir toutes les sommes $v_1 + \cdots + v_\ell$ avec $v_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$. En particulier, il doit contenir $F_1 + \cdots + F_\ell$

5. Exercice : trouver toutes les décompositons possibles pour le vecteur $(1,2,3) = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in F_1$ et $v_2 \in F_2$.

6. **(⇒)** Soit $v_1 + \cdots + v_\ell = 0$ avec $v_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$. On écrit que $0 = 0 + \cdots + 0$ avec $0 \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$. L'unicité de la décomposition donne bien $v_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$. **(⇐)** Si $v = v_1 + \cdots + v_\ell = v'_1 + \cdots + v'_\ell$ avec $v_i, v'_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$, on a $0 = (v_1 - v'_1) + \cdots + (v_\ell - v'_\ell)$ avec $v_i - v'_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$. Ainsi $v_i - v'_i = 0$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ et donc $v_i = v'_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$.

7. Cependant, le « sens direct » est bien vrai : si la somme $F_1 + \cdots + F_\ell$ est directe alors $F_i \cap F_j = \{0\}$ pour tout $i \neq j$. En effet si $v \in F_i \cap F_j$, on décompose $v = v_1 + \cdots + v_\ell = v'_1 + \cdots + v'_\ell$ avec $v_m = 0 \in F_m$ si $m \neq i$ et $v_i = v$ et $v'_m = 0 \in F_m$ si $m \neq j$ et $v'_j = v$. Comme $i \neq j$, l'unicité de la décomposition assure que $v = v_i = v'_j = 0$.

(*ii*) Si $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E tels que $v_1 + \dots + v_\ell = 0$ et $v_i \in \mathrm{V}_i$ pour tout $i \in [\![1\,,\, \ell]\!]$.

Exercice 169 — Supplémentaires. Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.

a) Soit H un sous-espace vectoriel de E contenant F. Montrer que $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$.

b) Le résultat de la question **a** est-il vrai lorsque H ne contient pas F ? Justifier.

c) Soit H un sous-espace vectoriel de E. A-t-on $\mathrm{H} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) \oplus (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$? Justifier.

Corrigé

a) On a bien sûr $\mathrm{F} \cap (\mathrm{G} \cap \mathrm{H}) = (\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \cap \mathrm{H} = \{0\} \cap \mathrm{H} = \{0\}$. La deuxième égalité résulte du fait que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ puisque F et G sont supplémentaires ; la troisième du fait que $0 \in \mathrm{H}$.

On considère à présent $h \in \mathrm{H}$, comme $h \in \mathrm{E}$, on peut écrire $h = f + g$ avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$ (puisque $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$). De plus, comme $f \in \mathrm{F}$, on a $f \in \mathrm{H}$ puisque $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$. Ainsi $g = h - f \in \mathrm{H}$ puisque H est un sous-espace vectoriel. On en déduit que $g \in \mathrm{G} \cap \mathrm{H}$ et on a donc écrit $h = f + g$ avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G} \cap \mathrm{H}$. Ainsi $\mathrm{H} = \mathrm{F} + (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$.

On en déduit que $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus (\mathrm{G} \cap \mathrm{H})$.

Remarque. Soit $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{H}$ trois sous-espaces vectoriels de E, il n'est pas vrai que $(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2) \cap \mathrm{H} = \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{H} + \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{H}$ (voir la question **c**).

b) Le résultat n'a aucune chance d'être vrai si H ne contient pas F puisque si $\mathrm{H} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \cap \mathrm{H}$ alors F est en particulier un sous-espace vectoriel de H.

c) Non ; on considère dans $\mathbb{R}^2$ les droites vectorielles : $\mathrm{F} = \{x = 0\}$, $\mathrm{G} = \{y = 0\}$ et $\mathrm{H} = \{x = y\}$. On a bien $\mathbb{R}^2 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, mais $\mathrm{F} \cap \mathrm{H} = \mathrm{G} \cap \mathrm{H} = \{0\}$ et donc $(\mathrm{F} \cap \mathrm{H}) \oplus (\mathrm{G} \cap \mathrm{H}) = \{0\} \neq \mathrm{H}$.

9.2.2 Projection

Proposition-Définition 276 — Projection associée à une décomposition en supplémentaire. On se donne E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ [8]. Tout vecteur $u \in \mathrm{E}$ peut se décomposer de façon unique sous la forme $u = v + w$ avec $v \in \mathrm{F}$ et $w \in \mathrm{G}$. On définit alors l'application

$$p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow \mathrm{F} + \mathrm{G} \\ u = v + w \text{ avec } v \in \mathrm{F}, w \in \mathrm{G} & \longmapsto v \end{cases}$$

Cette application est bien définie. C'est une application linéaire. Elle est appelée *projection sur* F *parallèlement à* G. On a $\operatorname{Im} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} = \mathrm{F}$, $\operatorname{Ker} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} = \mathrm{G}$ [9] et $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} \circ p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$.

On suppose E de dimension finie. Soit $\mathscr{B}_\mathrm{F} = (e_1, \dots, e_r)$ une base de F et $\mathscr{B}_\mathrm{G} = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de G, la matrice de $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E est

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \\ & \mathbf{0}_{n-r} \end{bmatrix}$$

où I_r est la matrice identité de taille r et $\mathbf{0}_{n-r}$ la matrice nulle de taille $n - r$.

Preuve. L'application $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ est bien définie car $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$: l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$ assure que tout vecteur de E se décompose comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, le fait que la somme soit directe assure que la décomposition $u = v + w$ avec $v \in \mathrm{F}$ et $w \in \mathrm{G}$ est unique et donc que v est bien déterminé.

Montrons que $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ est linéaire. Soit $u, u' \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in k$. On écrit $u = v + w$ et $u' = v' + w'$ avec $v, v' \in \mathrm{F}$ et $w, w' \in \mathrm{G}$. Ainsi $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u) = v$ et $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u') = v'$. Par ailleurs, on a

$$u + \lambda u' = v + w + \lambda(v' + w') = (v + \lambda v') + (w + \lambda w').$$

8. Cette égalité signifie les deux choses suivantes : $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et la somme $\mathrm{F} + \mathrm{G}$ est directe. D'après ce qu'on a vu, c'est aussi équivalent à $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$ (c'est souvent cela qu'on retient mais ce n'est pas la définition et surtout ça a le désavantage de ne pas se généraliser à plus que deux sous-espaces vectoriels)

9. Ces deux égalités montrent qu'on peut retrouver F et G à partir de l'application $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$: cette remarque sera bien utile pour la caractérisation des projecteurs 278

Comme F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, on a $v + \lambda v' \in \mathrm{F}$ et $w + \lambda w' \in \mathrm{G}$. On en déduit que $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u + \lambda u') = v + \lambda v'$. Comme $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u) = v$ et $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u') = v'$, on a bien

$$p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u + \lambda u') = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u) + \lambda p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u')$$

et $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$ est linéaire.

On a clairement $\operatorname{Im} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} \subset \mathrm{F}$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour cela, on va montrer le résultat plus fort : si $v \in \mathrm{F}$ alors $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(v) = v$. Si $v \in \mathrm{F}$, on a la décomposition $v = v + 0$ avec $v \in \mathrm{F}$ et $0 \in \mathrm{G}$, ce qui donne bien que $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(v) = v$ et en particulier $v \in \operatorname{Im} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$.

De plus, on en déduit immédiatement que $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u)) = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u)$ pour tout $u \in \mathrm{E}$ puisque $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u) \in \mathrm{F}$. Ainsi $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} \circ p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$.

Montrons que $\operatorname{Ker} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} = \mathrm{G}$. Si $w \in \mathrm{G}$, on écrit $w = 0 + w$ avec $0 \in \mathrm{F}$ et $w \in \mathrm{G}$. On a donc $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(w) = 0$. Ainsi $\mathrm{G} \subset \operatorname{Ker} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$. Inversement si $u \in \operatorname{Ker} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$, on écrit $u = v + w$ avec $v \in \mathrm{F}$ et $w \in \mathrm{G}$. On a $v = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(u) = 0$. Ainsi $u = w \in \mathrm{G}$. Et donc $\operatorname{Ker} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} \subset \mathrm{G}$ ce qui donne bien l'égalité voulu.

La réalisation matricielle s'obtient à partir du fait que $p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}(v) = v$ pour tout $v \in \mathrm{F}$ et que $\mathrm{G} = \operatorname{Ker} p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$.

Exercice 170 Montrer que $\mathrm{id}_{\mathrm{E}} - p_{\mathrm{F},\mathrm{G}} = p_{\mathrm{G},\mathrm{F}}$.

Définition 277 — Projecteur ou projection. Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On dit que p est une projection ou un projecteur de E s'il existe un couple de sous-espace vectoriel (F, G) tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ et $p = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$.

Proposition 278 — Caractérisation des projections. Soit E un espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ alors p est un projecteur de E si et seulement si $p \circ p = p$.

