Vincent Beck

Anneaux

Exercice 1 — Anneau de fonction. Soit A un anneau et I un ensemble.

a) Montrer que l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathrm{A})$ des fonctions de I dans A est un anneau (commutatif si A l'est). Quel est l'élément neutre pour l'addition, la multiplication ?

b) On suppose que I est un espace métrique et $\mathrm{A}=\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions continues sur I forment un sous-anneau de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathrm{A})$.

c) Pour $x\in\mathrm{I}$, montrer que l'application

$$\mathrm{ev}_x\colon \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{I},\mathrm{A}) & \longrightarrow \mathrm{A} \\ f & \longmapsto f(x) \end{cases}$$

est un morphisme d'anneaux appelé *morphisme d'évaluation en x*.

d) Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

e) Déterminer les éléments inversibles de $\mathscr{F}(\mathrm{I},\mathrm{A})$? de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

f) Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $\{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f(x_0)=0\}$ est un idéal maximal de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Est-il principal ? Que se passe-t-il si on remplace $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

g) Existe-t-il des éléments nilpotents non nuls dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

h) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U. Montrer que $\mathcal{H}$ est intègre si et seulement si U est connexe.

Exercice 2 — Diviseurs de 0.

a) Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z},\mathbb{D},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b) Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

c) Déterminer les diviseurs de 0 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

d) Dans un anneau commutatif, montrer que le produit ab est régulier si et seulement si a et b le sont.

e) Montrer qu'un sous-anneau d'un anneau intègre est intègre.

f) Un produit d'anneaux est-il intègre ? un corps ?

Exercice 3 — Éléments inversibles. Soit A un anneau.

a) Montrer que l'ensemble $\mathrm{A}^\times$ des éléments inversibles de A est un groupe pour la multiplication.

b) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z},\mathbb{D},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

c) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

d) Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

e) Montrer que si u est inversible et x nilpotent et $ux=xu$ alors $u+x$ est inversible. En particulier, montrer que $1+x$ est inversible. Quel est l'inverse ?

f) Montrer que si $f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ est un morphisme d'anneaux alors f induit par restriction un morphisme de groupes de $\mathrm{A}^\times$ dans $\mathrm{B}^\times$. On suppose que f est surjectif, le morphisme de $\mathrm{A}^\times$ dans $\mathrm{B}^\times$ induit est-il surjectif ?

g) Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Exercice 4 — Morphismes d'anneaux. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ un endomorphisme d'anneau.

a) Calculer $f(n)$ pour $n\in\mathbb{Z}$ puis pour $f\in\mathbb{Q}$.

b) Montrer que $f(x)\geqslant 0$ si $x\geqslant 0$ (on caractérisera la positivité d'un réel en terme algébrique).

c) En déduire que f est croissante.

d) En déduire que $f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

e) Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ un endomorphisme d'anneau. Montrer l'équivalence

(i) f est l'identité ou la conjugaison ;
(ii) f est continu ;

(iii) $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$;
(iv) $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 — Sous-corps. Soit K un corps. Un *sous-corps* de K est un sous-anneau de K qui est un corps.

a) Montrer qu'une intersection de sous-corps est un corps.

b) En déduire une notion de sous-corps engendré par une partie. Donner une description de ses éléments.

c) Montrer qu'un corps K admet un plus petit sous-corps appelé sous-corps premier de K.

d) Quel est le sous-corps de $\mathbb{R}$ engendré par $\sqrt{2}$? le sous-groupe engendré par $\sqrt{2}$? le sous-groupe de $\mathbb{R}^\times$ engendré par $\sqrt{2}$? le sous-anneau engendré par $\sqrt{2}$?

Exercice 6 — Caractéristique.

a) Montrer que le sous-anneau premier de A est isomorphe à $\mathbb{Z}/\mathrm{car}(\mathrm{A})\mathbb{Z}$.

b) Montrer que si A est un sous-anneau de B alors $\mathrm{car}(\mathrm{A}) = \mathrm{car}(\mathrm{B})$.

c) Montrer que si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme d'anneau. Comparer la caractéristique de A et celle de B. En déduire que si car(A) et car(B) sont premiers entre eux alors il n'y a pas de morphisme d'anneaux entre A et B.

d) Quelle est la caractéristique de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$?

e) Quelle est la caractéristique de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? et celle de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

f) Quelle est la caractéristique de $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

g) Quelle peut être la caractéristique d'un anneau intègre ? d'un corps ?

h) Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de corps entre deux corps n'ayant pas la même caractéristique.

i) Montrer qu'un anneau de caractéristique p (premier) peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

j) Montrer que si A et B sont deux anneaux de caractéristique p et $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme d'anneaux alors f est $\mathbb{F}_p$ linéaire pour la structure définie dans la question précédente.

Exercice 7 — Matrice triangulaire. Soit k un corps. On considère le sous-anneau de $\mathrm{M}_2(k)$

$$\mathrm{A} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in k \right\}$$

a) Déterminer les éléments nilpotents de A ?

b) Déterminer les inversibles de A ?

c) Déterminer les éléments réguliers à droite, à gauche ?

d) Déterminer les idéaux de A et les quotients correspondants.

Exercice 8 — Anneau produit et idéaux. On considère l'anneau produit $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$.

a) Soit I un idéal bilatère de A. Montrer que $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \times \cdots \times \mathrm{I}_n$ où I_j est un idéal bilatère de A_j. Quel est le quotient ?

b) On suppose que tous les A_i sont non nuls et commutatifs. Décrire les idéaux premiers de A ? les idéaux maximaux de A ?

c) On suppose que les A_j sont des corps. Combien A admet-il d'éléments maximaux ? En déduire qu'un produit de deux corps n'est jamais isomorphe à un produit de trois corps.

