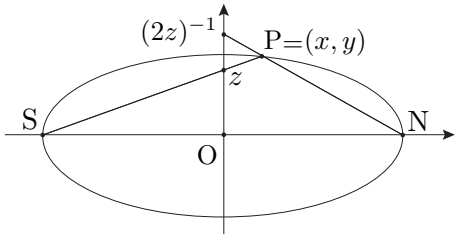
Jean-Michel Ghidaglia, Vincent Beck

Corrigé du partiel Novembre 2006

Exercice 1 – Variété.
On reprend la méthode vue en cours pour montrer que la sphère de $\mathbb{R}^n$ est une variété : on utilise la projection stéréographique. On se fixe un point sur l'ellipse (le plus « simple » possible) et on cherche l'intersection des droites passant par ce point avec la droite orthogonale au vecteur choisi. On obtient ainsi une bijection qui est en fait un homéomorphisme. On choisit alors un deuxième point (« diamétralement opposé ») et on construit un atlas sur l'ellipse.



De façon précise, on note $\mathscr{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2+2y^2=1\right\}$ et on considère les pôles $\mathrm{N} = (1,0) \in \mathscr{E}$ et $\mathrm{S} = (-1,0) \in \mathscr{E}$. On va projeter sur la droite $x = 0$.

Pour $\mathrm{P} = (x,y) \in \mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N}\}$, on cherche le point d'intersection de la droite (NP) avec la droite $x = 0$. On cherche donc à résoudre l'équation

$$\begin{cases} 1 + t(x-1) = 0 \\ \quad ty \qquad\quad = z \end{cases}$$

d'inconnues t et z. Comme N est le seul point de $\mathscr{E}$ d'abscisse 1, donc on obtient $t = (1-x)^{-1}$ et $z = y/1-x$. Réciproquement, pour $z \in \mathbb{R}$, on cherche le point d'intersection (distinct de N) de la droite (QN) avec $\mathscr{E}$ (où $\mathrm{Q} = (0,z)$). La droite (QN) est paramétrée par $(1,0)+t(-1,z)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On doit donc avoir $(1-t)^2+2t^2z^2 = 1$. L'équation $1-2t+(2z^2+1)t^2 = 1$ a 0 comme racine évidente (qui correspond au point N). L'autre racine est $t = 2(2z^2+1)^{-1}$. On obtient alors le point

$$\left(\frac{2z^2-1}{2z^2+1}, \frac{2z}{2z^2+1}\right) \in \mathscr{E}$$

De façon analytique, on obtient que les applications

$$\varphi_{\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N}\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \quad \longmapsto \dfrac{y}{1-x} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi_{\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N}\} \\ z \longmapsto (\dfrac{2z^2-1}{2z^2+1}, \dfrac{2z}{2z^2+1}) \end{cases}$$

sont des homéomorphismes réciproque (la continuité est claire sur les expressions puisque les dénominateurs ne s'annulent pas) l'un de l'autre entre l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ et l'ouvert $\mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N}\}$ de $\mathscr{E}$. De plus, $\varphi_{\mathrm{N}}(\mathrm{S}) = 0$. Ainsi φ_{N} et ψ_{N} induisent des bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N},\mathrm{S}\}$ et $\mathbb{R}^\times$.

Pour $\mathrm{P} = (x,y) \in \mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{S}\}$, on cherche le point d'intersection de la droite (SP) avec la droite $x = 0$. On cherche donc à résoudre l'équation

$$\begin{cases} -1 + t(x+1) = 0 \\ \quad ty \qquad\quad = z \end{cases}$$

d'inconnues t et z. Comme S est le seul point de $\mathscr{E}$ d'abscisse -1, donc on obtient $t = (1+x)^{-1}$ et $z = y/1+x$. Réciproquement, pour $z \in \mathbb{R}$, on cherche le point d'intersection (distinct de S) de la droite (QS) avec $\mathscr{E}$ (où $\mathrm{Q} = (0,z)$). La droite (QN) est paramétrée par $(-1,0)+t(1,z)$ pour $t \in \mathbb{R}$. On doit donc avoir $(-1+t)^2+2t^2z^2 = 1$. L'équation $1-2t+(2z^2+1)t^2 = 1$ a 0 comme racine évidente (qui correspond au point S). L'autre racine est $t = 2(2z^2+1)^{-1}$. On obtient alors le point

