Vincent Beck

BiGram

Soient k un corps de caractéristique différente de 2, E un k-espace vectoriel de dimension finie et b une forme bilinéaire symétrique sur E.

Définition 1 – Bigramien. Soient $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ deux familles **libres** de E. On définit la matrice de biGram des familles u et v par $\mathrm{M} = [\langle u_i, v_j \rangle]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et le bigramien de u et de v par $m = \det \mathrm{M}$.

Remarque 2 – Famille liée. Si l'un des familles u ou v est liée, le bigramien est évidemment nul. La réciproque est évidemment fausse : il suffit de prendre pour u et v deux familles à un élément formées de deux vecteurs orthogonaux.

Dans la suite, on ne considère donc que le cas de familles libres.

Proposition 3 – Nullité du Bigramien. Soient $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ deux familles **libres** de E et m le bigramien de u et v. On note $\mathrm{U} = \mathrm{vect}\,(u_1, \dots, u_n)$ et $\mathrm{V} = \mathrm{vect}\,(v_1, \dots, v_n)$. On a les équivalences

$$m \neq 0 \iff \mathrm{U} \cap \mathrm{V}^{\perp_b} = \{0\} \iff \mathrm{U}^{\perp_b} \cap \mathrm{V} = \{0\}$$

Preuve. On considère l'application

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{V}^* \\ x \longmapsto (y \mapsto b(x,y)) \,. \end{cases}$$

La matrice de biGram de u et v n'est alors rien d'autre que la matrice de φ dans les bases u et v^* où v^* désigne la base duale de la base v.

Ainsi $m \neq 0$ si et seulement si φ est bijective si et seulement si φ est injective. Or

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in \mathrm{U}, \qquad \forall\, y \in \mathrm{V}, \quad b(x,y) = 0\} = \mathrm{U} \cap \mathrm{V}^{\perp_b}. \qquad \blacksquare$$

Dans le cas où E est un espace préhilbertien (on n'a même pas besoin de la complétude), $\mathrm{V}^{\perp_b}$ est le noyau de la projection orthogonale sur V. La condition $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}^{\perp_b} = \{0\}$ s'écrit donc comme le fait que la restriction à U de la projection orthogonale sur V est injective.

Finalement, le bigramien est non nul si et seulement si la famille des projections orthogonales des u_i sur V est une famille libre.