Autour des groupes de réflexions
Cours : Michel Broué
TD : Vincent Beck

Master 2 — Mathématiques fondamentales
Université Paris VII — Denis Diderot
Année 2005—2006

Théorème de Stanley —Théorème de Steinberg

Représentations de MacDonald —Théorème de Gutkin

Corrigé Le lemme 1.7 du polycopié de Broué assure que si s et s' commutent alors ($\mathrm{H} = \mathrm{H}'$ et $\mathrm{D} = \mathrm{D}'$) ou ($\mathrm{D} \subset \mathrm{H}'$ et $\mathrm{D}' \subset \mathrm{H}$).

Réciproquement, si $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$ alors H est stable par $\langle s, s'\rangle$. Le théorème de Maschke assure alors qu'il existe une droite D_1 stable par $\langle s, s'\rangle$ supplémentaire de H. Comme $\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{H} = \mathrm{D}_1 \cap \mathrm{H}' = \{0\}$, le lemme 1.6 montre que $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D} = \mathrm{D}'$. On en déduit, grâce au lemme 1.7, que s et s' commutent. Si $\mathrm{D} = \mathrm{D}'$ alors D est stable par $\langle s, s'\rangle$. Le théorème de Maschke assure alors qu'il existe un hyperplan H_1 stable par $\langle s, s'\rangle$ supplémentaire de D. Le lemme 1.6 montre alors que $\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 = \mathrm{H}'$ et donc s et s' commutent (lemme 1.7). Si $\mathrm{D} \subset \mathrm{H}'$ alors D est stable par $\langle s, s'\rangle$. Le théorème de Maschke assure alors qu'il existe un hyperplan H_1 stable par $\langle s, s'\rangle$ supplémentaire de D. On a alors, grâce au lemme 1.6, $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}$ et $\mathrm{D}' \subset \mathrm{H}_1$. Ainsi $\mathrm{D} \subset \mathrm{H}'$ et $\mathrm{D}' \subset \mathrm{H}$. On en déduit avec le lemme 1.7 que s et s' commutent. Si $\mathrm{D}' \subset \mathrm{H}$ alors en échangeant s et s' dans le raisonnement précédent, on obtient le résultat souhaité.

Corrigé

a) Le groupe $\mathrm{G_H}$ est fini et H est un sous-$\mathrm{G_H}$-module de G. Grâce au théorème de Maschke, il existe une droite D stable par tous les éléments de $\mathrm{G_H}$. Ainsi $g \in \mathrm{G_H}$ induit par restriction un automorphisme $\widetilde{g}$ de D. Comme les éléments de $\mathrm{G_H}$ agissent trivialement sur H, l'application $g \in \mathrm{G_H} \mapsto \widetilde{g} \in \mathrm{GL(D)}$ est injective. De plus, D est de dimension 1 donc l'application det réalise un isomorphisme de groupes entre GL(D) et $\mathbb{C}^\times$. Ainsi $g \in \mathrm{G_H} \mapsto \det \widetilde{g} \in \mathbb{C}^\times$ est un morphisme de groupes injectif et $\mathrm{G_H}$ s'identifie à un sous-groupe fini de $\mathbb{C}^\times$ et donc est cyclique. Comme les éléments de $\mathrm{G_H}$ agissent trivialement sur H, on a $\det g = \det \widetilde{g}$, ce qui donne le résultat souhaité.

Remarque. Si $\mathrm{H} \notin \mathscr{H}$ alors $\mathrm{G_H} = \mathrm{id_V}$. Si $\mathrm{H} \in \mathscr{H}$ alors $\mathrm{G_H}$ contient une réflexion d'hyperplan H et donc $\mathrm{G_H} \neq \{\mathrm{id_V}\}$. De plus, les éléments de $\mathrm{G_H}$ distincts de l'élément neutre sont exactement les réflexions de G d'hyperplan H.

b) Soient $\mathrm{H}, \mathrm{H}' \in \mathcal{O}$. Il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{H}' = g\mathrm{H}$. On a alors $g\mathrm{G_H}g^{-1} \subset \mathrm{G_{H'}}$ et donc $e_\mathrm{H} = |\mathrm{G_H}| \leqslant |\mathrm{G_{H'}}| = e_{\mathrm{H}'}$. En échangeant les rôles de H et H', on obtient $e_\mathrm{H} = e_{\mathrm{H}'}$.

c) Soit $\widetilde{s} \in \mathscr{S}$ une réflexion d'hyperplan H. On note H_s (resp. D_s) l'hyperplan (resp. la droite) de s. Supposons que s et $\widetilde{s}$ commutent. L'hyperplan $s\mathrm{H}$ est l'hyperplan de la réflexion $s\widetilde{s}s^{-1} = \widetilde{s}$. Ainsi $s\mathrm{H} = \mathrm{H}$ et l'orbite de H est $\{\mathrm{H}\}$. Si s et $\widetilde{s}$ ne commutent pas, montrons que le cardinal m de l'orbite de H est $|\langle s\rangle|$. On a bien sûr $m \leqslant |\langle s\rangle|$ et $s^m\mathrm{H} = \mathrm{H}$. Si $m < |\langle s\rangle|$ alors s^m est une réflexion d'hyperplan H_s et de droite D_s qui laisse fixe H. Le lemme 1.6 montre alors que $\mathrm{D}_s \subset \mathrm{H}$ ou $\mathrm{H} = \mathrm{H}_s$. Ainsi, d'après l'exercice 1, s et $\widetilde{s}$ commutent ce qui contredit l'hypothèse de départ. On obtient donc $m = |\langle s\rangle|$. L'orbite de H sous $\langle s\rangle$ est alors $\big\{\mathrm{H}, s\mathrm{H}, \ldots, s^{|\langle s\rangle|-1}\mathrm{H}\big\}$.

Remarque. Grâce à l'exercice 1, le fait que s et $\widetilde{s}$ commutent s'interprète géométriquement. Ainsi la condition de commutation ne dépend pas du choix de $\widetilde{s}$ parmi les réflexions d'hyperplans H. De plus, comme s et $\widetilde{s}$ ne commutent pas si et seulement si s et $s^k\widetilde{s}s^{-k}$ ne commutent pas et que $s^k\mathrm{H}$ est l'hyperplan de $s^k\widetilde{s}s^{-k}$, on en déduit que la condition de commutation sur les réflexions ne dépend pas du représentant de l'orbite de H sous $\langle s\rangle$.

d) Pour $h \in \mathrm{H}$ et $d \in \mathrm{D}$, on a $s^{-1}(h) = h$ et $s^{-1}(d) = \det^{-1}(s)d$. Ainsi

$$s\alpha_\mathrm{H}(h) = \alpha_\mathrm{H}(s^{-1}h) = \alpha_\mathrm{H}(h) = 0 = \det(s^{-1})\alpha_\mathrm{H}(h) \qquad \text{et} \qquad s\alpha_\mathrm{H}(d) = \alpha_\mathrm{H}(s^{-1}d) = \det(s^{-1})\alpha_\mathrm{H}(d)\,.$$

et
$$s\alpha(h) = \alpha(s^{-1}h) = \alpha(h) \qquad \text{et} \qquad s\alpha(d) = \alpha(s^{-1}d) = \det(s^{-1})\alpha(d) = 0 = \alpha(d)\,.$$

On en déduit que $s\alpha_\mathrm{H} = \det^{-1}(s)\alpha_\mathrm{H}$ et $s\alpha = \alpha$.

e) On note H (resp. D) l'hyperplan (resp. la droite) de s. L'ensemble $\mathcal{O}$ est une orbite d'hyperplans sous G. Ainsi le sous-groupe de G engendré par s agit sur $\mathcal{O}$. On note alors $\mathcal{V} = \mathcal{O}/\langle s\rangle$ l'ensemble des orbites des éléments de $\mathcal{O}$ sous l'action de s et $(\mathrm{H}_v)_{v\in\mathcal{V}}$ une famille de représentants des orbites de $\mathcal{O}$ sous s. Pour $v \in \mathcal{V}$, on choisit s_{H_v} une réflexion d'hyperplan H_v. On désigne alors par

$$\mathcal{V}_1 = \{v \in \mathcal{V}, \quad s_{\mathrm{H}_v}s \neq ss_{\mathrm{H}_v}\}\,, \qquad \mathcal{V}_2 = \{v \in \mathcal{V}, \quad \mathrm{D} \subset \mathrm{H}_v\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}_3 = \{v \in \mathcal{V}, \quad \mathrm{H} = \mathrm{H}_v\}\,.$$

