Base : une axiomatique

Corrigé

a) D'après (i), on a $\mathrm{X} \subset s(\mathrm{X})$. Donc $\mathrm{X} = s(\mathrm{X})$ et X est génératrice.

b) Comme il n'y a pas de $x \in \varnothing$, on a bien $\varnothing$ est libre.

c) Par définition d'une partie libre, $\{x\}$ est libre si et seulement si $x \notin s(\varnothing)$.

d) Soient $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ avec Y libre. Pour $z \in \mathrm{Z}$, on a $z \notin s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{z\})$ puisque Y est libre. D'après (iii), on a $s(\mathrm{Z} \smallsetminus \{z\}) \subset s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{z\})$ et donc $z \notin s(\mathrm{Z} \smallsetminus \{z\})$.

e) Si Y est libre alors, d'après la question **d**, toute partie finie de Y est libre. Réciproquement, on suppose que toute partie finie Z de Y est libre. Montrons par l'absurde que Y est libre. Soit $y \in \mathrm{Y}$ tel que $y \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$. D'après (iv), il existe une partie finie $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}$ telle que $y \in s(\mathrm{Z})$. La partie $\mathrm{Z} \cup \{y\} \subset \mathrm{Y}$ est finie et donc libre. Ainsi $y \notin s((\mathrm{Z} \cup \{y\}) \smallsetminus \{y\}) = s(\mathrm{Z})$. On aboutit ainsi à une contradiction. La partie Y est donc libre.

f) Si $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$ avec Z génératrice alors, d'après (iii), on a $\mathrm{X} = s(\mathrm{Z}) \subset s(\mathrm{Y})$. Ainsi $\mathrm{X} = s(\mathrm{Y})$ et Y est génératrice.

g) D'après (i), on a $x \notin \mathrm{Y}$. Soit $z \in \mathrm{Y} \cup \{x\}$. Si $z = x$ alors $x \notin s(\mathrm{Y}) = s((\mathrm{Y} \cup \{x\}) \smallsetminus \{x\})$. Si $z \neq x$, montrons par l'absurde que $z \notin s((\mathrm{Y} \cup \{x\}) \smallsetminus \{z\})$. Comme $z \neq x$, on a $z \in \mathrm{Y}$. On pose alors $\mathrm{Z} = \mathrm{Y} \smallsetminus \{z\}$.

Si $z \in s((\mathrm{Y} \cup \{x\}) \smallsetminus \{z\}) = s(\mathrm{Z} \cup \{x\})$, alors comme $z \notin s(\mathrm{Z})$ puisque Y est libre, le (v) montre que $x \in s(\mathrm{Z} \cup \{z\}) = s(\mathrm{Y})$. On a bien la contradiction souhaitée.

h) D'après (i), on a $\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2 \subset \mathrm{Y}_1 \cup s(\mathrm{Y}_2)$. Ainsi, d'après (iii), on a $s(\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2) \subset s(\mathrm{Y}_1 \cup s(\mathrm{Y}_2))$. Encore avec (iii), on a $s(\mathrm{Y}_2) \subset s(\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2)$. Par ailleurs, (i) donne $\mathrm{Y}_1 \subset s(\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2)$. Ainsi $\mathrm{Y}_1 \cup s(\mathrm{Y}_2) \subset s(\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2)$ et donc avec (iii) et (ii), on obtient $s(\mathrm{Y}_1 \cup s(\mathrm{Y}_2)) \subset s(s(\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2)) = s(\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2)$.

Corrigé

a) 1. $\Rightarrow$ 3. Montrons par l'absurde que Y est libre. Soit $y \in \mathrm{Y}$ tel que $y \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$. D'après (i), on a $\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\} \subset s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$ et donc $\mathrm{Y} \subset s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$. Ainsi, avec (iii) et (ii), on en déduit que

$$s(\mathrm{Y}) \subset s(s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})) = s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}) \subset s(\mathrm{Y})\,.$$

On obtient alors que $s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}) = s(\mathrm{Y}) = \mathrm{X}$. La partie $\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}$ est donc génératrice ce qui contredit la minimalité de Y. On a donc $y \notin s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$ et Y est libre.

3. $\Rightarrow$ 1. La partie Y est génératrice. Montrons la minimalité. Soit $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$ avec $\mathrm{Z} \neq \mathrm{Y}$. Il existe $y \in \mathrm{Y} \smallsetminus \mathrm{Z}$. On a alors $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}$ et donc avec (iii), on obtient $s(\mathrm{Z}) \subset s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$. Comme Y est libre, $y \notin s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$ et donc $y \notin s(\mathrm{Z})$. Ainsi Z n'est pas génératrice.