En particulier, si $p \circ p = p$, on a $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ et $p = p_{\operatorname{Im} p, \operatorname{Ker} p}$.

Preuve. On a vu dans la proposition-définition 276 que tout projecteur vérifiait $p \circ p = p$.

Inversement, soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $p \circ p = p$. Il s'agit de trouver deux sous-espaces vectoriels F et G tels que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ et $p = p_{\mathrm{F},\mathrm{G}}$. La proposition 276 montre que si F et G existe alors nécessairement $\mathrm{F} = \operatorname{Im} p$ et $\mathrm{G} = \operatorname{Ker} p$. On commence donc par montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$. Soit $v \in \mathrm{E}$, on écrit $v = p(v) + (v - p(v))$ [10]. On a bien $p(v) \in \operatorname{Im} p$ et $v - p(v) \in \operatorname{Ker} p$ puisque $p(v - p(v)) = p(v) - (p \circ p)(v) = p(v) - p(v) = 0$. Ainsi $\mathrm{E} = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} p$. Montrons que $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p = \{0\}$. Si $v \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Ker} p$, on peut écrire $v = p(u)$ pour un certain $u \in \mathrm{E}$ puisque $v \in \operatorname{Im} p$. On a alors $p(v) = 0$ puisque $v \in \operatorname{Ker} p$. Mais $0 = p(v) = p \circ p(u) = p(u) = v$ (l'avant-dernière égalité résultant du fait que $p \circ p = p$). Ainsi $v = 0$ et on a bien $\mathrm{E} = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.

On peut donc définir la projection $p_{\operatorname{Im} p, \operatorname{Ker} p}$. Calculons alors $p_{\operatorname{Im} p, \operatorname{Ker} p}(v)$ pour un vecteur $v \in \mathrm{E}$. Il s'agit de décomposer v comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker} p$. On a vu précédemment que la décomposition $v = p(v) + (v - p(v))$ convient. Ainsi, on a bien $p(v) = p_{\operatorname{Im} p, \operatorname{Ker} p}(v)$ pour tout $v \in \mathrm{E}$ et donc $p = p_{\operatorname{Im} p, \operatorname{Ker} p}$ et p est bien un projecteur.

Remarque 279 Dans cette démonstration, le point crucial est de montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Lorsque E est de dimension finie, en utilisant la réduction d'endomorphisme, on peut utiliser un autre argument pour conclure.

Si $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ vérifie $p \circ p = p$ alors p annule le polynôme $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ qui est scindé à racine simple. Ainsi p est diagonalisable et ses valeurs propres ne peuvent être que 0 ou 1 (les racines de $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$). Ainsi dans une base convenable p admet une matrice de la forme

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & \\ & \mathbf{0}_{n-r} \end{bmatrix}$$

qui est la matrice d'une projection q et donc $q = p$ est donc une projection.

Une troisième voie (très proche de la deuxième) pour montrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ serait de montrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_{\mathrm{E}})$ (grâce à la relation $p \circ p = p$) et d'utiliser le lemme des noyaux sur le polynôme annulateur $\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - 1)$ pour obtenir $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id})$.

Exercice 171 — Somme de projecteurs. Soit E un espace vectoriel, $p, q \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ deux projecteurs.

a) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

b) Lorsque $p + q$ est un projecteur, montrer que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$ et $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Ker} p$. En déduire que $\operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et que $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

10. C'est là qu'est l'idée !

c) Montrer que p et q ont le même noyau si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ (faire un dessin dans le plan avec des projections sur des droites pour se convaincre).

d) Montrer que p et q ont la même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$ (faire un dessin dans le plan avec des projections sur des droites pour se convaincre).

Exercice 172 — Pour vérifier qu'on sait faire. Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection p sur le plan d'équation $y = 0$ parallèlement à la droite $\mathbb{R}(2, 1, -2)$. En déduire l'image par p du vecteur de coordonnées (x, y, z).

Exercice 173 — Espace de fonctions. Soit $\mathscr{F}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\mathscr{P}$ des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathscr{I}$ des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}$ qui sont supplémentaires. En déduire la projection de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{I}$.

Exercice 174 — Projection et matrices. On considère l'espace vectoriel $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que l'application

$$p\colon \begin{cases} \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathrm{A} \quad \longmapsto \dfrac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2} \end{cases}$$

est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.

Corrigé L'application p est linéaire (car la transposée l'est) (calcul à détailler). Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on calcule alors $p \circ p(\mathrm{A}) = p((\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A})/2)$. Par linéarité, on en déduit

$$p \circ p(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\left(p(\mathrm{A}) + p({}^t\mathrm{A})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2} + \frac{{}^t\mathrm{A} + {}^{t\,t}\mathrm{A}}{2}\right) = \frac{\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}}{2} = p(\mathrm{A})\,.$$

puisque ${}^{t\,t}\mathrm{A} = \mathrm{A}$. Ainsi p est bien un projecteur. On a $\mathrm{A} \in \operatorname{Ker} p$ si et seulement si $\mathrm{A} = -{}^t\mathrm{A}$ c'est-à-dire A est une matrice antisymétrique. Par ailleurs, par linéarité de la transposée, on a

$${}^tp(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\left({}^t\mathrm{A} + {}^{t\,t}\mathrm{A}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{A} + {}^t\mathrm{A}\right) = p(\mathrm{A})$$

toujours car ${}^{t\,t}\mathrm{A} = \mathrm{A}$. On en déduit que $\operatorname{Im} p$ est contenu dans l'ensemble des matrices symétriques. On veut montrer l'inclusion réciproque c'est-à-dire qu'une matrice symétrique est bien dans l'image de p. Soit B une matrice symétrique. On cherche donc un antécédent de B par p. Comme p est un projecteur, si jamais B est dans l'image de p alors $p(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$. Donc si B est dans l'image alors B serait un antécédent de lui-même. On tente alors de calculer $p(\mathrm{B})$.

On a $p(\mathrm{B}) = 1/2(\mathrm{B} + {}^t\mathrm{B}) = 1/2(\mathrm{B} + \mathrm{B})$ puisque B est symétrique. On a bien $p(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$ lorsque B est symétrique et B est dans dans l'image de p. Ainsi $\operatorname{Im} p$ est l'ensemble des matrices symétriques.

Exercice 175 — Projection et polynômes. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

a) Montrer que l'application

$$p\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} \quad \longmapsto \dfrac{\mathrm{P}(1-\mathrm{X}) + \mathrm{P}(\mathrm{X})}{2} \end{cases}$$

est un projecteur dont on déterminera le noyau et l'image.

Corrigé L'application p est linéaire (car l'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(1-\mathrm{X})$ l'est). Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on calcule alors $p \circ p(\mathrm{P}) = p((\mathrm{P} + \mathrm{P}(1-\mathrm{X}))/2)$. On pose $\mathrm{Q} = \mathrm{P}(1-\mathrm{X})$. Par linéarité, on en déduit

$$p \circ p(\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\left(p(\mathrm{P}) + p(\mathrm{Q})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}}{2} + \frac{\mathrm{Q} + \mathrm{Q}(1-\mathrm{X})}{2}\right) = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}}{2} = p(\mathrm{A})\,.$$

puisque $\mathrm{Q}(1-\mathrm{X}) = \mathrm{P}(1-(1-\mathrm{X})) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$. Ainsi p est bien un projecteur.

Calculons l'image et le noyau. Pour penser à quels sont les polynômes susceptibles de nous intéresser, on se remarque que $x \mapsto (1-x)$ est la symétrie par rapport à $1/2$. Cela incite à considérer que l'origine est $1/2$ et donc considérer les polynômes de la forme $(\mathrm{X}-1/2)^k$. On a $p((\mathrm{X}-1/2)^k) = 0$ si k est impair et $p((1/2-\mathrm{X})^k) = (1/2-\mathrm{X})^k$ si k est pair puisque si $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1/2)^k$, on a $\mathrm{P}(1-\mathrm{X}) = (1-\mathrm{X}-1/2)^k = (1/2-\mathrm{X})^k = (-1)^k(\mathrm{X}-1/2)^k$. Ainsi

$$\operatorname{Im}\mathrm{P} = \operatorname{vect}\left((\mathrm{X}-1/2)^k, k \text{ pair compris entre 1 et } n\right)$$

et
$$\operatorname{Ker}\mathrm{P} = \operatorname{vect}\left((\mathrm{X}-1/2)^k, k \text{ impair compris entre 1 et } n\right).$$

Pour montrer ces égalités, on écrit P comme combinaison linéaire des éléments de la base $((\mathrm{X}-1/2)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

9.3 Réduction d'endomorphismes

9.3.1 Les définitions

Définition 280 – Valeur propre – Vecteur propre. Soit E un espace vectoriel sur k (c'est-à-dire un espace vectoriel réel ou complexe) de dimension finie et $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ un **endo**morphisme [11].

On dit que $x \in \mathrm{E}$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0$ et s'il existe $\lambda \in k$ tel que $u(x) = \lambda x$. Le scalaire [12] λ vérifiant $u(x) = \lambda x$ est unique [13].