D'après le lemme 1.7 et l'exercice 1, les ensembles $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ et $\mathcal{V}_3$ sont deux à deux disjoints et leur réunion est $\mathcal{V}$. La question **c** montre alors que

$$\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \prod_{v\in\mathcal{V}_1} \left(\alpha_{\mathrm{H}_v}\alpha_{s\mathrm{H}_v}\cdots\alpha_{s^{|\langle s\rangle|-1}\mathrm{H}_v}\right) \prod_{v\in\mathcal{V}_2}\alpha_{\mathrm{H}_v} \prod_{v\in\mathcal{V}_3}\alpha_{\mathrm{H}_v}\,.$$

Comme $\alpha_{s^k\mathrm{H}_v}$ et $s^k\alpha_v$ sont des formes linéaires de noyau $s^k\mathrm{H}_v$, elles sont proportionnelles et donc

$$\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \lambda \prod_{v\in\mathcal{V}_1} \left(\alpha_{\mathrm{H}_v}s\alpha_{\mathrm{H}_v}\cdots s^{|\langle s\rangle|-1}\alpha_{\mathrm{H}_v}\right) \prod_{v\in\mathcal{V}_2}\alpha_{\mathrm{H}_v} \prod_{v\in\mathcal{V}_3}\alpha_{\mathrm{H}_v} \qquad \text{avec} \quad \lambda\in\mathbb{C}^\times\,.$$

On a alors
$$s\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \lambda \prod_{v\in\mathcal{V}_1} \left(s\alpha_{\mathrm{H}_v}s^2\alpha_{\mathrm{H}_v}\cdots s^{|\langle s\rangle|}\alpha_{\mathrm{H}_v}\right) \prod_{v\in\mathcal{V}_2}s\alpha_{\mathrm{H}_v} \prod_{v\in\mathcal{V}_3}s\alpha_{\mathrm{H}_v}\,.$$

La question **d** montre que $s\alpha_{\mathrm{H}_v} = \alpha_{\mathrm{H}_v}$ pour $v\in\mathcal{V}_2$ et $s\alpha_{\mathrm{H}_v} = \det^{-1}(s)\alpha_{\mathrm{H}_v}$ pour $v\in\mathcal{V}_3$. On en déduit que

$$s\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \lambda \prod_{v\in\mathcal{V}_1} \left(s\alpha_{\mathrm{H}_v}s^2\alpha_{\mathrm{H}_v}\cdots\alpha_{\mathrm{H}_v}\right) \prod_{v\in\mathcal{V}_2}\alpha_{\mathrm{H}_v} \prod_{v\in\mathcal{V}_3}\det(s^{-1})\alpha_{\mathrm{H}_v} = (\det s)^{-|\mathcal{V}_3|}\mathrm{Q}_{\mathcal{O}}.$$

Calculons $\mathcal{V}_3$. D'après la question **c**, les orbites qui sont dans $\mathcal{V}_3$ sont réduites à des singletons. On identifie alors une orbite appartenant à $\mathcal{V}_3$ et l'hyperplan qui forme cet orbite. Sous cette identification, $\mathcal{V}_3$ est l'ensemble des hyperplans de $\mathcal{O}$ qui sont des hyperplans de s. Ainsi $\mathcal{V}_3 = \{\mathrm{H}\}$ si $\mathrm{H}\in\mathcal{O}$ et $\mathcal{V}_3 = \varnothing$ sinon. D'où

$$s\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \det{}^{-1}(s)\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} \quad \text{si } \mathrm{H}\in\mathcal{O} \qquad \text{et} \qquad s\mathrm{Q}_{\mathcal{O}} = \mathrm{Q}_{\mathcal{O}} \quad \text{sinon.}$$

f) On pose
$$\mathrm{Q}_\chi = \prod_{\mathcal{O}\in\mathscr{H}} \mathrm{Q}_{\mathcal{O}}{}^{a_{\mathcal{O}}} \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*).$$

Pour $s\in\mathscr{S}$, il existe un unique $\mathcal{O}\in\mathscr{H}$ tel que l'hyperplan de s appartienne à $\mathcal{O}$. La question **d** montre alors que $s\mathrm{Q}_\chi = \det(s)^{-a_{\mathcal{O}}}\mathrm{Q}_\chi$. La droite $\mathbb{C}\mathrm{Q}_\chi$ est donc stable par s pour tout $s\in\mathscr{S}$. Comme $\mathscr{S}$ engendre G, on en déduit que $\mathbb{C}\mathrm{Q}_\chi$ est stable par G et donne donc une représentation de dimension 1 de G c'est-à-dire un caractère linéaire de G qui de plus vérifie les égalités souhaitées. L'unicité d'un tel caractère linéaire est assurée par le fait que $\mathscr{S}$ engendre G et qu'un caractère linéaire est un morphisme de groupe.

g) Soit $\mathrm{H}\in\mathscr{H}$. Il existe un unique entier $a_{\mathrm{H}}\in[\![\,0\,,\,e_{\mathrm{H}}-1\,]\!]$ tel que $\chi(s_{\mathrm{H}}) = \exp(2i\pi/e_{\mathrm{H}})^{-a_{\mathrm{H}}}$. Supposons H et $\mathrm{H}' = g\mathrm{H}$ sont dans la même orbite sous G. Comme $\det(gs_{\mathrm{H}}g^{-1}) = \det(s_{\mathrm{H}}) = \exp(2i\pi/e_{\mathrm{H}}) = \exp(2i\pi/e_{\mathrm{H}'})$ et $\mathrm{G}_{\mathrm{H}'} = g\mathrm{G}_{\mathrm{H}}g^{-1}$ (voir question **b**), on a $s_{\mathrm{H}'} = s_{g\mathrm{H}} = gs_{\mathrm{H}}g^{-1}$. On en déduit que

$$\det(s_{\mathrm{H}'})^{-a_{\mathrm{H}'}} = \chi(s_{\mathrm{H}'}) = \chi(s_{\mathrm{H}}) = \det(s_{\mathrm{H}})^{-a_{\mathrm{H}}} = \det(s_{\mathrm{H}'})^{-a_{\mathrm{H}}}.$$

On obtient ainsi $a_{\mathrm{H}} = a_{\mathrm{H}'}$. La fonction a est donc constante sur les orbites de $\mathscr{H}$ sous G. On note $a_{\mathcal{O}}$ la valeur commune des a_{H} pour $\mathrm{H}\in\mathcal{O}$. Soient $s\in\mathscr{S}$ et H l'hyperplan de s. On a $s\in\mathrm{G}_{\mathrm{H}} = \langle s_{\mathrm{H}}\rangle$. Comme χ et $\det^{-a_{\mathrm{H}}}$ sont des morphismes de groupes qui coïncident sur le générateur de $\langle s_{\mathrm{H}}\rangle$, ils coïncident sur $\langle s_{\mathrm{H}}\rangle$ ce qui donne le résultat souhaité.

h) *Première démonstration.* On raisonne par récurrence. Pour $i=0$, il n'y a rien à démontrer. Soit $i\in[\![\,0\,,\,e-2\,]\!]$. On suppose que α^i divise Q pour tout polynôme Q tel que $s\mathrm{Q} = \det^{-i}(s)\mathrm{Q}$ et on considère $\mathrm{P}\in\mathrm{S}(\mathrm{V}^*)$ tel que $s\mathrm{P} = \det^{-i-1}(s)\mathrm{P}$. Pour $h\in\mathrm{H}$, on a $s^{-1}(h) = h$ et donc $\det^{-i-1}(s)\mathrm{P}(h) = (s\mathrm{P})(h) = \mathrm{P}(s^{-1}h) = \mathrm{P}(h)$. Comme $\det^{-i-1}(s)\neq 1$, on en déduit que $\mathrm{P}(h) = 0$ pour tout $h\in\mathrm{H}$ et donc α divise P. On pose alors $\mathrm{P} = \alpha\mathrm{Q}$. Comme $s(\alpha) = \det^{-1}(s)\alpha$ (voir la question **d**), on en déduit par intégrité de $\mathrm{S}(\mathrm{V}^*)$ que $s\mathrm{Q} = \det^{-i}(s)\mathrm{Q}$. L'hypothèse de récurrence donne alors α^i divise Q. On a ainsi α^{i+1} divise $\alpha\mathrm{Q} = \mathrm{P}$.

