Thomas Dedieu
Vincent Beck

Bidualité

Morphisme canonique.

Notation 1 – Dualité et changement de bases. Soient A un anneau commutatif unitaire, E un A-module et B une A-algèbre associative commutative et unitaire. On note $\mathrm{E}^* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{A})$ le dual de E et pour un B-module F, on note $\mathrm{F}^{*\mathrm{B}} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{F}, \mathrm{B})$ le dual de F.

Proposition 2 – Application canonique. Soit E un A-module. L'application Δ_{E} donnée par

$$\Delta_{\mathrm{E}} : \begin{cases} \mathrm{E}^* \otimes \mathrm{B} \longrightarrow (\mathrm{E} \otimes \mathrm{B})^{*\mathrm{B}} \\ \varphi \otimes b \longmapsto (e \otimes c \mapsto b\varphi(e)c) \end{cases}$$

est bien définie. De plus $(\Delta_{\mathrm{E}})_{\mathrm{E}}$ est une transformation naturelle.

Preuve. Soit $(\varphi, b) \in \mathrm{E}^* \times \mathrm{B}$. L'application $(e, c) \in \mathrm{E} \times \mathrm{B} \mapsto b\varphi(e)c \in \mathrm{B}$ est A-bilinéaire (car φ est A-linéaire). On définit alors par la propriété universelle du produit tensoriel une application A-linéaire de $\mathrm{E} \otimes \mathrm{B}$ dans B qui est donnée par $e \otimes c \mapsto b\varphi(e)c$. La définition des structures de B-module sur $\mathrm{E} \otimes \mathrm{B}$ et B montre que cette application est en fait B-linéaire. On peut ainsi bien définir une application $\delta : \mathrm{E}^* \times \mathrm{B} \mapsto (\mathrm{E} \otimes \mathrm{B})^{*\mathrm{B}}$ par $(\varphi, b) = (e \otimes c \mapsto b\varphi(e)c)$.

Par ailleurs, l'application δ est bien A-bilinéaire. On en déduit (grâce à la propriété universelle du produit tensoriel) que Δ est bien définie et A-linéaire. De plus, les structures de B-module sur $\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{B}$ et $(\mathrm{E} \otimes \mathrm{B})^{*\mathrm{B}}$ assurent que Δ est B-linéaire.

Enfin, soit F est un A-module, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application A-linéaire, $\varphi \in \mathrm{F}^*$ et $b \in \mathrm{B}$. On a

$$^t(f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{B}}) \circ \Delta_{\mathrm{F}}(\varphi \otimes b) = \Delta_{\mathrm{F}}(\varphi \otimes b)(e \otimes c \mapsto f(e) \otimes c) = (e \otimes c \mapsto b\varphi(f(e))c)$$

et

$$\Delta_{\mathrm{E}} \circ ({}^t f \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{B}})(\varphi \otimes b) = \Delta_{\mathrm{E}}(\varphi \circ f \otimes b) = (e \otimes c \mapsto b\varphi(f(e))c)\,.$$

On a donc bien le diagramme commutatif souhaité. ■

Pour la suite, on étudie le cas particulier $\mathrm{B} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ où S est une partie multiplicative de A. On note $\psi : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ l'application canonique.

Proposition 3 – Noyau. Le noyau $\mathrm{Ker}\,\Delta_{\mathrm{E}}$ de Δ_{E} est le sous-module $\mathrm{S}^{-1}\{\varphi \in \mathrm{E}^*, \quad \psi \circ \varphi = 0\}$.

En particulier, si A est intègre ou plus généralement si S ne contient pas de diviseur de 0, l'application Δ_{E} est injective.

Si E est de type fini et S ne contient pas de diviseur de 0 alors l'application Δ_{E} est un isomorphisme.

Preuve. Tout élément de $\mathrm{E}^* \otimes \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{E}^*$ s'écrit sous la forme $\varphi \otimes s^{-1}$ (on n'a pas besoin de somme). On a donc

$$\Delta_{\mathrm{E}}(\varphi \otimes s^{-1}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,(e, s', a) \in \mathrm{E} \times \mathrm{S} \times \mathrm{A}, \quad s^{-1}\varphi(e)a/s' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, e \in \mathrm{E}, \quad \varphi(e)/1 = 0$$

ce qui est encore équivalent au fait que $\psi \circ \varphi = 0$.

Si S ne contient pas de diviseur de 0, l'application ψ est injective. Ainsi $\psi \circ \varphi = 0$ implique $\varphi = 0$ et $\mathrm{Ker}\,\Delta_{\mathrm{E}} = \mathrm{S}^{-1}\{0\} = \{0\}$.

On suppose que E est de type fini et que S ne contient pas de diviseur de 0. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice du A-module E et $f \in (\mathrm{E} \otimes \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A})^{*_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}}$. Pour $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, on peut écrire $f(e_i \otimes 1) = a_i/s_i$ avec $a_i \in \mathrm{A}$ et $s_i \in \mathrm{S}$. Ainsi $s_i f(e_i \otimes 1) = a_i/1$. Comme S ne contient pas de diviseur de 0, l'application ψ est injective. On en déduit que $s_i f(e_i \otimes 1) \in \mathrm{A} \subset \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$. En posant

$$s = \prod_{j=1}^{n} s_j\,,$$

on a $sf(e_i \otimes 1) \in \mathrm{A}$ pour tout $i \in [\![1\,,\, n]\!]$. Comme les e_i engendrent E et que f est A-linéaire (car $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-linéaire), l'application $\varphi : e \mapsto sf(e \otimes 1)$ est à valeurs dans A. De plus, φ est A-linéaire car f l'est et donc $\varphi \in \mathrm{E}^*$. Enfin, on a $\Delta_{\mathrm{E}}(\varphi \otimes s^{-1}) = f$ car f est $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-linéaire et les $e_i \otimes 1$ engendrent $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{E}$. Ainsi Δ_{E} est surjective. Comme Δ_{E} est injective puisque S ne contient pas de diviseur de 0, on en déduit que Δ_{E} est un isomorphisme. ■

Bidual.

