Vincent Beck

Application lisse et constante au voisinage d'un point

Lemme 1 – Fonction $\mathscr{C}^\infty$. La fonction

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus, $0 \leqslant \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Preuve. La fonction φ est bien sûr $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Montrons par récurrence sur n qu'il existe $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_{2n}[\mathrm{X}]$ telle que $\varphi^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(1/x)\exp(-1/x)$ pour tout $x > 0$. Pour $n = 0$, le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai au rang n. Pour $x > 0$, on a

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \varphi^{(n)\prime}(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{P}_n{}'\left(\frac{1}{x}\right)\exp(-1/x) + \frac{1}{x^2}\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp(-1/x)\,.$$

On pose alors $\mathrm{P}_{n+1} = \mathrm{X}^2\mathrm{P}_n - \mathrm{X}^2\mathrm{P}_n{}' \in \mathbb{R}_{2n+2}[\mathrm{X}] = \mathbb{R}_{2(n+1)}[\mathrm{X}]$.

Montrons par récurrence sur n que φ est n fois dérivable en 0 et $\varphi^{(n)}(0) = 0$. Pour $n = 0$ le résultat est vrai par définition de φ. Supposons le résultat vrai au rang n. Pour $x > 0$, on a alors

$$\frac{\varphi^{(n)}(x) - 0}{x} = 1/x\mathrm{P}_n(1/x)\exp(-1/x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

On en déduit que $\varphi^{(n)}$ est dérivable à droite en 0 et de dérivée à droite nulle. Comme $\varphi^{(n)}$ est dérivable à gauche en 0 et de dérivée à gauche nulle. On en déduit que $\varphi^{(n)}$ est dérivable en 0 et de dérivée nulle. Ainsi φ est $(n+1)$ fois dérivable en 0 et $\varphi^{(n+1)}(0) = 0$.

Enfin, comme $-1/x < 0$ si $x > 0$, on en déduit $0 \leqslant \varphi(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) > 0$ si $x > 0$

Lemme 2 – Calcul différentiel. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$. Il existe une fonction $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

(i) $\varphi_{a,b} \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
(ii) $\varphi_{a,b}(x) = 1$ si $x \leqslant a$;
(iii) $\varphi_{a,b}(x) = 0$ si $x \geqslant b$;
(iv) $0 \leqslant \varphi_{a,b}(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Preuve. On considère la fonction φ du lemme 1. On définit

$$\psi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \varphi(x)\varphi(1-x) \end{cases}$$

qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie $\psi(x) = 0$ si $x \in \left]-\infty, 0\right] \cup \left[1, +\infty\right[$ et $\psi(x) > 0$ si $0 < x < 1$. En particulier,

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t > 0\,.$$

On définit alors

$$\Psi\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \mathrm{I}^{-1}\displaystyle\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

Comme $\psi(t) = 0$ pour tout $t < 0$, on a $\Psi(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$. Comme $\psi(t) = 0$ pour $t \geqslant 1$, on en déduit que, pour $x \geqslant 1$,

$$\Psi(x) = \mathrm{I}^{-1}\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{I}^{-1}\int_0^1 \psi(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{I}^{-1}\int_1^x \psi(t)\,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1\,.$$

Enfin comme $\psi(t) > 0$ pour $t \in \left]0, 1\right[$. On obtient que $0 = \Psi(0) < \Psi(x) < \Psi(1) = 1$ pour $x \in \left]0, 1\right[$. Finalement $0 \leqslant \Psi(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Enfin, Ψ est une primitive de $\mathrm{I}^{-1}\psi$ et donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. On pose alors

$$\varphi_{a,b}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \Psi\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right) \end{cases}$$

Pour $x \geqslant b$, on a $b - x/b - a \leqslant 0$ d'où $\varphi_{a,b}(x) = 0$. Pour $x \leqslant a$, on a $b - x/b - a \geqslant 1$ d'où $\varphi_{a,b}(x) = 1$. Par composition $\varphi_{a,b}$ est $\mathscr{C}^\infty$ et $0 \leqslant \varphi_{a,b}(x) \leqslant 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Lemme 3 Soit V, U deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ avec $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ et $x \in \mathrm{V}$. Il existe $f_{x,\mathrm{V}} \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ dont le support est compact et contenu dans V et constante égale à 1 dans un voisinage de x et qui prend des valeurs entre 0 et 1.

Preuve. Soit $r > 0$, on note $\mathrm{B}(x, r)$ la boule ouverte $\mathrm{B}(x, r)$ de centre x et de rayon r pour la norme euclidienne Comme V est un ouvert contenant de x, il existe r_1 tel que $\mathrm{B}(x, r_1) \subset \mathrm{V}$. On pose alors $r = r_1/2$. Comme $\overline{\mathrm{B}(x, r)} \subset \mathrm{B}(x, r_1)$, on en déduit que $\overline{\mathrm{B}(x, r)} \subset \mathrm{V}$ et $0 < r' < r$. On considère alors la fonction $\varphi_{r'^2, r^2}$ du lemme 2. On pose alors

$$f_{x,\mathrm{V}} : \begin{cases} \mathrm{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \varphi_{r'^2, r^2}(\|y - x\|^2)\,. \end{cases}$$

Comme $y \mapsto \|y - x\|^2$, on en déduit par composition que $f_{x,\mathrm{V}}$ est $\mathscr{C}^\infty$. De plus, pour $y \in \overline{\mathrm{B}(x, r')}$, on a $\|y - x\|^2 \leqslant r'^2$ d'où $f_{x,\mathrm{V}}(y) = 1$ et pour $y \notin \mathrm{B}(x, r)$, on a $\|y - x\|^2 \geqslant r^2$ d'où $f_{x,\mathrm{V}}(y) = 0$. D'où $\operatorname{Supp} f_{x,\mathrm{V}} \subset \overline{\mathrm{B}(x, r)} \subset \mathrm{V}$. Ainsi $\operatorname{Supp} f_{x,\mathrm{V}}$ (qui est fermé par hypothèse) est contenu dans le compact $\overline{\mathrm{B}(x, r)}$ donc est compact.