$$\left(\frac{1-2z^2}{2z^2+1}, \frac{2z}{2z^2+1}\right) \in \mathscr{E}$$

De façon analytique, on obtient que les applications

$$\varphi_{\mathrm{S}} : \begin{cases} \mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{S}\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \quad \longmapsto \dfrac{y}{1+x} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi_{\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N}\} \\ z \longmapsto (\dfrac{1-2z^2}{2z^2+1}, \dfrac{2z}{2z^2+1}) \end{cases}$$

sont des homéomorphismes réciproque l'un de l'autre entre l'espace vectoriel $\mathbb{R}$ et l'ouvert $\mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{S}\}$ de $\mathscr{E}$ (la continuité est claire sur les expressions puisque les dénominateurs ne s'annulent pas). De plus, $\varphi_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}) = 0$. Ainsi φ_{S} et ψ_{S} induisent des bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N},\mathrm{S}\}$ et $\mathbb{R}^\times$.

Montrons que $\{(\mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N}\}, \varphi_{\mathrm{N}}), (\mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{S}\}, \varphi_{\mathrm{S}})\}$ est un atlas sur $\mathscr{E}$. On a bien sûr

$$\mathscr{E} = (\mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{N}\}) \cup (\mathscr{E} \smallsetminus \{\mathrm{S}\}).$$

Par ailleurs, les applications $\varphi_{\mathrm{S}} \circ {\varphi_{\mathrm{N}}}^{-1}$ et $\varphi_{\mathrm{N}} \circ {\varphi_{\mathrm{S}}}^{-1}$ sont données par

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{\times} & \longrightarrow \mathbb{R}^{\times} \\ z & \longmapsto \dfrac{1}{2z} \end{cases}$$

qui est $\mathscr{C}^{\infty}$.

Exercice 2 – Calcul différentiel. Soient $(\mathrm{P}, x) \in \mathrm{E} \times \mathrm{I}$. On considère $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $]\, x - 2a\,, x + 2a\,[\, \subset \mathrm{I}$ et on introduit sur E la norme

$$\|\mathrm{Q}\| = |\mathrm{Q}(x)| + \sup_{t \in [\, x-a\,, x+a\,]} |\mathrm{Q}'(t)|\,.$$

Elle est bien définie puisque $[\,-a\,, a\,]$ est un compact et Q' est continue et on vérifie que c'est une norme. On a alors

$$\varphi(\mathrm{P} + \mathrm{H}, x + h) - \varphi(\mathrm{P}, x) = \mathrm{P}(x + h) - \mathrm{P}(x) + \mathrm{H}(x + h)\,.$$

ce qui donne l'indication sur la différentielle. Pour $|h| \leqslant a$, on calcule alors

$$|\varphi(\mathrm{P} + \mathrm{H}, x + h) - \varphi(\mathrm{P}, x) - \mathrm{P}'(x)h - \mathrm{H}(x)| \leqslant |(\mathrm{P}(x + h) - \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}'(x)h)| + |\mathrm{H}(x + h) - \mathrm{H}(x)|\,.$$

La formule de Taylor appliquée à P en x montre qu'il existe une constante C qui ne dépend que de P et x, par exemple

$$\mathrm{C} = \sup_{t \in [\, x-a\,, x+a\,]} |\mathrm{P}''(t)|\,,$$

telle que
$$|(\mathrm{P}(x + h) - \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}'(x)h)| \leqslant \mathrm{C}|h|^2\,.$$

Par ailleurs, l'inégalité des accroissement finis assure l'existence de $y \in [\, x - a\,, x + a\,]$ tel que

$$\mathrm{H}(x + h) - \mathrm{H}(x) = \mathrm{H}'(y)h\,.$$

La définition de la norme donne alors

$$|\mathrm{H}(x + h) - \mathrm{H}(x)| = |\mathrm{H}'(y)h| \leqslant \|\mathrm{H}\||h|\,.$$