Deuxième démonstration. On considère $(u_1,\dots,u_{\ell-1})$ une base de H et u_ℓ un vecteur directeur de la droite de s. On note $\mathscr{B}^* = (v_1,\dots,v_\ell)$ la base duale de la base $(u_1,\dots,u_\ell)$. On remarque que v_ℓ est une forme linéaire de noyau H. Ainsi v_ℓ est proportionnelle à α et $(v_1,\dots,v_{\ell-1},\alpha)$ est une base de V^*. On en déduit que $\mathrm{P}\in\mathrm{S}(\mathrm{V}^*)$ peut s'écrire

$$\mathrm{P} = \sum_{(j_1,\dots,j_\ell)\in\mathbb{N}^\ell} a_{j_1,\dots,j_\ell}{v_1}^{j_1}\cdots{v_{\ell-1}}^{j_{\ell-1}}\alpha^{j_\ell}\,.$$

où le nombre de $a_{j_1,\dots,j_\ell}$ non nul est fini. Par ailleurs, $\operatorname{Ker} v_i$ contient la droite de s pour tout $i\in[\![\,1\,,\,\ell-1\,]\!]$. La question **d** donne alors $sv_i = v_i$ pour $i\in[\![\,1\,,\,\ell-1\,]\!]$ et $s\alpha = \det^{-1}(s)\alpha$. On en déduit que

$$s\mathrm{P} = \sum_{(j_1,\dots,j_\ell)\in\mathbb{N}^\ell} \det{}^{-j_\ell}(s)a_{j_1,\dots,j_\ell}{v_1}^{j_1}\cdots\alpha^{j_\ell}\,.$$

Comme $s\mathrm{P} = \det^{-i}(s)\mathrm{P}$, l'indépendance linéaire des monômes $\left\{{v_1}^{j_1}\cdots{v_{\ell-1}}^{j_{\ell-1}}\alpha^{j_\ell}\right\}_{(j_1,\dots,j_\ell)\in\mathbb{N}^\ell}$ donne alors

$$\forall\,(j_1,\dots,j_\ell)\in\mathbb{N}^\ell, \qquad \det{}^{-j_\ell}(s)a_{j_1,\dots,j_\ell} = \det{}^{-i}(s)a_{j_1,\dots,j_\ell}$$

Comme $i\in[\![\,0\,,\,e-1\,]\!]$ et $j_\ell\in\mathbb{N}$, on en déduit que $a_{j_1,\dots,j_\ell}\neq 0$ implique $j_\ell = i+ke$ avec $k\in\mathbb{N}$. Ainsi α^i divise tous les monômes qui interviennent dans P et donc α^i divise P.

i) La question **f** montre que $\mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^{\mathrm{G}}\mathrm{Q}_\chi \subset \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^\chi$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^\chi$. Montrons que $\mathrm{Q}_\chi \mid \mathrm{Q}$. Soit $s \in \mathscr{S}$ une réflexion d'hyperplan H. On note $\mathcal{O}$ l'orbite de H sous G. Par hypothèse, on a $s\mathrm{Q} = \chi(s)\mathrm{Q} = \det^{-a_\mathcal{O}}(s)\mathrm{Q}$. La question **h** donne alors ${\alpha_\mathrm{H}}^{a_\mathcal{O}} \mid \mathrm{Q}$. Comme les α_H sont premiers entre eux deux à deux, on en déduit que

$$\prod_{\mathrm{H}\in\mathscr{H}} {\alpha_\mathrm{H}}^{a_\mathcal{O}} = \prod_{\mathcal{O}\in\mathscr{H}/\mathrm{G}} \mathrm{Q}_\mathcal{O}{}^{a_\mathcal{O}} = \mathrm{Q}_\chi \mid \mathrm{Q}.$$

On a alors $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_\chi\mathrm{P}$ avec $\mathrm{P} \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)$. Comme $\mathrm{Q}_\chi \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^\chi$ d'après la question **e**, on en déduit par intégrité de $\mathrm{S}(\mathrm{V}^*)$ que $\mathrm{P} \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^{\mathrm{G}}$ et donc $\mathrm{P} \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^{\mathrm{G}}\mathrm{Q}_\chi$.

Corrigé Soit v un sommet de Δ. Pour $v' \in \Delta$, on définit $\delta_v(v')$ la distance de v à v' c'est-à-dire la longueur du plus court chemin reliant v à v'. Comme Δ est fini et connexe, $\delta_v(v')$ est bien défini et appartient à $\mathbb{N}$. On considère alors $s \in \Delta$ tel que $\delta_v(s)$ est maximal. Le graphe $\Delta \smallsetminus \{s\}$ est encore connexe. En effet, soient v' et v'' deux sommets de Δ distincts de s, il existe un chemin de v' à v (resp. v à v'') de longueur $\delta_v(v')$ (resp. $\delta_v(v'')$). La composée des deux chemins donne un chemin de v' à v'' qui ne passe pas par s sinon v' ou v'' serait plus loin de v que s.

Corrigé

a) Soit $\overline{k}$ la cloture algébrique de k. Le k-espace vectoriel $\mathrm{V}' = \overline{k}\otimes\mathrm{V}$ est muni d'une structure de $\overline{k}$-espace vectoriel de dimension ℓ. De façon précise, si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_\ell)$ est une k-base de V alors $\mathscr{B}' = (1\otimes e_1, \dots, 1\otimes e_\ell)$ est une $\overline{k}$-base de V'. L'application $\varphi' = \mathrm{id}_{\overline{k}} \otimes \varphi$ est alors un $\overline{k}$-endomorphisme de V'. De plus, les matrices de φ dans la base $\mathscr{B}$ et de φ' dans la base $\mathscr{B}'$ coïncident. En particulier, $\mathrm{tr}\,(\varphi) = \mathrm{tr}\,(\varphi')$ et $\det(1+\varphi\mathrm{X}) = \det(1+\varphi'\mathrm{X})$. Par ailleurs, on a $\Lambda^i_{\overline{k}}(\mathrm{V}') = \overline{k}\otimes\Lambda^i(\mathrm{V})$ et via cet isomorphisme $\Lambda^i(\varphi')$ s'identifie à $\mathrm{id}_{\overline{k}} \otimes \Lambda^i(\varphi)$. En particulier, $\mathrm{tr}\,(\Lambda^i(\varphi)) = \mathrm{tr}\,(\Lambda^i(\varphi'))$. On peut donc remplacer φ par φ' c'est-à-dire supposer k algébriquement clos et donc φ trigonalisable. Soit $(e_1, \dots, e_\ell)$ une base de trigonalisation supérieure de φ. On note λ_j la valeur propre de φ associée à e_j. La famille $\widetilde{\mathscr{B}}_i = (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i})_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant\ell}$ forme une base de $\Lambda^i(\mathrm{V})$ que l'on range par ordre lexicographique. La matrice de $\Lambda^i(\varphi)$ dans la base $\widetilde{\mathscr{B}}_i$ est alors triangulaire supérieure et les termes diagonaux sont les produits de la forme $\lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_i}$ avec $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant \ell$. On a donc

$$\mathrm{tr}\,(\Lambda^i(\varphi)) = \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant\ell} \lambda_{j_1}\cdots\lambda_{j_i}\,.$$

Ainsi $$\sum_{i=0}^{\ell} \mathrm{tr}\,(\Lambda^i(\varphi))\mathrm{X}^i \;=\; \sum_{i=0}^{\ell} \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant\ell} (\lambda_{j_1}\mathrm{X})\cdots(\lambda_{j_i}\mathrm{X}) \;=\; \prod_{i=1}^{\ell}(1+\lambda_i\mathrm{X}) \;=\; \det(1+\varphi\mathrm{X})\,.$$

b) Soit $j : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ l'inclusion. L'application $\Lambda^i(j)$ est injective et identifie $\Lambda^i(\mathrm{W})$ à un sous-espace vectoriel de $\Lambda^i(\mathrm{V})$. En effet, si $(e_1, \dots, e_{\ell-1})$ est une base de W alors $\mathscr{B}_\mathrm{W} = (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i})_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant\ell-1}$ est une base de $\Lambda^i(\mathrm{W})$ qui est une partie d'une base de $\Lambda^i(\mathrm{V})$. Par ailleurs, l'application $(w_1, \dots, w_{i-1}) \mapsto w_1 \wedge \cdots \wedge w_{i-1} \wedge e$ est $(i-1)$-linéaire alternée, elle définit donc une application linéaire $u : b \in \Lambda^{i-1}(\mathrm{W}) \mapsto b \wedge e \in \Lambda^i(\mathrm{V})$. La propriété universelle de la somme directe montre alors que l'application Φ est bien définie et linéaire.

