Vincent Beck

Commutant d'un endomorphisme

Soit A un anneau commutatif unitaire. Pour deux A-modules M et N, on note $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ le A-module des applications A-linéaire de M dans N et $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ le A-module des endomorphismes de M.

Lemme 1 — Morphisme issu de A. Soit M un A-module. Les applications

$$\alpha\colon \begin{cases} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A},\mathrm{M}) \\ m \longmapsto (f_m : a \mapsto am) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \beta\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A},\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{M} \\ f \longmapsto f(1) \end{cases}$$

sont des isomorphismes de A-modules réciproques l'un de l'autre.

Preuve. L'application $f_m : a \mapsto am$ est A-linéaire. En effet, pour $a, a' \in \mathrm{A}$, on a

$$f_m(a+a') = am + a'm \qquad \text{et} \qquad f_m(aa') = (aa')m = a(a'm) = af_m(a')\,.$$

Montrons que α est A-linéaire. Pour $m, m' \in \mathrm{M}$ et $a \in \mathrm{A}$, on a, pour tout $a' \in \mathrm{A}$,

$$f_{m+m'}(a') = a'(m+m') = a'm + a'm' = f_m(a') + f_{m'}(a') \qquad \text{et} \qquad f_{am}(a') = a'am = a(a'm) = (af_m)(a')\,.$$

Pour $m \in \mathrm{M}$, on a $\beta\alpha(m) = f_m(1) = m$. Réciproquement, pour $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A},\mathrm{M})$, on a, pour tout $a \in \mathrm{A}$

$$(\alpha\beta(f))(a) = af(1) = f(a)\ ;$$

la dernière égalité résultant de la linéarité de f. On en déduit que α et β sont des bijections réciproques l'un de l'autre et donc β est A-linéaire. ∎

Lemme 2 — Morphisme issu d'un quotient de A. Soient M un A-module et $a \in \mathrm{A}$. On note $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\langle a\rangle$ la surjection canonique et $\mathrm{Ann}_a(\mathrm{M})$ le sous-module de M des éléments de M annulés par a :

$$\mathrm{Ann}_a(\mathrm{M}) = \{m \in \mathrm{M}, \quad am = 0\}\,.$$

Les applications

$$\alpha_a\colon \begin{cases} \mathrm{Ann}_a(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle a\rangle,\mathrm{M}) \\ m \longmapsto (f_m : \pi(b) \mapsto bm) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \beta_a\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle a\rangle,\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{Ann}_a(\mathrm{M}) \\ f \longmapsto f(\pi(1)) \end{cases}$$

sont des isomorphismes de A-modules réciproque l'un de l'autre.

Preuve. Montrons que les bijections α et β se restreignent en des bijections entre

$$\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A},\mathrm{M}), \quad f(\langle a\rangle) = 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ann}_a\mathrm{M}\,.$$

Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A},\mathrm{M})$ tel que $f(\langle a\rangle) = 0$, on a alors $af(1) = f(a) = 0$. Ainsi $f(1) = \beta(f) \in \mathrm{Ann}_a\mathrm{M}$. Réciproquement, si $m \in \mathrm{Ann}_a(\mathrm{M})$ alors, pour $b = ac \in \langle a\rangle$, on a

$$f_m(b) = bm = acm = cam = 0\,.$$

Par ailleurs, pour V un A-module, U un sous-module de V et W un A-module, la propriété universelle du quotient dit que l'application

$$\Delta\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V}/\mathrm{U},\mathrm{W}) \longrightarrow \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V},\mathrm{W}), f(\mathrm{U}) = 0\} \\ g \longmapsto g \circ \pi \end{cases}$$

est un isomorphisme de A-modules dont la bijection réciproque est donnée par $f \mapsto \overline{f}$ où $\overline{f}$ est l'application définie par $\overline{f} : \pi(x) \mapsto \overline{f}(\pi(x)) = f(x)$ (qui est bien définie).

En appliquant ce résultat avec $\mathrm{V} = \mathrm{A}$, $\mathrm{U} = \langle a\rangle$ et $\mathrm{W} = \mathrm{M}$ et en composant avec les restrictions de β et α, on obtient les isomorphismes de A-modules α_a et β_a. ∎

On suppose à présent que A est un anneau principal. On choisit une famille $\mathscr{P}$ de représentants des éléments premiers de A modulo la relation d'équivalence « être associé ».

L'objectif des lemmes suivants est de déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle a\rangle, \mathrm{A}/\langle b\rangle)$ lorsque $a \mid b$ et $b \mid a$. D'après le lemme 2, il suffit de déterminer l'annulateur de a dans $\mathrm{A}/\langle b\rangle$. On va en fait traiter le cas général.

