ESPE Centre Val de Loire

M1 Master PIF — Formation CAPPEI EF

30 novembre 2017

Ce cours

Ce que vous ne trouverez pas dans ce cours :

- Des réponses toute faites
- Des fiches séances ou séquences

Ce que vous trouverez (peut-être ?)

- Des éléments de réflexion sur ce que sont les mathématiques et leur enseignement
- Quelques activités (à retravailler pour adapter à vos élèves)
- Les enjeux des apprentissages autour du nombre
- Des mathématiques

Attentes ?

Les maths

Citation – Guy Brousseau. **Théorie des situations didactiques** p.115 *Un élève ne fait pas de mathématiques s'il ne se pose pas et ne résout pas de problèmes. Tout le monde est d'accord là-dessus.*

Faisons des maths

Dans sa vieille guimbarde, Anatole dispose d'un (très vieux) compteur kilométrique qui indique uniquement des nombres à trois chiffres. Ce compteur fait des bruits bizarres à chaque kilomètre parcouru, c'est-à-dire, chaque fois qu'un chiffre change sur le compteur.

- Il fait PIM à chaque changement du chiffre de droite.
- Il fait PAM à chaque changement de chiffre du milieu.
- Il fait POUM à chaque changement du chiffre de gauche.

À la fin d'une promenade, commencée avec 0km au compteur, son compteur indique 247km.

Question : Combien de bruits Anatole a-t-il entendu pendant sa promenade ?

Questions subsidiaires : et s'il avait entendu 328 bruits, combien de kilomètres aurait-il parcouru ? Et avec 742 bruits ?

C1 le nombre : un concept difficile à enseigner

1. plusieurs représentations $\longrightarrow$ beaucoup d'activités variées à mener avec les élèves (presque deux pages du programme 2015)

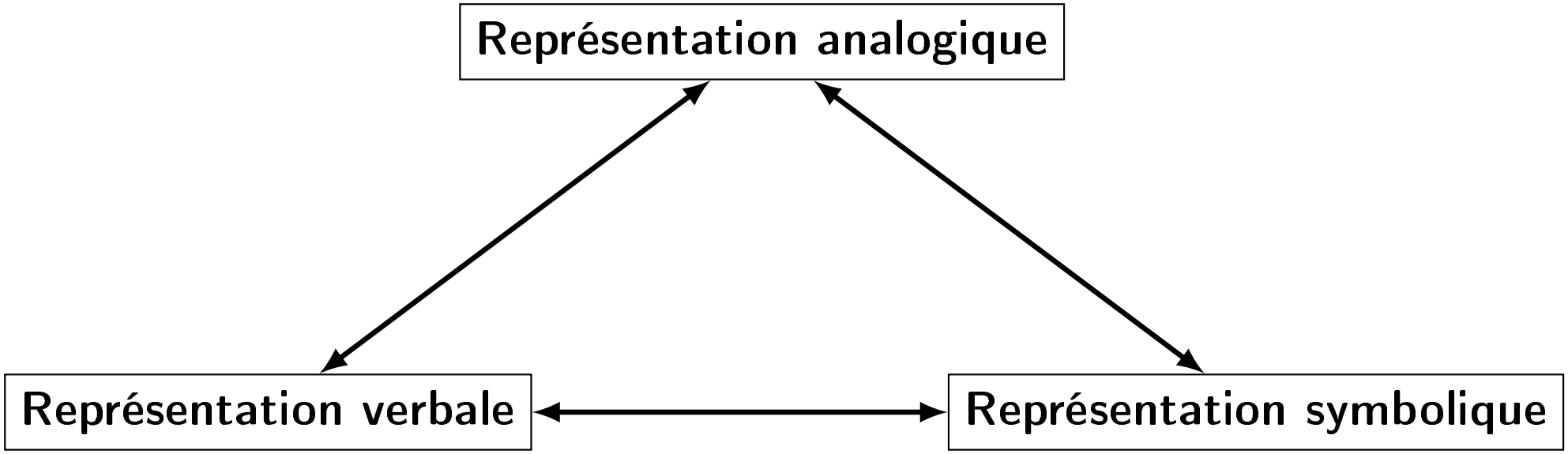
2. plusieurs sens (imbriqués)
   - numéral (numéro $\longrightarrow$ n'a rien à voir avec le nombre (confusion chiffre-nombre, maillot, NUMEN, numéro de sécu, numéro de téléphone, télécommande))
   - ordinal (exprime un rang ou un positionnement dans une liste) ascenseur, numéro de la maison, jeu du serpent (Lucette Champdavoine), file numérique,...
   - cardinal (exprimer des quantités) le plus difficile, le cœur du métier à la maternelle
   - grandeur (aspect mesure)

3. de nombreuses compétences complémentaires à travailler

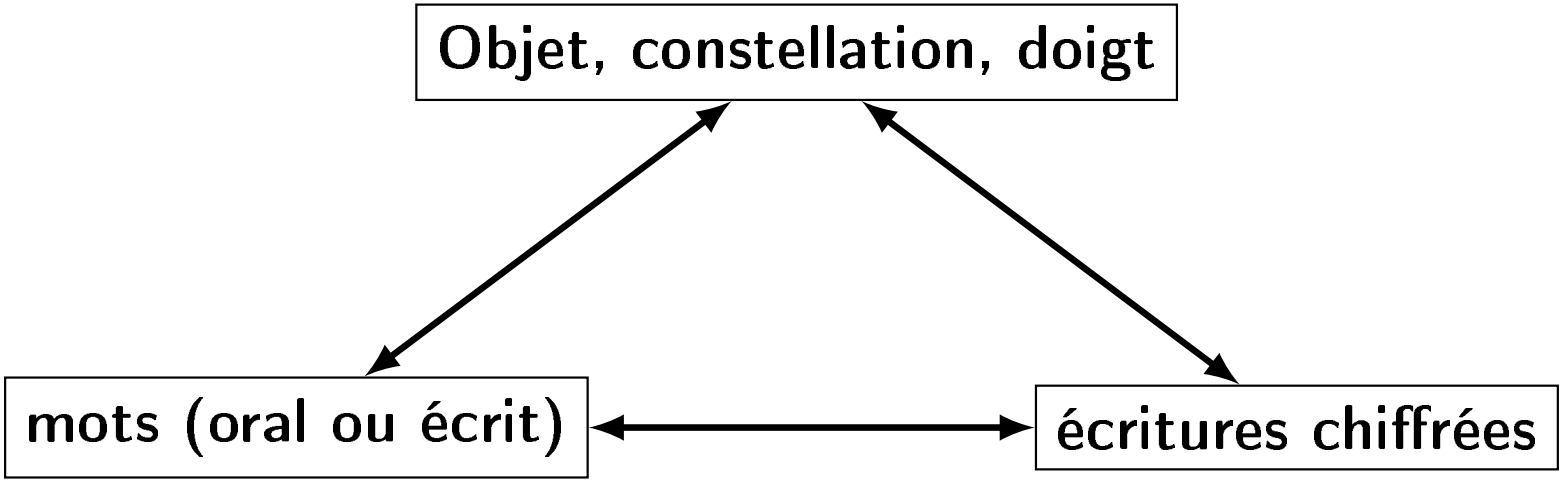
Confusion sur le sens courant des mots et le sens didactique.