Finalement

$$|\varphi(\mathrm{P} + \mathrm{H}, x + h) - \varphi(\mathrm{P}, x) - \mathrm{P}'(x)h - \mathrm{H}(x)| \leqslant \mathrm{C}|h|^2 + \|\mathrm{H}\||h| = \sup(\mathrm{C}, 1)|h|(\|\mathrm{H}\| + |h|)\,.$$

Or la norme sur $\mathrm{E} \times \mathbb{R}$ est donnée par $\|(\mathrm{Q}, y)\| = \|\mathrm{Q}\| + |y|$. Ainsi

$$|\varphi(\mathrm{P} + \mathrm{H}, x + h) - \varphi(\mathrm{P}, x) - \mathrm{P}'(x)h - \mathrm{H}(x)| \leqslant \sup(\mathrm{C}, 1)|h|\|(\mathrm{H}, h)\| = \mathrm{o}\left(\|(\mathrm{H}, h)\|\right)\,.$$

Finalement, comme $(\mathrm{H}, h) \mapsto \mathrm{P}'(x)h + \mathrm{H}(x)$ est une application linéaire. L'application φ est différentiable en (P, x) et $\mathrm{d}\varphi(\mathrm{P}, x)(\mathrm{H}, h) = \mathrm{P}'(x)h + \mathrm{H}(x)$.

Exercice 3 – Inversion locale.

a) Voir ci-dessous.

b) L'application ${\varphi_1}^2 = |\mathrm{MA}|^2$ est la composée de l'application affine $\mathrm{M} \mapsto \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ avec l'application linéaire $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, x) \in (\mathbb{R}^2)^2$ et l'application bilinéaire $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2 \mapsto \langle x, y\rangle$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ et ne s'annule qu'au point A. Par composition avec la fonction racine carré qui est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\varphi_1 : \mathrm{M} \mapsto |\mathrm{AM}|$ est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathrm{A}\}$. De même, φ_2 est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathrm{B}\}$. Ainsi φ est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. Il reste à étudier le comportement de φ aux points A et B. Commençons par le point A. L'application φ_2 est différentiable en A. Ainsi φ l'est si et seulement si φ_1 l'est. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire. L'application affine $g : t \mapsto \mathrm{A} + t\overrightarrow{u}$ vérifie $g(0) = \mathrm{A}$. Donc si φ_1 est différentiable en A alors l'application $\varphi_1 \circ g$ est dérivable en 0. Or la composée $\varphi_1 \circ g$ n'est autre que la fonction $t \mapsto |t|$ qui n'est pas dérivable en 0. Donc φ_1 et φ ne sont pas différentiables en A. De même φ_2 et φ ne sont différentiables en B. Finalement, l'ensemble des points où φ est différentiable est $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ et φ est bien $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$.

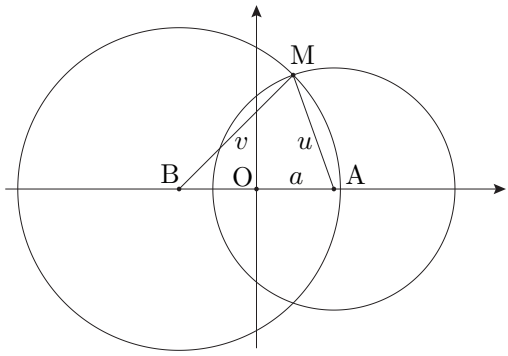
c) En calculant les différentielles de φ_1 et φ_2 grâce au théorème de composition en suivant la question **b**, on obtient

