Correction de l'exercice supplémentaire

Exercice 1 – Décomposition en cycle. Soit $\sigma = (1, 2, \ldots, \ell) \in \mathfrak{S}_\ell$ un cycle de longueur ℓ. Déterminer le nombre et la longueur des cycles de la décomposition en cycles à support disjoint de σ^k.

Corrigé Par définition, le nombre de cycles est le nombre d'orbite de l'ensemble $(1, 2, \ldots, \ell)$ sous l'action du groupe $\mathrm{H} = \langle \sigma^k \rangle$ et la longueur des cycles est le cardinal de chacune de ces orbites.

Ainsi, les quantités cherchées « ne dépendent pas directement de k » mais du groupe $\langle \sigma^k \rangle$. Par exemple, on peut remplacer k par $\mathrm{pgcd}\,(k, \mathrm{ordre}(\sigma)) = \mathrm{pgcd}\,(k, \ell)$.

La commutativité du groupe engendré par σ assure que les orbites sous $\langle \sigma^k \rangle$ ont toutes le même cardinal. Brièvement, l'orbite de x a pour cardinal H/H_x où H_x désigne le stabilisateur de x. Or si $x, y \in [\![1 \,,\, \ell]\!]$, comme x et y sont dans la même orbite sous $\mathrm{G} = \langle \sigma \rangle$, on a $\mathrm{G}_y = g\mathrm{G}_x g^{-1}$ (à vérifier) où $g \in \mathrm{G}$ et $g(x) = y$ (les stabilisateurs de deux éléments d'une même orbite sont conjugués). Comme G est commutatif, on en déduit que $\mathrm{G}_x = \mathrm{G}_y$.

Par ailleurs, on a $\mathrm{H}_x = \mathrm{G}_x \cap \mathrm{H}$ et donc $\mathrm{H}_x = \mathrm{H}_y$ et donc les orbites ont toute le même cardinal $|\mathrm{H}/\mathrm{H}_x|$ et il y en $\ell/|\mathrm{H}/\mathrm{H}_x|$.

En fait, on a $\mathrm{G}_x = \{1\}$ et donc $\mathrm{H}_x = \mathrm{G}_x \cap \mathrm{H} = 1$ et donc les orbites ont toute pour cardinal $|\mathrm{H}|$ et il y en a $\ell/|\mathrm{H}|$. Montrons que $\mathrm{G}_x = \{1\}$. On peut vérifier à la main que si $\sigma^m(x) = x$ alors $\ell \mid m$ et $\sigma^m = \mathrm{id}$ ou alors $\langle \sigma \rangle$ agit transitivement sur $\{1, \ldots, \ell\}$. Il y a donc une seule orbite de cardinal ℓ. Le stabilisateur d'un point x a donc pour cardinal $|\mathrm{G}|/\ell$ (quotient du cardinal du groupe par celui de l'orbite de x). Comme $|\mathrm{G}| = \ell$, on obtient que $\mathrm{G}_x = 1$

Finalement, il s'agit de déterminer l'ordre du sous-groupe $\langle \sigma^k \rangle = \langle \sigma^{\mathrm{pgcd}\,(k,\ell)} \rangle$ qui est « évidemment (ça n'a plus rien à voir avec les permutations) » $\ell/\mathrm{pgcd}\,(k, \ell)$. Ainsi le nombre d'orbite est $\mathrm{pgcd}\,(k, \ell)$ et le cardinal de chacune des orbites est $\ell/\mathrm{pgcd}\,(k, \ell)$. ■