On dit que $\lambda \in \mathrm{E}$ est valeur propre de u s'il existe un vecteur propre de u tel que $u(x) = \lambda x$.

Si $x \in \mathrm{E}$ vérifie $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$ alors λ est valeur propre de u [14] et on dit que x *vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.*.

Pour $\lambda \in k$, on définit $\mathrm{E}_\lambda = \{x \in \mathrm{E}, \quad u(x) = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(u - \lambda x)$. On dit que c'est *le sous-espace propre de u associé à λ*. C'est un sous-espace vectoriel de E [15]. Ainsi λ est une valeur propre de x si (et seulement si) $\mathrm{E}_\lambda \neq \{0\}$ et dans ce cas E_λ est formé de l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ et de 0 [16].

Définition 281 – Sous-espace stable. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie et $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ un **endo**morphisme. Un sous-espace de F de E est dit stable par u si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ c'est-à-dire si pour tout $x \in \mathrm{F}$, on a $u(x) \in \mathrm{F}$.

Dans ce cas, u permet de définir un endomorphisme [17] de F par

$$\begin{cases} \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{F} \\ x \longmapsto u(x)\,. \end{cases}$$

Attention, il ne s'agit pas exactement de la restriction de u à F puisqu'on a aussi changé l'espace d'arrivée. Ce changement d'espace d'arrivée (qui n'est plus E tout entier mais le sous-espace F) est possible précisément parce qu'on s'est assuré que l'image par u d'un vecteur de F est dans F. Cet endomorphisme de F est souvent appelé endomorphisme *induit par u*. On le note parfois $\widetilde{u}$ pour indiquer qu'il est construit à partir de u mais le plus souvent, on continue de le noter u pour ne pas compliquer les notations.

Exercice 176 – Sous-espace stable et écriture matricielle. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie et u un endomorphisme de E.

a) Montrer que pour tout $\lambda \in k$, E_λ est stable par u.

11. La réduction des endomorphismes concerne les endomorphismes (pas très étonnant !) c'est-à-dire les applications linéaires où l'espace de départ et celui d'arrivée sont le même, c'est bien entendu crucial dans toutes les définitions.
12. Ça veut juste dire que λ est un élément de k
13. Si $u(x) = \lambda x = \mu x$, on a $(\lambda - \mu)x = 0$ et donc $\lambda = \mu$ puisque $x \neq 0$ (il faut bien que cet élément dans la définition des vecteurs propres servent à quelque chose).
14. C'est la définition de valeur propre.
15. Exercice !
16. Avec la convention que j'ai choisie, on peut parler de sous-espace propre associé λ sans supposer que λ soit valeur propre de u. C'est bien pratique pour s'exprimer mais il faudra toujours être vigilant au fait qu'un élément de k ne sera valeur propre de u que si le sous-espace propre associé est non réduit à $\{0\}$.
17. Exercice : vérifier qu'il s'agit bien d'un endomorphisme.

b) Montrer que pour tout $\lambda \in k$, tout sous-espace de E_λ est stable par u.[18]

c) On suppose dans cette question que E_λ est de dimension $0 < r \leqslant \dim \mathrm{E}$. Déterminer la forme d'une matrice de u dans une base de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base de E_λ.

d) Soit F, G deux sous-espace vectoriels de E vérifiant $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. On suppose que F est stable par u. Déterminer la forme d'une matrice de u dans une base de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base de F.

e) Soit F, G deux sous-espace vectoriels de E vérifiant $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$. On suppose que F et G sont stables par u. Déterminer la forme d'une matrice de u dans une base de la forme $(x_1, \ldots, x_n)$ où $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base de F et $(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ une base de G.

f) Soit $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_s$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_s = \mathrm{E}$. On suppose que les s sous-espaces $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_i, \ldots, \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_s$ sont stables par E. Déterminer la forme d'une matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ de E adaptée à la décomposition $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_s = \mathrm{E}$[19].

g) Soit $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_s$ des sous-espaces vectoriels de E vérifiant $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_s = \mathrm{E}$. On suppose que les s sous-espaces $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots, \mathrm{F}_s$ sont stables par E. Déterminer la forme d'une matrice de u dans une base $\mathscr{B}$ de E adaptée à la décomposition $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_s = \mathrm{E}$.

Remarque 282 — Formulation géométrique. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie et u un endomorphisme de E. Dire que x est vecteur propre pour u revient à dire que la droite vectorielle $kx := \{\alpha x, \alpha \in k\}$ (qui est bien une droite puisque $x \neq 0$) est stable par E. Ainsi chercher un vecteur propre revient à chercher une droite (vectorielle) stable par u.

Comment exprimer la notion de valeur propre dans ce cadre ? Soit D une droite vectorielle stable par u, comme dans la définition 281, on peut considérer l'endomorphisme (encore noté) $u : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ induit par u. Comme D est de dimension 1, un endomorphisme de D est nécessairement de la forme $\lambda \mathrm{id}_\mathrm{D}$ pour un certain $\lambda \in k$ qui est bien défini (autrement dit : tout endomorphisme d'une droite vectorielle est une homothétie vectorielle[20]). C'est ce λ est la valeur propre associée à n'importe quel vecteur non nul de D.

9.3.2 Premiers résultats : indépendance linéaire et finitude

Proposition 283 — Liberté et vecteur propre. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $(x_1, \ldots, x_s)$ une famille de vecteurs propres pour u. On note λ_i la valeur propre associée à x_i. On suppose que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$[21].

La famille $(x_1, \ldots, x_s)$ est libre.

Preuve. *Preuve 1.* Supposons que la famille $(x_1, \ldots, x_s)$ est liée. Il existe donc une relation de la forme

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_s x_s = 0 \tag{1}$$

où μ_i est dans k et au moins l'un des μ_i est non nul. Considérons une telle relation vérifiant en plus que le nombre r d'indices i tel que μ_i est non nul est minimal. On a $r \geqslant 2$. En effet si on avait $r = 0$ la relation ne vérifierait pas le fait qu'au moins l'un des μ_i est non nul. Si on a avait $r = 1$, on aurait $\mu_1 x_1 = 0$ mais comme $x_1 \neq 0$, on aurait $\mu_1 = 0$ et donc $r = 0$. Quitte à changer le nom des indices, on peut supposer que $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 \neq 0$.

On applique alors u à la relation $(\mathbf{1})$[22]. Comme u est linéaire et x_i vecteur propre pour u associé à la valeur λ_i, on obtient la relation suivante.

$$\mu_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \mu_s \lambda_s x_s = 0 \tag{2}$$

On calcule alors la différence $(\mathbf{2})$- $\lambda_1(\mathbf{1})$ pour obtenir la relation

$$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)x_2 + \cdots + \mu_s(\lambda_s - \lambda_1)x_s = 0\,.$$

18. C'est bien entendu beaucoup plus fort que la question **a**
19. c'est-à-dire on commence $\mathscr{B}$ par une base de F_1, puis on met une base de F_2, puis une base de F_3,...
20. Exercice.
21. Autrement dit que les vecteurs propres x_i sont associées à des valeurs propres distinctes.
22. Il faut bien se servir de u à un moment où à un autre...

C'est une relation linéaire entre les x_i avec $r-1$ coefficients non nuls (grâce au calcul (**2**)- λ_1(**1**), on a annulé le coefficient non nul de x_1 et les autres coefficients sont $\mu_i(\lambda_i - \lambda_1)$ qui sont nuls si et seulement si $\mu_i = 0$ puisque justement $\lambda_i \neq \lambda_1$). Cela contredit la définition de r comme minimum.

Preuve 2 : interpolation de Lagrange. Comme les λ_i sont distincts, pour tout i, il existe un polynôme $\mathrm{P}_i \in k[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}_i(\lambda_i) = 1$ et $\mathrm{P}_i(\lambda_j) = 0$ si $j \neq i$ (on applique s fois le théorème d'interpolation de Lagrange : la première fois pour créer un polynôme P_1 tel que $\mathrm{P}_1(\lambda_1) = 1$ et $\mathrm{P}_1(\lambda_i) = 0$ si $i \geqslant 1$, la deuxième fois pour créer P_2 avec $\mathrm{P}_2(\lambda_2) = 1$ et $\mathrm{P}_2(\lambda_i) = 0$ si $i \neq 2$,...).

On applique alors la relation (**1**), non pas l'endomorphisme u mais l'endomorphisme $\mathrm{P}_i(u)$ [23]. On obtient ainsi la relation [24] $\mathrm{P}_i(\lambda_1)x_1 + \cdots + \mathrm{P}_i(\lambda_s)x_s = 0$. Par le choix de P_i, dans le membre de gauche de cette somme tous les termes sont nuls sauf éventuellement le i^{e} qui vaut x_i. On en déduit que $x_i = 0$. En changeant l'indice i, on obtient bien que tous les x_i sont nuls.