Représentations multiples : le coup du chat

Représentations multiples : le coup du chat



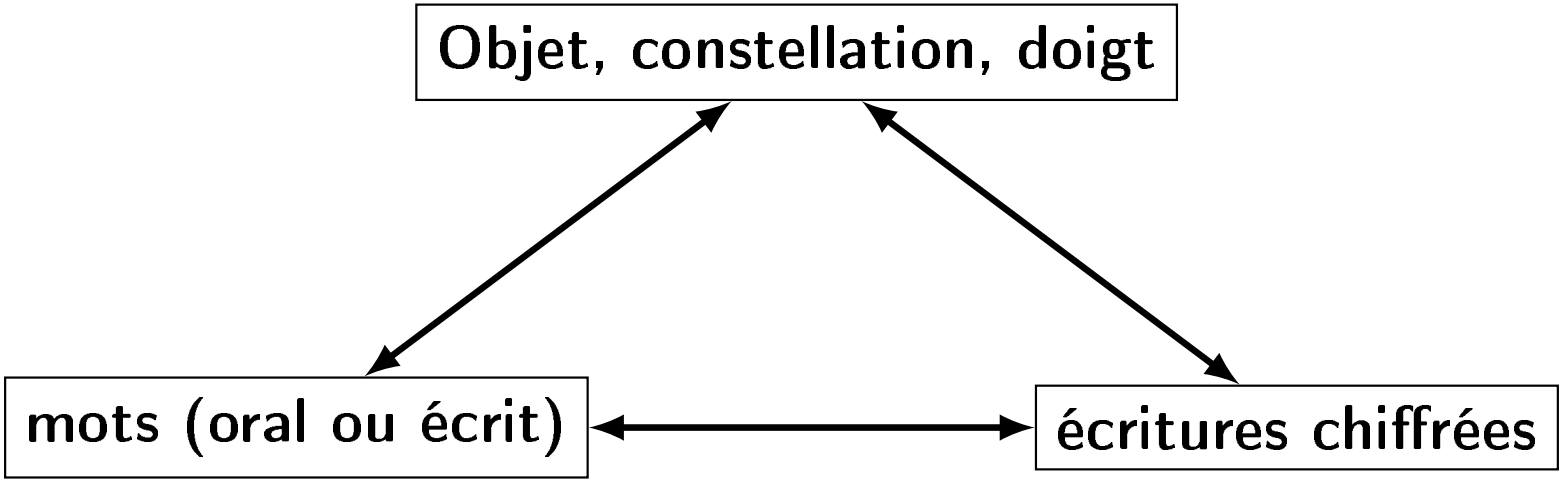
En décodé



Deheane-Cohen (1992) : Le triple code (traitement dans chaque code ; symbolisation trop tôt (plus de contrôle) ! 20000 ans d'histoires, « suivre » les flèches, 13-4 : compter devient calculer, les maths en général = pb de représentation, resol pb cycle 2 : il faut changer de représentation (exemples), se construire des images mentales, chiffre VS nombre, frise numérique).

La construction du nombre s'appuie sur la notion de quantité, sa codification orale et écrite, l'acquisition de la suite orale des nombres et l'usage du dénombrement.

En décodé



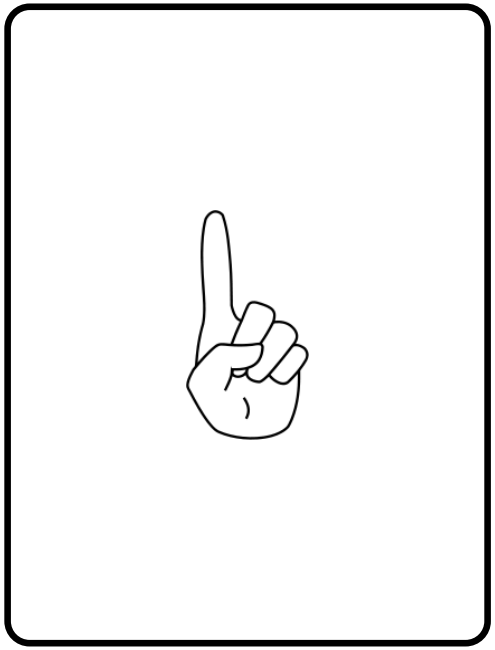
Deheane-Cohen (1992) : Le triple code (traitement dans chaque code ; symbolisation trop tôt (plus de contrôle) ! 20000 ans d'histoires, « suivre » les flèches, 13-4 : compter devient calculer, les maths en général = pb de représentation, resol pb cycle 2 : il faut changer de représentation (exemples), se construire des images mentales, chiffre VS nombre, frise numérique).

La construction du nombre s'appuie sur la notion de quantité, sa codification orale et écrite, l'acquisition de la suite orale des nombres et l'usage du dénombrement.

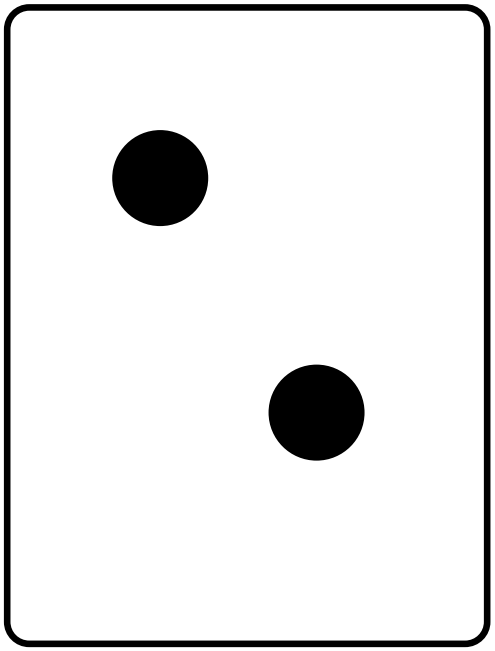
Le point de vue du matheux : enjeu numéro 1, le passage de l'un à l'autre (DANS LES 2 SENS) est transparent. le puzzle du cochon p 68 acces MS, le jeu des maillots

Des jeux : batailles/dominos/dés

Étape 1



Étape 1 (suite)

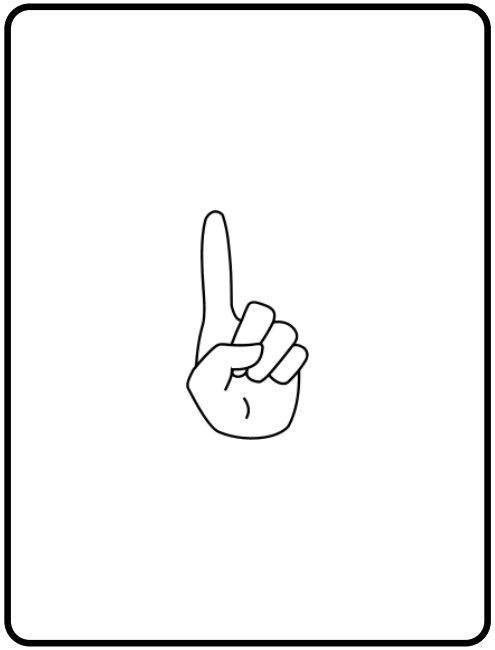


Étape 1 : on joue avec des jeux séparés : les doigts d'un côté, les constellations (standards ou non) de l'autre.

