MEEFA M2 TD 4

UE 34

Nombres et numération

25 octobre 2011

Merci

Je remercie grandement Assia Nechache de l'IUFM CVL site de Châteauroux pour ces-ses transparents.

Des maths et du chocolat aux amandes

Pour les non-matheux : on choisit quatre entiers naturels, combien de résultats peut-on obtenir en additionnant une partie d'entre eux ? Est-ce que ce nombre dépend des entiers choisis ? Que se passe-t-il avec cinq entiers, etc. ?

Pour les matheux : est-il raisonnable de parier avec moi qu'il y a deux personnes nées le même jour parmi les trois groupes de M2 ?

Qu'est-ce qu'un nombre ?

C'est un objet mathématiques sans réalité.

Il est manipulé à travers ses représentations.

Représentation d'un nombre

1. La représentation figurée : doigt, cailloux, bâtonnets, etc.
2. La représentation symbolique ou numérique : écriture et lecture des nombres

Représentation d'un nombre

1. La représentation figurée : doigt, cailloux, bâtonnets, etc.
2. La représentation symbolique ou numérique : écriture et lecture des nombres $\rightarrow$ numération

Représentation d'un nombre

1. La représentation figurée : doigt, cailloux, bâtonnets, etc.
2. La représentation symbolique ou numérique : écriture et lecture des nombres $\rightarrow$ numération

Attention chiffre $\neq$ nombre

Représentation d'un nombre

1. La représentation figurée : doigt, cailloux, bâtonnets, etc.
2. La représentation symbolique ou numérique : écriture et lecture des nombres $\rightarrow$ numération

Attention chiffre $\neq$ nombre de façon similaire à lettre $\neq$ mot

Représentation d'un nombre

1. La représentation figurée : doigt, cailloux, bâtonnets, etc.
2. La représentation symbolique ou numérique : écriture et lecture des nombres $\rightarrow$ numération

Attention chiffre $\neq$ nombre de façon similaire à lettre $\neq$ mot

nombre à un chiffre $\leftrightarrow$ mot à une lettre

À quoi sert un nombre

1. Désigner des quantités
2. Mémoriser des quantités
3. Comparer des quantités
4. Calculer

Contextes

1. Aspect ordinal : le 30 septembre $\rightarrow$ ranger

Contextes

1. Aspect ordinal : le 30 septembre $\rightarrow$ ranger
2. Aspect cardinal : il y a 30 jours en septembre $\rightarrow$ classer

Contextes

1. Aspect ordinal : le 30 septembre $\rightarrow$ ranger
2. Aspect cardinal : il y a 30 jours en septembre $\rightarrow$ classer
3. Aspect nominal : repérer un élément dans un ensemble par son nom-numéro (numéro de téléphone)

Types de numération

1. numération orale
2. numération écrite en chiffre
3. numération écrite en lettre

Système de numération écrite

1. numération additive

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

2. numération de position

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

2. numération de position : la notre (base 10), la maya (base 20)

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

2. numération de position : la notre (base 10), la maya (base 20)
   un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

2. numération de position : la notre (base 10), la maya (base 20)
   un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture
   Intérêt : peu de symboles nécessaires pour représenter même des grands nombres

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

2. numération de position : la notre (base 10), la maya (base 20)
   un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture
   Intérêt : peu de symboles nécessaires pour représenter même des grands nombres

3. numération mixte

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

2. numération de position : la notre (base 10), la maya (base 20)
   un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture
   Intérêt : peu de symboles nécessaires pour représenter même des grands nombres

3. numération mixte : sino-japonaise (base 10), mésopotamienne (base 60 et 10)

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

2. numération de position : la notre (base 10), la maya (base 20)
   un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture
   Intérêt : peu de symboles nécessaires pour représenter même des grands nombres

3. numération mixte : sino-japonaise (base 10), mésopotamienne (base 60 et 10)

En cycle 3, on peut-doit aborder ces autres systèmes de numération

Système de numération écrite

1. numération additive : la numération égyptienne (base 10)
   1 symbole par ordre de grandeur
   Inconvénient : écriture longue, pas de zéros

