Vincent Beck

Action de groupes

L'idée centrale de cette note est de mettre en évidence le fait fondamental suivant **une action d'un groupe** G **sur un ensemble** X**, « c'est » un morphisme de groupes de** G **dans** $\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$. Cette note est divisée en trois parties. Dans la première partie, on définit de façon usuelle la notion d'action de groupe. La deuxième partie et notamment la remarque 4 contient le cœur du propos de cette note. C'est dans cette partie qu'on donne un sens précis au « c'est ». Enfin, dans une dernière partie, on illustre l'intérêt de la vision « morphisme de groupes » de la notion d'action de groupe : elle permet notamment de construire rapidement à partir d'une action de groupe de nouvelle action de groupes (dans l'exemple 8, on montre comment obtenir l'action d'un sous-groupe ou d'un quotient). La vision « morphisme de groupes » est aussi à la base d'une méthode extrêmement féconde pour obtenir un isomorphisme entre un groupe G et le groupe $\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$ des bijections d'un ensemble X : on définit une action de G sur X et on montre que le morphisme de groupes associé de G dans $\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$ est bijectif (voir la remarque 11).

Le point de vue classique.

Dans cette partie, on donne la définition usuelle d'action de groupe qu'on illustre par l'exemple de l'action par translation à gauche.

Définition 1 — Action de groupe. Soient X un ensemble et G un groupe (dont on note 1_{G} l'élément neutre). Une *action de* G *sur* X ou *opération de* G *sur* X est une application

$$m\colon \begin{cases} \mathrm{G}\times\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \\ (g,x) \longmapsto m(g,x) \end{cases}$$

vérifiant les deux axiomes suivants :

(i) $\forall\, x\in\mathrm{X}, \qquad m(1_{\mathrm{G}},x)=x\,;$

(ii) $\forall\, g,g'\in\mathrm{G}, \quad \forall\, x\in\mathrm{X}, \qquad m(g',m(g,x))=m(g'g,x).$

Dans ces conditions, on dit que G *agit (ou opère) sur* X *via (ou par, ou grâce à)* m. On dit aussi que m *munit* X *d'une structure de* G*-ensemble.*

Remarque 2 — Notation. La notation $m(g,x)$ est très lourde et rend particulièrement illisible l'axiome (ii). Pour la simplifier, on note $g\cdot x$ ou encore gx plutôt que $m(g,x)$. L'axiome (ii) prend alors la forme d'un axiome d'associativité (on change de place les parenthèses ; voir aussi l'exemple 3) : l'axiome (ii) s'écrit

$$\forall\, g,g'\in\mathrm{G}, \quad \forall\, x\in\mathrm{X}, \qquad g(g'x)=(gg')x\,.$$

Lorsqu'il y a plusieurs actions du même groupe G sur le même ensemble X ou qu'on veut bien mettre en évidence l'application m, on peut utiliser la notation $g\cdot_m x$ pour $m(g,x)$. ■

Exemple 3 — Action par translation à gauche. Soit G un groupe. Le groupe G agit sur lui-même par *translation à gauche* : l'application

$$m\colon \begin{cases} \mathrm{G}\times\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \\ (g,h) \longmapsto gh \end{cases}$$

est une action de G sur lui-même (ici gh désigne le produit de g par h dans G).

Montrons que m vérifie les axiomes (i) et (ii). L'axiome (i) est vérifié parce que 1_{G} est l'élément neutre de G et l'axiome (ii) résulte de l'associativité de la multiplication dans G. ■

Le point de vue « morphisme de groupes ».

Cette partie est le cœur de notre propos. On montre dans la remarque 4 qu'on peut transformer la définition 1 pour obtenir une définition d'action de groupe en terme de morphisme de groupes (la définition 5). Cette dernière définition ayant l'avantage d'être plus simple à manipuler car on sait manipuler les morphismes de groupes, par exemple, les restreindre ou les passer au quotient (voir l'exemple 8). On termine cette partie en donnant l'exemple de l'action triviale d'un groupe sur un ensemble et l'action naturelle du groupe des bijections de X sur X.