Corollaire 284 – Somme directe de sous-espace propre. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie et u un endomorphisme de E. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ des éléments distincts de k. Les sous-espaces propres E_{λ_i} associés aux λ_i sont en somme directe : on a $\mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_s}$ [25].

Preuve. Il s'agit essentiellement d'une reformulation de l'énoncé précédent.

Dire que la somme est directe signifie que si on a une relation de la forme $x_1 + \cdots + x_s = 0$ où pour tout i, $x_i \in \mathrm{E}_{\lambda_i}$ alors pour tout i, $x_i = 0$.

Supposons donc qu'on dispose d'une relation de la forme $x_1 + \cdots + x_s = 0$ où pour tout i, $x_i \in \mathrm{E}_{\lambda_i}$. Si l'un des x_i était non nul, on aurait alors une relation de dépendance linéaire non triviale entre les x_i ce qui est contraire à la proposition 283.

Exercice 177 Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie, u un endomorphisme de E et $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(u) = 0$.

a) Montrer que tous les valeurs propres de u sont des racines de P [26].

b) En déduire que si $k = \mathbb{R}$ et si u vérifie $u^2 + 1 = 0$ alors u n'a pas de valeurs propres [27].

Proposition 285 – Nombre fini de valeurs propres. Soit E un espace vectoriel sur k de dimension finie et u un endomorphisme de E. L'ensemble des valeurs propres de u, qu'on note $\mathrm{Sp}(u)$ ou $\mathrm{Spec}(u)$ et qu'on appelle le spectre de u est un ensemble fini.

Preuve. *Démonstration 1 :* On va montrer par l'absurde que le nombre de valeurs propres de u est au plus n. En effet, s'il existe plus de m valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ alors chacun des sous-espaces $\mathrm{E}_{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{E}_{\lambda_m}$ est de dimension supérieure à 1 et de plus le sous-espace vectoriel $\mathrm{E}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{E}_{\lambda_m}$ est de dimension $\dim \mathrm{E}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{E}_{\lambda_m} \geqslant m > n$ puisque $\mathrm{E}_{\lambda_1} + \cdots + \mathrm{E}_{\lambda_m} = \mathrm{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_{\lambda_m}$ (voir le corollaire 284). C'est absurde.

Démonstration 2 : à l'aide du polynôme caractéristique. Soit λ une valeur propre de u. On a par définition $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda\mathrm{id}) \neq 0$. En particulier $u - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas injectif et donc n'est pas bijectif. On en déduit que $\det(u - \lambda\mathrm{id}) = 0$.

Inversement, si $\det(u - \lambda\mathrm{id}) = 0$ alors $u - \lambda\mathrm{id}$ n'est pas bijectif et donc non injectif [28]. Ainsi $\mathrm{E}_\lambda \neq 0$ et λ est valeur propre de u.

---

23. Si $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$, qu'est-ce que l'endomorphisme $\mathrm{P}(u)$? On écrit P sous la forme canonique $\mathrm{P} = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0$ alors $\mathrm{P}(u)$ est par définition l'endomorphisme $a_n u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdot + a_0\mathrm{id}_\mathrm{E}$ où u^j désigne l'endomorphisme $u \circ \cdots \circ u$ où il y a j facteurs u.

24. Grâce à la propriété suivante : soit $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$ et $\lambda \in k$ et $x \in \mathrm{E}_\lambda$, on a $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)(x)$. En particulier, si x est vecteur propre de u pour la valeur propre λ alors x est aussi vecteur propre de tous les polynômes en u. On commence à montrer la propriété pour les monômes X^i en raisonnant par récurrence sur i puis on effectue des combinaisons linéaires. À vous de rédiger la preuve proprement.

25. Attention ! On ne dit pas du tout ici que cette somme est égale à E. Elle est en général un sous-espace strict de E. Dire que cette somme directe est égale à E est équivalent au fait que u est diagonalisable et que ses valeurs propres sont les λ_i tel que $\mathrm{E}_{\lambda_i} \neq 0$.

26. Attention, la réciproque n'est pas vraie. Par exemple si $u = 0$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)$, on a bien $\mathrm{P}(u) = 0$ mais 1 n'est pas valeur propre de u.

27. Montrer que l'existence d'un tel endomorphisme ne peut arriver que lorsque $\dim \mathrm{E}$ est pair (on pourra calculer $\det(u^2)$ de deux manière différentes). Déterminer un tel endomorphisme lorsque $n = 2$ puis pour n'importe quel en dimension paire.

28. ici on utilise que pour un **endo**morphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, être bijectif est équivalent à être surjectif ou encore est équivalent à être injectif. Cela résulte du théorème du rang et du fait que l'espace de départ et d'arrivée étant le même, ils ont la même dimension.

Au passage, on a démontré que λ valeur propre si et seulement si $\det(u - \lambda \mathrm{id}) = 0$. C'est une relation très importante.

Or $\det(u - \mathrm{X}\mathrm{id})$ est un polynôme[29] de degré $\dim \mathrm{E}$[30]. En particulier, il est non nul. Les valeurs propres de u étant les racines d'un polynôme non nul, elles sont en nombre fini. On peut même préciser le polynôme en question étant de degré $\dim \mathrm{E}$, le spectre de u est de dimension plus petite que $\dim \mathrm{E}$.

Exercice 178 — Endomorphismes et polynômes. On considère l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \longrightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} \quad \longmapsto \mathrm{P} - (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}' \end{cases}$$

a) Montrer que φ est une application linéaire dont l'image est contenue dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On note encore φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ induit par φ.

b) Montrer que φ est diagonalisable, déterminer ses valeurs propres, sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique.

c) Calculer le noyau de φ.

d) Déterminer une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ formée de vecteurs propres pour φ.

Corrigé

a) La dérivation et la multiplication par $(\mathrm{X}+1)$ étant linéaire, par composition l'application $\mathrm{P} \mapsto (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'$ est linéaire. La différence d'applications linéaires étant linéaire, l'application φ est linéaire.

Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, alors $\mathrm{P}' \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. On en déduit que $(\mathrm{X}+1)\mathrm{P}' \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ (puisque le degré d'un produit de polynôme est égal à la somme des degrés des facteurs du produit). Ainsi $\mathrm{P} - (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}' \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

b) Calculons la matrice de φ dans la base $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$, on a $\varphi(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}^k - k\mathrm{X}^k - k\mathrm{X}^{k-1} = (1-k)\mathrm{X}^k - k\mathrm{X}^{k-1}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ & 0 & -2 & & & \\ & & -1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & (1-n) & \\ & & & & 2-n & -n \\ & & & & & 1-n \end{bmatrix}$$

Elle est triangulaire supérieure et ses coefficient diagonaux sont tous distincts. Ainsi φ est diagonalisable, les valeurs propres sont $1, 0, -1, \ldots, (1-n)$. La trace est la somme des valeurs propres. Elle vaut donc $\mathrm{tr}\,(\varphi) = 1 - n(n-1)/2$. Le déterminant est le produit des valeurs propres et vaut donc $\det \varphi = 0$. Enfin le polynôme caractéristique est $(-1)^{n+1} \prod_{k=-1}^{n-1} (\mathrm{X}+k) = (-1)^{n+1}\mathrm{X}(\mathrm{X}-1) \prod_{k=1}^{n-1} (\mathrm{X}+k)$.

c) La forme de la matrice montre que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un espace vectoriel de dimension 1. Si $\mathrm{P} = \mathrm{X}+1$, on a $\varphi(\mathrm{P}) = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbb{R}(\mathrm{X}+1)$.

Comment penser au polynôme $\mathrm{X}+1$ comme élément non nul du noyau ?

- Par un calcul algébrique (matrice ou polynôme) On constate à partir de la matrice que que $\deg \varphi(\mathrm{P}) = \deg \mathrm{P}$ sauf si $\deg \mathrm{P} = 1$ (c'est là où il y a un zéro sur la diagonale de la matrice). On peut aussi faire cette observation en calculant le terme de plus haut degré de $\varphi(\mathrm{P})$ c'est $(1 - \deg \mathrm{P})$ fois le terme de plus haut degré de P.

  Si P est dans le noyau de φ, il faut que $\varphi(\mathrm{P})$ soit de degré strictement plus petit que P et donc $\deg \mathrm{P} = 1$. On calcule alors $\varphi(a\mathrm{X}+b) = a\mathrm{X} + b - a$ et on trouve que $a\mathrm{X}+b$ est dans $\mathrm{Ker}\,\varphi$ si et seulement si $a = b$ et donc $\mathrm{P} = a(\mathrm{X}+1)$.

29. On choisit une base de E et on effectue le calcul avec les matrices dans cette base.

30. On utilise la formule du développement du déterminant comme une somme sur les permutations de $\{1, \ldots, \dim \mathrm{E}\}$ pour le constater.