Montrons à présent que Φ est bijective. On note $\mathscr{C}_\mathrm{W} = (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}})_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{i-1}\leqslant\ell-1}$. C'est une base de $\Lambda^{i-1}(\mathrm{W})$ et $\mathscr{B}_\mathrm{W} \cup \mathscr{C}_\mathrm{W}$ forme une base de $\Lambda^i(\mathrm{W}) \oplus \Lambda^{i-1}(\mathrm{W})$. Par ailleurs, comme $(e_1, \dots, e_{\ell-1}, e)$ est une base de V la réunion des familles $\mathscr{B}_\mathrm{V} = (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i})_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant\ell-1}$ et $\mathscr{C}_\mathrm{V} = (e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e)_{1\leqslant j_1<\cdots<j_{i-1}\leqslant\ell-1}$ est une base de $\Lambda^i(\mathrm{V})$. On constate alors que l'application Φ envoie $\mathscr{B}_\mathrm{W} \cup \mathscr{C}_\mathrm{W}$ sur $\mathscr{B}_\mathrm{V} \cup \mathscr{C}_\mathrm{V}$. Elle est donc bijective.

c) Soit W' un supplémentaire G-stable de W (théorème de Maschke), on a alors $\mathrm{W}' = \mathbb{C}e$ avec $e \notin \mathrm{W}$ et $ge = e$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Pour ce choix de e, l'application Φ_e est un isomorphisme de G-module. En effet, on sait que Φ_e est linéaire et bijective (question **b**) et pour $(a, b) \in \Lambda^i(\mathrm{W}) \times \Lambda^{i-1}(\mathrm{W})$ et $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\Phi_e(g\cdot(a,b)) = \Phi_e(ga, gb) = ga + gb \wedge e = ga + gb \wedge ge = g\cdot(a + b\wedge e) = g\cdot\Phi_e((a,b))\,.$$

Corrigé

a) Les e_j sont linéairement indépendants donc $\dim \mathrm{V}' = \ell - 1$. De plus, la restriction à V' du produit scalaire hermitien de V donne un produit scalaire hermitien sur V'. Par ailleurs, V' contient e_j pour $j \neq \ell$. On en déduit alors, grâce au lemme 1.6, que V' est stable par s_j pour $j \neq \ell$. Ainsi V' est stable par G'. De plus, comme $e_j \in \mathrm{V}'$ pour $j \neq \ell$, s_j agit sur V' comme une réflexion d'hyperplan $\mathrm{V}' \cap \mathrm{H}_j$ (lemme 1.6). Enfin, au vu du produit scalaire choisi sur V', l'endomorphisme induit par s_j sur V' est unitaire.

Comme V' est stable par G' et que G' est formé d'endomorphismes unitaires, $V'^{\perp}$ est stable par G'. En particulier, $V'^{\perp}$ est stable par s_j pour $j \in [\![1\,,\,\ell-1]\!]$. Le lemme 1.6 montre alors que $V'^{\perp} \subset H_j$ puisque $e_j \notin V'^{\perp}$. Ainsi, $s_j x = x$ pour tout $x \in V'^{\perp}$ et tout $j \neq \ell$. Comme la famille $(s_j)_{j\neq\ell}$ engendre G' et $\dim V'^{\perp} = 1$, on obtient le résultat souhaité.

b) Si $\dim V = 1$ alors $\Lambda^i(V) = 0$ si $i \geqslant 2$ et $\Lambda^1(V) = V$. Comme $1 \neq G \subset GL(V)$, on en déduit que $V^G = \{0\}$. Supposons que $\dim V \geqslant 2$ et $i \geqslant 1$. On reprend les notations de la question **a**. On note e un vecteur unitaire de $V'^{\perp} = \mathbb{C}e$. D'après la question **c** de l'exerice 4, Φ_e est un G'-isomorphisme et réalise donc une bijection entre $\Lambda^i(V')^{G'} \oplus \Lambda^{i-1}(V')^{G'}$ et $\Lambda^i(V)^{G'}$. Si $i > 1$, l'hypothèse de récurrence donne $\Lambda^i(V')^{G'} = \Lambda^{i-1}(V')^{G'} = \{0\}$. On en déduit que $\Lambda^i(V)^G \subset \Lambda^i(V)^{G'} = 0$. Si $i = 1$ alors $\Lambda^1(V) = V$. Comme les s_i engendrent G, on obtient

$$\Lambda^1(V)^G \;=\; V^G \;=\; \bigcap_{i=1}^{\ell} H_i \;=\; (\mathrm{vect}\,(e_1,\dots,e_\ell))^{\perp} \;=\; \{0\}\,.$$

c) On a $\Lambda^{\ell-1}(V') = \mathbb{C}(e_1\wedge\cdots\wedge e_{\ell-1})$ et donc $\Lambda^{\ell-1}(V')^{\det} \neq 0$ implique $s_\ell\cdot(e_1\wedge\cdots\wedge e_{\ell-1}) = \det(s_\ell)e_1\wedge\cdots\wedge e_{\ell-1}$. Or, pour $m \in [\![1\,,\,\ell-1]\!]$, on a $s_\ell(e_m) = e_m - \mu\langle e_m, e_\ell\rangle e_\ell$ avec $\mu \neq 0$. On en déduit que

$$s_\ell\cdot(e_1\wedge\cdots\wedge e_{\ell-1}) = (e_1\wedge\cdots\wedge e_{\ell-1}) - \sum_{m=1}^{\ell-1}\mu\langle e_m, e_\ell\rangle e_1\wedge\cdots\wedge e_{m-1}\wedge e_\ell\wedge e_{m+1}\wedge\cdots\wedge e_{\ell-1}.$$

Comme la famille $(e_1\wedge\cdots\wedge\widehat{e}_j\wedge\cdots\wedge e_\ell)_{1\leqslant j\leqslant\ell}$ est une base de $\Lambda^{\ell-1}(V)$ et que $\det s_\ell \neq 1$, on en déduit que l'égalité $s_\ell\cdot(e_1\wedge\cdots\wedge e_{\ell-1}) = \det(s_\ell)e_1\wedge\cdots\wedge e_{\ell-1}$ est impossible. Ainsi $\Lambda^{\ell-1}(V')^{\det} = \{0\}$.

d) Si $\dim V = 1$ alors $\Lambda^i(V) = 0$ si $i \geqslant 2$ et $\Lambda^0(V) = k$. Comme $G \neq 1$, det n'est pas le caractère trivial et $k^{\det} = \{0\}$. Supposons que $\dim V \geqslant 2$ et $i \neq \ell$. On reprend les notations de la question **a**. On note e un vecteur unitaire de $V'^{\perp} = \mathbb{C}e$. La question **c** de l'exercice 4 montre que Φ_e réalise un G'-isomorphisme entre $\Lambda^i(V')^{\det_{G'}} \oplus \Lambda^{i-1}(V')^{\det_{G'}}$ et $\Lambda^i(V)^{\det_{G'}}$. Comme $i \neq \ell$, on a $i-1 \neq \ell-1$. L'hypothèse de récurrence assure alors que $\Lambda^{i-1}(V')^{\det_{G'}} = 0$. Si, de plus, $i \neq \ell-1$, l'hypothèse de récurrence donne aussi $\Lambda^i(V')^{\det_{G'}} = 0$. On obtient ainsi $\Lambda^i(V)^{\det} \subset \Lambda^i(V)^{\det_{G'}} = 0$. Si $i = \ell-1$ alors

$$\Lambda^{\ell-1}(V)^{\det} = \Lambda^i(V)^{\det} \subset \Lambda^i(V)^{\det_{G'}} = \Lambda^i(V')^{\det_{G'}} \subset \Lambda^i(V') = \Lambda^{\ell-1}(V').$$

Ainsi $\Lambda^i(V)^{\det} \subset \Lambda^{\ell-1}(V')^{\det_G}$. La question **c** montre alors que $\Lambda^{\ell-1}(V)^{\det} = \{0\}$.

e) Si $\ell = 0$, il n'y a rien à démontrer. On suppose $\ell > 0$ et que $\Lambda^i(V)$ et $\Lambda^j(V)$ sont G-isomorphes. En particulier, $C_\ell^i = \dim\Lambda^i(V) = \dim\Lambda^i(V) = C_\ell^j$. On en déduit que $j = i$ ou $j = \ell - i$. Dans le premier cas, on obtient le résultat souhaité. Pour la suite, on suppose donc $j = \ell - i$. Comme $\ell \neq 0$, on a $G \neq 1$. Ainsi G contient une réflexion s.