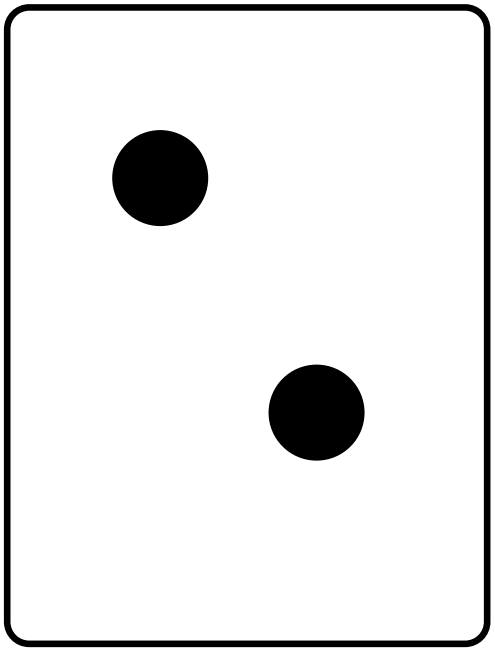
Étape 2 : on réunit les jeux : objectif forcer le changement de représentation.

Des jeux : batailles/dominos/dés

Étape 1



Étape 1 (suite)



Étape 1 : on joue avec des jeux séparés : les doigts d'un côté, les constellations (standards ou non) de l'autre.
Étape 2 : on réunit les jeux : objectif forcer le changement de représentation.

Piège : Attention à la couleur
Pas d'urgence sur la représentation chiffrée !
On n'oublie pas les jeux où il faut dire le nom de la carte.

Les compétences numériques de fin de cycle 1

Connaître 8, c'est

1. PASSER de l'écriture chiffrée « 8 » à des représentations analogiques (doigts, constellations) et inversement
2. PASSER du mot oral « huit » à l'écriture chiffrée et inversement
3. PASSER du mot oral « huit » à des représentations analogiques et inversement
4. SITUER 8 par rapport aux autres nombres déjà connus
5. RÉCITER la file des nombres jusqu'à 8 ; à partir de n'importe quel nombre inférieur ou égal à 7
6. CONNAÎTRE son successeur et son prédécesseur
7. DÉNOMBRER des collections de 8 objets manipulés ou dessinés (évaluation comptine)
8. CONSTRUIRE ou RÉALISER une « collection » de cardinal 8 (évaluation comptine)
9. DÉCOMPOSER 8 à l'aide des entiers de 1 à 7.
10. DÉCOMPOSER des nombres plus grands que 8 à l'aide de 8.

Le nombre comme mesure d'une quantité : dénombrement

Au fait, ça veut dire quoi dénombrer ?

Le nombre comme mesure d'une quantité : dénombrement

Au fait, ça veut dire quoi dénombrer ?
Comment fait-on pour dénombrer ? Quel processus mental ?

Le nombre comme mesure d'une quantité : dénombrement

Au fait, ça veut dire quoi dénombrer ?
Comment fait-on pour dénombrer ? Quel processus mental ?

Dénombrer = Déterminer le nombre d'éléments d'une collection.

Comment on dénombre ?

Brissiaud p.22 (« Premier pas vers les maths »)

- Identifier la collection et créer les unités numériques.
- Énumérer les unités
- Totaliser la collection

Créer les unités

Baruk, catégoriser, mettre ensemble ce qui va ensemble

retour

Énumérer

Énumérer

Énumérer : c'est passer en revue une et une seule fois les éléments d'une collection.

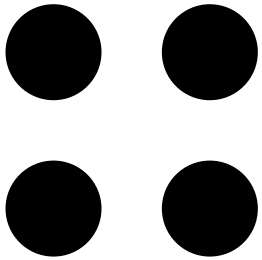
Complètement indépendant de la notion de nombres (Margolinas) : une compétence « spatiale ».
DVD : Apprentissages mathématiques à la maternelle.

Allumettes 1

Allumettes 2 Allumettes 3

Totaliser

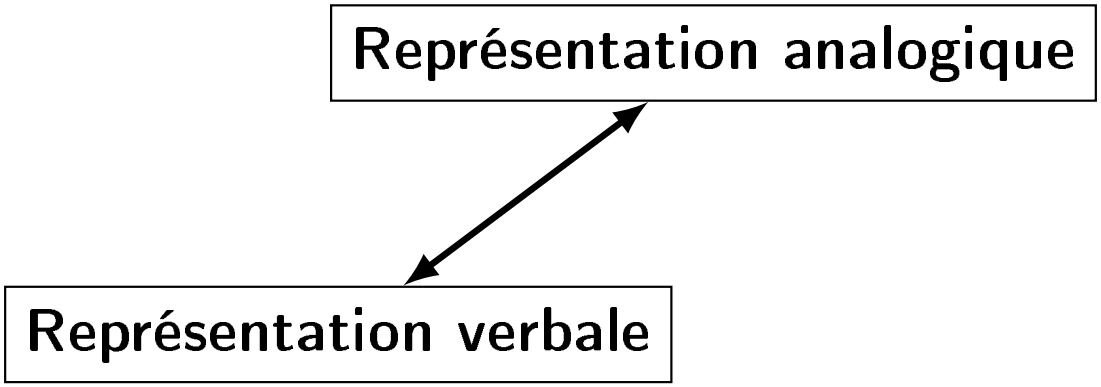
Combien de points noirs voyez-vous ?



on n'est pas obligé de faire du comptage-numérotage, compter de 1 en 1... décomposition, utilisation des doigts (cerveau), surcomptage

retour

Enjeux numéro 1 : la notion de collections témoins



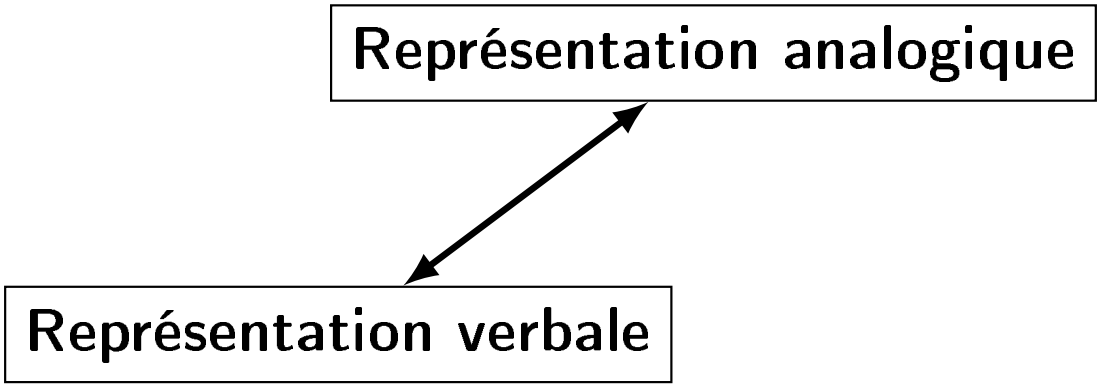
Inutile d'introduire l'écriture chiffrée (différentes écritures des 1,2,3 dans les civilisations)

Un petit jeu

Lucky Luke (on joue ! → décomposition-recomposition)

(trompe-éléphant, double sens de 2 : cardinal VS numéral,

Enjeux numéro 1 : la notion de collections témoins



Inutile d'introduire l'écriture chiffrée (différentes écritures des 1,2,3 dans les civilisations)