2. $\Rightarrow$ 3. Montrons que Y est génératrice. Soit $z \in \mathrm{X}$. Si $z \notin s(\mathrm{Y})$ alors comme Y est libre, on en déduit grâce à la question **g** de l'exercice 1 que $\mathrm{Y} \cup \{z\}$ est libre. Par maximalité, on en déduit que $\mathrm{Y} \cup \{z\} = \mathrm{Y}$ et donc $z \in \mathrm{Y} \subset s(\mathrm{Y})$ d'après (i). La partie Y est bien génératrice.

3. $\Rightarrow$ 2. La partie Y est libre. Soit $\mathrm{Y} \subset \mathrm{Z}$ avec Z libre et $\mathrm{Y} \neq \mathrm{Z}$. Il existe $z \in \mathrm{Z} \smallsetminus \mathrm{Y}$. On a ainsi $\mathrm{Y} \subset \mathrm{Z} \smallsetminus \{z\}$ et donc $s(\mathrm{Y}) \subset s(\mathrm{Z} \smallsetminus \{z\})$ d'après (iii). Comme Z est libre, on a $z \notin s(\mathrm{Z} \smallsetminus \{z\})$ et donc $z \notin s(\mathrm{Y})$ ce qui contredit le fait que Y est génératrice. Ainsi Y est bien une partie libre maximale.

b) Considérons l'ensemble $\mathcal{T}$ des parties libres de $\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$ qui contiennent Y. On cherche à construire une partie maximale au sens de l'inclusion dans $\mathcal{T}$ et pour cela on utilise le lemme de Zorn. Vérifions donc que $\mathcal{T}$ est un ensemble inductif non vide. On a $\mathrm{Y} \in \mathcal{T}$ et donc $\mathcal{T} \neq \varnothing$. Montrons à présent que toute famille d'éléments de $\mathcal{T}$ totalement ordonnée admet un majorant. Soit $\{\mathrm{Y}_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{T}$ c'est-à-dire pour tout i, j dans I, on a $\mathrm{Y}_i \subset \mathrm{Y}_j$ ou $\mathrm{Y}_j \subset \mathrm{Y}_i$. Considérons

$$\mathrm{T} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{Y}_i,$$

et montrons que c'est un majorant de la famille $(\mathrm{Y}_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a $\mathrm{Y}_i \subset \mathrm{T}$. Il faut à présent montrer que $\mathrm{T} \in \mathcal{T}$. Or, il est évident que T contient Y et est contenue dans $\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$. Il reste donc à montrer que T est libre. D'après la question **e** de l'exercice 1, il suffit de montrer que toute partie finie de T est libre. Soit donc e une partie finie de T, alors il existe $\{i_1, \ldots, i_n\}$ tel que

$$e \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Y}_{i_j}.$$

Comme la famille est totalement ordonnée, il existe $\ell \in [\![1 , n]\!]$ tel que

$$\bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{Y}_{i_j} = \mathrm{Y}_{i_\ell}.$$

La partie e est donc libre puisqu'elle est incluse dans la partie libre Y_{i_ℓ} (question **d** exercice 1). Finalement, $\mathrm{T} \in \mathcal{T}$ est donc bien un majorant de la famille $(\mathrm{Y}_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Le lemme de Zorn permet alors d'affirmer qu'il existe une partie B libre maximale contenant Y et contenue dans $\mathrm{Y}\cup\mathrm{Z}$. Montrons que B est génératrice. Soit $z \in \mathrm{Z}$. Si $z \in \mathrm{B}$ alors, d'après (i), $z \in s(\mathrm{B})$. Si $z \notin \mathrm{B}$, on a $z \in s(\mathrm{B})$ sinon d'après la question **g** de l'exercice 1, $\mathrm{B} \cup \{z\}$ est libre et alors $\mathrm{Y} \subset \mathrm{B} \cup \{z\} \subset \mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$. Par maximalité, on en déduit que $z \in \mathrm{B}$ et donc $z \in s(\mathrm{B})$ par (i). Finalement $\mathrm{Z} \subset s(\mathrm{B})$ et grâce à (iii) et (ii), on obtient que $\mathrm{X} = s(\mathrm{Z}) \subset s(s(\mathrm{B})) = s(\mathrm{B})$. Ainsi B est génératrice et donc une base.

c) Comme $\varnothing$ est libre et X est génératrice (voir exercice 1). Il suffit d'appliquer la question **a** avec $\mathrm{Y} = \varnothing$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{X}$, puis avec Y et $\mathrm{Z} = \mathrm{X}$ et enfin avec $\mathrm{Y} = \varnothing$ et Z.

d) D'après la question **c**, il existe une base B de X contenue dans Z. La base B est donc finie.