- En résolvant une équation différentielle, on cherche quand $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}'$. Ici on cherche la solution, c'est un brouillon, on évite les discussions d'annulation,... l'équation différentielle s'écrit $\mathrm{P}'/\mathrm{P} = 1/(\mathrm{X}+1)$ et donc $\ln|\mathrm{P}| = \ln(\mathrm{X}+1) + c$ ce qui donne $\mathrm{P} = c(\mathrm{X}+1)$... Et maintenant pour rédiger, il n'y a qu'à dire : $\mathrm{X}+1$ est dans le noyau qui est de dimension 1...

d) La famille $((\mathrm{X}+1)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ formée de vecteurs propres pour φ. En effet, on a $\varphi((\mathrm{X}+1)^k) = (\mathrm{X}+1)^k - k(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+1)^{k-1} = (1-k)(\mathrm{X}+1)^k$.

Comment penser au polynôme $\mathrm{X}+1$ *comme élément non nul du noyau ?*

- On a trouvé $\mathrm{X}+1$ dans le noyau, on peut donc penser à ces puissances.
- On résout l'équation différentielle $\mathrm{P} - (\mathrm{X}+1)\mathrm{P}' = (1-k)\mathrm{P}$. Elle s'écrit aussi $\mathrm{P}'/\mathrm{P} = k/(\mathrm{X}+1)$ soit $\ln|\mathrm{P}| = k\ln(\mathrm{X}+1) + c = \ln(\mathrm{X}+1)^k + c$. On pense ainsi à $\mathrm{P} = (\mathrm{X}+1)^k$ et il n'y a plus qu'à vérifier que ça marche.

Exercice 179 – Noyau et Image supplémentaires. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k et f un endomorphisme de E.

a) Montrer l'équivalence des propositions suivantes

(i) $\operatorname{Ker} f$ admet un supplémentaire stable par f ;

(ii) $\operatorname{Ker} f$ admet un unique supplémentaire stable par f ;

(iii) $\operatorname{Im} f$ admet un supplémentaire stable par f ;

(iv) $\operatorname{Im} f$ admet un unique supplémentaire stable par f ;

(v) $\operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f = \mathrm{E}$;

(vi) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$;

(vii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$;

($viii$) la multiplicité de 0 comme racine du polynôme caractéristique de f est égal à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

b) Montrer qu'un endomorphisme diagonalisable vérifie ces conditions.

c) On suppose que E est un espace euclidien. Montrer qu'un endomorphisme normal de E vérifie ces conditions.

d) On suppose que $f \in \mathrm{Is}(\mathrm{E})$. Montrer que $f - \mathrm{id}_\mathrm{E}$ vérifie les conditions de la question **a**.

Chapitre 10

Annexe B : nombres complexes

Définition 286 – Les nombres complexes. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on définit une loi notée $\cdot$ par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a,b),(c,d)) & \longmapsto (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, bc+ad) \end{cases}$$

Cette loi est associative, commutative, admet $(1,0)$ pour élément neutre (on note ainsi 1 plutôt que $(1,0)$), distributive par rapport à la loi $+$ usuelle sur $\mathbb{R}^2$.[1] Tout élément non nul de $\mathbb{R}^2$ admet un inverse pour $\cdot$. De plus, l'élément $(0,1)$ vérifie $(0,1)^2 = (-1,0) = -(1,0) = -1$. On le note i.

On définit ainsi sur $\mathbb{R}^2$ une structure de corps. Pour se souvenir de la construction de cette loi, on note $\mathbb{C}$ plutôt que $\mathbb{R}^2$.

L'élément $(a,b) \in \mathbb{C}$ s'écrit alors $(a,b) = a(1,0)+b(0,1) = a1+bi = a+bi$. L'écriture sous la forme $a+ib$ est appelée l'écriture sous la *forme algébrique*.

Preuve. Plutôt qu'une preuve à proprement parler, voici la liste des choses à vérifier

(i) Pour tous $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$, on a $((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$
(ii) Pour tous $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$, on a $(a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$.
(iii) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a $(a,b)\cdot(1,0) = (1,0)\cdot(a,b) = (a,b)$.
(iv) Pour tous $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$, on a $(a,b)\cdot((c,d)+(e,f)) = (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$
(v) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)\cdot(a,b)$$

Définition 287 – Module. Pour $z = a+ib$, on pose $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}_+$. C'est le *module de z*. On a $|z| = \mathrm{OM}$ (où M est d'affixe z et O est le point d'affixe 0).
On a $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
On a $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^\times$.
On a $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (inégalité triangulaire).

Définition 288 – Argument. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur porté par la demi-droite $[\mathrm{O}x)$. On pose $\mathrm{Arg}(z) = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}})$ (où M est le point d'affixe z).

On a $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)$ et $\mathrm{Arg}(z_1/z_2) = \mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2)$ (le calcul étant fait dans le groupe des angles orientés du plan euclidien $\mathbb{C}$).

Définition 289 – Forme trigonométrique/forme exponentielle. Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme « **trigonométrique** » : $z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, r est uniquement défini : $r = |z|$ et θ est défini à 2π près : $\theta = \mathrm{A}rg\,(z)$.

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme « **exponentielle** » : $z = r\exp(i\theta)$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, r est uniquement défini : $r = |z|$ et θ est défini à 2π près : $\theta = \mathrm{A}rg\,(z)$.[2]

On a $\exp(i\theta) = \cos(\theta)+i\sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

1. En fait, dans les calculs ce n'est pas simplement la distributivité pour rapport à $+$ qui est utile mais le fait que l'application $\cdot$ soit $\mathbb{R}$-bilinéaire c'est-à-dire que pour tous $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $(a,b)\cdot(\alpha(c,d)+\beta(e,f) = \alpha(a,b)\cdot(c,d)+\beta(a,b)\cdot(e,f)$

2. On préférera la forme exponentielle qui est plus compacte, la forme trigonométrique est surtout utile en Terminale car on n'est pas trop habitué à l'exponentielle.

Définition 290 – Conjugaison. Pour $z = a + ib$, on définit $\overline{z} = a - ib$. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\overline{\alpha z_1 + z_2} = \alpha\overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \ \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$$

$\overline{z}$ est le symétrique de z par rapport à $(\mathrm{O}x)$.

Si $z = a + ib$, on a $a = \mathscr{R}e(z) = (z + \overline{z})/2$ et $b = \mathscr{I}m(z) = (z - \overline{z})/2i$.

z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$ si et seulement si $\mathrm{A}rg(z) = \pi/2[\pi]$

z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$ si et seulement si $\mathrm{A}rg(z) = 0[\pi]$.

On a $|z|^2 = z\overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

On a $|z| = 1$ si et seulement si $\overline{z} = 1/z$.

Remarque 291 – Relation entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ via les bijections réciproques l'un de l'autre

$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \longmapsto z = x + iy \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z \longmapsto (\mathscr{R}e\, z, \mathscr{I}m\, z) = \left(\dfrac{z + \overline{z}}{2}, \dfrac{z - \overline{z}}{2i}\right) \end{cases}$$

Exercice 180 – Questions élémentaires.

a) La structure euclidienne sur $\mathbb{C}$ est obtenu en transférant celle de $\mathbb{R}^2$ (c'est-à-dire $\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'$) via les isomorphismes ci-dessus. Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, trouver une expression simple de $\langle z, z' \rangle$ puis de $\|z\|^2$ et $\|z\|$.

b) De même, trouver une expression simple de $\det_{1,i}(z, z')$ en fonction de z et z'.

c) Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, exprimer la distance de z à z' dans l'espace affine euclidien $\mathbb{C}$.

d) Montrer qu'une équation de droite s'écrit sous la forme $uz + \overline{uz} + c = 0$ pour u un nombre complexe non nul et $c \in \mathbb{R}$ (ou aussi sous la forme $\overline{u}z + u\overline{z} + c = 0$ avec $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}$ ou encore $\overline{u}z - u\overline{z} + ic = 0$ avec $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $c \in \mathbb{R}$).

e) Déterminer l'équation en complexe de la droite (AB).

f) En déduire que $a, b, c \in \mathbb{C}$ sont alignés si et seulement si $(c - a)/(b - a) \in \mathbb{R}$.

g) Montrer que l'équation d'un cercle en complexe s'écrit $z\overline{z} + \overline{u}z + u\overline{z} + c$ où $c \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$: u est le centre.

h) Montrer que l'équation du cercle de centre z_0 et de rayon R est $|z - z_0|^2 = \mathrm{R}^2$ c'est-à-dire

$$z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z + |z_0|^2 = \mathrm{R}^2$$

Proposition 292 – Quelques formules. Formules d'Euler $\cos(\theta) = (\exp(i\theta) + \exp(-i\theta))/2$; $\sin(\theta) = (\exp(i\theta) - \exp(-i\theta))/2i$

Formule de Moivre : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Racine de n^{e} de l'unité : $\exp(2ik\pi/n)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

Exercice 181 M d'affixe z est sur la médiatrice de [AB] si et seulement si $|z - a| = |z - b|$.