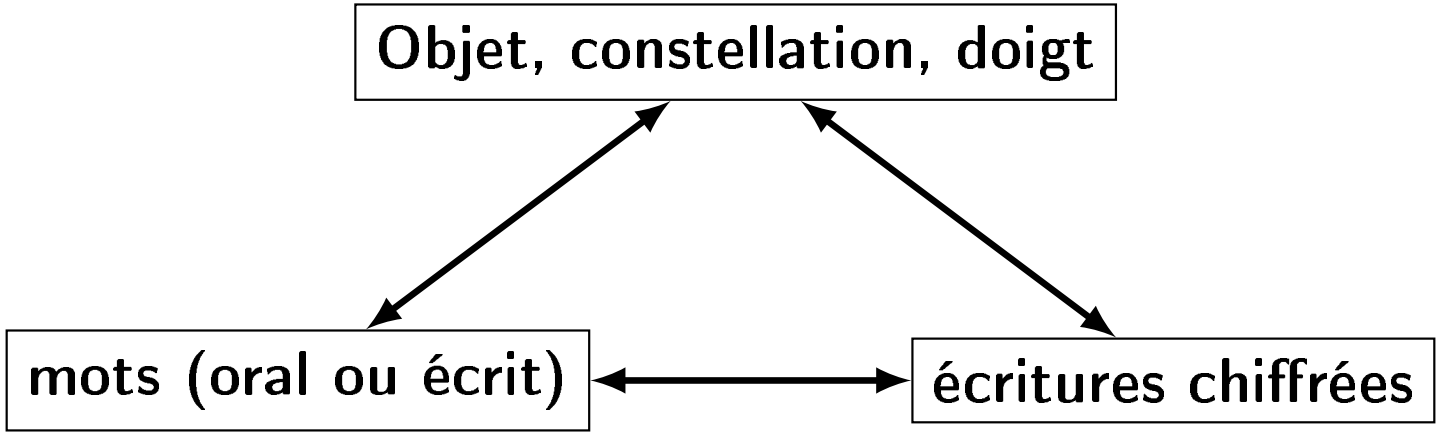
Un petit jeu

Lucky Luke (on joue ! → décomposition-recomposition)

(trompe-éléphant, double sens de 2 : cardinal VS numéral, un-un-un itération de l'unité, un VS un, singulier/pluriel (Brissiaud p.12)).

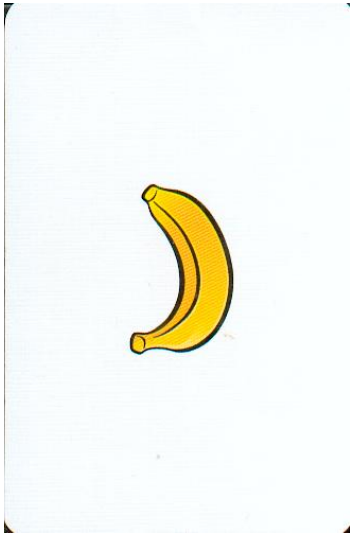
4 et 5

- On continue les décompositions, les constellations...
- L'écriture chiffrée devient nécessaire (ou presque) !