Remarque 4 — Action de groupe : une deuxième vision. On suppose que le groupe G agit sur l'ensemble X via m. Pour $g \in \mathrm{G}$ fixé, on considère l'application

$$\alpha_g \colon \begin{cases} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \\ x \longmapsto gx \end{cases}$$

qui est la composée des applications $x \mapsto (g, x)$ et m.

Dans ce langage, l'axiome (i) est synonyme de $\alpha_{1_\mathrm{G}} = \mathrm{id}_\mathrm{X}$ et l'axiome (ii) est synonyme de $\alpha_{g'} \circ \alpha_g = \alpha_{g'g}$ pour tous $g, g' \in \mathrm{G}$. On en déduit alors que α_g est une bijection de X dans lui-même d'inverse $\alpha_{g^{-1}}$ puisque

$$\alpha_g \circ \alpha_{g^{-1}} = \alpha_{gg^{-1}} = \alpha_{1_\mathrm{G}} = \mathrm{id}_\mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_g = \alpha_{g^{-1}g} = \alpha_{1_\mathrm{G}} = \mathrm{id}_\mathrm{X}\,.$$

Finalement, on a construit une application α

$$\alpha \colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathfrak{S}_\mathrm{X} \\ g \longmapsto \alpha_g\,. \end{cases}$$

qui est un morphisme de groupes puisque $\alpha_{g'} \circ \alpha_g = \alpha_{g'g}$ pour tous $g, g' \in \mathrm{G}$. Ainsi, à partir de l'action de groupe m, on a construit un morphisme de groupes de G dans $\mathfrak{S}_\mathrm{X}$. On dit que α est le *morphisme associé à m*.

On s'intéresse à présent à la construction en sens inverse : soit $\varphi : \mathrm{G} \to \mathfrak{S}_\mathrm{X}$ un morphisme de groupes, on va construire à partir de φ une action de groupe. Pour cela, on définit l'application

$$m \colon \begin{cases} \mathrm{G} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \\ (g, x) \longmapsto \varphi(g)(x)\,. \end{cases}$$

Montrons que m est une action de G sur X. Il s'agit de montrer que m vérifie les axiomes (i) et (ii) de la définition 1. Cette vérification repose fondamentalement sur le fait que φ est un morphisme de groupes. En effet, comme φ est un morphisme de groupe, on a $\varphi(1_\mathrm{G}) = 1_{\mathfrak{S}_\mathrm{X}} = \mathrm{id}_\mathrm{X}$ et donc $m(1_\mathrm{G}, x) = \varphi(1_\mathrm{G})(x) = \mathrm{id}_\mathrm{X}(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et (i) est vérifié. Calculons à présent $m(g', m(g, x))$ pour $g, g' \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{X}$. On a

$$m(g', m(g, x)) = \varphi(g')(\varphi(g)(x)) = \varphi(g') \circ \varphi(g)(x) = \varphi(g'g)(x) = m(g'g, x)$$

et l'axiome (ii) est vérifié. Le fait que φ soit un morphisme groupes intervient pour justifier l'avant-dernière égalité. Ainsi, à partir du morphisme de groupes φ, on a bien construit une action de groupe. On dit que *m est l'action associée à φ*.

Pour que la construction ci-dessus soit cohérente et exploitable, il reste à vérifier que le passage d'action à morphisme de groupes et de morphisme de groupes à action sont bien inverses l'un de l'autre c'est-à-dire que l'action associée au morphisme associé à une action m n'est autre que m et que le morphisme associé à l'action associée au morphisme φ n'est autre que φ. Pour cela, considérons, dans un premier temps, une action m de G sur X, φ le morphisme associé à m et m' l'action associée à φ. Par définition, on a, pour $g \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{X}$,

$$m'(g, x) = \varphi(g)(x) = gx = m(g, x)$$

c'est-à-dire $m = m'$. Considérons à présent, un morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{G} \to \mathfrak{S}_\mathrm{X}$, m l'action associée à φ et φ' le morphisme associé à φ. Par définition, on a, pour $g \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{X}$,

$$\varphi'(g)(x) = m(g, x) = \varphi(g)(x)$$

c'est-à-dire $\varphi = \varphi'$.