2. numération de position : la notre (base 10), la maya (base 20)
   un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture
   Intérêt : peu de symboles nécessaires pour représenter même des grands nombres

3. numération mixte : sino-japonaise (base 10), mésopotamienne (base 60 et 10)

En cycle 3, on peut-doit aborder ces autres systèmes de numération

Référence : *Histoire universelles des chiffres*, Georges Ifrah

Numération décimale de position

3 principes

Numération décimale de position

3 principes

1. Le principe de la valeur positionnelle : un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture

Numération décimale de position

3 principes

1. Le principe de la valeur positionnelle : un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture

2. Le groupement d'unités (ou base) : « mcdu »

Numération décimale de position

3 principes

1. Le principe de la valeur positionnelle : un symbole n'a pas toujours la même valeur suivant sa place dans l'écriture

2. Le groupement d'unités (ou base) : « mcdu »

3. L'échange 10 contre 1 : 10u=1d,... $\rightarrow$ « retenue »

L'enfant doit être capable de lire 2643 comme étant : 2 unités de mille, 6 centaines, 4 dizaines et 3 unités ou 264 dizaines et 3 unités, etc.

Numération orale

La numération orale **française** contient les dix mots-nombres de base (les 10 chiffres) mais aussi d'autres mots exceptionnels (onze,..., seize, vingt), des mots pour indiquer les ordres de grandeurs (dix, cent, mille, million,...)

Numération orale

La numération orale **française** contient les dix mots-nombres de base (les 10 chiffres) mais aussi d'autres mots exceptionnels (onze,..., seize, vingt), des mots pour indiquer les ordres de grandeurs (dix, cent, mille, million,...)

C'est une numération difficile à appréhender : mélange les bases 10, 20 (quatre-vingts, quatre-vingt-dix), 60 (soixante-dix), 1000.

Dans la suite des nombres, la régularité apparaît plus tard que pour la numération écrite (dix-sept $\leftrightarrow$ onze, mots spéciaux : vingt, tr**e**nte...).

Numération orale

La numération orale **française** contient les dix mots-nombres de base (les 10 chiffres) mais aussi d'autres mots exceptionnels (onze,..., seize, vingt), des mots pour indiquer les ordres de grandeurs (dix, cent, mille, million,...)

C'est une numération difficile à appréhender : mélange les bases 10, 20 (quatre-vingts, quatre-vingt-dix), 60 (soixante-dix), 1000.

Dans la suite des nombres, la régularité apparaît plus tard que pour la numération écrite (dix-sept $\leftrightarrow$ onze, mots spéciaux : vingt, tr**e**nte...).

Un exemple de progression au CP

- période 1 et 2 : de 1 à 10 de long en large (carte Descaves)
- période 3 : de 30 à 69 (régularité sonore : S.Baruk)
- première moitié période 4 : de 11 à 29 (domaine fréquenté)
- jusqu'à la fin de l'année : de 70 à 99

oral vs écrit

Les points communs

- Utilisation de la base 10
- Utilisation de l'addition et de la multiplication

oral vs écrit

Les points communs

- Utilisation de la base 10
- Utilisation de l'addition et de la multiplication

Les différences

- Utilisation de plusieurs bases à l'oral
- Pas de zéros à l'oral
- La comparaison des nombres n'est pas basée sur la longueur

Enseigner la numération

Les groupements

1. Pour dénombrer une grande quantité, il est recommandé de regrouper les objets pour éviter les erreurs (dès le CP ou CE1)
2. On obtient une collection organisée permettant de réaliser des opérations de calcul mental

⚠ Attention : il faut faire une distinction entre l'apprentissage de la numération écrite et celui de la numération orale, en effet un enfant peut être capable de d'écrire les nombres au-delà de cinquante, alors qu'il n'est pas capable de les lire.

dialectique outil/objet

On doit prendre en compte deux points de vue pour enseigner la numération :

1. La numération en tant qu'objet d'étude : son fonctionnement, les algorithmes de calcul, etc.
2. La numération en tant qu'outil : où et quand on en a besoin, où et quand c'est utile, pratique, etc.