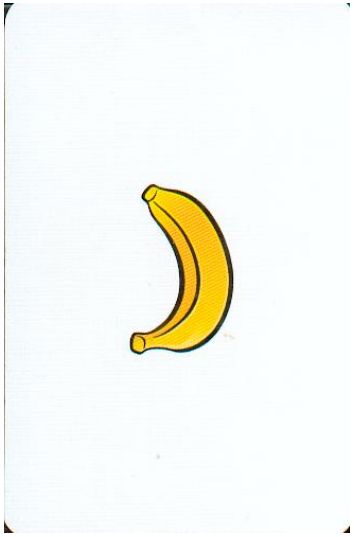


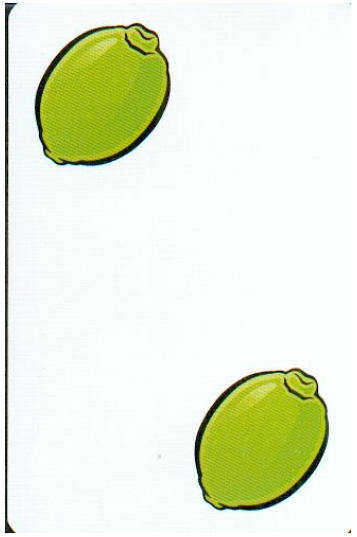
Halli-Galli

Halli-Galli

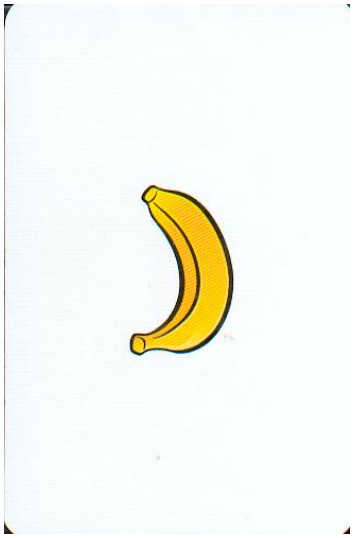


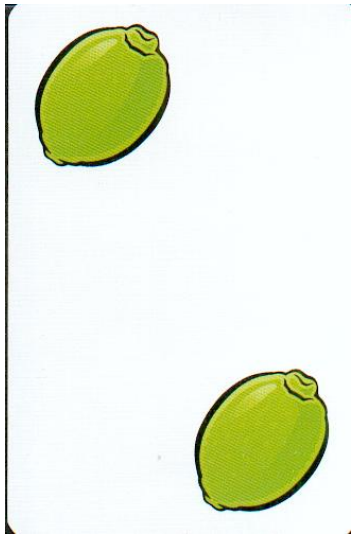
Halli-Galli

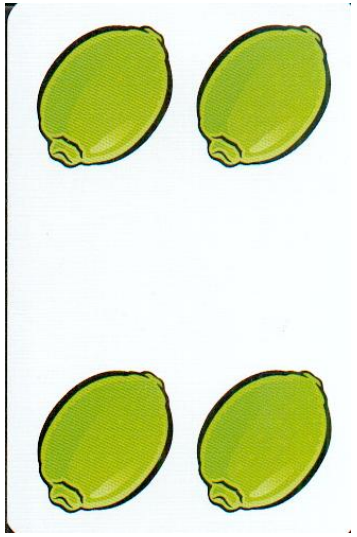




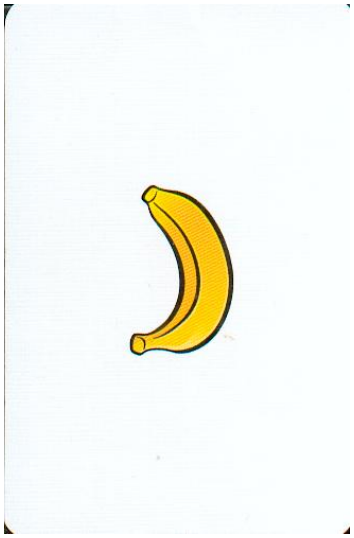
Halli-Galli

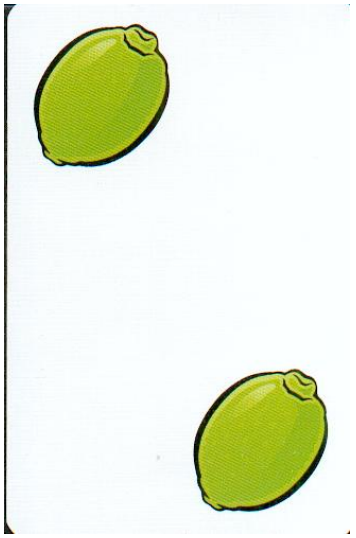


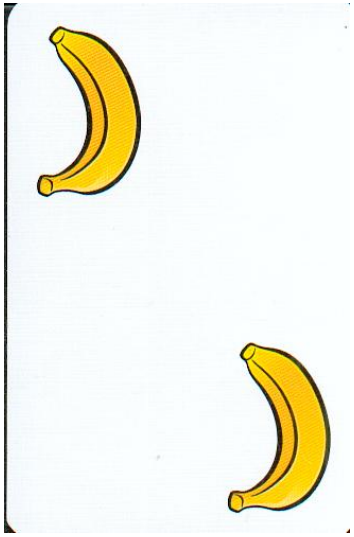


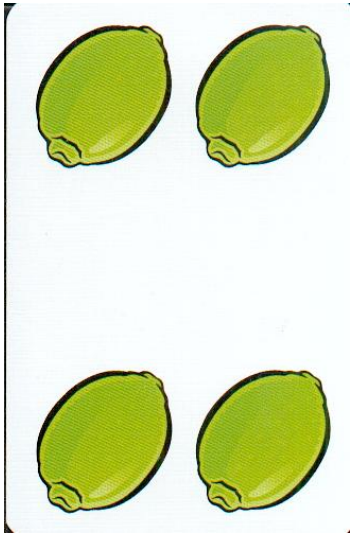


Halli-Galli

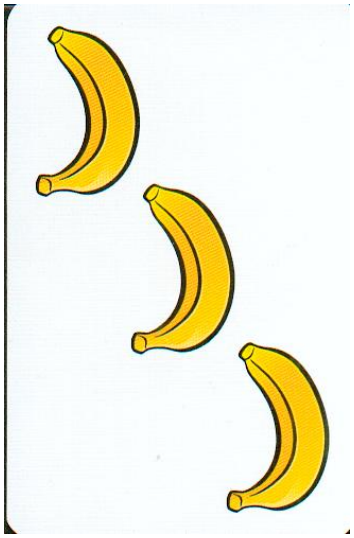


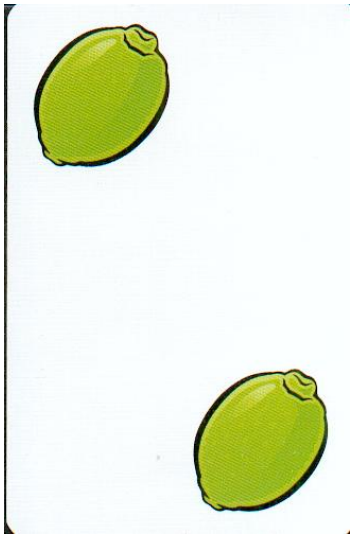


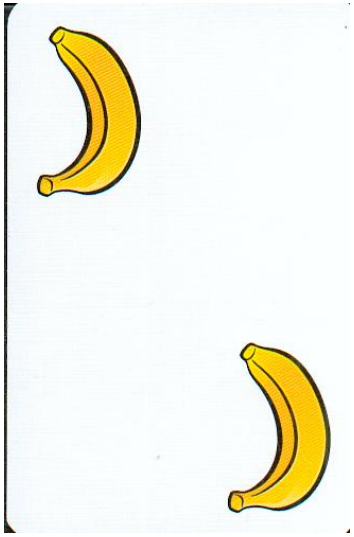


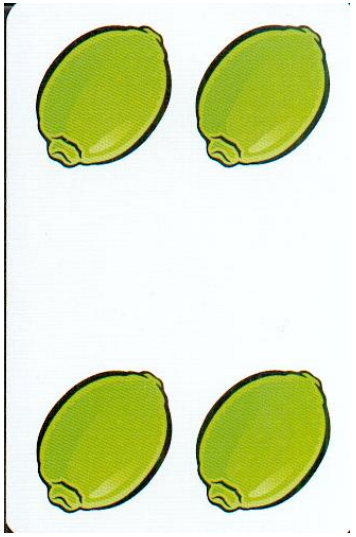


Halli-Galli

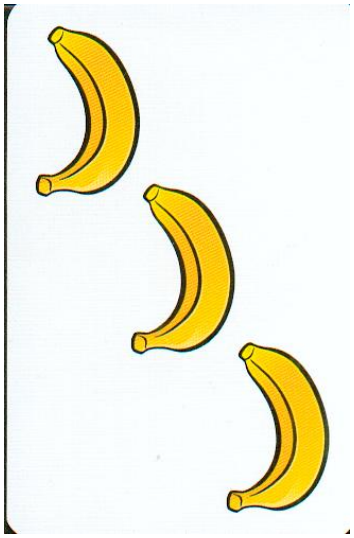


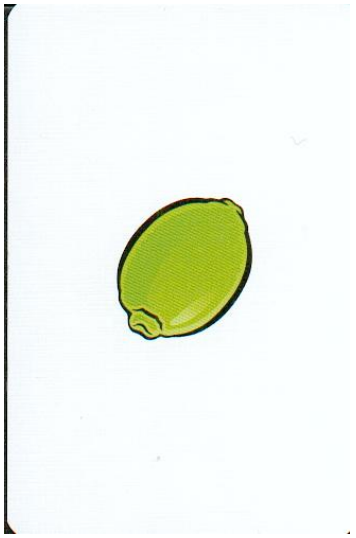


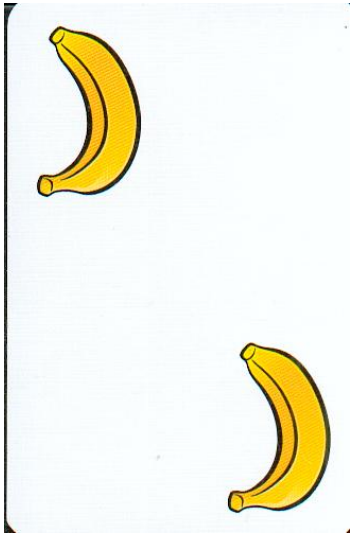


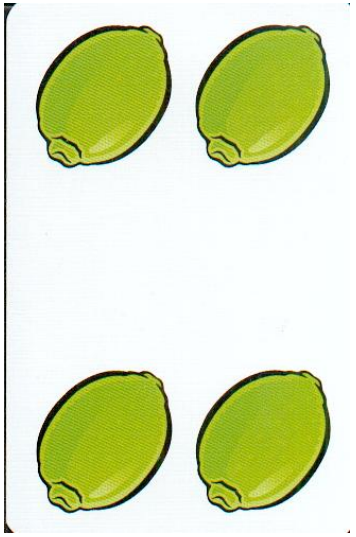


Halli-Galli

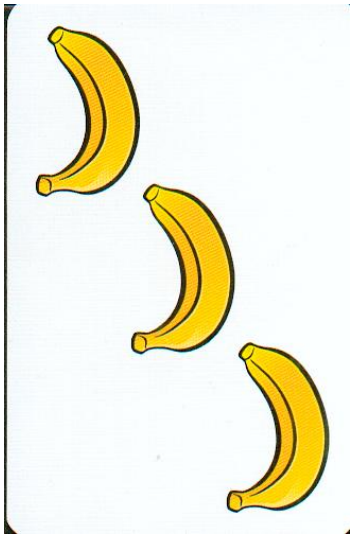


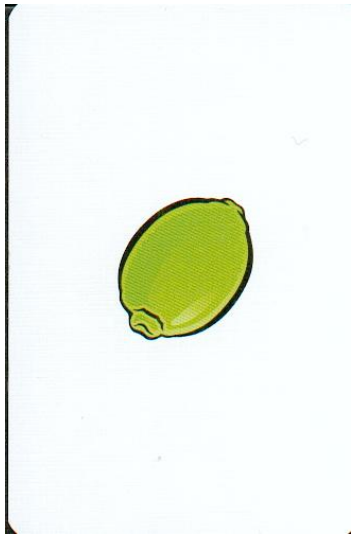


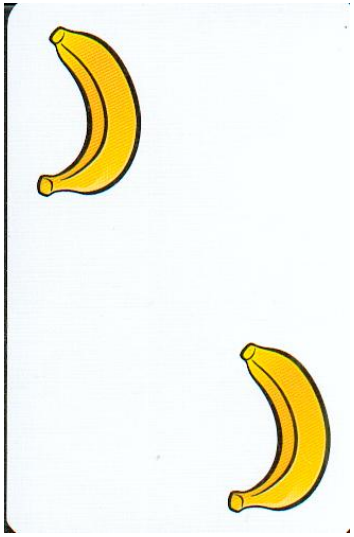


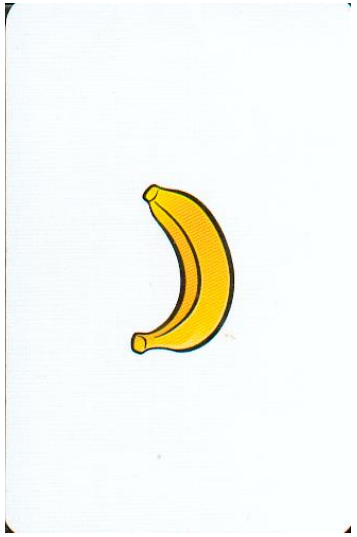


Halli-Galli

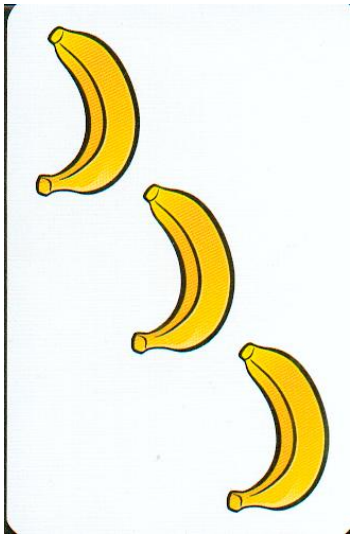


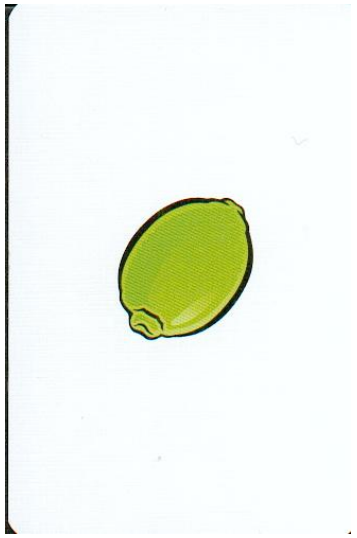


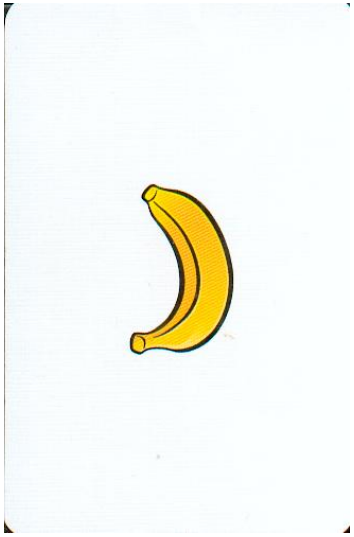


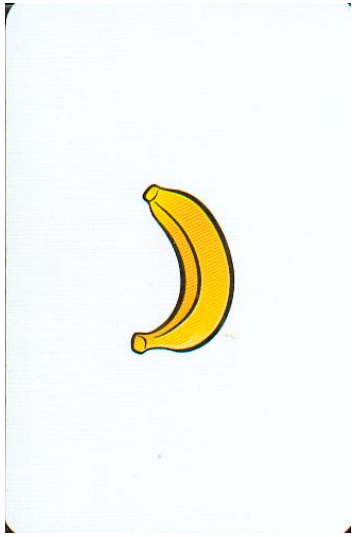


Halli-Galli









Résoudre des problèmes

À quoi peut servir le nombre ?
Biblio : Valentin, « Découvrir les maths » Situation PS,MS,GS

- À comparer (Jeu des boîtes : ERMEL GS p.64)
- À mémoriser (Le jeu des voyageurs : ERMEL GS p.86 – Le jeu des garages : DVD apprentissages mathématiques à la maternelle)
- À partager (Le jeu des porte-manteaux : ERMEL GS p.130)
- À anticiper (Le jeu du trésor : ERMEL GS p.140 et suivante (Greli-grelo, le gobelet))

Biblio : Le nombre à l'école maternelle (Claire Margolinas et Floriane Wozniak) Ed. De Boeck

Et à partir de 5 : dénombrer par comptage

Ce sera vu au second semestre avec Christine Maintier.
Les principes du dénombrement **par comptage** (R. Gelman, années 70) $\longrightarrow$ Pas avant la maîtrise de l'énumération ni de la comptine !