Finalement, la morale de tout ceci se résume par « **se donner une action de groupe de** G **sur** X**, c'est la même chose que de se donner un morphisme de groupes de** G **dans** $\mathfrak{S}_\mathrm{X}$ ». Mais ce n'est pas tant cette morale qu'il faut retenir que la façon de passer de l'un à l'autre : l'important est de savoir transformer une action en un morphisme de groupes et inversement. ■

Définition 5 — Action de groupe : version 2. Soient X un ensemble et G un groupe (dont on note 1_G l'élément neutre). Une *action de* G *sur* X ou *opération de* G *sur* X est un morphisme de groupes φ de G dans $\mathfrak{S}_\mathrm{X}$. Dans ces conditions, on dit que G *agit (ou opère) sur* X *via (ou par, ou grâce à)* φ. On dit aussi que φ *munit* X *d'une structure de* G*-ensemble.*

Exemple 6 — Action triviale. Soit X un ensemble. On peut toujours définir une action de G sur X de façon triviale. Précisément, on considère le morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{G} \to \mathfrak{S}_\mathrm{X}$ tel que $\varphi(g) = \mathrm{id}_\mathrm{X}$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. En suivant le principe de la remarque 4, on en déduit que G agit sur X. L'action ainsi construite est donnée par

$$m \colon \begin{cases} \mathrm{G} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X} \\ (g, x) \longmapsto x\,. \end{cases}$$

On dit que c'est l'*action triviale* de G sur X. On voit encore l'intérêt de la remarque 4 : il n'y a pas à vérifier que m vérifie les axiomes (i) et (ii) puisque la vérification a déjà été faite dans la remarque 4 (φ est évidemment

un morphisme de groupes). Pour se convaincre qu'on a bien compris, on pourra quand même refaire cette vérification des axiomes (i) et (ii). ■

Exemple 7 — Action naturelle. Le groupe des bijections d'un ensemble agit naturellement sur l'ensemble en question. De façon précise : soit X un ensemble, on considère le morphisme de groupes $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_X} : \mathfrak{S}_X \to \mathfrak{S}_X$. En suivant le principe de la remarque 4, on en déduit que $\mathfrak{S}_X$ agit sur X. L'action ainsi construite est donnée par

$$m\colon \begin{cases} \mathfrak{S}_X \times X \longrightarrow X \\ (\sigma, x) \longmapsto \sigma(x)\,. \end{cases}$$

On dit que c'est l'*action naturelle* de $\mathfrak{S}_X$ sur X. On voit encore l'intérêt de la remarque 4 : il n'y a pas à vérifier que m vérifie les axiomes (i) et (ii) puisque la vérification a déjà été faite dans la remarque 4 ($\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_X}$ est évidemment un morphisme de groupes). Pour se convaincre qu'on a bien compris, on pourra quand même refaire cette vérification des axiomes (i) et (ii). ■

À quoi sert le point de vue « morphisme de groupes » ?

L'objectif de cette partie est d'insister sur l'importance du point de vue « morphisme de groupes » pour une action de groupe. Dans l'exemple 8, on montre comment créer rapidement de nouvelles actions de groupe à partir d'une action donnée grâce à cette vision « morphisme de groupes ». La remarque 11 propose quant à elle une méthode très efficace pour obtenir des isomorphismes de groupes.

Exemple 8 — Multiplication des actions. L'intérêt majeur de voir une action de groupes comme un morphisme de groupes est de pouvoir produire aisément de « nouvelles » actions grâce aux résultats classiques sur les groupes.

Par exemple, si G agit sur X via m alors tout sous-groupe H de G agit aussi sur X. En effet, l'injection $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est un morphisme de groupes. Ainsi, en composant avec φ le morphisme associé à m, on en déduit un morphisme de groupes de H dans $\mathfrak{S}_X$ et donc une action de H sur X. En suivant la « recette » de la remarque 4, on obtient ainsi l'action m_{H} donnée par

$$m_{\mathrm{H}}\colon \begin{cases} \mathrm{H} \times X \longrightarrow X \\ (h, x) \longmapsto m(h, x)\,. \end{cases}$$

Ici, l'exemple est suffisamment simple pour que la vérification à la main du fait que m_{H} soit une action de groupes soit immédiate.