M d'affixe z est sur le cercle de centre A de rayon r si et seulement si $|z - a| = r$.[3]

ABC est isocèle en A si et seulement si $|(c - a)/(b - a)| = 1$

ABC est rectangle en A si et seulement si $\mathrm{A}rg((c - a)/(b - a)) = \pi/2[\pi]$

ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si $(c - a)/(b - a) = \pm i$.

ABC est équilatéral si et seulement si $(c - a)/(b - a) = \exp(i\pi/3)$ ou $\exp(-i\pi/3)$.

Exercice 182 – Nombres complexes et angles.

a) Exprimer $\mathrm{A}rg\, z$ comme un angle de vecteurs.

b) Exprimer $\mathrm{A}rg\,(c - a)/(b - a)$ comme un angle de vecteurs.

c) Montrer que $2\mathrm{A}rg\, z = 0$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.

d) Retrouver le fait que a, b, c alignés si et seulement si $(c - a)/(b - a) \in \mathbb{R}$.

3. Pour les questions de module, il est souvent plus simple et plus pertinent de considérer le carré des modules.

e) Montrer que $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sont cocycliques ou alignés si et seulement si

$$\frac{\dfrac{(d-a)}{(c-a)}}{\dfrac{(d-b)}{(c-b)}} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 183 – Nombres complexes. Soient A, B et C d'affixe i, $1+i$ et $-1+i$ et f l'application qui à M (d'affixe z) associe M′ d'affixe $z' = (iz+2)/(z-i)$.

a) Calculer $f(\mathrm{B})$ et $f(\mathrm{C})$

b) Montrer que pour tout $z \neq i$, on a $(z'-i)(z-i) = 1$

c) Soit D d'affixe $1+2i$. Placer A, B, C et D sur la figure. Construire D′.

d) Soit $\mathrm{R} > 0$. Déterminer l'image par f du cercle de centre A de rayon R.

e) Montrer que si M est sur l'axe imaginaire (différent de A) alors M′ aussi.

f) Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A. Déterminer l'image de $\mathscr{D} \setminus \{\mathrm{A}\}$ par f.

Exercice 184 – Élémentaire mais indispensable à savoir faire.

a) Trouver les parties réelles et imaginaires de $1/z$, $(z-a)/(z+a)$ où $a \in \mathbb{R}$, z^3, $(3+5i)/(7i+1)$, $((-1+i\sqrt{3})/2)^3$, $((-1-i\sqrt{3})/2)^6$, i^n, $((1+i)/\sqrt{2})^n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 8$.

b) Soit K, L, M d'affixe respective $z_{\mathrm{K}} = 1+i$, $z_{\mathrm{L}} = 1-i$, $z_{\mathrm{M}} = -i\sqrt{3}$. Soit N l'image de M par rapport au point L. Déterminer l'affixe de L.

c) La rotation de centre O d'angle $\pi/2$ transforme M en A et N en C. Déterminer z_{A} et z_{C}.

d) La translation de vecteur u d'affixe $2i$ transforme M en D et N en B. Déterminer la nature de ABCD.

e) Déterminer l'écriture complexe d'une symétrie par rapport à une droite et d'une symétrie glissée.

Exercice 185 Soit ABCD et AB′C′D′ deux carrés ayant un sommet commun de centre respectif R et T. On note Q (resp. S) le milieu de [DB′] (resp. BD′). Montrer que QRST est un carré.

Exercice 186 Soient A, B, C trois points du plan d'affixe respective a, b et c. On suppose que $|a| = |b| = |c|$. Montrer que ABC équilatéral si et seulement si $a+b+c = 0$.

Exercice 187 – Quelques lieux de points.

a) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tel que $1, z, z^4$ soient alignés.

b) Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tel que z, z^2, z^4 soient un triangle rectangle en N.

Exercice 188 – Image par une application complexe.

a) Déterminer l'image d'une droite horizontale (resp. verticale, d'une droite passant par l'origine, d'un cercle de centre O) par l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 \in \mathbb{C}$.

b) Déterminer l'image d'un cercle de centre O (resp. l'image d'une demi-droite d'origine O) par l'application $z \mapsto 1/2(z+1/z)$.

c) Déterminer l'image d'une droite horizontale (resp. verticale) par l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(z) \in \mathbb{C}$.

Proposition 293 – Similitude. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. La transformation donnée $z \mapsto az+b$ est une similitude directe, elle conserve les angles orientés, les alignements... Si $a \neq 1$, il y a un uniquement point fixe appelé centre de la similitude [4]. $\mathrm{Arg}(a)$ est appelé l'angle de la similitude et $|a|$ le rapport de la similitude. Une similitude est une rotation si et seulement si $|a| = 1$ et $a \neq 1$. Une similitude est une rotation d'angle θ si et seulement si $a = \exp(i\theta)$.

4. Le b est lui lié à la position du centre de la similitude.

Une similitude est une homothétie si et seulement si $a \in \mathbb{R}^*$ et $a \neq 1$. Une similitude est une homothétie de rapport λ si et seulement si $a = \lambda$.

Une similitude est une translation si et seulement si $a = 1$ (et $b \neq 0$).

Une similitude est une symétrie centrale si et seulement si $a = -1$ (une symétrie centrale est en même temps une rotation (d'angle π) et une homothétie de rapport -1).

Exercice 189 — Isométrie.

a) Montrer que les isométries vectorielles directes s'écrivent sous la forme $z \mapsto uz$ où $u \in \mathbb{U}$.

b) Montrer que les isométries vectorielles indirectes s'écrivent sous la forme $z \mapsto u\overline{z}$ où $u \in \mathbb{U}$. Déterminer alors l'équation de la droite fixe.

c) Déterminer l'écriture d'une isométrie affine (directe ou non) puis les points fixes.

d) Soit $u \in \mathbb{U}$. Déterminer quand la transformation $z \mapsto u\overline{z} + b$ est une symétrie glissée.

Exercice 190 — Similitude.

a) Montrer que les similitudes vectorielles directes s'écrivent sous la forme $z \mapsto az$ où $a \in \mathbb{C}^\times$. Déterminer le rapport de la similitude en fonction de a.

b) Montrer que les similitudes vectoriels indirectes s'écrivent sous la forme $z \mapsto a\overline{z}$ où $a \in \mathbb{C}^\times$. Déterminer le rapport de la similitude en fonction de a.

c) Déterminer l'écriture d'une similitude affine (directe ou non). Retrouver le fait qu'une similitude de rapport différent de 1 à un unique point fixe.

d) Retrouver le fait qu'étant donnée $z \neq z'$ et $z_1 \neq z'_1$, il existe une unique similitude directe (resp. indirecte) qui envoie z sur z_1 et z' sur z'_1.

Exercice 191 — Nombres complexes.

a) Écrire sous forme symbolique (à l'aide de quantificateurs...), le fait que le conjugué d'un produit est le produit des conjugués.

b) Démontrer la relation précédente.

c) Énoncer sous forme d'une phrase la relation

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \qquad z\overline{z} = |z|^2 .$$

d) Démontrer la relation précédente.

e) Quelle est la nature de la transformation $f_1 \colon z \mapsto iz + 2$? Déterminer les attributs géométriques de f_1 (centre et rapport pour une homothétie, centre et angle pour une rotation, centre, rapport, angle pour une similitude, vecteur pour une translation).

f) Quelle est la nature de la transformation $f_2 \colon z \mapsto \sqrt{2}z - 3$? Déterminer les attributs géométriques de f_2.

g) On pose $f_3 \colon z \mapsto -i\sqrt{2}z/2 - 4$. Déterminer la nature de la transformation $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ et ses attributs géométriques.

Exercice 192 — Nombres complexes.

a) Écrire sous forme symbolique (à l'aide de quantificateurs...), le fait que l'inverse d'un nombre complexe est le quotient de son conjugué par le carré de son module.

b) Démontrer la relation précédente.

c) Énoncer sous forme d'une phrase la relation

$$\forall\, z, z' \in \mathbb{C}, \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} .$$

d) Démontrer la relation précédente.

e) Quelle est la nature de la transformation $f_1 \colon z \mapsto (1+i)z+2$? Déterminer les attributs géométriques de f_1 (centre et rapport pour une homothétie, centre et angle pour une rotation, centre, rapport, angle pour une similitude, vecteur pour une translation).

f) Quelle est la nature de la transformation $f_2 \colon z \mapsto (1-i)z-3i$? Déterminer les attributs géométriques de f_2.

g) On pose $f_3 \colon z \mapsto az+b$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$). Trouver $(a, b) \in \mathbb{C}$ tel que $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ soit une translation.

Exercice 193 — Similitude et nombre complexe. Soit $u \in \mathbb{C}$. On considère la transformation f de $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = u^2 z + u - 1$.

a) Déterminer les valeurs de u pour lesquelles f est une translation. Déterminer alors le vecteur.

b) Déterminer les valeurs de u pour lesquelles f est une symétrie centrale. Déterminer alors le centre.

c) Déterminer les valeurs de u pour lesquelles f est une homothétie de rapport -2. Déterminer alors le centre.

d) Déterminer les valeurs de u pour lesquelles f est une rotation d'angle $\pi/2$. Déterminer alors le centre.

e) Déterminer la nature de f lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 194 — Des classiques utilisations des nombres complexes. Soit ABC un triangle du plan complexe. On construit sur les côtés de ce triangle et à l'extérieur trois triangles rectangles isocèles (en le sommet qu'on ajoute) : ABR, ACQ et BCP.