1. le principe de la suite stable (voir ci-dessous la connaissance de la comptine)
2. le principe d'indifférence de l'ordre : on peut compter dans n'importe quel ordre sans incidence dans le résultat
3. le principe cardinal : c'est le dernier mot-nombre qui permet de repérer le nombre d'éléments.
4. le principe de correspondance terme à terme (adéquation unique) : on associe un élément de la collection à un mot-nombre
5. le principe d'abstraction : on peut dénombrer tout et n'importe quoi. Toutes sortes d'éléments peuvent être rassemblés et comptés ensemble. On peut compter un ensemble d'objets hétérogènes.

La comptine numérique !

À quoi ça sert ? De façon exagérée :

La comptine numérique !

À quoi ça sert ? De façon exagérée : à rien avant la GS !

La comptine numérique !

À quoi ça sert ? De façon exagérée : à rien avant de savoir énumérer.

La comptine numérique !

À quoi ça sert ? De façon exagérée : à rien avant de savoir énumérer.
En tout cas, certainement pas à dénombrer.

La comptine numérique !

À quoi ça sert ? De façon exagérée : à rien avant de savoir énumérer.
En tout cas, certainement pas à dénombrer.
Étude de Fuson, Richards et Briars (1982). Autour de quatre ans, la chaîne numérique se décompose en trois parties :

La comptine numérique !

À quoi ça sert ? De façon exagérée : à rien avant de savoir énumérer.
En tout cas, certainement pas à dénombrer.
Étude de Fuson, Richards et Briars (1982). Autour de quatre ans, la chaîne numérique se décompose en trois parties :

1. la partie stable et conventionnelle : celle qu'il connaît comme les adultes
2. la partie stable et non-conventionnelle : à chaque récitation, ce sont toujours les mêmes mots qui apparaissent dans le même ordre.
3. la partie instable et non conventionnelle : une partie qui change à chaque récitation, pouvant inclure des lettres, répéter des nombres, etc.