Compliquons un peu la situation : on considère un groupe G agissant sur X via m et on suppose qu'il existe un sous-groupe **distingué** H de G tel que $m(h, x) = x$ pour tout $h \in \mathrm{H}$ et tout $x \in X$. En terme du morphisme φ associé à m, cela signifie $\varphi(h) = \mathrm{id}_X$ pour tout $h \in \mathrm{H}$ ou encore que $\mathrm{H} \subset \operatorname{Ker}\varphi$.

On note $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ la surjection canonique. Comme H est distingué, il existe sur G/H une (unique) structure de groupe telle que π soit un morphisme de groupes. Comme H est un sous-groupe distingué tel que $\varphi(\mathrm{H}) = \mathrm{id}_X$, la propriété universelle du quotient assure qu'il existe un (unique) morphisme de groupes φ' tel que $\varphi' \circ \pi = \varphi$ c'est-à-dire tel que le diagramme commutatif suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathfrak{S}_X \\ \mathrm{G}/\mathrm{H} \arrow[ur, dotted, "\varphi'"'] & \end{tikzcd}$$

Regardons de plus près ce que signifie l'égalité $\varphi' \circ \pi = \varphi$. Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $\varphi(g) = \varphi'(\pi(g))$. Considérons à présent $v \in \mathrm{G}/\mathrm{H}$. On souhaite calculer $\varphi'(v)$. Pour cela, il suffit de « relever » v dans G, ce qui est possible puisque π est surjective : on écrit $v = \pi(g)$ et on a alors $\varphi(g) = \varphi'(v)$. Ainsi l'égalité $\varphi' \circ \pi = \varphi$ assure en particulier que la valeur de $\varphi(g)$ ne dépend pas de la classe de g modulo H (voir [CAL, Théorème 4.25 Chapitre 4.4.A]).

Après cette rapide digression sur le passage au quotient, revenons au problème initial, on a donc défini (grâce à la propriété universelle du quotient) un morphisme φ' de groupes de G/H dans $\mathfrak{S}_X$. Ainsi G/H agit sur X et l'action associée est donnée par

$$m'\colon \begin{cases} \mathrm{G}/\mathrm{H} \times X \longrightarrow X \\ (v, x) \longmapsto \varphi'(v)(x) = \varphi(g)(x) = m(g, x) \end{cases}$$

où g est tel que $\pi(g) = v$. L'intérêt de passer par les morphismes de groupes apparaît ici plus nettement que dans le cas des sous-groupes : on **sait** que m' est bien une action de groupes. Si on veut éviter ce passage par les morphismes de groupes, pour construire l'action de G/H sur X, on pose m' comme ci-dessus. Il faut

alors commencer par vérifier que m' est bien définie c'est-à-dire que la valeur $m(g,x)$ ne dépend pas de g vérifiant $\pi(g) = v$ (dans la version « morphisme de groupes », cette vérification est l'utilisation de la propriété universelle du quotient). Ensuite, on vérifie les axiomes (i) et (ii) (dans la version « morphisme de groupes », cette vérification est le fait que φ' soit un morphisme de groupes). ■

Exemple 9 — Restriction d'action naturelle. En liant les exemples 8 et 7, on peut construire de nombreuses actions.

Par exemple, si X est un ensemble fini et $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$. Alors le sous-groupe $\langle\sigma\rangle$ de $\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$ engendré par σ agit sur X. L'étude précise de cette action mène à la décomposition en cycle à support disjoint et à la détermination des classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ (voir l'exemple 4.1 du chapitre 1 de [PER]).