Les questions sont à faire dans l'ordre souhaité.

a) Montrer que AP = RQ et (AP) et (RQ) sont orthogonales.

b) Déterminer l'écriture de la similitude directe s de centre A envoyant R sur B et celle de s' de centre C envoyant B sur P.

c) Quelle est la nature de $s' \circ s$. Déterminer le centre.

d) Calculer l'image de Q par $s' \circ s$.

Exercice 195 — Triangle équilatéraux. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Montrer que ce sont les sommets d'un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ou encore si et seulement si $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$.

Exercice 196 — Figure de Toricelli. Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur de ABC les triangles équilatéraux tels que ABC′, ACB′ et BCA′.

a) Montrer que AA′ = BB′ = CC′

b) Montrer que (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes en un point appartenant aux cercles circonscrits à ABC′, ACB′ et BCA′.

Exercice 197 — Parallélogramme et carré. Soit ABCD un parallélogramme. On trace à l'extérieur de ABCD un carré sur chacun de ses côtés. Montrer que les centres de ces quatre carrés forment un carré.

Exercice 198 — Lieux. Soit A, B deux points du plan.

a) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que M, B et N sont alignés (où N désigne l'image de M par la rotation de centre de A d'angle $\pi/2$).

b) Soit M un point mobile du cercle de diamètre [AB]. On trace un carré BMNP de côté [BM]. Déterminer le lieu des points N lorsque M décrit le cercle de diamètre [AB].

Exercice 199 — Triangle équilatéraux. Soit A un point du plan et $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites du plan. Déterminer l'ensemble des triangles équilatéraux AMM′ tel que $\mathrm{M} \in \mathscr{D}$ et $\mathrm{M}' \in \mathscr{D}'$

Exercice 200 – Homographie. Soit $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$. À la matrice M, on associe la transformation

$$\Phi_{\mathrm{M}} : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

a) Pour $\mathrm{M}, \mathrm{M}' \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$, calculer $\Phi_{\mathrm{MM}'}$ en fonction de Φ_{M} et $\Phi_{\mathrm{M}'}$. Calculer aussi Φ_{id}.

b) On suppose que M n'est pas inversible. Montrer que Φ_{M} n'est définie nulle part ou est constante.

On suppose à présent que les matrices M sont dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

c) Montrer que Φ_{M} réalise une bijection de $\mathbb{C} \smallsetminus \{-d/c\}$ sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{a/c\}$. Que se passe-t-il si $c = 0$?

On ajoute alors à $\mathbb{C}$ un point ∞ et on définit $\Phi_{\mathrm{M}}(\infty) = a/c$ et $\Phi_{\mathrm{M}}(-d/c) = \infty$. Ainsi Φ_{M} définit une bijection de $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ sur lui-même.

d) Pour quelles valeurs de M a-t-on $\Phi_{\mathrm{M}} = \mathrm{id}$?

e) Pour quelles valeurs de M, M' a-t-on $\Phi_{\mathrm{M}} = \Phi_{\mathrm{M}'}$?

f) Montrer que Φ_{M} a au moins un point fixe, parfois deux. Quand en a-t-elle strictement plus que deux ?

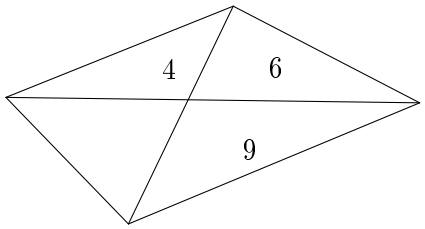
g) On suppose que Φ_{M} a un unique point fixe. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. La suite définie par récurrence à partir de z_0 par $z_{n+1} = \Phi_{\mathrm{M}}(z_n)$ converge-t-elle vers le point fixe de Φ_{M} ?

h) On suppose que Φ_{M} a deux points fixes. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. La suite définie par récurrence à partir de z_0 par $z_{n+1} = \Phi_{\mathrm{M}}(z_n)$ converge-t-elle ? Vers quoi ?

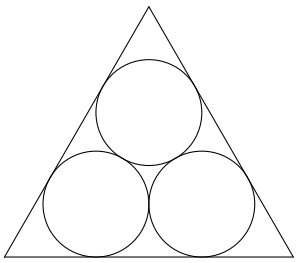
Chapitre 11

Pour jouer

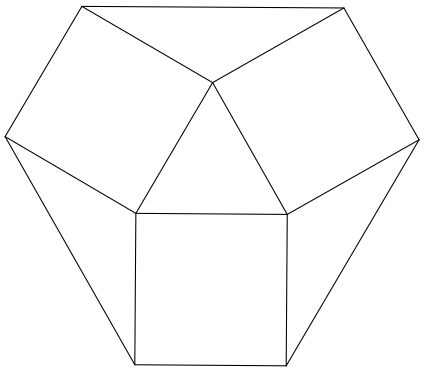
Chaque nombre indique l'aire en centimètre carré du triangle qui le contient. Quelle est l'aire du quadrilatère ?



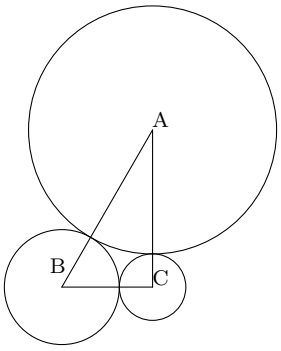
Les trois cercles sont deux à deux tangents de même rayon et tangents aux côtés d'un triangle équilatéral de côté 2cm. Quel est le rayon des cercles ?



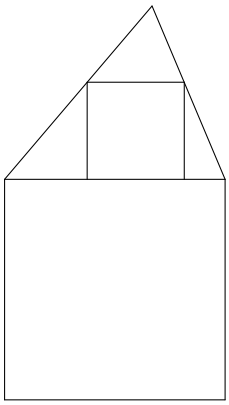
Un hexagone est construit en collant trois carrés et trois triangles isocèles autour d'un triangle équilatéral de côté 2 cm. Quel est son périmètre ?



Le triangle ABC est rectangle en C, les cercles sont tangents deux à deux, BC = 6cm, $\widehat{ABC} = 60°$. Déterminer l'aire de la partie intérieure ou triangle qui n'est contenue dans aucun des trois cercles.



La longueur du carré du grand carré est le double de celle du petit carré. Déterminer le rapport entre la somme des aires des trois triangles et l'aire du petit carré.



Soit ABCD un quadrilatère (convexe) tel que les diagonales [AC] et [BD] sont perpendiculaire. On suppose que AB $= 15\,cm$, BC $= 5\,cm$, CD $= 23\,cm$. Déterminer DA.

La grande base d'un trapèze mesure $15cm$ et le segment reliant les milieux de ses deux diagonales mesure $3cm$. Quelle est la longueur de la petite base de ce trapèze ?

Soit ABCD un rectangle et M un point à l'intérieur de ABCD. On suppose que MA $= 7cm$, MB $= 9cm$, MC $= 6cm$. Déterminer MD ;

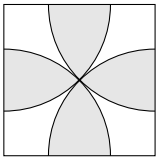
Soit ABCD un trapèze et E un point de [AB] tel que AECD soit un parallélogramme. On suppose que AE $= 15cm$, AB $= 30cm$, BC $= 12cm$ et AD $= 9cm$. Déterminer l'aire de ABCD.

Soit QRU un triangle rectangle en Q tel que $\widehat{R} = 60°$. Soient T $\in$ [QU] et S tel que QTS est un triangle rectangle en T et $\widehat{S} = 30°$. On suppose de plus que RU = ST. Déterminer le rapport entre les aires de QRU et QST ?

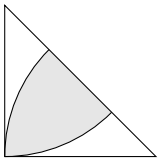
Soit ABCD un trapèze. On suppose que ce sont les côtés [AB] et [CD] qui sont parallèles, que AD $= 15cm$, CB $= 20cm$, CD $= 40cm$ et que la hauteur du trapèze est $12cm$. Déterminer l'aire de ABCD.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $3m$. Soient D, E et F des points sur les côtés [AC], [AB] et [BC] tel que AD $= 1m$, BE $= 1m$ et CF $= 1m$. Déterminer l'aire du triangle DEF.

Déterminer le rapport en l'aire de la partie grisée et celle du carré.

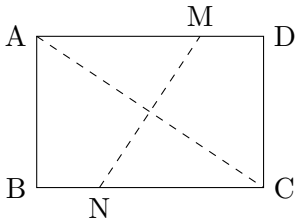


Déterminer le rapport en l'aire de la partie grisée et celle du triangle.