On suppose que $i = 0$ ou $i = \ell$. Par définition du déterminant, le caractère de $\Lambda^\ell(V)$ est le déterminant. Comme $\det s \neq 1$, le déterminant n'est pas le morphisme trivial et $\Lambda^0(V)$ et $\Lambda^\ell(V)$ ne sont donc pas isomorphes en tant que G-modules.

On suppose que $1 \leqslant i \leqslant \ell-1$. Comme $\det(1+sX) = (1+X)^{\ell-1}(1+\det(s)X)$, la question **a** de l'exercice 4 donne alors

$$\mathrm{tr}\,(\Lambda^i(s)) = C_{\ell-1}^i + C_{\ell-1}^{i-1}\det(s) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\,(\Lambda^{\ell-i}(s)) = C_{\ell-1}^{\ell-i} + C_{\ell-1}^{\ell-i-1}\det(s).$$

Comme $\Lambda^i(V)$ et $\Lambda^{\ell-i}(V)$ sont G-isomorphes, on a $\mathrm{tr}\,(\Lambda^i(s)) = \mathrm{tr}\,(\Lambda^{\ell-i}(s))$. On distingue alors deux cas : $\det(s) = -1$ et $\det s \notin \mathbb{R}$. Dans le premier cas, on obtient

$$\frac{(\ell-1)!}{i!(\ell-i-1)!} - \frac{(\ell-1)!}{(i-1)!(\ell-i)!} = \frac{(\ell-1)!}{(i-1)!(\ell-i)!} - \frac{(\ell-1)!}{i!(\ell-i-1)!},$$

d'où $2C_{\ell-1}^i = 2C_{\ell-1}^{i-1}$. Dans le deuxième cas, $(1, \det s)$ forme une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}$ et donc $C_{\ell-1}^i = C_{\ell-1}^{\ell-i} = C_{\ell-1}^{i-1}$. Dans les deux cas, on obtient $C_{\ell-1}^i = C_{\ell-1}^{i-1}$. En simplifiant les numérateurs par $(\ell-1)!$ et les dénominateurs par $(i-1)!$ et $(\ell-i-1)!$, on obtient $i = \ell - i = j$.

f) Si Γ est vide alors $V = 0$ n'est pas irréductible. On suppose que Γ n'est ni vide ni connexe. Soit $\varnothing \neq \Gamma_1 \neq \Gamma$ une composante connexe de Γ. Montrons que $V_1 = \mathrm{vect}\,(e_i)_{i\in\Gamma_1}$ est un sous-espace G-stable. Soient $m \in \Gamma_1$ et $j \in [\![1\,,\,\ell]\!]$. Si $j \in \Gamma_1$ alors $s_j(e_m) = e_m + \lambda_{mj}e_j \in V_1$. Si $j \notin \Gamma_1$ alors $s_j(e_m) = e_m - \mu\langle e_m, e_j\rangle e_j$. Or $j \notin \Gamma_1$ donc $\langle e_m, e_j\rangle = 0$ et $s_j(e_m) = e_m \in V_1$. Ainsi V_1 est stable par tous les s_j et donc par G. On en déduit que V_1 est sous-G-module de V vérifiant $0 \neq V_1 \neq V$ c'est-à-dire que V n'est pas irréductible.

Supposons Γ est connexe et non vide. On a alors $V \neq 0$. Considérons V_1 un sous-G-module de V. Il est stable par s_j, le lemme 1.6 montre que $e_j \in V_1$ ou $V_1 \subset H_j$. Par ailleurs, comme G est un sous-groupe du groupe unitaire, $V_2 = {V_1}^{\perp}$ est un supplémentaire G-stable de V_1. En particlulier, V_2 est stable par s_j et donc $e_j \in V_2$ ou $V_2 \subset H_j$ (lemme 1.6). Comme V_1 et V_2 sont supplémentaires, on en déduit que $e_j \in V_1$

ou $e_j \in \mathrm{V}_2$. Pour $m \in [\![1\,,\,2]\!]$, on définit alors $\Gamma_m = \{j \in [\![1\,,\,\ell]\!],\ e_j \in \mathrm{V}_m\}$. Les Γ_m forment alors deux sous-graphes de Γ. Comme V_1 et V_2 sont orthogonaux, Γ_1 et Γ_2 ne sont pas dans la même composante connexe de Γ. On a donc $\Gamma_1 = \varnothing$ ou $\Gamma_1 = \Gamma$. Ainsi $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}$ ou $\mathrm{V}_1 = \{0\}$ et V est irréductible.

g) D'après la question **a** de l'exercice 4, on a

$$\sum_{g\in \mathrm{G}} \det(1-ug) = \sum_{g\in \mathrm{G}} \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \operatorname{tr}(\Lambda^i(ug))\ ;$$

d'où
$$\sum_{g\in \mathrm{G}} \det(1-ug) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \operatorname{tr}(\Lambda^i(u) \sum_{g\in \mathrm{G}} \Lambda^i(g))\,.$$

Or $|\mathrm{G}|^{-1} \sum_{g\in \mathrm{G}} \Lambda^i(g)$ est le projecteur sur $\Lambda^i(\mathrm{V})^{\mathrm{G}}$. La question **b** donne alors

$$\sum_{g\in \mathrm{G}} \det(1-ug) = \operatorname{tr}(\Lambda^0(u) \sum_{g\in \mathrm{G}} \Lambda^0(g)) = |\mathrm{G}|\,.$$

Passons à la deuxième égalité. La question **a** de l'exercice 4 donne

$$\sum_{g\in \mathrm{G}} \det(u-g) = \sum_{g\in \mathrm{G}} \det(g^{-1})\det(ug-1) = \sum_{g\in \mathrm{G}} \det(g^{-1}) \left(\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^{\ell-i} \operatorname{tr}(\Lambda^i(ug)) \right),$$

d'où
$$\sum_{g\in \mathrm{G}} \det(u-g) = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^{\ell-i} \operatorname{tr}\left(\Lambda^i(u) \sum_{g\in \mathrm{G}} \det{}^{-1}(g)\Lambda^i(g) \right).$$

Or $|\mathrm{G}|^{-1} \sum_{g\in \mathrm{G}} \det{}^{-1}(g)\Lambda^i(g)$ est le projecteur sur $\Lambda^i(\mathrm{V})^{\det}$. La question **d** montre alors que

$$\sum_{g\in \mathrm{G}} \det(u-g) = (-1)^{\ell-\ell} \operatorname{tr}\left(\Lambda^\ell(u) \sum_{g\in \mathrm{G}} \det{}^{-1}(g)\Lambda^\ell(g) \right) = |\mathrm{G}| \det u\,.$$

h) $\Lambda^0(\mathrm{V})$ est la répresentation triviale de G alors que $\Lambda^1(\mathrm{V}) = \mathrm{V}$ ne l'est pas puisque $1 \neq \mathrm{G} \subset \mathrm{GL}(\mathrm{V})$.

i) D'après la question **a** et la question **f**, V' est un G'-module irréductible. Par hypothèse de récurrence, $\Lambda^i(\mathrm{V}')$ et $\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}')$ sont des G'-modules irréductibles. De plus, la question **e** montre qu'ils ne sont pas G'-isomorphes. Ainsi la question **c** de l'exercice 4 montre que $\Lambda^i(\mathrm{V}) = \Lambda^i(\mathrm{V}') \oplus \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$ est la décomposition en composantes isotypiques du G'-module $\Lambda^i(\mathrm{V})$. Comme M est un sous-G'-module de $\Lambda^i(\mathrm{V})$, on en déduit que $\mathrm{M} = (\Lambda^i(\mathrm{V}') \cap \mathrm{M}) \oplus (\Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}')) \cap \mathrm{M})$. De plus, comme $\Lambda^i(\mathrm{V}')$ est irréductible, on a $\Lambda^i(\mathrm{V}') \cap \mathrm{M} \in \big\{\{0\}\,, \Lambda^i(\mathrm{V}')\big\}$. De façon analogue, $\Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$ est irréductible, donc $\Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}')) \cap \mathrm{M} \in \big\{\{0\}\,, \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))\big\}$. On en déduit le résultat souhaité.