Que veut dire savoir compter ?

Énumérer, compter, dénombrer : trois compétences différentes à acquérir.
Énumérer : énoncer une et une seule fois les éléments d'une série ($\rightarrow$ savoir distinguer ceux qu'on a déjà examiné et ceux qu'on n'a pas encore examiné).
CD : *Apprentissages mathématiques en maternelle*, Joël Briand, Martine Loubet, Marie-Hélène Salin, édition : Hatier Pédagogie

Compter : connaître la comptine numérique

Étude de Fuson, Richards et Briars (1982). Autour de quatre ans, la chaîne numérique se décompose en trois parties :

Compter : connaître la comptine numérique

Étude de Fuson, Richards et Briars (1982). Autour de quatre ans, la chaîne numérique se décompose en trois parties :

1. la partie stable et conventionnelle : celle qu'il connaît comme les adultes
2. la partie stable et non-conventionnelle : à chaque récitation, ce sont toujours les mêmes mots qui apparaissent dans le même ordre.
3. la partie instable et non conventionnelle : une partie qui change à chaque récitation, pouvant inclure des lettres, répéter des nombres, etc.

Compter : connaître la comptine numérique

Étude de Fuson, Richards et Briars (1982). Autour de quatre ans, la chaîne numérique se décompose en trois parties :

1. la partie stable et conventionnelle : celle qu'il connaît comme les adultes
2. la partie stable et non-conventionnelle : à chaque récitation, ce sont toujours les mêmes mots qui apparaissent dans le même ordre.
3. la partie instable et non conventionnelle : une partie qui change à chaque récitation, pouvant inclure des lettres, répéter des nombres, etc.

Remarque La partie instable et non conventionnelle est parfois absente, notamment chez les enfants qui apprennent à compter sur les doigts. Cela peut être une difficulté pour l'enfant pour son apprentissage futur.

Connaître la comptine numérique

Selon la même étude : 5 niveaux de connaissances

Connaître la comptine numérique

Selon la même étude : 5 niveaux de connaissances

- le chapelet : il n'y a pas de signification arithmétique, un tout indifférencié : undeuxtroisquatre ; pas de dénombrement.

Connaître la comptine numérique

Selon la même étude : 5 niveaux de connaissances

- le chapelet : il n'y a pas de signification arithmétique, un tout indifférencié : undeuxtroisquatre ; pas de dénombrement.
- la chaîne insécable : l'enfant ne récite que depuis le début. Si on lui demande ce qu'il y a après 5, il commence à compter depuis 1 jusqu'à 6. Mais il peut compter jusqu'à X. On remarque une analogie avec l'alphabet : pour trouver la lettre après « h », par exemple, l'enfant récite l'alphabet depuis le début et répond, une fois arrivé à « h ». L'enfant peut dénombrer une collection. Si l'on rajoute un objet, il recommence également à compter depuis le début pour la dénombrer.

Connaître la comptine numérique

- la chaîne sécable : l'enfant peut compter jusqu'à X, à partir de X, de X à Y. On voit apparaître le début du comptage à rebours (3, 2, 1, 0). Il est difficile mais présent. L'enfant commence à dénombrer spontanément des collections, avec plus de facilité. Tous les enfants de 6 ans atteignent ce niveau, notamment du fait de la scolarisation. La caractéristique de ce niveau est l'apparition de la flexibilité (compter à partir de X, plus besoin de recommencer dès le début).

Connaître la comptine numérique

- la chaîne sécable : l'enfant peut compter jusqu'à X, à partir de X, de X à Y. On voit apparaître le début du comptage à rebours (3, 2, 1, 0). Il est difficile mais présent. L'enfant commence à dénombrer spontanément des collections, avec plus de facilité. Tous les enfants de 6 ans atteignent ce niveau, notamment du fait de la scolarisation. La caractéristique de ce niveau est l'apparition de la flexibilité (compter à partir de X, plus besoin de recommencer dès le début).