Proposition 4 – Bidual. Soit A un anneau intègre et M un A-module de type fini. Le noyau de l'application canonique $i_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}^{**}$ est le sous-module de torsion de M.

Preuve. Il est clair que $\mathrm{M}_{\mathrm{tors}} \subset \operatorname{Ker} i_{\mathrm{M}}$. En effet, si $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{tors}}$ alors il existe $a \in \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$ tel que $am = 0$. Pour $f \in \mathrm{A}^*$, on a donc $af(m) = f(am) = 0$. Comme $a \neq 0$ et A intègre, on en déduit que $f(m) = i(m)(f) = 0$. Ainsi $i(m) = 0$ et $m \in \operatorname{Ker} i$.

Soit K le corps de fraction de A. Pour un A-module N, on pose $j_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \to \mathrm{N} \otimes \mathrm{K}$ l'application canonique $n \mapsto n \otimes 1$. On considère alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "j_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "i_{\mathrm{M}}"'] & \mathrm{M} \otimes \mathrm{K} \arrow[d, "i_{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{K}}"] \\
\mathrm{M}^{**} \arrow[r, "j_{\mathrm{M}^{**}}"] & \mathrm{M}^{**} \otimes \mathrm{K}
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathrm{K} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ avec $\mathrm{S} = \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$, la proposition 3 appliquée avec $\mathrm{E} = \mathrm{M}^*$ montre que l'application $\Delta_{\mathrm{M}^*} : \mathrm{M}^{**} \otimes \mathrm{K} \to (\mathrm{M}^* \otimes \mathrm{K})^{*\mathrm{K}}$ est injective. Cette même proposition assure que $\Delta_{\mathrm{M}} : \mathrm{M}^* \otimes \mathrm{K} \to (\mathrm{M} \otimes \mathrm{K})^{*\mathrm{K}}$ est K-linéaire bijective. Ainsi, par composition, on en déduit une application K-linéaire injective

$${}^t\Delta_{\mathrm{M}}{}^{-1} \circ \Delta_{\mathrm{M}^*} : \mathrm{M}^{**} \otimes \mathrm{K} \longrightarrow (\mathrm{M} \otimes \mathrm{K})^{*\mathrm{K}*\mathrm{K}}.$$

On a donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "j_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "i_{\mathrm{M}}"] & \mathrm{M} \otimes \mathrm{K} \arrow[d, "i_{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{K}}"] \arrow[ddr, dotted, "\text{can. ?}"] & \\
\mathrm{M}^{**} \arrow[r, "j_{\mathrm{M}^{**}}"] & \mathrm{M}^{**} \otimes \mathrm{K} \arrow[dr, "{}^t\Delta_{\mathrm{M}}{}^{-1} \circ \Delta_{\mathrm{M}^*}"'] & \\
& & (\mathrm{M} \otimes \mathrm{K})^{*\mathrm{K}*\mathrm{K}}
\end{tikzcd}$$

Supposons que ${}^t\Delta_{\mathrm{M}}{}^{-1} \circ \Delta_{\mathrm{M}^*} \circ (i_{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{K}})$ est l'application canonique du K-espace vectoriel $\mathrm{M} \otimes \mathrm{K}$ dans son bidual (sur K). On en déduit qu'elle est injective et donc $i_{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{K}}$ aussi. Ainsi si $i_{\mathrm{M}}(m) = 0$ alors

$$0 = j_{\mathrm{M}^{**}}(i_{\mathrm{M}}(m)) = (i_{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{K}})(j_{\mathrm{M}}(m)).$$

Par injectivité de $i_{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{K}}$, on obtient donc $j_{\mathrm{M}}(m) = 0$ c'est-à-dire $m \in \mathrm{M}_{\mathrm{tors}}$.

Il reste donc à montrer que ${}^t\Delta_{\mathrm{M}}{}^{-1} \circ \Delta_{\mathrm{M}^*} \circ (i_{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{K}})$ est l'application canonique δ du K-espace vectoriel $\mathrm{M} \otimes \mathrm{K}$ dans son bidual (sur K). Pour cela, on considère $(m, a) \in \mathrm{M} \times \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$ et $(\varphi, b) \in \mathrm{M}^* \times \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$. On a

$$\Delta_{\mathrm{M}^*} \circ (i_{\mathrm{M}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{K}})(m \otimes a^{-1})(\varphi \otimes b^{-1}) = \Delta_{\mathrm{M}^*}(i_{\mathrm{M}}(m) \otimes a^{-1})(\varphi \otimes b^{-1}) = a^{-1}(i_{\mathrm{M}}(m)(\varphi))b^{-1} = a^{-1}\varphi(m)b^{-1}$$

et $\quad {}^t\Delta_{\mathrm{M}} \circ \delta(m \otimes a^{-1})(\varphi \otimes b^{-1}) = \delta(m \otimes a^{-1}) \circ \Delta_{\mathrm{M}}(\varphi \otimes b^{-1}) = \Delta_{\mathrm{M}}(\varphi \otimes b^{-1})(m \otimes a^{-1}) = a^{-1}\varphi(m)b^{-1}$

ce qui donne l'égalité souhaité. ∎