Vincent Beck

# Action de groupes

Avant de passer aux actions de groupes, un petit exercice sur le théorème de correspondance pour répondre à une question de Baptiste

**Exercice 1** Soit G un groupe et H un sous-groupe de G contenant D(G). Montrer que H est distingué dans G en utilisant le théorème de correspondance et le fait que G/D(G) est commutatif.

Montrer que si T est un sous-groupe de $k^\times$ alors $\det^{-1}(\mathrm{T})$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GL}_n(k)$.

Passons aux actions de groupes.

**Définition 1 — Action à droite.** Une action à droite de G sur X est une application $m : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ vérifiant

$(i)$ $1_\mathrm{G} \cdot x = x$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ ;
$(ii)$ $g \cdot (g' \cdot x) = (g'g) \cdot x$ pour tous $g, g' \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{X}$.

Pour ne pas renverser l'ordre des choses, on convient d'écrire le $g$ à droite de $x$ pour une action à droite : on note $x \cdot g$. La formule $(ii)$ devient $(x \cdot g') \cdot g = x \cdot (g'g)$.

En fait, toute action à droite donne une action à gauche et inversement par le principe suivant : si $m$ est une action à droite (resp. à gauche) alors l'application $(g, x) \mapsto m(g^{-1}, x)$ est une action à gauche (resp. à droite).

De même que pour une action à gauche, on peut définir le stabilisateur et l'orbite pour une action à droite (qui sont en fait le même que pour l'action à gauche qui lui correspond). On a aussi la bijection G-équivariante (pour les actions à droite, on peut aussi définir de façon analogue la notion d'application G-équivariante) entre $\mathrm{G}_x\mathrm{G}$ (qui est bien un G-ensemble à droite) et $\mathcal{O}(x)$.

**Exemple 2 — Action et espace vectoriel.** Un espace vectoriel est un groupe additif $(\mathrm{V}, +)$ muni d'une loi externe $k \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ vérifiant les axiomes suivantes

$(i)$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ pour tous $\alpha \in k$, $x, y \in \mathrm{V}$
$(ii)$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ pour tous $\alpha, \beta \in k$, $x \in \mathrm{V}$
$(iii)$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ pour tous $\alpha, \beta \in k$, $x \in \mathrm{V}$
$(iv)$ $1 \cdot x = x$ pour tout $x \in \mathrm{V}$

Les axiomes $(iii)$ et $(iv)$ disent précisément que le groupe $k^\times$ agit sur V par $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$.

**Exemple 3 — espace affine.** Soit $\mathscr{E}$ une espace affine. Alors $\mathrm{Aff}(\mathscr{E})$ le groupe des bijections affines de $\mathscr{E}$ agit sur $\mathscr{E}$.

Soit $\mathscr{E}$ une espace affine euclidien. Alors $\mathrm{Is}(\mathscr{E})$ le groupe des isométries affines de $\mathscr{E}$ agit sur $\mathscr{E}$.

**Exercice 2 — G-morphismes.**

**a)** Soit X un G-ensemble. Montrer que $\mathrm{id}_\mathrm{X}$ est une application G-équivariante.

**b)** Montrer que la composée de 2 applications G-équivariantes est G-équivariante.

**c)** Définir la notion d'isomorphisme de G-ensemble. Montrer qu'un morphisme de G-ensemble est un isomorphisme de G-ensembles si et seulement si il est bijectif.

**d)** Définir la notion de sous-G-ensemble.

**e)** Définir un produit de G-ensemble et démontrer une propriété universelle du produit.

**f)** Soit X un G-ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. A quelle condition existe-t-il sur $\mathrm{X}/\mathscr{R}$ une structure de G-ensemble telle que $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\mathscr{R}$ soit G-équivariante. Démontrer alors la propriété universelle du quotient pour les applications G-équivariante $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ compatible avec $\mathscr{R}$.

**Exercice 3 — Action sur un sous-ensemble.**

**a)** Si G agit sur X et $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. A quelle condition G agit sur Y par restriction ?

**b)** On suppose que G agit sur X. Montrer que G agit sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et sur $\{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}, \quad x \neq y\}$. Montrer que G agit sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ et sur $\{(x, y, z) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X}, \quad x \neq y, y \neq z, z \neq x\}$.

**c)** Exemple (le théorème de Thalès) : soient $\mathscr{D}$ une droite affine et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$, $(\mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}')$ deux familles de trois points distincts deux à deux. À quelle condition existe-t-il $f$ une application affine telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$, $f(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$.

**Exercice 4** Dans l'action de G sur G/H, quel est le stabilisateur de $x\mathrm{H}$ ? quel est celui de H ? Est-ce étonnant ?

**Exercice 5 — Algèbre linéaire.**

**a)** La théorie du rang. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{M}_{n\times m}(k)$. À quelle condition les deux matrices ont-elles la même orbite sous l'action de $\mathrm{GL}_n(k) \times \mathrm{GL}_m(k)$ donnée par $((\mathrm{P}, \mathrm{Q}), \mathrm{M}) = \mathrm{PMQ}^{-1}$ ?

**b)** Soient $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{M}_{n\times m}(k)$. À quelle condition les deux matrices ont-elles la même orbite sous l'action de $\mathrm{GL}_n(k)$ donnée par $(\mathrm{P}, \mathrm{M}) = \mathrm{PM}$ ?

**c)** Soient $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{M}_{n\times m}(k)$. À quelle condition les deux matrices ont-elles la même orbite sous l'action de $\mathrm{GL}_m(k)$ donnée par $(\mathrm{P}, \mathrm{M}) = \mathrm{MP}^{-1}$ ?

**Exercice 6** Montrer que G agit transitivement sur G/H.