Remarque. Les questions **e** et **f** montrent que toutes les bases de X sont finies et ont le même cardinal. La démonstration qui suit est plus élémentaire mais montre simplement que toute base de X est finie (on perd la propriété liée au cardinal). Soit B une base de X. Pour tout $x \in \mathrm{Z}$, on a $x \in s(\mathrm{B})$ et donc, d'après (iv), il existe une partie finie B_x de B telle que $x \in s(\mathrm{B}_x)$. On note alors

$$\mathrm{B}_1 = \bigcup_{x\in\mathrm{Z}} \mathrm{B}_x\,.$$

Comme Z est finie, B_1 est finie. De plus, on a $\mathrm{Z} \subset s(\mathrm{B}_1)$ et donc B_1 est génératrice puisque Z l'est. La question **a** montre alors que $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}$ est donc B est finie.

e) On pose $\mathrm{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$ et m le cardinal de $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}'$. On suppose par commodité que $\mathrm{B} \cap \mathrm{B}' = \{x_1, \dots x_m\}$. D'après la question **a**, $\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\}$ n'est pas une partie génératrice de X. On a alors $\mathrm{B}' \not\subset s(\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\})$. En effet, sinon avec (iii) et (ii), on aurait $\mathrm{X} = s(\mathrm{B}') \subset s(s(\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\})) = s(\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\})$ et donc $\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\}$ serait une partie génératrice. Ainsi, il existe $y \in \mathrm{B}'$ et $y \notin s(\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\})$. Montrons alors que $\mathrm{B}_1 = (\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\}) \cup \{y\}$ est une base de X de cardinal n et telle que $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}'$ a pour cardinal $m+1$. Par construction, $y \notin s(\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\})$ et donc grâce au point (i), $y \notin \mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\}$. Ainsi, la partie B_1 a pour cardinal n. Par ailleurs, $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}' = \{x_1, \dots, x_m, y\}$ a pour cardinal $m+1$. De plus, $\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\}$ est libre (question **d** de l'exercice 1) et $y \notin s(\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\})$, donc B_1 est libre (question **g** de l'exercice 1). Pour finir, on a $y \in \mathrm{X} = s(\mathrm{B}) = s((\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\}) \cup \{x_{m+1}\})$ et donc grâce au point (v), on a $x_{m+1} \subset s(\mathrm{B}_1)$. Comme, d'après les points (i) et (iii), on a $\mathrm{B} \smallsetminus \{x_{m+1}\} \subset s(\mathrm{B}_1)$. On a $\mathrm{B} \subset s(\mathrm{B}_1)$ et donc $\mathrm{X} = s(\mathrm{B}) \subset s(s(\mathrm{B}_1)) = s(\mathrm{B}_1)$, ce qui signifie que B_1 est génératrice et donc une base.

f) D'après la question **d**, X admet une base finie B. Soit B' un base de X. On construit en suivant la méthode de la question **e** une base $\widetilde{\mathrm{B}}$ de cardinal $|\mathrm{B}|$ telle que $|\mathrm{B}' \cap \widetilde{\mathrm{B}}| = |\mathrm{B}| = |\widetilde{\mathrm{B}}|$. On a alors $\widetilde{\mathrm{B}} \subset \mathrm{B}'$ et la question **a** montre que $\widetilde{\mathrm{B}} = \mathrm{B}'$. Ainsi $|\mathrm{B}'| = |\mathrm{B}|$.

g) D'après la question **c**, on peut compléter Y en une base qui a pour cardinal n et donc $|\mathrm{Y}| \leqslant n$. Encore grâce à la question **c**, on peut extraire de Z une base qui a pour cardinal n et donc $|\mathrm{Z}| \geqslant n$. Si Y est libre et a pour cardinal n, Y est libre maximale d'après **1**. Ainsi, d'après la question **a**, Y est une base. Si Z est génératrice et a pour cardinal n, Z est génératrice minimale d'après **2**. Ainsi, d'après la question **a**, Z est une base.