j) Comme Γ est connexe, il existe $j \neq \ell$ tel que $\langle e_j, e_\ell \rangle \neq 0$. Montrons que $\Lambda^i(\mathrm{V}')$ n'est pas stable par G. Comme $i-1 \leqslant \ell-2$, on peut construire une suite d'entiers $j_1 < \cdots < j_{i-1}$ distincts de j et ℓ. On considère alors

$$\omega = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_j \in \Lambda^i(\mathrm{V}') \qquad \text{et} \qquad s_\ell \cdot \omega = s_\ell e_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_\ell e_{j_{i-1}} \wedge s_\ell e_j\,.$$

Or, pour $x \in \mathrm{V}$, on a $s_\ell(x) = x - \mu\langle x, e_\ell\rangle e_\ell$ avec $\mu \neq 0$. En reportant ces expressions dans $s_\ell \cdot \omega$, on obtient

$$s_j \cdot \omega = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_j - \mu\langle e_j, e_\ell\rangle e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_\ell + \sum_{m=1}^{i-1} \mu_m e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{j_m} \wedge e_\ell \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_j.$$

Comme la famille $(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i})_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_i \leqslant \ell}$ est une base de $\Lambda^i(\mathrm{V})$ contenant une base de $\Lambda^i(\mathrm{V}')$ (les termes qui ne font pas intervenir e_ℓ) et que $\mu\langle e_j, e_\ell\rangle \neq 0$, on obtient que $s_\ell \cdot \omega \notin \Lambda^i(\mathrm{V}')$.

Montrons à présent que $\Phi_e(\Lambda^i(\mathrm{V}'))$ n'est pas stable par G. Comme $\langle e_j, e_\ell\rangle \neq 0$, on a $e_\ell \notin \mathrm{V}'^{\perp} = \mathbb{C}e$. De plus, comme $\langle e, e_j\rangle = 0$ pour tout $j \neq \ell$ et $e_\ell \notin \operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_{\ell-1})$, on obtient

$$e_\ell = \lambda e + \sum_{n=1}^{\ell-1} \lambda_n e_n \qquad \text{avec} \qquad \langle e, e_\ell\rangle = \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad \exists\, n_0 \in [\![1\,,\,\ell-1]\!], \quad \lambda_{n_0} \neq 0.$$

Comme $i-1 \leqslant \ell-2$, on peut construire une suite d'entiers $j_1 < \cdots < j_{i-1}$ distincts de n_0 et ℓ. On note $\mathrm{I} = \{j_1, \ldots, j_{i-1}\}$ la partie de $[\![1\,,\,\ell]\!]$ obtenue. On considère alors $\omega = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e \in \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$. Montrons que $s_\ell \cdot \omega \notin \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$. Comme pour $x \in \mathrm{V}$, on a $s_\ell(x) = x - \mu\langle x, e_\ell\rangle e_\ell$ avec $\mu \neq 0$. En développant l'expression, on obtient

$$s_\ell \cdot \omega = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e - \sum_{m=1}^{i-1} \mu_m e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{j_m} \wedge e_\ell \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e - \mu\langle e, e_\ell\rangle e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_\ell.$$

En remplaçant e_ℓ par sa valeur en fonction de e et des e_i pour $i \neq \ell$, on obtient

$$e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{j_m} \wedge e_\ell \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e = \sum_{n=1}^{\ell-1} \lambda_n\, e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{j_m} \wedge e_n \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e \in \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}')).$$

Ainsi $s_\ell \cdot \omega = \omega' - \mu\langle e, e_\ell\rangle e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_\ell$ avec $\omega' \in \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$. On en déduit que

$$s_\ell \cdot \omega = \omega'' - \mu\langle e, e_\ell\rangle \sum_{n=1}^{\ell-1} \lambda_n e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_n = \omega'' - \mu\langle e, e_\ell\rangle \sum_{n \notin \mathrm{I}} \lambda_n e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_n$$

avec $\omega'' \in \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$. Or, les $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{i-1}} \wedge e_n$ pour $n \notin \mathrm{I}$ forme une famille libre de $\Lambda^i(\mathrm{V}')$. Comme $n_0 \notin \mathrm{I}$ et $\lambda_{n_0} \neq 0$, on en déduit que $s_\ell \cdot \omega \notin \Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$.

k) Si $i = 0$ ou $i = \ell$ alors $\Lambda^i(\mathrm{V})$ est de dimension 1 donc irréductible. Si $1 \leqslant i \leqslant \ell$ alors, d'après la question **j**, $\Lambda^i(\mathrm{V}')$ et $\Phi_e(\Lambda^{i-1}(\mathrm{V}'))$ ne sont pas stables par G. Ils ne peuvent donc être égaux à M. La question **h** montre alors que $\mathrm{M} = \{0\}$ ou $\mathrm{M} = \Lambda^i(\mathrm{V})$. Ainsi $\Lambda^i(\mathrm{V})$ est irréductible.

l) Si G est un groupe de réflexions complexes bien engendré et irréductible alors $\mathrm{V} = \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$ et $\dim \mathrm{V} = 1$ ou $\mathrm{V}^{\mathrm{G}} = 0$. Dans le premier cas, on a $\mathrm{G} = 1$ ce qui est exclu. Dans le deuxième cas, il existe une famille $(s_1, \ldots, s_\ell)$ de réflexions qui engendre G. On note alors H_i l'hyperplan de s_i et e_i un vecteur directeur de la droite de s_i. De plus, comme G est fini, il existe un produit scalaire hermitien sur V qui est G-invariant. Les s_i sont des réflexions unitaires pour ce produit scalaire et $\mathbb{C}e_i = {\mathrm{H}_i}^{\perp}$. De plus, les s_i engendrent G, donc

$$0 = \mathrm{V}^{\mathrm{G}} = \bigcap_{i=1}^{\ell} \mathrm{H}_i \;=\; \mathrm{vect}\,(e_1, \ldots, e_\ell)^{\perp}.$$

Ainsi $\mathrm{vect}\,(e_1, \ldots, e_\ell) = \mathrm{V}$. On est bien dans le cadre décrit dans le chapeau de l'énoncé. Si G est irréductible et n'est pas bien engendré alors d'après la classification, il existe un sous-groupe de réflexion G' bien engendré et irréductible. Les $\Lambda^i(\mathrm{V})$ sont alors des G'-modules modules irréductibles et deux à deux non isomorphes et donc à plus forte raison des G-modules irréductibles et deux à deux non isomorphes.

Corrigé

a) D'après l'exercice 2, Q_χ est homogène. De plus, si χ intervient dans $\mathrm{S}_n(\mathrm{V}^*)$ alors il existe un polynôme P homogène de degré n non nul tel que $\mathrm{P} \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^\chi$. Comme $\mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^\chi = \mathrm{Q}_\chi \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^{\mathrm{G}'}$, il existe $\mathrm{Q} \in \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)^{\mathrm{G}'}$ homogène non nul tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}_\chi \mathrm{Q}$. D'où $\deg \mathrm{P} \geqslant e_\chi$ et

$$\deg \mathrm{P} = e_\chi \iff \mathrm{Q} \in \mathbb{C}^\times \iff \mathrm{P} \in \mathbb{C}^\times \mathrm{Q}_\chi.$$

Ainsi χ n'intervient pas dans $\mathrm{S}_n(\mathrm{V}^*)$ pour $n < e_\chi$ et $\mathbb{C}\mathrm{Q}_\chi$ est le seul sous-G'-module de $\mathrm{S}_{e_\chi}(\mathrm{V}^*)$ de caractère χ.

b) On a bien sûr $\mathrm{V}_\chi = \mathrm{vect}\,(g\mathrm{Q}_\chi, \quad g \in \mathrm{G})$. Comme $\deg g\mathrm{Q}_\chi = \deg \mathrm{Q}_\chi$, on en déduit que $\mathrm{V}_\chi \subset \mathrm{S}_{e_\chi}(\mathrm{V}^*)$.

c) Pour $g' \in \mathrm{G}'$, on a $g'\mathrm{Q}_\chi = \chi(g')\mathrm{Q}_\chi = \chi(g')\mathrm{Q}_1 + \chi(g')\mathrm{Q}_2$ et $g'\mathrm{Q}_\chi = g'\mathrm{Q}_1 + g'\mathrm{Q}_2$. Or, pour $i = 1, 2$, M_i est G-stable. On a donc $g'\mathrm{Q}_i \in \mathrm{M}_i$. Comme $\chi(g')\mathrm{Q}_i \in \mathrm{M}_i$, on en déduit que $g'\mathrm{Q}_i = \chi(g')\mathrm{Q}_i$ pour $i = 1, 2$ et $g' \in \mathrm{G}'$. Ainsi $\mathrm{Q}_i \in \mathrm{S}_{e_\chi}(\mathrm{V}^*)^\chi$.