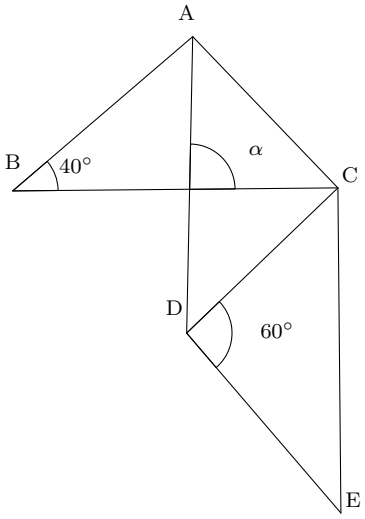


Soient ABCD un carré et P le point intérieur à ABCD tel que BCP est équilatéral. Déterminer l'angle $\widehat{APD}$.

On a plié le rectangle ABCD selon la droite (MN) de façon à superposer A et C. Que dire du quadrilatère ANCM ?

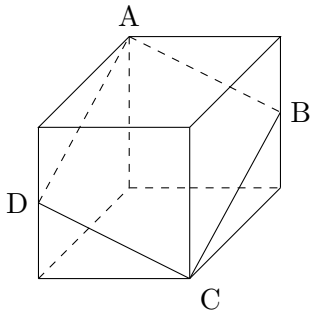


On a fait tourner autour du point C le triangle ABC de 90° pour obtenir CDE. Déterminer α.

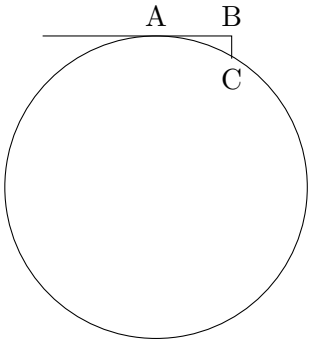


Soit ABCD un quadrilatère vérifiant $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$, $\widehat{CAB} = \widehat{CDA}$, AB = 8m, AC = 10m et AD = 6m. Déterminer CD.

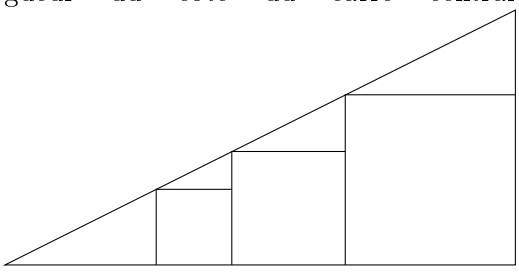
Déterminer le rapport entre la superficie de ABCD et celle d'une face du cube.



La droite (AB) est tangente en A au cercle, les droites (BC) et (AB) sont perpendiculaires. On a BC = 3cm et AB = 6cm. Déterminer le rayon du cercle.



Le côté du plus petit carré mesure 16cm, celui du plus grand carré mesure 36cm. Quelle est la longueur du côté du carré central ?



Soit ABC un triangle équilatéral et P un point intérieur à ABC. On note Q, R, S les pieds respectifs des perpendiculaires aux côtés [AB], [BC] et [AC] passant par P. On suppose que PQ = 1cm, PR = 2cm et PS = 3cm. Déterminer la longueur du côté de ABC.

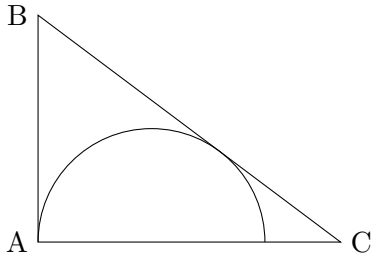
Soit A, B deux points tels que AB = 2cm. Combien existe-t-il de points C tels que ABC soit un triangle rectangle d'aire 1/2cm^2.

Soit ABC un triangle tel que BC = 5cm et $\widehat{CAB} = 60°$. On note N le point d'intersection de la droite (AB) avec la médiatrice de [AC] et M le point d'intersection de la droite (AC) avec la médiatrice de [AB]. Déterminer MN.

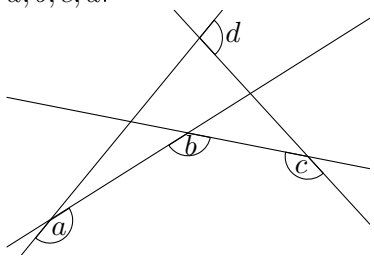
On considère un cercle de centre O et un carré dont un côté a pour extrémités deux points du cercle et dont le côté opposé contient le point O. Déterminer le rapport entre l'aire du carré et du cercle ?

Soient H un hexagone régulier et T un triangle équilatéral de même périmètre. Déterminer le rapport entre l'aire de l'hexagone et l'aire du triangle.

Le demi-cercle a son diamètre sur le côté du triangle et est tangent aux deux autres côtés de ce triangle et on a AB = 3cm, AC = 4cm et BC = 5cm ; Quelle est la longueur de son rayon ?

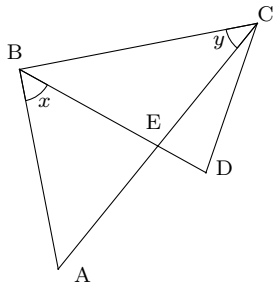


Déterminer la somme des angles a, b, c, d.

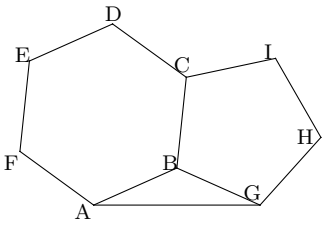


Soit A, B, C, D quatre points sur un cercle de centre O tels que les cordes [AB] et [CD] soient perpendiculaires. Déterminer la valeur de $\widehat{COB} + \widehat{AOD}$.

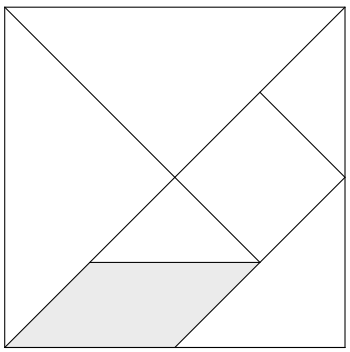
Sur la figure, on a $\widehat{DCE} = 20°$ et AE = BE = CE = CD. Déterminer le rapport x/y.



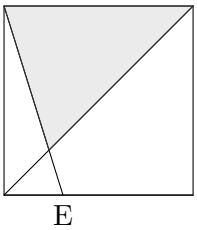
Déterminer $\widehat{GAB}$. L'hexagone et le pentagone sont réguliers.



Déterminer le rapport entre l'aire du grand carré et celle du parallélogramme.

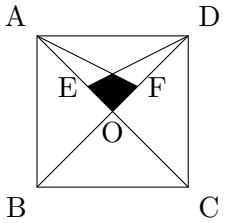


Déterminer le rapport entre l'aire coloriée et l'aire du carré, le point E étant au tiers du segment.

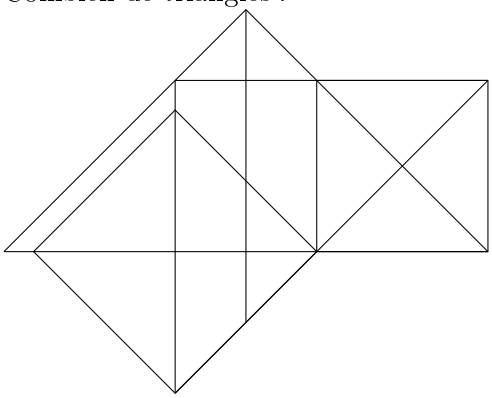


Soit ABC un triangle rectangle en B vérifiant BA = 7 cm et BC = 24 cm et D le pied de la hauteur issue de B. Déterminer le périmètre de DBC.

On a 2OE = AE et 2OF = DF.
Déterminer le rapport entre l'aire de la partie noire et l'aire du carré ABCD.



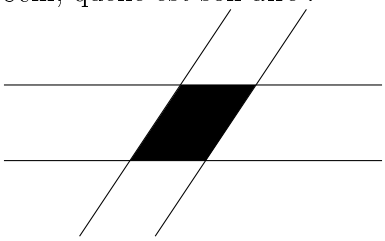
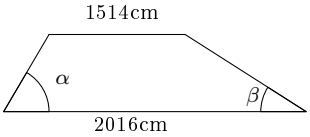
Combien de triangles ?



Patrick a acheté un vélo sans sa chaîne. Le plateau a un rayon de 21cm et celui du pignon est de 3cm et les centres de ces deux disques sont distants de 36cm. De quelle longueur de chaîne Patrick a-t-il besoin ?

Dans ABC, on a $\widehat{CAB} = 80°$ et $\widehat{BCA} = 40°$. De plus la médiatrice du côté [AC] coupe (BC) en P et (AB) en Q. Déterminer la mesure de $\widehat{BPQ}$?

Deux bandes de papier de largeur 1cm se chevauchent comme sur la figure. Si le périmètre de la zone coloriée est 8cm, quelle est son aire ?



Si $\alpha + \beta = 90°$, quelle est la distance entre les milieux des bases du trapèze ?