Vincent Beck

Cône et sous-variété

L'objectif de cette note est de démontrer qu'un cône ne peut être une sous-variété d'un espace affine sans être lui-même un sous-espace affine.

Définition 1 – Cône. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Une partie C de $\mathscr{E}$ est un *cône* s'il existe $x \in \mathrm{C}$ tel que pour tout $y \in \mathrm{C}$ la droite (xy) est contenue dans C (autrement si pour tout $y \in \mathrm{C}$ et pour tout $t \in k$ alors $x + t\overrightarrow{xy}$). Un tel x est appelé un *sommet de* C.

Lemme 2 – Inclusion dans le plan tangent. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie, C un cône et x un sommet de C. On suppose que C est une sous-variété alors C est contenu dans le sous-espace affine tangent à C en x.

Preuve. Soit $y \neq x \in \mathrm{C}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\gamma(t) = x + t\overrightarrow{xy} \in \mathrm{C}$. On définit ainsi un chemin de classe $\mathscr{C}^\infty$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{xy}$. Ainsi $\overrightarrow{xy}$ est dans l'espace vectoriel tangent à C en x et donc $x + \overrightarrow{xy} = y$ est dans l'espace affine tangent à C en x.

Proposition 3 – Le cas d'un cône fermé. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie et C un cône fermé de sommet x. On suppose que C est une sous-variété alors C est un sous-espace affine.

Preuve. D'après le lemme 2, il suffit de montrer que l'espace affine tangent en x à C est contenu dans C. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur tangent à C en x. Par définition, il existe un chemin γ de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans C tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. Dans un voisinage de 0, on a $\gamma(t) = x + t\gamma'(0) + \mathrm{o}\,(t)$. Comme C est un cône, on en déduit que $x + (\gamma(t) - x)/t \in \mathrm{C}$ pour tout $t \neq 0$. Ainsi $x + \overrightarrow{v} + \mathrm{o}\,(1) \in \mathrm{C}$. Comme C est fermé, on en déduit que $x + \overrightarrow{v} \in \mathrm{C}$. Ainsi l'espace affine tangent en x à C est contenu dans C.

Proposition 4 – Le cas d'un cône quelconque. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie et C un cône de sommet x. On suppose que C est une sous-variété alors C est un sous-espace affine.

Preuve. D'après le lemme 2, il suffit de montrer que l'espace affine tangent en x à C est contenu dans C. Mais il faut raffiner un peu l'argument précédent. Le cas n'est pas nécessairement fermé mais grâce à la condition de sous-variété, il l'est dans un voisinage de x.

On revient à la définition de sous-variété. On considère donc U un voisinage ouvert de x, V un voisinage ouvert de 0 dans E, F un sous-espace vectoriel de E et $\psi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme tel que $\psi(x) = 0$ et $\psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{V} \cap \mathrm{F}$.

Il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte $\mathrm{B}(x, 2r)$ de centre x et de rayon $2r$ soit contenue dans U. On considère alors $\overrightarrow{v}$ un « petit » vecteur de l'espace tangent à C en x (on prend $\|\overrightarrow{v}\| < r$). Par définition, il existe un chemin γ de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans C tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = \overrightarrow{v}$. Dans un voisinage de 0, on a $\gamma(t) = x + t\gamma'(0) + \mathrm{o}\,(t)$. Comme C est un cône, on en déduit que $x + (\gamma(t) - x)/t \in \mathrm{C}$ pour tout $t \neq 0$. Ainsi $x + \overrightarrow{v} + \mathrm{o}\,(1) \in \mathrm{C}$. En passant à la limite lorsque t tend vers 0, on obtient que $x + \overrightarrow{v} \in \mathrm{U}$ puisque $\|\overrightarrow{v}\| < r$ et $\mathrm{B}(x, 2r) \subset \mathrm{U}$. Par ailleurs, on a aussi $x + \overrightarrow{v} + \mathrm{o}\,(1) \in \mathrm{C} \cap \mathrm{U}$ pour t suffisamment petit. Ainsi $\psi(x + \overrightarrow{v} + \mathrm{o}\,(1)) \in \mathrm{F} \cap \mathrm{V}$. En passant à la limite lorsque t tend vers 0, on en déduit que $\psi(x + \overrightarrow{v}) \in \mathrm{F}$ puisque F est fermé (c'est ici qu'on utilise l'hypothèse de sous-variété). Finalement, comme $x + \overrightarrow{v} \in \mathrm{U}$, on a $\psi(x + \overrightarrow{v}) \in \mathrm{V}$ et donc $\psi(x + \overrightarrow{v}) \in \mathrm{V} \cap \mathrm{F}$. Ainsi $x + \overrightarrow{v} \in \mathrm{C} \cap \mathrm{U}$ et donc $x + \overrightarrow{v} \in \mathrm{C}$. Ainsi $x + t\overrightarrow{v} \in \mathrm{C}$ car C est un cône ce qui donne le résultat souhaité.