- la chaîne terminale : entre 6 et 7 ans, le CP uniformise les connaissances. Les mots deviennent des unités numériques, les enfants ont beaucoup d'entraînement, de consolidation des acquis. Le comptage vers l'avant progresse, ainsi que le comptage à rebours. Les processus automatiques se mettent en place et se consolident.

Connaître la comptine numérique

- la chaîne bidirectionnelle : la récitation se fait dans les deux sens (par bonds) et se maîtrise avec l'avancement en âge. Cela entraîne l'amélioration des capacités de soustraction et d'addition.

Dénombrer

Dénombrer : déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble (notion cardinale) ; le dénombrement est (souvent) le résultat du comptage.

Les principes du dénombrement (R. Gelman, années 70)

1. le principe de la suite stable
2. le principe d'indifférence de l'ordre : on peut compter dans n'importe quel ordre sans incidence dans le résultat
3. le principe cardinal : c'est le dernier mot-nombre qui permet de repérer le nombre d'éléments.
4. le principe de correspondance terme à terme (adéquation unique) : on associe un élément de la collection à un mot-nombre
5. le principe d'abstraction : on peut dénombrer tout et n'importe quoi. Toutes sortes d'éléments peuvent être rassemblés et comptés ensemble. On peut compter un ensemble d'objets hétérogènes

Dénombrer sans compter

- Le « subitizing » $\rightarrow$ perception immédiate
- Les quantités repères : constellation des dés, doigts, etc.

Un repère

	3 ans	4 ans	5 ans
7 objets	19%	47%	80%
11 objets	5%	37%	47%

À la maternelle

Le BO 3 juin 2008

1. Les enfants y découvrent et comprennent les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité et moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets.

2. Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons, appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections.

3. Les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer.

À la maternelle

Le BO 3 juin 2008 : le bilan

1. reconnaître, nommer, décrire, comparer, ranger et classer des matières, des objets selon leurs qualités et leurs usages
2. comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités
3. mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30
4. dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus
5. associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée

PS

- l'enfant commence à élaborer l'idée de quantité.
- comparaison de quantités : vocabulaire utilisé (un peu, beaucoup). Pratique du dénombrement par correspondance terme à terme.
- les premiers éléments de la comptine numérique au moins jusqu'à 5 ou 6.

MS

- Pour les comparaisons de deux collections (éventuellement éloignées l'une de l'autre) ou la réalisation d'une même collection, l'élève peut utiliser différentes procédures : estimation, collection intermédiaire (doigts, dessin), partition de la collection en sous-collections facilement dénombrables, expression de la quantité par un « mot-nombre ». Vocabulaire utilisé : plus que, moins que, ou autant que.

- Comptine numérique jusqu'à 12-15.

GS

- Il s'agit de consolider des compétences utiles au travail plus organisé qui sera conduit au CP.
- Comptine orale jusqu'à 30 (mémorisation et maîtrise). Le nombre est aussi un outil de dénombrement (aspect cardinal et ordinal du nombre). Première mise en relation des mots-nombres avec leur image chiffrée.
- Enfin, un premier pas est possible en direction de ce qui deviendra le calcul au cycle 2. Le travail est uniquement centré sur la résolution de problèmes sans faire appel, à ce moment de la scolarité, au calcul sur les nombres.
- Pour l'ensemble des notions évoquées ici, le travail sur des situations réelles est essentiel et préférable aux activités sur fiches.

Les arbres

L'élève doit dénombrer la collection d'arbres

Il numérote les arbres dans le sens de l'écriture, en suivant des lignes et s'arrête à 35

Problème de balayage de la collection : il pense que l'organisation spatiale influe sur le comptage

L'enfant échoue alors qu'il dispose de la suite numérique et d'un procédé d'exploration relativement bien organisé (lignes conçues).

Il s'agit donc d'une absence de connaissance qui se manifeste par une absence de synchronisation effective entre une connaissance numérique et une organisation conjointe de la collection qui empêche l'inventaire de la collection

Pour la prochaine fois

Dans les programmes 2008, relever tout ce qui concerne la numération.

Ça veut dire quoi « calculer » ?