h) Comme B est génératrice, on a $x \in s(\mathrm{B})$ et donc d'après (iv), il existe une partie finie $\mathrm{Y}_x \subset \mathrm{B}$ telle que $x \in \mathrm{Y}_x$.

i) Dans cette question, on utilise des raisonnements sur les cardinaux. Soient B et B' deux bases de X. On considère alors l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathrm{B}' \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathrm{B}) \\ x \longmapsto \mathrm{Y}_x \end{cases}$$

où Y_x a été construite à la question **h** (la construction de φ nécessite l'axiome du choix). On note

$$\mathrm{Y} = \bigcup_{x\in\mathrm{B}'} \mathrm{Y}_x\,.$$

Comme Y_x est fini et B' est infinie (puisque par hypothèse toute partie génératrice est infinie), on peut appliquer le corollaire 3 du livre théorie des ensembles de Bourkaki qui assure que $|\mathrm{Y}| \leqslant |\mathrm{B}'|$. Montrons à présent que $\mathrm{Y} = \mathrm{B}$. D'après (iii) et par construction de Y_x, on a $x \in s(\mathrm{Y}_x) \subset s(\mathrm{Y})$ pour tout $x \in \mathrm{B}'$. On en déduit alors que $\mathrm{B}' \subset s(\mathrm{Y})$. Avec (ii), on obtient $\mathrm{X} = s(\mathrm{B}') \subset s(s(\mathrm{Y})) = s(\mathrm{Y})$. Ainsi Y est une partie

de B qui est aussi génératrice et donc, d'après la question **a**, $\mathrm{Y} = \mathrm{B}$. On en déduit alors que $|\mathrm{B}| \leqslant |\mathrm{B}'|$. En échangeant B et B′, on obtient l'égalité des cardinaux.

Deuxième démonstration sans l'axiome du choix. Le principe est le même, mais au lieu de « choisir » une partie finie Y_x associée à x, on en construit une, entièrement caractérisée par x. Ceci évite le recours à l'axiome du choix mais demande plus de travail de construction. Cette construction est l'objet des deux résultats suivants.

Premier résultat. *Soient* B *une base de* X, $x \in \mathrm{X}$ *et* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{B}$ *tels que* $x \in s(\mathrm{Y})$ *et* $x \notin s(\mathrm{Y}_1)$ *pour tout* $\mathrm{Y}_1 \subsetneq \mathrm{Y}$. *Si* $\mathrm{Y}_2 \subset \mathrm{B}$ *vérifie* $x \in s(\mathrm{Y}_2)$ *alors* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{Y}_2$.

Si $\mathrm{Y} \not\subset \mathrm{Y}_2$, on choisit $y \in \mathrm{Y}$ et $y \notin \mathrm{Y}_2$. On considère alors l'ensemble $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}$. Par hypothèse, $x \notin s(\mathrm{Y}_1)$ et $x \in s(\mathrm{Y}) = s(\mathrm{Y}_1 \cup \{y\})$. Le (v) montre que $y \in s(\mathrm{Y}_1 \cup \{x\})$. Comme $x \in s(\mathrm{Y}_2)$, on a $\mathrm{Y}_1 \cup \{x\} \subset \mathrm{Y}_1 \cup s(\mathrm{Y}_2)$ et donc grâce à (iii), $y \in s(\mathrm{Y}_1 \cup s(\mathrm{Y}_2))$. La question **h** de l'exercice 1 donne alors $y \in s(\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2)$. Cette dernière affirmation contredit le fait que $y \notin \mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2$ et que $\mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2 \cup \{y\} = \mathrm{Y} \cup \mathrm{Y}_2$ est une partie libre (puisque contenue dans la partie libre B (question **d** de l'exercice 1)).

Deuxième résultat. *Soit* B *une base de* X. *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *il existe une unique partie* Y_x *de* B *vérifiant* $x \in s(\mathrm{Y}_x)$ *et pour toute partie* Y *de* B *telle que* $x \in s(\mathrm{Y})$ *alors* $\mathrm{Y}_x \subset \mathrm{Y}$. *De plus,* Y_x *est finie.*