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_1(\mathrm{M}) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AM}}}{|\mathrm{AM}|} = \alpha(\mathrm{M}) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_2(\mathrm{M}) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BM}}}{|\mathrm{BM}|} = \beta(\mathrm{M})\,. \tag{$*$}$$

qui sont des formules à connaître et à savoir démontrer rapidement (et qui ont été vues dans le sujet d'ENS Cachan). On en déduit que

$$\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{M}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_1(\mathrm{M}) \\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_2(\mathrm{M}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\mathrm{M}) \\ \beta(\mathrm{M}) \end{bmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{M}}$ est inversible dès que $\alpha(\mathrm{M})$ et $\beta(\mathrm{M})$ ne sont pas colinéaires c'est-à-dire dès que M n'est pas sur la droite $(\mathrm{AB}) = \{y = 0\}$. En particulier, $\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{M}}$ est inversible sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, si $\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(\mathrm{N})$ alors $\mathrm{AM} = \mathrm{AN} = u$ et $\mathrm{BM} = \mathrm{BN} = v$. Ainsi M et N appartiennent au cercle de centre A et de rayon u et au cercle de centre B et de rayon v qui se rencontre en au plus deux points situés de part et d'autre de la droite joignant les centres des cercles, c'est-à-dire de part et d'autre de la droite (AB). Ainsi la restriction de φ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ est injective et vérifie $\mathrm{d}\varphi_{\mathrm{M}}$ est inversible pour tout $\mathrm{M} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Il s'agit donc d'un difféomorphisme sur son image.



Soit $(u, v) \in \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$. On a $\varphi(\mathrm{M}) = (u, v)$. L'inégalité triangulaire assure alors que

$$|\,|\mathrm{MA}| - |\mathrm{MB}|\,| \leqslant |\mathrm{AB}| \leqslant |\mathrm{MA}| + |\mathrm{MB}|\,.$$

De plus M, A et B ne sont pas alignés donc les inégalités sont strictes. On en déduit que $|u - v| < 2a < u + v$.

Réciproquement, si (u, v) vérifie $|u - v| < 2a < u + v$ alors les cercles de centre a et de rayon u et de centre b et de rayon v se rencontre en deux points distincts situés de part et d'autre de la droite (AB). L'un des deux points (disons M) est donc dans le demi-plan supérieur et vérifie $\varphi(\mathrm{M}) = (u, v)$. Ainsi $(u, v) \in \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$.

Finalement $\varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*) = \big\{(u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad |u - v| < 2a < u + v\big\}$.

d) On a $f = \widehat{f} \circ \varphi$ et donc $\mathrm{d}f(\mathrm{M}) = \mathrm{d}\widehat{f}(\varphi(\mathrm{M})) \circ \mathrm{d}\varphi(\mathrm{M})$. En évaluant suivant les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial v}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

On calcule alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial u}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial v}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \dfrac{\partial \widehat{f}}{\partial v}}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\partial \widehat{f}}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial u^2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial v \partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial v}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial v^2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)
\end{aligned}$$

Par un calcul similaire, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial \widehat{f}}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial u^2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial v \partial u}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial \widehat{f}}{\partial v}\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial u \partial v}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial v^2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)$$

En regroupant les termes, on obtient, grâce au théorème de Schwartz,

$$\Delta f = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}^2\right)\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}^2\right)\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial v^2} + \Delta\varphi_1\frac{\partial \widehat{f}}{\partial u} + \Delta\varphi_2\frac{\partial \widehat{f}}{\partial v} + 2\frac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)$$

Or, $(*)$ donne $\quad \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}^2 + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_1\|^2 = 1 \qquad$ et $\qquad \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}^2 + \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}^2 = \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi_2\|^2 = 1.$

Il reste à calculer $\Delta\varphi_1$ et $\Delta\varphi_2$ pour lesquels on trouve respectivement $1/\varphi_1$ et $1/\varphi_2$.