d) Si Q_1 et Q_2 sont non nuls alors $\mathbb{C}\mathrm{Q}_1$ et $\mathbb{C}\mathrm{Q}_2$ sont deux représentations de G' de caractère χ en somme directe contenues dans S_{e_χ}. La question **a** montre que c'est impossible. Ainsi Q_1 ou Q_2 est nuls et donc $\mathrm{Q}_\chi = \mathrm{Q}_2 \in \mathrm{M}_2$ ou $\mathrm{Q}_\chi = \mathrm{Q}_1 \in \mathrm{M}_1$. Comme M_1 et M_2 sont stables par G, on en déduit que $\mathrm{V}_\chi \subset \mathrm{M}_2$ ou $\mathrm{V}_\chi \subset \mathrm{M}_1$. Finalement $\mathrm{M}_1 = 0$ ou $\mathrm{M}_1 = \mathrm{V}_\chi$ et donc V_χ est irréductible.

e) Comme $\mathrm{Q}_\chi \in \mathrm{V}_\chi$, le caractère χ intervient au moins une fois dans le G'-module V_χ. Ainsi la multiplicité du G-module V_χ dans $\mathrm{S}_n(\mathrm{V}^*)$ est inférieure à celle du caractère χ de G'. La question **a** montre alors que la multiplicité de V_χ dans $\mathrm{S}_n(\mathrm{V}^*)$ est nulle pour $n < e_\chi$ et est au plus un pour $n = e_\chi$. Comme $\mathrm{V}_\chi \subset \mathrm{S}_{e_\chi}(\mathrm{V}^*)$, la multiplicité de V_χ dans $\mathrm{S}_{e_\chi}(\mathrm{V}^*)$ est égale à 1.

Corrigé

a) Par définition des exposants de M, on a

$$f_\chi = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{X}^{m_{\chi,i}} \qquad \text{et donc} \qquad {f_\chi}' = \sum_{i=1}^{r} m_{\chi,i}\, \mathrm{X}^{m_{\chi,i}-1}.$$

En évaluant en $\mathrm{X} = 1$, on obtient le résultat souhaité.

b) Soit $g \in \mathrm{G}$. La multiplicité de 1 comme racine du polynôme $\det(1 - g\mathrm{X})$ est la multiplicité de 1 comme valeur propre de g^{-1} et donc de g. Elle est donc inférieure ou égale à ℓ. Par ailleurs, 1 est bien entendu racine de $\prod_{i=1}^{\ell}(1 - \mathrm{X}^{d_i})$ avec multiplicité ℓ. Ainsi, avec l'expression de f_χ donnée dans le rappel, on obtient en distinguant l'identité, les réflexions et l'ensemble des éléments de G dont 1 est valeur propre avec multiplicité au plus $\ell - 2$

$$f_\chi = \frac{\chi(1)}{|\mathrm{G}|} \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \cdots + \mathrm{X}^{d_i - 1}) + \frac{(1 - \mathrm{X})}{|\mathrm{G}|} \prod_{i=1}^{\ell} (1 + \cdots + \mathrm{X}^{d_i - 1}) \sum_{s \in \mathscr{S}_{\mathrm{G}}} \frac{\chi(s)}{1 - \det(s)\mathrm{X}} + (1 - \mathrm{X})^2 \mathrm{F}(\mathrm{X})$$

où $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ est une fraction rationnelle dont 1 n'est pas un pôle. Commençons par le premier terme. En différentiant, il devient

$$\frac{\chi(1)}{|\mathrm{G}|}\sum_{i=1}^{\ell}\Big((1+\cdots+(d_i-1)\mathrm{X}^{d_i-2})\prod_{j\neq i}(1+\cdots+\mathrm{X}^{d_j-1})\Big).$$

En $\mathrm{X}=1$, on a $\displaystyle\frac{\chi(1)}{|\mathrm{G}|}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{d_i(d_i-1)}{2}\prod_{j\neq i}d_j\right)=\frac{\chi(1)}{|\mathrm{G}|}\left(\prod_{i=1}^{\ell}d_i\right)\sum_{i=1}^{\ell}\frac{d_i-1}{2}=\frac{\chi(1)|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}.$

Passons au deuxième terme, en différentiant, on obtient

$$-\frac{1}{|\mathrm{G}|}\prod_{i=1}^{\ell}(1+\cdots+\mathrm{X}^{d_i-1})\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\chi(s)}{1-\det(s)\mathrm{X}}+(1-\mathrm{X})\mathrm{F}_1(\mathrm{X})$$

où $\mathrm{F}_1(\mathrm{X})$ est une fraction rationnelle dont 1 n'est pas un pôle. En évaluant en $\mathrm{X}=1$, on a

$$-\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\chi(s)}{1-\det(s)}.$$

En différentiant le troisième terme et en l'évaluant en $\mathrm{X}=1$, on trouve 0. Finalement avec la question **a**, on obtient le résultat voulu.

c) On partitionne l'ensembles des réflexions de G suivant leur hyperplan. On a

$$\mathscr{S}_{\mathrm{G}}=\bigsqcup_{\mathrm{H}\in\mathscr{H}}(\mathrm{G}_{\mathrm{H}}\smallsetminus 1)=\bigsqcup_{\mathrm{H}\in\mathscr{H}}\mathscr{S}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}.$$

Comme, pour $s\in\mathrm{G}_{\mathrm{H}}$, on a $\chi(s)=\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi)(s)$, la question **b** donne alors

$$m(\mathrm{M})\;=\;\sum_{\mathrm{H}\in\mathscr{H}}\frac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}|}{2}-\sum_{\mathrm{H}\in\mathscr{H}}\sum_{s\in\mathscr{S}\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}\frac{\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi)(s)}{1-\det s}\;=\;\sum_{\mathrm{H}\in\mathscr{H}}m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi)).$$

d) Comme $s\mapsto s^{-1}$ est une bijection de $\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$, on a

$$2\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det s^{-1}}{1-\det s}\;=\;\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\left(\frac{\det s^{-1}}{1-\det s}+\frac{\det s}{1-\det s^{-1}}\right).$$

Or $\displaystyle\frac{\det s^{-1}}{1-\det s}+\frac{\det s}{1-\det s^{-1}}\;=\;\frac{\det s^{-1}}{1-\det s}-\frac{\det^2 s}{1-\det s}\;=\;\det(s^{-1})\frac{1-\det^3(s)}{1-\det s}\;=\;\det^{-1}(s)+1+\det s.$

On partitionne alors l'ensembles de réflexions de G en distinguant leur hyperplan. On obtient

$$2\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det s^{-1}}{1-\det s}\;=\;|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|+\sum_{\mathrm{H}\in\mathscr{H}}\sum_{s\in\mathrm{G}_{\mathrm{H}}\smallsetminus\{1\}}(\det^{-1}s+\det s).$$

Comme det et $\det^{-1}$ sont des morphismes non triviaux de G_{H}, on en déduit que

$$\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det s^{-1}}{1-\det s}\;=\;2^{-1}(|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|+\sum_{\mathrm{H}\in\mathscr{H}}(-2))\;=\;2^{-1}|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|-|\mathscr{H}|.$$

Passons à la deuxième expression. Comme $s\mapsto s^{-1}$ est une bijection de $\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$, on a

$$2\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det s}{1-\det s}\;=\;\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\left(\frac{\det s}{1-\det s}+\frac{\det^{-1}s}{1-\det s^{-1}}\right).$$

Or
$$\frac{\det s}{1-\det s}+\frac{\det s^{-1}}{1-\det s^{-1}}\;=\;\frac{\det s}{1-\det s}-\frac{1}{1-\det s}\;=\;-1.$$

On en déduit que
$$\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det s}{1-\det s}\;=\;-\frac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}.$$

Passons à la troisième expression. Comme $s\mapsto s^{-1}$ est une bijection de $\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$, on a

$$2\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{1}{1-\det s}\;=\;\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\left(\frac{1}{1-\det s}+\frac{1}{1-\det s^{-1}}\right).$$

Or $$\frac{1}{1-\det s}+\frac{1}{1-\det s^{-1}} \;=\; \frac{1}{1-\det s}-\frac{\det s}{1-\det s} \;=\; 1\,.$$