Construisons la partie Y_x souhaitée. Comme B est une base de X, on a $x \in s(\mathrm{B})$. D'après (iv), il existe une partie finie Y de B telle que $x \in s(\mathrm{Y})$. On considère alors une partie Y_x de cardinal minimal parmi les parties Z de B vérifiant $x \in s(\mathrm{Z})$. Par minimalité du cardinal, une telle partie vérifie $x \notin s(\mathrm{Z})$ pour toute partie $\mathrm{Z} \subsetneq \mathrm{Y}_x$. Le premier résultat montre que $\mathrm{Y}_x \subset \mathrm{Z}$ pour toute partie $\mathrm{Z} \subset \mathrm{B}$ telle que $x \in s(\mathrm{Z})$. Si Y_x et Y'_x vérifient la propriété souhaitée, on a $\mathrm{Y}_x \subset \mathrm{Y}'_x$ et $\mathrm{Y}'_x \subset \mathrm{Y}_x$, ce qui montre l'unicité. De plus, la construction de Y_x prouve qu'elle est finie.

Corrigé

a) Une intersection de sous-espace vectoriel de V est un sous-espace vectoriel. Pour $\mathrm{Y} \subset \mathrm{V}$, on note $\operatorname{vect}\mathrm{Y}$ l'intersection des sous-espaces vectoriels contenant Y. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant Y. On montre alors que $\operatorname{vect}\mathrm{Y}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de Y à coefficients dans k.

On a bien sûr $\mathrm{Y} \subset s(\mathrm{Y})$. Comme $s(\mathrm{Y})$ est un espace vectoriel, le plus petit sous-espace vectoriel contenant $s(\mathrm{Y})$ est $s(\mathrm{Y})$ et donc $s(s(\mathrm{Y})) = s(\mathrm{Y})$. Si $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y} \subset \mathrm{V}$ alors $s(\mathrm{Y})$ est un sous-espace vectoriel contenant Y et donc Z, ainsi $s(\mathrm{Z}) \subset s(\mathrm{Y})$. L'expression des éléments de $\operatorname{vect}\mathrm{Y}$ comme combinaison linéaire de vecteurs de Y montre immédiatement la condition (iv). Enfin si $z \in s(\mathrm{Y} \cup \{x\})$ et $z \notin s(\mathrm{Y})$ alors on peut écrire

$$\exists\, (\lambda_y)_{y\in\mathrm{Y}} \in k^{(\mathrm{Y})}, \quad \exists\, \lambda \in k, \qquad z = \lambda x + \sum_{y\in\mathrm{Y}} \lambda_y y\,.$$

Si $\lambda = 0$ alors $z \in s(\mathrm{Y})$ et donc $\lambda \neq 0$. Ainsi

$$x = \lambda^{-1} z - \sum_{y\in\mathrm{Y}} \lambda^{-1}\lambda_y y \in s(\mathrm{Y} \cup \{z\})\,.$$

b) On a $\operatorname{vect}\varnothing = \{0\}$ et donc $\{x\}$ est libre si et seulement si $x \neq 0$.

c) Supposons que Y est libre. Considérons $(\lambda_y)_{y\in\mathrm{Y}} \in k^{(\mathrm{Y})}$ tel que $\sum_{y\in\mathrm{Y}} \lambda_y y = 0$. S'il existe $\lambda_y \neq 0$, on a alors

$$y = \sum_{z\in\mathrm{Y}\smallsetminus\{y\}} {\lambda_y}^{-1}\lambda_z z \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$$

ce qui contredit la liberté de Y. Donc $\lambda_y = 0$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$.

Supposons que Y vérifie la propriété $(*)$. Soit $y \in \mathrm{Y}$ tel que $y \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$. On a alors

$$\exists\, (\lambda_z)_{z\in\mathrm{Y}\smallsetminus\{y\}} \in k^{(\mathrm{Y}\smallsetminus\{y\})}, \qquad y = \sum_{z\in\mathrm{Y}\smallsetminus\{y\}} \lambda_z z\,.$$

Ainsi, avec $\lambda_y = -1$, on a $\sum_{z\in\mathrm{Y}} \lambda_z z = 0$, ce qui contredit $(*)$.

d) La définition de $\operatorname{vect}\mathrm{Y}$ à partir des combinaisons linéaires montre que l'existence de la famille $(\lambda_y)_{y\in\mathrm{Y}}$ est équivalente au fait que Y est génératrice. D'après la question **c**, la liberté de Y est équivalente à l'unicité de la famille $(\lambda_y)_{y\in\mathrm{Y}}$.