Exercice 9 — Opérations sur les idéaux. Soit A un anneau.

a) Soit I et J deux idéaux à gauche (resp. à droite, bilatère). Montrer que $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \{i + j,\ i \in \mathrm{I}, j \in \mathrm{J}\}$ est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère).

b) Soit I et J deux idéaux à gauche (resp. à droite, bilatère). Montrer que

$$\mathrm{IJ} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} i_k j_k, \quad n \in \mathbb{N}, i_k \in \mathrm{I}, j_k \in \mathrm{J} \right\}$$

est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère).

c) Montrer que $(\mathrm{I}+\mathrm{J})+\mathrm{K}=\mathrm{I}+(\mathrm{J}+\mathrm{K})$, $(\mathrm{IJ})\mathrm{K}=\mathrm{I}(\mathrm{JK})$, $(\mathrm{I}+\mathrm{J})\mathrm{K}=\mathrm{IK}+\mathrm{JK}$ et $\mathrm{I}(\mathrm{J}+\mathrm{K})=\mathrm{IJ}+\mathrm{IK}$. Montrer $0+\mathrm{I}=\mathrm{I}+0=\mathrm{I}$ et $\mathrm{AI}=\mathrm{I}$ (si I est un idéal à gauche). A-t-on $\mathrm{IA}=\mathrm{I}$?

Exercice 10 — Éléments nilpotents.

a) Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) On suppose que A est un anneau commutatif. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A ? Le résultat s'étend-il à un anneau commutatif ?

c) On suppose encore que A est commutatif. On considère un idéal I de A. Montrer que l'ensemble

$$\sqrt{\mathrm{I}}=\{x\in \mathrm{A},\quad \exists\, n\in\mathbb{N},\ x^n\in \mathrm{I}\}$$

est un idéal contenant I. Que vaut $\sqrt{0}$? Calculer $\sqrt{\sqrt{\mathrm{I}}}$?

d) Décrire l'idéal de A/I correspondant à $\sqrt{\mathrm{I}}$.

e) Montrer que l'intersection des idéaux premiers de A contenant I est $\sqrt{\mathrm{I}}$ (c'est une question difficile : on pourra montrer que si $x\notin\sqrt{\mathrm{I}}$, l'ensemble des idéaux contenant I ne rencontrant pas l'ensemble $\{x^n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est non vide et admet un élément maximal qui est un idéal premier de A).

f) Montrer que $\mathrm{A}/\sqrt{0}$ est un anneau réduit (c'est-à-dire n'a pas d'élément nilpotent non nul).

Exercice 11

a) Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.

b) Donner des exemples d'anneaux non intègres et finis.

c) Déterminer les anneaux à 2,3 et 4 éléments.

Exercice 12 Soit A un anneau tel que $a^2=a$ pour tout $a\in\mathrm{A}$.

a) Montrer que A est commutatif.

b) Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que A est intègre. Montrer que A est un corps et que A à deux éléments.

c) Montrer que tout idéal premier de A est maximal.

Exercice 13 Soit A un anneau tel que $a^3=a$ pour tout $a\in\mathrm{A}$.

a) Déterminer les éléments nilpotents de A.

b) Soit $e\in\mathrm{A}$ tel que $e^2=e$ et $a\in\mathrm{A}$ et $b=ea(1-e)$. Calculer b^2 et en déduire que $ea=ae$.

c) En déduire que pour tout $x\in\mathrm{A}$ alors $x^2\in\mathrm{ZA}$.

d) Montrer que $2x\in\mathrm{ZA}$ pour tout $x\in\mathrm{A}$.

e) Montrer que $3x^2+3x=0$. En déduire que $3x\in\mathrm{ZA}$.

f) Montrer que A est commutatif.

Exercice 14

a) Soient m,n deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Combien y a-t-il de morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

b) Combien y a-t-il de morphismes de groupes de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

c) Combien y a-t-il de morphismes de groupes, d'anneaux de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$?

Exercice 15 Soit $\mathrm{A}=\mathbb{Z}/3^4 5^2 7\mathbb{Z}$.

a) Déterminer les idéaux de A.

b) Quels sont les idéaux premiers de A, les idéaux maximaux ?

c) Donnez les inclusions des idéaux les uns dans les autres.

Exercice 16 — Anneaux de fonctions continues sur un compact. Soit A l'anneau des fonctions continues de $[\,0\,,1\,]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Soit $x\in[\,0\,,1\,]$. Montrer que $\mathrm{I}_x=\{f\in\mathrm{A},\ f(x)=0\}$ est un idéal maximal de A. Quel est le quotient A/I_x ?

b) Tous les idéaux de A sont-ils maximaux ? premiers ?

c) I_x est-il principal ?

d) Montrer que $(\mathrm{I}_x)^2 = \mathrm{I}_x$.

e) Montrer que tout idéal maximal de A est de la forme I_x (question difficile).

Exercice 17

a) Soit A un anneau intègre. Montrer que si A contient un nombre fini d'idéaux alors A est un corps (indication : on pourra considérer les idéaux de la forme (a^n).

b) Soit A un anneau commutatif. Montrer qui si A contient un nombre fini d'idéaux alors tout idéal premier est maximal.

c) Soit A un anneau tel que tout idéal est premier. Montrer que A est un corps.