Si V est un espace vectoriel alors le sous-groupe GL(V) de $\mathfrak{S}_{\mathrm{V}}$ agit sur V. ■

Exemple 10 — Action et structure algébrique. Lorsque l'ensemble X sur lequel agit un groupe G admet une structure supplémentaire (par exemple, si X est lui aussi un groupe ou alors un espace vectoriel...), on peut distinguer un ensemble d'action de G sur X plus riches : celles qui respecte la structure supplémentaire de X.

Par exemple, considérons une action m sur de G sur X où X est un groupe. On note φ le morphisme associé à m. On traduit le fait que m respecte la structure de groupe de X, en demandant que $\varphi(g)$ soit un morphisme de groupes pour tout $g \in \mathrm{G}$. Autrement dit, φ est à valeur dans le sous-groupe Aut(X) de $\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$. On dit alors que G agit sur X *par automorphisme*. Par exemple, le groupe G agit sur lui-même par conjugaison et cette action est une action par automorphisme : elle est donné par

$$m\colon \begin{cases} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G} \\ (g,g') \longmapsto gg'g^{-1} \end{cases}$$

et le morphisme associé est

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut(G)} \\ g \longmapsto (g' \mapsto gg'g^{-1})\,. \end{cases}$$

Pour montrer qu'on a bien une action par automorphisme, il s'agit de vérifier d'abord que les applications $\varphi(g) : g' \mapsto gg'g^{-1}$ sont des isomorphismes de groupes puis que φ est un morphisme de groupes.

Donnons un autre exemple, considérons une action m sur de G sur X où X est un espace vectoriel. On note φ le morphisme associé à m. On traduit le fait que m respecte la structure de groupe de X, en demandant que $\varphi(g)$ soit linéaire pour tout $g \in \mathrm{G}$. Autrement dit, φ est à valeur dans le sous-groupe GL(X) de $\mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$. On dit alors que G agit *linéairement* sur X. Ainsi le groupe GL(V) agit linéairement sur V (voir l'exemple 9). ■

Remarque 11 — Isomorphisme avec le groupe symétrique. La vision « morphisme de groupes » d'une action de groupes est très efficace pour montrer un isomorphisme entre un groupe G et un groupe symétrique (ou un groupe alterné ou encore un sous-groupe du groupe symétrique). En effet, en faisant agir G sur un ensemble bien choisi X, on construit un morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{G} \to \mathfrak{S}_{\mathrm{X}}$. L'exercice est alors de montrer que le morphisme qu'on a choisi est bijectif (ce qui n'est pas toujours facile).

Par exemple, en faisant agir le groupe des isométries directes du cube sur les 4 grandes diagonales, on obtient un isomorphisme entre le groupe des isométries directes du cube et $\mathfrak{S}_4$ (voir [ALE, Chapitre II.2.ILL5.2]).

En faisant agir G sur lui-même par translation à gauche (voir l'exemple 3), on en déduit que G est (isomorphe à) un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\mathrm{G}}$ (c'est le lemme de Cayley, voir [PER, Théorème 4.9 Chapite 1]).

En faisant agir, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur les vecteurs non nuls de ${\mathbb{F}_2}^2$ (ou les droites de ${\mathbb{F}_2}^2$ (c'est la même chose puisqu'on est sur $\mathbb{F}_2$)), on obtient un isomorphisme entre $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathfrak{S}_3$. Détaillons cet exemple. On a vu dans l'exemple 9 que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ agit sur ${\mathbb{F}_2}^2$. De plus, si $x \in {\mathbb{F}_2}^2$ n'est pas nul alors $gx \neq 0$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. On en déduit ainsi une application

$$m\colon \begin{cases} \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \times {\mathbb{F}_2}^2 \smallsetminus \{0\} \longrightarrow {\mathbb{F}_2}^2 \smallsetminus \{0\} \\ \qquad (g,x) \qquad\qquad \longmapsto g(x)\,. \end{cases}$$

Montrons que l'application m vérifie les axiomes (i) et (ii) et définit ainsi une action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur ${\mathbb{F}_2}^2 \smallsetminus \{0\}$. Cela résulte du fait que l'action qu'on a construit est obtenue à partir de celle de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur ${\mathbb{F}_2}^2$. En effet, pour tout $x \in {\mathbb{F}_2}^2$ et tous $g, g' \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$, on a

$$1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)}x = x \qquad \text{et} \qquad g(g'x) = (gg')x\,.$$