On en déduit que $$\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det s}{1-\det s} \;=\; \frac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}\,.$$

e) Pour $\mathrm{M}=\mathrm{V}$, on a $\chi(1)=\ell$ et $\chi(s)=(\ell-1)+\det(s)$ pour $s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$. On obtient ainsi avec la question **b**,

$$m(\mathrm{V}) \;=\; \frac{\ell|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}-\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\ell-1}{1-\det s}-\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det(s)}{1-\det s}\,.$$

La question **d** donne alors $\quad m(\mathrm{V}) \;=\; \dfrac{\ell|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}-\dfrac{(\ell-1)|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}+\dfrac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2} \;=\; |\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|.$

Pour $\mathrm{M}=\Lambda^{\ell}(\mathrm{V})$, on a $\chi(1)=1$ et $\chi(s)=\det(s)$ pour $s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$. On obtient ainsi avec la question **b**,

$$m(\Lambda^{\ell}(\mathrm{V})) \;=\; \frac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}-\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det(s)}{1-\det s}\,.$$

La question **d** donne alors $\quad m(\Lambda^{\ell}(\mathrm{V})) \;=\; \dfrac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}+\dfrac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2} \;=\; |\mathscr{S}_{\mathrm{G}}| \;=\; m(\mathrm{V}).$

Pour $\mathrm{M}=\mathrm{V}^*$, on a $\chi(1)=\ell$ et $\chi(s)=(\ell-1)+\det(s^{-1})$ pour $s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$. On obtient ainsi avec la question **b**,

$$m(\mathrm{V}^*) \;=\; \frac{\ell|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}-\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\ell-1}{1-\det s}-\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det(s^{-1})}{1-\det s}\,.$$

La question **d** donne $\quad m(\mathrm{V}^*) \;=\; \dfrac{\ell|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}-\dfrac{(\ell-1)|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}-\dfrac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}+|\mathscr{H}| \;=\; |\mathscr{H}|.$

Pour $\mathrm{M}=\Lambda^{\ell}(\mathrm{V}^*)$, on a $\chi(1)=1$ et $\chi(s)=\det(s^{-1})$ pour $s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}$. On obtient ainsi avec la question **b**,

$$m(\Lambda^{\ell}(\mathrm{V}^*)) \;=\; \frac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}-\sum_{s\in\mathscr{S}_{\mathrm{G}}}\frac{\det(s^{-1})}{1-\det s}\,.$$

La question **d** donne $\quad m(\Lambda^{\ell}(\mathrm{V}^*)) \;=\; \dfrac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}-\dfrac{|\mathscr{S}_{\mathrm{G}}|}{2}+|\mathscr{H}| \;=\; |\mathscr{H}| \;=\; m(\mathrm{V}^*).$

f) Considérons le groupe cyclique $\mathrm{G}=\mathbb{U}_d$. Il agit sur $\mathbb{C}$ par multiplication comme un groupe de réflexion complexe. Soit $\mathrm{X}\in\mathbb{C}^*$ la forme linéaire définie par $\mathrm{X}(1)=1$. L'algèbre symétrique s'identifie alors à l'algèbre de polynôme $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Pour $u\in\mathbb{U}_d$ et $k\in\mathbb{N}$, on a $u\cdot\mathrm{X}^k=u^{-k}\mathrm{X}^k$. On en déduit que $\mathbb{C}[\mathrm{X}]^{\mathrm{G}}=\mathbb{C}[\mathrm{X}^d]$ et $\mathbb{C}[\mathrm{X}]_{\mathrm{G}}=\mathbb{C}[\mathrm{X}]/\langle\mathrm{X}^d\rangle$. Pour $j\in[\![0\,,\,d-1]\!]$, la composante homogène de degré j de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]_{\mathrm{G}}$ est $\mathbb{C}\mathrm{X}^j$ et représente le caractère χ_j d'élévation à la puissance $-j$ de $\mathbb{U}_d$. L'élément ζ est un générateur de $\mathbb{U}_d$. Les réflexions de $\mathbb{U}_d$ (qui sont les éléments distincts de l'élément neutre) sont alors les ζ^n pour $n\in[\![1\,,\,d-1]\!]$. L'égalité de la question **b** appliquée au caractère χ_j de $\mathbb{U}_d$ montre que

$$j=m(\chi_j)=\frac{d-1}{2}-\sum_{n=1}^{d-1}\frac{\zeta^{-jn}}{1-\zeta^n}\,.$$

g) Le groupe G_{H} est cyclique d'ordre e_{H}. On note ζ une racine primitive de l'unité d'ordre e_{H} et $s\in\mathrm{G}_{\mathrm{H}}$ une réflexion de déterminant ζ. On a alors $\mathrm{G}_{\mathrm{H}}=\langle s\rangle$. De plus, les réflexions de G_{H} sont les s^n pour $n\in[\![1\,,\,e_{\mathrm{H}}-1]\!]$. Avec les questions **f** et **b**, on obtient

$$j \;=\; \frac{e_{\mathrm{H}}-1}{2}-\sum_{n=1}^{e_{\mathrm{H}}-1}\frac{\zeta^{-jn}}{1-\zeta^n} \;=\; \frac{e_{\mathrm{H}}-1}{2}-\sum_{n=1}^{e_{\mathrm{H}}-1}\frac{\det^{-j}(s^n)}{1-\det(s^n)} \;=\; m(\det{}^{-j})\,.$$

Comme la fonction m est une fonction additive des représentations ($m(\mathrm{M}\oplus\mathrm{M}')=m(\mathrm{M})+m(\mathrm{M}')$), on a

$$m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi)) \;=\; \sum_{j=0}^{e_{\mathrm{H}}-1}n_{j,\mathrm{H}}m(\det{}^{-j}) \;=\; \sum_{j=0}^{e_{\mathrm{H}}-1}jn_{j,\mathrm{H}}\,.$$

h) L'élément $g \in \mathrm{G}$ agit sur $\Lambda^r(\mathrm{M})$ par multiplication par $\det(g_{\mathrm{M}})$ où g_{M} désigne l'endomorphisme de M associé à G. On note χ' le caractère de la représentation $\Lambda^r(\mathrm{M})$. Soit $s \in \mathrm{G}_{\mathrm{H}}$. Par définition des entiers $n_{j,\mathrm{H}}$ et grâce à la question **g**, on obtient

$$\chi'(s) = \prod_{j=0}^{e_{\mathrm{H}}-1} \left(\det{}^{-j}(s)\right)^{n_{j,\mathrm{H}}} = \det(s)^{-m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi))}.$$

La question **g** montre alors que $m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi'))$ est l'unique entier compris entre 0 et $e_{\mathrm{H}} - 1$ congru à $m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi))$ modulo e_{H}. Ainsi pour tout $\mathrm{H} \in \mathscr{H}$, on a $m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi')) \leqslant m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\chi))$. La question **c** donne alors le résultat souhaité.

i) La question **c** et le raisonnement de la question **h** montrent que

$$m(\mathrm{M}) = m(\Lambda^r(\mathrm{M})) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, \mathrm{H} \in \mathscr{H}, \quad m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{M})) = \sum_{j=0}^{e_{\mathrm{H}}-1} j n_{j,\mathrm{H}} \leqslant e_{\mathrm{H}} - 1\,.$$

j) D'après la question **i**, on a

$$m(\mathrm{M}) = m(\Lambda^r(\mathrm{M})) \text{ et } m(\mathrm{M}^*) = m(\Lambda^r(\mathrm{M}^*)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathrm{H},\ m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{M})) \leqslant e_{\mathrm{H}}-1 \text{ et } m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{M}^*)) \leqslant e_{\mathrm{H}}-1.$$

Par ailleurs, la définition de l'action de G sur M^* et la question **g** donne

$$m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{M}^*)) \;=\; \sum_{j=1}^{e_{\mathrm{H}}-1} (e_{\mathrm{H}} - j) n_{j,\mathrm{H}} \;=\; e_{\mathrm{H}}(r - n_{0,\mathrm{H}}) - m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{M})).$$

Ainsi $\qquad m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{M})) \leqslant e_{\mathrm{H}} - 1 \quad \text{et} \quad m(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{H}}}(\mathrm{M}^*)) \leqslant e_{\mathrm{H}} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r - n_{0,\mathrm{H}} < 2.$

Comme $n_{0,\mathrm{H}}$ est la multiplicité de 1 comme valeur propre de l'endormorphisme associé à s_{H} sur M, la condition $r - n_{0,\mathrm{H}} < 2$ est équivalente à $n_{0,\mathrm{H}} \in \{r-1, r\}$. Elle s'interprête géométriquement par le fait que s_{H} agisse sur M comme l'identité ou une réflexion.