Connaître la comptine numérique

Selon la même étude : 5 niveaux de connaissances

Connaître la comptine numérique

Selon la même étude : 5 niveaux de connaissances

- le chapelet : il n'y a pas de signification arithmétique, un tout indifférencié : undeuxtroisquatre ; pas de dénombrement.

Connaître la comptine numérique

Selon la même étude : 5 niveaux de connaissances

- le chapelet : il n'y a pas de signification arithmétique, un tout indifférencié : undeuxtroisquatre ; pas de dénombrement.
- la chaîne insécable : l'enfant ne récite que depuis le début. Si on lui demande ce qu'il y a après 5, il commence à compter depuis 1 jusqu'à 6. Mais il peut compter jusqu'à X. On remarque une analogie avec l'alphabet : pour trouver la lettre après « h », par exemple, l'enfant récite l'alphabet depuis le début et répond, une fois arrivé à « h ». L'enfant peut dénombrer une collection. Si l'on rajoute un objet, il recommence également à compter depuis le début pour la dénombrer.

Connaître la comptine numérique

- la chaîne sécable : l'enfant peut compter jusqu'à X, à partir de X, de X à Y. On voit apparaître le début du comptage à rebours (3, 2, 1, 0). Il est difficile mais présent. L'enfant commence à dénombrer spontanément des collections, avec plus de facilité. Tous les enfants de 6 ans atteignent ce niveau, notamment du fait de la scolarisation. La caractéristique de ce niveau est l'apparition de la flexibilité (compter à partir de X, plus besoin de recommencer dès le début).

Connaître la comptine numérique

- la chaîne sécable : l'enfant peut compter jusqu'à X, à partir de X, de X à Y. On voit apparaître le début du comptage à rebours (3, 2, 1, 0). Il est difficile mais présent. L'enfant commence à dénombrer spontanément des collections, avec plus de facilité. Tous les enfants de 6 ans atteignent ce niveau, notamment du fait de la scolarisation. La caractéristique de ce niveau est l'apparition de la flexibilité (compter à partir de X, plus besoin de recommencer dès le début).

- la chaîne terminale : entre 6 et 7 ans, le CP uniformise les connaissances. Les mots deviennent des unités numériques, les enfants ont beaucoup d'entraînement, de consolidation des acquis. Le comptage vers l'avant progresse, ainsi que le comptage à rebours. Les processus automatiques se mettent en place et se consolident.

Connaître la comptine numérique

- la chaîne bidirectionnelle : la récitation se fait dans les deux sens (par bonds) et se maîtrise avec l'avancement en âge. Cela entraîne l'amélioration des capacités de soustraction et d'addition.

Entraîner la comptine

- Les comptines (Grenoble, Dijon, Créteil, Strasbourg)
- Plouf dans l'eau : TFM
- Le jeu du furet

C2 : La numération

Trois enjeux majeurs

- L'aspect algorithmique
- Les groupements (et surtout groupement de groupements !)
- Les échanges

C2 : La numération

Trois enjeux majeurs

- L'aspect algorithmique
- Les groupements (et surtout groupement de groupements !)
- Les échanges

Les Shadoks

C2 : La numération

Trois enjeux majeurs

- L'aspect algorithmique
- Les groupements (et surtout groupement de groupements !)
- Les échanges

Les Shadoks

Poubelle, Grande poubelle, Super poubelle

Numération de position

Pour vous, que signifie le 5 dans 1253 ?

Numération de position

Pour vous, que signifie le 5 dans 1253 ?

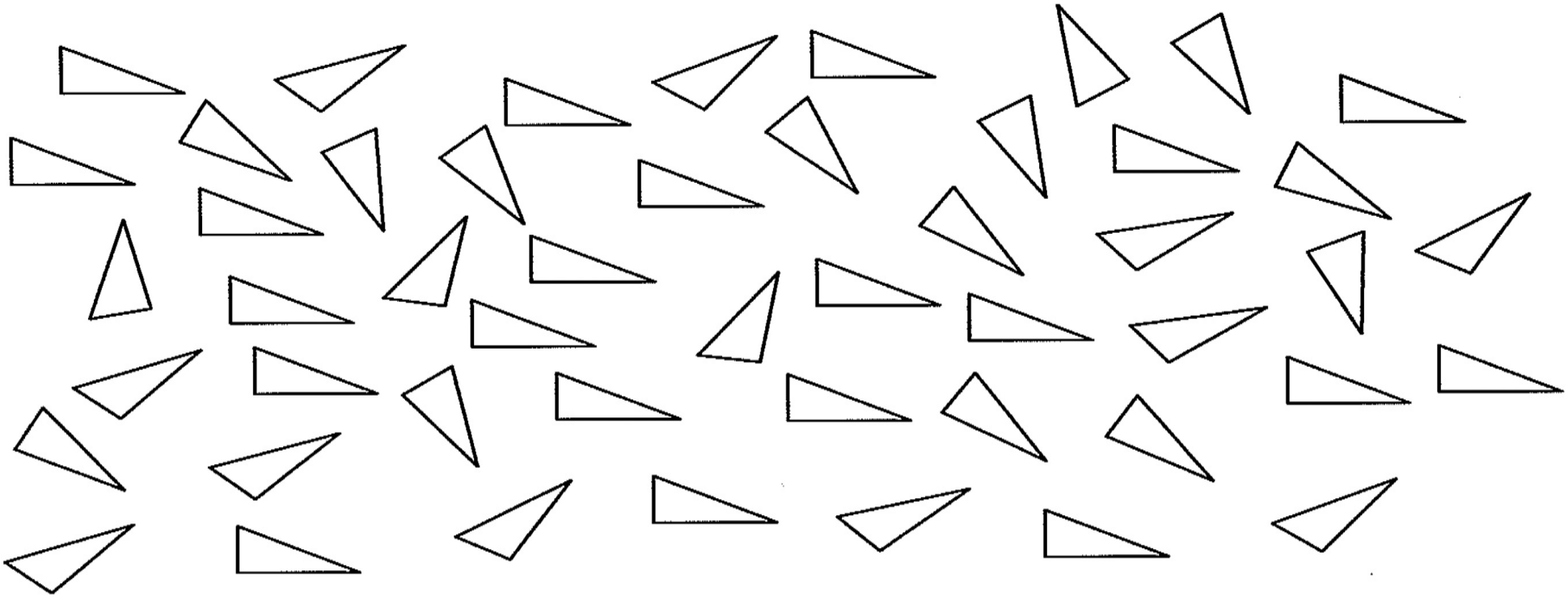
Rien tout seul !

Les activités phares : Groupement

- Groupement (récursivité) : le Fourmillion (cf. Ermel CP p.333 Ermel CE1 p.329 DVD Enseigner les mathématiques au cycle 2 : deux situations d'apprentissage en images : combien de bûchettes ? Le petit moulin
  Ça fourmillionnne - Exploitation d'une séquence publiée dans ERMEL ; C. Destouesse ; article de Grand N n°59 ; p.11-17 (1996).)
- Groupement : les commandes (Ermel CP p.339) puis les craies et les stock (Ermel CE2 p.288).