En particulier, les deux égalités précédentes sont vraies pour tout $x \in {\mathbb{F}_2}^2 \smallsetminus \{0\}$ c'est-à-dire que m vérifie (i) et (ii). On a ainsi construit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur ${\mathbb{F}_2}^2 \smallsetminus \{0\}$ dont on déduit un morphisme de groupes φ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur $\mathfrak{S}_{{\mathbb{F}_2}^2 \smallsetminus \{0\}}$.

Montrons à présent que φ est bijectif. Commençons par l'injectivité : si $\varphi(g) = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}}$ alors $gx = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}$. Comme $g0 = 0$, on en déduit que $gx = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_2{}^2$ et donc $g = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2{}^2} = 1_{\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)}$. Passons à la surjectivité. Elle va résulter de la remarque élémentaire suivante : soient $a \neq b$ deux vecteurs non nuls et distincts de $\mathbb{F}_2{}^2$ alors (a, b) est une base de $\mathbb{F}_2{}^2$. Considérons une permutation σ de l'ensemble $\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\} = \{a, b, c\}$ qui a trois éléments. Comme c'est une bijection, elle est déterminée par l'image de deux éléments distincts (par exemple a et b) de $\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}$ (on n'a plus le choix pour l'image du troisième élément : c'est l'élément qui n'est pas image des deux premiers). Or (a, b) est une base de $\mathbb{F}_2{}^2$ et $(\sigma(a), \sigma(b))$ aussi (puisque $\sigma(a), \sigma(b)$ sont distincts et non nuls). Ainsi, il existe une unique application linéaire bijective g telle que $g(a) = \sigma(a)$ et $g(b) = \sigma(b)$. Par bijectivité de g et σ, on en déduit que $g(c) = \sigma(c)$. Finalement $\varphi(g) = \sigma$.

On obtient ainsi la bijectivité de φ et donc $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_{\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}}$ qui est lui-même isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ puisque $\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}$ a trois éléments.

Pour des détails sur ces exemples et de nombreuses autres illustrations de cette méthode, on pourra consulter [MNE]. ■

Remarque 12 — Retour sur $\mathbf{GL_2(\mathbb{F}_2)}$. Revenons sur la bijectivité de φ de l'exemple précédent.

On aurait pu justifier l'injectivité de φ de la façon suivante. On peut extraire de $\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}$ une base de $\mathbb{F}_2{}^2$ (en choisissant deux éléments distincts de $\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}$). Si $\varphi(g) = \mathrm{id}_{\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}}$. Alors g et $\mathrm{id}_{\mathbb{F}_2{}^2}$ sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base et donc partout.

Une fois l'injectivité obtenue, on aurait pu justifier l'isomorphie par cardinalité : $\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}$ a trois éléments donc $\mathfrak{S}_{\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}}$ a 6 éléments. Par ailleurs, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ a aussi 6 éléments (voir [PER, Exemple 5.3 Chapitre 1]).

On aurait pu aussi justifier la surjectivité de φ en remarquant que $\mathfrak{S}_{\mathbb{F}_2{}^2 \smallsetminus \{0\}}$ est engendré par deux de ses transpositions. Or les images par φ des matrices

$$\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{bmatrix}$$

sont deux transpositions distinctes (la première échange les deux vecteurs de la base canonique ; la deuxième fixe le premier vecteur de la base canonique et échange les deux autres vecteurs non nuls de $\mathbb{F}_2{}^2$). ■

Références

[ALE] M. Alessandri. *Thèmes de géométrie : groupes en situation.* Dunod, 1999.

[CAL] J. Calais. *Éléments de théorie des groupes.* PUF, 1998.

[MNE] R. Mneimné. *Éléments de géométrie.* Cassini, 1997.

[PER] D. Perrin. *Cours d'algèbre.* Ellipses, 1996.