Corrigé

a) Pour $y \in \mathrm{Y}$, l'élément $y \in k(\mathrm{Y})$ est donc algébrique sur $k(\mathrm{Y})$. On a donc bien (i) : $\mathrm{Y} \subset s(\mathrm{Y})$. Par définition de s, les extensions $k(\mathrm{Y}) \to s(\mathrm{Y})$ et $k(s(\mathrm{Y})) \to s(s(\mathrm{Y}))$ sont algébriques. Les propriétés de l'algébricité assurent que $s(\mathrm{Y})$ est un sous-corps de K contenant k et donc $k(s(\mathrm{Y}))$ qui est le plus petit corps contenant k et $s(\mathrm{Y})$ est égal à $s(\mathrm{Y})$. Par transitivité de l'algébricité, l'extension composée $k(\mathrm{Y}) \to s(\mathrm{Y}) = k(s(\mathrm{Y})) \to s(s(\mathrm{Y}))$ est algébrique et donc $s(s(\mathrm{Y})) \subset s(\mathrm{Y})$. Comme d'après (i), on a $s(\mathrm{Y}) \subset s(s(\mathrm{Y}))$, on obtient (ii). Si $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$ alors $k(\mathrm{Z}) \subset k(\mathrm{Y})$ et donc x est algébrique sur $k(\mathrm{Z})$ implique x est algébrique sur $k(\mathrm{Y})$ c'est-à-dire $s(\mathrm{Z}) \subset s(\mathrm{Y})$. Si x est algébrique sur $k(\mathrm{Y})$, x est racine d'un polynôme P à coefficients dans $k(\mathrm{Y})$. Le polynôme P n'a qu'un nombre fini de coefficients et chacun des ses coefficients ne fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments de Y. Ainsi x est algébrique sur $k(\mathrm{Z})$ où Z est une partie finie de Y. Supposons que $z \in s(\mathrm{Y} \cup \{x\})$ et $z \notin s(\mathrm{Y})$, alors d'après (iv), z est algébrique sur $s(\mathrm{Z} \cup \{x\})$ où $\mathrm{Z} = \{y_1, \dots, y_n\}$ est une partie finie de Y. On peut écrire

$$z^d + \frac{\mathrm{P}_{d-1}(y_1, \dots, y_n, x)}{\mathrm{Q}_{d-1}(y_1, \dots, y_n, x)} z^{d-1} + \cdots + \frac{\mathrm{P}_0(y_1, \dots, y_n, x)}{\mathrm{Q}_0(y_1, \dots, y_n, x)} = 0\,,$$

où $\mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_i \in k[\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n, \mathrm{X}]$ et $\mathrm{Q}_i(y_1, \dots, y_n, x) \neq 0$. En multipliant l'égalité précédente par le produit des $\mathrm{Q}_i(y_1, \dots, y_n, x)$, on obtient

$$\mathrm{R}_d(y_1, \dots, y_n, x) z^d + \mathrm{R}_{d-1}(y_1, \dots, y_n, x) z^{d-1} + \cdots + \mathrm{R}_0(y_1, \dots, y_n, x) = 0$$

où $\mathrm{R}_i \in k[\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n, \mathrm{X}]$ et $\mathrm{R}_d(y_1, \dots, y_n, x) \neq 0$. On définit alors

$$\mathrm{F} = \sum_{j=0}^{d} \mathrm{Z}^j \mathrm{R}_j \in k[\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n, \mathrm{X}][\mathrm{Z}] = k[\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n, \mathrm{X}, \mathrm{Z}]$$

et on écrit
$$\mathrm{F} = \sum_{j=0}^{d'} \mathrm{X}^j \mathrm{S}_j \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{S}_j \in k[\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n, \mathrm{Z}]\,.$$

Si pour tout j, on a $\mathrm{S}_j(y_1, \dots, y_n, z) = 0$, alors $z \in s(\mathrm{Y})$. En effet, posons

$$\mathrm{S}_j = \sum_{i=0}^{d} \mathrm{Z}^i \mathrm{T}_{ij} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{T}_{ij} \in k[\mathrm{Y}_1, \dots, \mathrm{Y}_n]\,.$$

On a alors
$$\sum_{j=0}^{d'} \mathrm{T}_{dj}(y_1, \dots y_n) x^j = \mathrm{R}_d(y_1, \dots, y_n, x) \neq 0$$