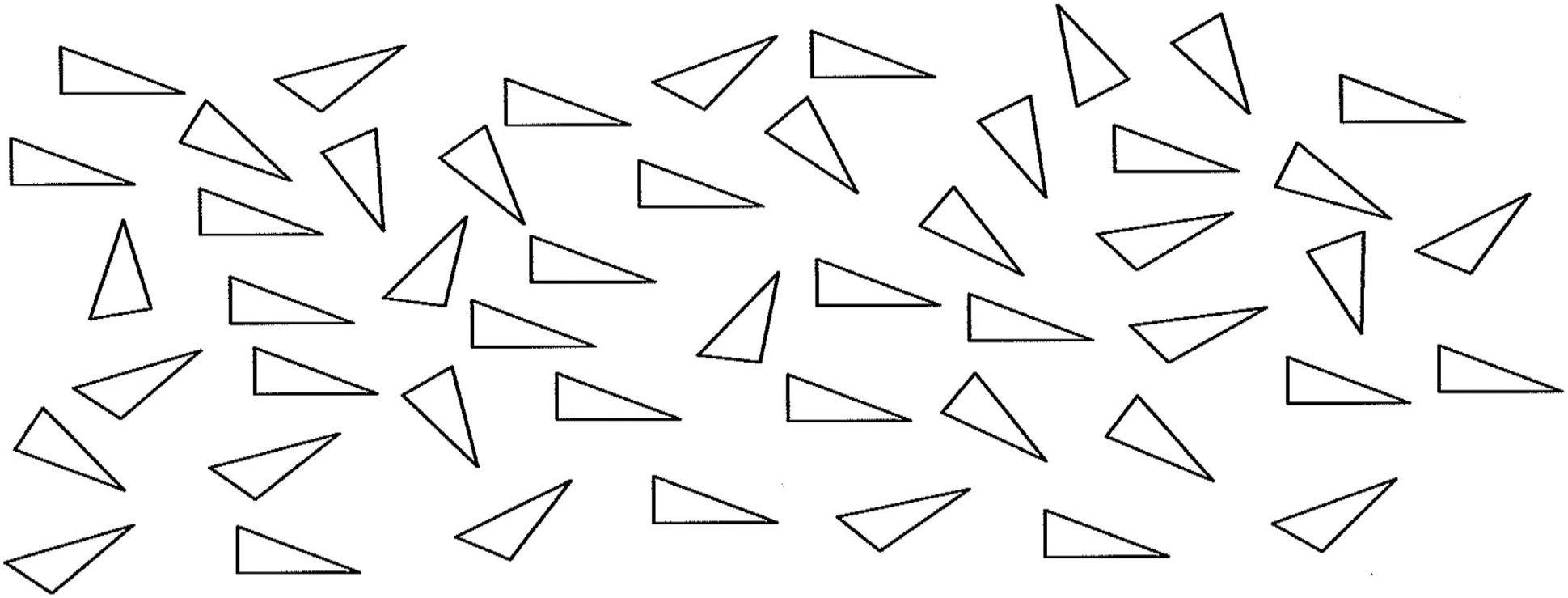
Grouper n'est pas naturel

Combien de triangles ?



Grouper n'est pas naturel

Combien de triangles ?



Seulement 63% de réussite et le recours au paquet n'est pas du tout systématique.

Un jeu

Bednarz et Janvier (Grand $\mathbb{N}$ n°33 1984)

Un jeu

Bednarz et Janvier (Grand $\mathbb{N}$ n°33 1984)

J'ai choisi un nombre entre **402** et **513**.

Vous devez trouver lequel. Chaque groupe à son tour fera une proposition en utilisant les étiquettes. Je réponds uniquement par plus ou moins.

Un jeu

Bednarz et Janvier (Grand $\mathbb{N}$ n°33 1984)

J'ai choisi un nombre entre **402** et **513**.

Vous devez trouver lequel. Chaque groupe à son tour fera une proposition en utilisant les étiquettes. Je réponds uniquement par plus ou moins.

Les groupes qui n'ont pas trouvé : trouvez une autre solution.

Un jeu

Bednarz et Janvier (Grand $\mathbb{N}$ n°33 1984)

J'ai choisi un nombre entre **402** et **513**.

Vous devez trouver lequel. Chaque groupe à son tour fera une proposition en utilisant les étiquettes. Je réponds uniquement par plus ou moins.

Les groupes qui n'ont pas trouvé : trouvez une autre solution.
Pour tout le monde : quelles difficultés pour les élèves ?

Les activités phares : Échange

- Les maisons (Ermel CP p.319)
- Le jeu du banquier (Ermel CP p.321) : jouer à 3 contre 1 (pour qu'il y ait beaucoup d'échange et puis ensuite à 5 et 10 contre 1).
- Le caissier (Ermel CE1 p.322 et 351)

De nouvelles compétences à travailler

- REPRÉSENTER le nombre 49 à l'aide de toutes sortes de matériels de numération (bûchettes – élastiques, cubes emboîtables, bouliers, boîtes à dix, jetons, cartes, compteurs, abaques, ...)
- REPRÉSENTER 49 euros ou 49 centimes avec de la monnaie
- ASSOCIER 49 à sa décomposition canonique
- OPÉRER avec 49 : c'est-à-dire investir le territoire du CALCUL avec ce nombre et les autres
- S'INTÉRESSER à 49 comme porteur de propriétés intrinsèques : est-ce un double, de quel(s) autre(s) nombre(s) « sympathique(s) » est-il proche, (est-il dans une table de multiplication « sympathique » ?), comment le « retrouver » à l'aide d'autres nombres toujours aussi « sympathiques » ou moins, ...

C3 : Les nouveaux nombres

1. Fraction (écritures multiples, c'est tarte les tartes)
2. Fraction décimale
3. Nombre décimal

Une activité d'introduction aux fractions

ERMEL CM1 p.404

Des renoncements si difficiles

- Pas de suivant ou de précédent dans les décimaux !
- On peut intercaler sans fin
- Multiplier par 10, c'est ajouter un 0 (place de la virgule)
- Multiplier ça donne un résultat plus grand et diviser un résultat plus petit

Des erreurs courantes

- $2,3 \times 4,9 = 8,27$ ou $17,3 \times 21,8 = 38,11$
- $3,2 < 3,135$
- Il n'y a pas de nombre entre $12,34$ et $12,35$
- $41,45 \neq 41,450$

Quelques propositions

- Donner 10 nombres entre $12,3$ et $12,4$.
- Comparer $2/10$ et $0,17$; $2 + 34/100$ et $2,034$; $3 + 4/10$ et $4 - 3/10$; $5 + 37/100$ et $54/10$.
- Insérer dans $47,12$ un chiffre (le 3 par exemple). Déterminer tous les nombres obtenus et les ranger par ordre croissant. Idem avec 0.
- Rechercher deux nombres décimaux distants de 8 millièmes et n'ayant pas la même partie entière.
- En remplaçant 4 chiffres dans cette égalités par des 0, rendez-la vraie : $7,33 + 6,72 + 6,68 = 21,12$.
- Insérer des virgules aux bons endroits pour obtenir une égalité vraie $605 + 65 + 2345 = 945$.

C4 : Vers l'algèbre

- Nombre relatif (le nombre n'est plus une quantité ou une grandeur)
- π, racine carrée (un nombre ne s'écrit pas forcément avec une suite finie de chiffres)
- le passage du nombre à la lettre