Lemme 3 — Annulateur dans un quotient de A. Soient $a, b \in \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$. On note

$$a = u_a \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\nu_p(a)} \qquad \text{et} \qquad b = u_b \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\nu_p(b)}$$

la décomposition de a et b en facteurs premiers (c'est-à-dire $u_a, u_b \in \mathrm{A}^\times$, $\nu_p(a), \nu_p(b) \in \mathbb{N}$ et le nombre de $\nu_p(a)$ et de $\nu_p(b)$ non nuls est fini). On définit $\mathrm{P}_{a,b} = \{p \in \mathscr{P},\ \nu_p(b) - \nu_p(a) \geqslant 0\}$ et

$$d = \prod_{p \in \mathrm{P}_{a,b}} p^{\nu_p(b) - \nu_p(a)} = b/(a \wedge b)\,.$$

On a alors
$$\mathrm{Ann}_a(\mathrm{A}/\langle b\rangle) = \{c \in \mathrm{A}/\langle b\rangle, \qquad ac = 0\} = d\mathrm{A}/\langle b\rangle\,.$$

Par ailleurs, si $a \mid b$, on a alors $da = b$; si $b \mid a$, on a $d = 1$; et si $a \wedge b = 1$ alors d et b sont associés.

Preuve. Commençons par vérifier qu'on a $d = b/(a \wedge b)$. On est dans un anneau factoriel donc,

$$(a \wedge b) = u \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\inf(\nu_p(a), \nu_p(b))} \qquad \text{avec} \qquad u \in \mathrm{A}^\times.$$

On choisit $u = u_b$. On a alors

$$b/(a \wedge b) = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\nu_p(b) - \inf(\nu_p(a), \nu_p(b))} = \prod_{p \in \mathrm{P}_{a,b}} p^{\nu_p(b) - \nu_p(a)} \prod_{p \notin \mathrm{P}_{a,b}} p^{\nu_p(b) - \nu_p(b)} = d\,.$$

Soit $c \in \mathrm{A}/\langle b\rangle$ tel que $ac = 0$ et $c' \in \mathrm{A}$ tel que $c = \pi(c')$. Par hypothèse, on a $b \mid ac'$. Or, par définition de d, on peut écrire $b = d(a \wedge b)$ et $a = (a \wedge b)a'$ avec $a' \wedge d = 1$. En simplifiant par $a \wedge b$, on obtient que $d \mid a'c'$. Or $d \wedge a' = 1$ donc $d \mid c'$ et $c \in d\mathrm{A}/\langle b\rangle$. Réciproquement si $c \in d\mathrm{A}/\langle b\rangle$, on a $c = dx$ avec $x \in \mathrm{A}/\langle b\rangle$. On a alors $ac = adx = a'(a \wedge b)dx = a'bx = 0$. ∎

Lemme 4 — Simplification. Soient $d, b \in \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$ avec $d \mid b$. On note $c \in \mathrm{A}$ tel que $b = dc$. On a $d\mathrm{A}/\langle b\rangle \overset{\text{A-mod.}}{\simeq} \mathrm{A}/\langle c\rangle$.

Preuve. On note $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\langle b\rangle$ la surjection canonique. On considère l'application A-linéaire $f_{\pi(d)} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\langle b\rangle$ donnée par $f_{\pi(d)}(a) = a\pi(d) = \pi(ad)$ pour tout $a \in \mathrm{A}$ (voir le lemme 1). De plus, comme $f_{\pi(d)}(a) = d\pi(a)$, l'image de $f_{\pi(d)}$ est $d\mathrm{A}/\langle b\rangle$. Par ailleurs le noyau de $f_{\pi(d)}$ est $\{a \in \mathrm{A},\quad b \mid ad\} = \{a \in \mathrm{A},\quad c \mid a\} = \langle c\rangle$. Ainsi $f_{\pi(d)}$ passe au quotient par $\mathrm{A}/\langle c\rangle$ et définit un morphisme injectif $f : \mathrm{A}/\langle c\rangle \to \mathrm{A}/\langle b\rangle$ dont l'image est $d\mathrm{A}/\langle b\rangle$. On obtient ainsi l'isomorphisme souhaité. ∎

Corollaire 5 — Morphisme entre quotients de A. Soient $a, b \in \mathrm{A} \smallsetminus \{0\}$. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle a\rangle, \mathrm{A}/\langle b\rangle) \overset{\text{A-mod.}}{\simeq} \mathrm{A}/\langle a \wedge b\rangle\,.$$