Donc il existe j tel que $\mathrm{T}_{dj}(y_1, \dots y_n) \neq 0$. On en déduit que $\mathrm{S}_j(y_1, \dots, y_n, \mathrm{Z}) \in k(\mathrm{Y})[\mathrm{Z}]$ est un polynôme non nul dont z est racine c'est-à-dire $z \in s(\mathrm{Y})$. Comme par hypothèse, $z \notin s(\mathrm{Y})$, il existe j tel que $\mathrm{S}_j(y_1, \dots, y_n, z) \neq 0$ et

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}) = \sum_{j=0}^{d'} \mathrm{X}^j \mathrm{S}_j(y_1, \dots, y_n, z) \in k(\mathrm{Y} \cup \{z\})[\mathrm{X}]$$

est donc un polynôme non nul dont x est racine. Ainsi $x \in s(\mathrm{Y} \cup \{z\})$.

b) On a $\mathrm{Alg}\,\varnothing = \{x \in \mathrm{K},\ \ x \text{ algébrique sur } k\}$ et donc $\{x\}$ est libre si et seulement si x est transcendant sur k.

c) Montrons que $k(\mathrm{Y}) = k(\mathrm{Y}^c)$. Soit $y \in \mathrm{Y}$. Si $\varepsilon_y = 1$ alors $y = y^{\varepsilon_y} \in \mathrm{Y}^c$. Si $\varepsilon_y = -1$ alors $y^{-1} = y^{\varepsilon_y} \in \mathrm{Y}^c$ et donc $y \in k(\mathrm{Y}^c)$. Ainsi $\mathrm{Y} \subset k(\mathrm{Y}^c)$ ce qui donne $k(\mathrm{Y}) \subset k(\mathrm{Y}^c)$. Comme $\mathrm{Y}^{cc} = \mathrm{Y}$, on a $k(\mathrm{Y}^c) \subset k(\mathrm{Y})$ et donc $k(\mathrm{Y}) = k(\mathrm{Y}^c)$. Supposons à présent que Y est libre et fixons $y \in \mathrm{Y}$. On note $c_y = (\varepsilon_z)_{z \in \mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}}$. On a alors $\mathrm{Y}^c \smallsetminus \{y^{\varepsilon_y}\} \subset (\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})^{c_y}$. Avec ce qui précède, on en déduit que

$$k(\mathrm{Y}^c \smallsetminus \{y^{\varepsilon_y}\}) \subset k((\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})^{c_y}) = k(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}) \qquad \text{et donc} \qquad s(\mathrm{Y}^c \smallsetminus \{y^{\varepsilon_y}\}) \subset s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})\,.$$

Or pour $\mathrm{L} \subset \mathrm{M}$ une extension de corps, $x \in \mathrm{M}$ est algébrique sur L si et seulement si x^{-1} l'est. Comme $y \notin s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$ puisque Y est libre, on en déduit que $y^{\varepsilon_y} \notin s(\mathrm{Y}^c \smallsetminus \{y^{\varepsilon_y}\})$ et donc Y^c est libre. Comme $\mathrm{Y}^{cc} = \mathrm{Y}$, on en déduit que Y^c libre implique Y libre, ce qui achève la démonstration.

d) **(⇒)** On raisonne par contraposée. Supposons que Y_d n'est pas libre. Comme $\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\} \subset k(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$, on a $k(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\}) \subset k(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$. Par ailleurs, Y_d n'est pas libre donc il existe $y \in \mathrm{Y}$ tel que $y^{i_y} \in s(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})$ c'est-à-dire tel que y^{i_y} est algébrique sur $k(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})$. Soit $\mathrm{P} \in k(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})[\mathrm{X}] \subset k(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})[\mathrm{X}]$ dont y^{i_y} est racine. Comme $i_y \neq 0$, le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}^{i_y}) \in k(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})[\mathrm{X}]$ est non nul et annule y. Ainsi $y \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$ et Y n'est pas libre.

Supposons que $y^{i_y} = z^{i_z}$ pour $y \neq z$. On a alors $z \in \mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}$ et donc $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{i_y} - z^{i_z} \in k(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})[\mathrm{X}]$. Comme y est racine de P, on obtient que $y \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$ et donc Y n'est pas libre.

(⇐) Soit $z \in \mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}$. Comme $z^{i_z} \neq y^{i_y}$, le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^{i_z} - z^{i_z} \in k(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})[\mathrm{X}]$. De plus, P admet z comme racine, donc $z \in s(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})$. On obtient ainsi $\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\} \subset s(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})$. Les points (iii) et (ii) donnent alors $s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}) \subset s(s(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})) = s(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})$. On en déduit que si $y \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$ alors y est algébrique sur $k(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})$ et donc y^{i_y} est algébrique sur $k(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})$. Autrement dit $y^{i_y} \in s(\mathrm{Y}_d \smallsetminus \{y^{i_y}\})$ ce qui contredit la liberté de Y_d.

e) On pose $c = (\mathrm{sgn} i_y)_{y \in \mathrm{Y}} \in \{-1, 1\}^{\mathrm{Y}}$ et $d = (|i_y|)_{y \in \mathrm{Y}} \in {\mathbb{N}^*}^{\mathrm{Y}}$. D'après la question **c**, Y est libre si et seulement si Y^c l'est. D'après la question **d**, Y^c est libre si et seulement si $(\mathrm{Y}^c)_d$ est libre et $y^{\mathrm{sgn} i_y |i_y|} \neq z^{\mathrm{sgn} i_z |i_z|}$ pour tout $y \neq z$. Comme $y^{\mathrm{sgn} i_y |i_y|} = y^{i_y}$, on a $(\mathrm{Y}^c)_d = \mathrm{Y}^*$ et donc Y est libre si et seulement si Y^* est libre et $y^{i_y} \neq z^{i_z}$ pour tout $y \neq z$.

f) 2. ⇒ 1. Raisonnons par contraposée. Si Y n'est pas libre, il existe $y \in \mathrm{Y}$ tel que $y \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$, on peut alors écrire

$$y^d + \frac{\mathrm{P}_{d-1}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathrm{Q}_{d-1}(y_1, \ldots, y_n)} y^{d-1} + \cdots + \frac{\mathrm{P}_0(y_1, \ldots, y_n)}{\mathrm{Q}_0(y_1, \ldots, y_n)} = 0$$

où $\mathrm{P}_i, \mathrm{Q}_i \in k[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$, $\mathrm{Q}_i(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}$. En multipliant l'égalité précédente par le produit des $\mathrm{Q}_i(y_1, \ldots, y_n)$, on obtient

$$\mathrm{R}_d(y_1, \ldots, y_n) y^d + \mathrm{R}_{d-1}(y_1, \ldots, y_n) y^{d-1} + \cdots + \mathrm{R}_0(y_1, \ldots, y_n) = 0$$

où $\mathrm{R}_i \in k[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n]$ et $\mathrm{R}_d(y_1, \ldots, y_n) \neq 0$. Ainsi le polynôme

$$\mathrm{F} = \sum_{j=0}^{d} {\mathrm{X}_y}^j \mathrm{R}_j \in k[\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_n, \mathrm{X}_y] \subset k[\mathrm{X}_z, z \in \mathrm{Y}]$$

est non nul et vérifie $\mathrm{F}((y)_{y \in \mathrm{Y}}) = 0$, ce qui contredit $(*)$.

Les propriétés 2. et 3. sont équivalentes puisque tout polynôme en une infinité d'indéterminée n'en fait intervenir qu'un nombre fini.

1. ⇒ 3. Montrons la propriété par récurrence sur n. Pour $n = 0$, le résultat est évident. Pour $n = 1$, la propriété est équivalente à y est transcendant sur k pour tout $y \in \mathrm{Y}$ ou encore à $y \notin s(\varnothing)$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$. Comme Y est libre, on a $y \notin s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$. Ainsi comme $s(\varnothing) \subset s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\})$ d'après (iii), on obtient le résultat pour $n = 1$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Soient $\mathrm{Z} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ une partie de Y avec $|\mathrm{Z}| = n$ et $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ tel que $\mathrm{P}(y_1, \ldots, y_n) = 0$. On écrit alors

$$\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{d} \mathrm{P}_j {\mathrm{X}_n}^j \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{P}_j \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1}]$$

S'il existe j tel que $\mathrm{P}_j(y_1, \ldots, y_{n-1}) \neq 0$, le polynôme

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) = \sum_{j=0}^{d} \mathrm{P}_j(y_1, \ldots, y_{n-1}) \mathrm{X}^j \in k(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y_n\})[\mathrm{X}]$$

est non nul et admet y_n comme racine. L'élément y_n est donc algébrique sur $k(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y_n\})$ ce qui signifie que $y_n \in s(\mathrm{Y} \smallsetminus \{y_n\})$ et contredit la liberté de Y. On a donc $\mathrm{P}_j(y_1, \ldots, y_{n-1}) = 0$ pour tout j. L'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer que $\mathrm{P}_j = 0$ pour tout j et donc $\mathrm{P} = 0$.