En particulier, si $a \mid b$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle a\rangle, \mathrm{A}/\langle b\rangle) \overset{\text{A-mod.}}{\simeq} \mathrm{A}/\langle a\rangle \overset{\text{A-mod.}}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle b\rangle, \mathrm{A}/\langle a\rangle)\,.$$

Soient $a, b \in \mathrm{A}$ tel que $a \wedge b = 1$. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle a\rangle, \mathrm{A}/\langle b\rangle) \overset{\text{A-mod.}}{\simeq} 0\,.$$

Preuve. Le lemme 2 montre que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\langle a\rangle, \mathrm{A}/\langle b\rangle) \overset{\text{A-mod.}}{\simeq} \mathrm{Ann}_a(\mathrm{A}/\langle b\rangle).$$

Le lemme 3 assure que $\mathrm{Ann}_a(\mathrm{A}/\langle b\rangle) = b/(a \wedge b)\mathrm{A}/\langle b\rangle$. Enfin, le lemme 4 appliqué à b, $d = b/(a \wedge b)$ et $c = (a \wedge b)$ assure que $b/(a \wedge b)\mathrm{A}/\langle b\rangle = \mathrm{A}/\langle a \wedge b\rangle$. Finalement on obtient l'isomorphisme voulu. ∎

Proposition 6 — Commutant d'un endomorphisme. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ un endomorphisme de E. On note $\mathrm{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f et $\mathrm{P}_1 \mid \mathrm{P}_2 \mid \cdots \mid \mathrm{P}_s$ la suite des invariants de similitude de f.

On a alors

$$\dim(\mathrm{C}(f)) = \sum_{i,j} \min(\deg \mathrm{P}_i, \deg \mathrm{P}_j) = \sum_{j=1}^{s} (2s - 2j + 1) \deg \mathrm{P}_j\,.$$

Preuve. L'hypothèse assure que $\mathrm{E} \overset{k[\mathrm{X}]\text{-mod.}}{\simeq} k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_1 \oplus \cdots \oplus k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_s$. Ainsi

$$\mathrm{C}(f) = \mathrm{End}_{k[\mathrm{X}]}(\mathrm{E}) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{X}]}(k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_i, k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_j)\,.$$

Ainsi
$$\dim \mathrm{C}(f) = \sum_{i,j} \dim \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{X}]}(k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_i, k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_j)\,.$$

Or, on a $\mathrm{P}_i \mid \mathrm{P}_j$ ou $\mathrm{P}_j \mid \mathrm{P}_i$. Si $\mathrm{P}_i \mid \mathrm{P}_j$ le corollaire 5 donne $\mathrm{Hom}_{k[\mathrm{X}]}(k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_i, k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_j) \overset{k[\mathrm{X}]\text{-mod}}{\simeq} k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_i$ et donc

$$\dim \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{X}]}(k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_i, k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_j) = \dim k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_i = \deg \mathrm{P}_i = \min(\deg \mathrm{P}_i, \deg \mathrm{P}_j)\,.$$

Si $\mathrm{P}_j \mid \mathrm{P}_i$, le corollaire 5 donne $\mathrm{Hom}_{k[\mathrm{X}]}(k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_i, k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_j) \overset{k[\mathrm{X}]\text{-mod}}{\simeq} k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_j$ et donc

$$\dim \mathrm{Hom}_{k[\mathrm{X}]}(k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_i, k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_j) = \dim k[\mathrm{X}]/\mathrm{P}_j = \deg \mathrm{P}_j = \min(\deg \mathrm{P}_i, \deg \mathrm{P}_j)\,.$$

On obtient ainsi la formule souhaitée :

$$\dim(\mathrm{C}(f)) = \sum_{i,j} \min(\deg \mathrm{P}_i, \deg \mathrm{P}_j)\,.$$

Pour simplifier les notations, on pose $p_i = \deg \mathrm{P}_i$. Par hypothèse, on a $p_i \leqslant p_j$ si $i \leqslant j$. En additionnant tous les éléments de la matrice

$$\begin{bmatrix} \min(p_1,p_1) & \min(p_1,p_2) & \cdots & \min(p_1,p_s) \\ \min(p_2,p_1) & \min(p_2,p_2) & \cdots & \min(p_2,p_s) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \min(p_s,p_1) & \min(p_s,p_2) & \cdots & \min(p_s,p_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & p_1 & \cdots & p_1 \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_s \end{bmatrix}$$

on obtient la deuxième égalité La première égalité est donné dans le livre de Mneimné (Éléments de Géométrie : actions de groupes chez Cassini).