e) On a $\dfrac{\partial^2 \widehat{f}}{\partial u \partial v} = 0$. La question précédente donne alors

$$0 = \alpha''(u) + \frac{\alpha'(u)}{u} + \beta''(v) + \frac{\beta'(v)}{v}$$

Les fonctions $u \mapsto \alpha''(u) + \alpha'(u)/u$ et $v \mapsto -\beta''(v) - \beta'(v)/v$ sont égales à une même constante C. On résout alors les équations différentielles du premier ordre en α' et β'. L'équation sans second membre est $y'(t) + y(t)/t = 0$. Les solutions sont $t \mapsto \mathrm{C}_1/t$. On applique la méthode de variation de la constante : on pose $\alpha'(u) = \mathrm{C}_1(u)/u$ et $\beta'(v) = \mathrm{C}_2(v)/v$. On a alors

$$\mathrm{C} = \alpha''(u) + \alpha'(u)/u = {\mathrm{C}_1}'(u)/u \qquad \text{et} \qquad -\mathrm{C} = \beta''(v) + \beta'(v)/v = {\mathrm{C}_2}'(v)/v\,.$$

Finalement, on obtient

$$\alpha'(u) = \frac{\mathrm{C}u}{2} + \frac{\mathrm{C}_1}{u} \qquad \text{et} \qquad \beta'(v) = -\frac{\mathrm{C}v}{2} + \frac{\mathrm{C}_2}{v},$$

et donc

$$\alpha(u) = \frac{\mathrm{C}u^2}{4} + \mathrm{C}_1 \ln u + \mathrm{D}_1 \qquad \text{et} \qquad \beta(v) = -\frac{\mathrm{C}v^2}{4} + \mathrm{C}_2 \ln v + \mathrm{D}_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(\mathrm{M}) &= \frac{\mathrm{C}}{4}(|\mathrm{AM}|^2 - |\mathrm{BM}|^2) + \mathrm{C}_1 \ln|\mathrm{AM}| + \mathrm{C}_2 \ln|\mathrm{BM}| + \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 \\ &= \frac{\mathrm{C}}{2}\langle \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\rangle + \mathrm{C}_1 \ln|\mathrm{AM}| + \mathrm{C}_2 \ln|\mathrm{BM}| + \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2\,. \end{aligned}$$

Exercice 4 – Équations différentielles.

a) L'application f est continue donc $f^{-1}(\mathrm{K})$ est fermé (comme image réciproque d'un fermé par une application continue). Il reste donc à montrer que l'image réciproque de $f^{-1}(\mathrm{K})$ est bornée. Par compacité, K est contenu dans la boule fermée $\mathrm{B}(0, \mathrm{A})$ de centre 0 et de rayon A. Par ailleurs, l'hypothèse sur f assure qu'il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $\|f(x)\| > \mathrm{A}$ si $\|x\| > \mathrm{C}$. Ainsi, si $\mathrm{B}(0, \mathrm{C})$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon C, on a ${}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}(0, \mathrm{C}) \subset f^{-1}({}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}(0, \mathrm{A}))$ et donc $f^{-1}(\mathrm{K}) \subset f^{-1}(\mathrm{B}(0, \mathrm{A})) \subset \mathrm{B}(0, \mathrm{C})$ ce qui donne le résultat.

b) Comme f est $\mathscr{C}^2$, l'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ et le théorème de Cauchy-Lipschitz donne le résultat. Montrons que φ est $\mathscr{C}^1$. L'application φ est la composée des applications

$$u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto (\mathrm{d}f(x)^{-1}, f(x)) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v\colon \begin{cases} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathrm{A}, y) \longmapsto \mathrm{A}y\,. \end{cases}$$

L'application v est bilinéaire donc de classe $\mathscr{C}^1$. L'application u est à valeurs dans un produit. Il suffit de montrer que chacun de ses composantes est de classe $\mathscr{C}^1$. C'est évident pour la deuxième composante. La première composante est la composée de $x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ avec l'application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{-1}$ qui est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ (ce qu'il faut savoir et savoir démontrer).

c) On pose $g(t) = \mathrm{F}(\delta(t))$. L'application $x \mapsto \|x\|^2$ est la composée de l'application linéaire $x \mapsto (x, x)$ avec l'application bilinéaire $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$. Par composition, on en déduit que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et donc g est dérivable. On calcule $g'(t) = \mathrm{dF}_{\delta(t)}(\delta'(t))$. Or le théorème de composition donne aussi $\mathrm{dF}_x(\cdot) = 2\langle f(x), \mathrm{d}f(x)(\cdot)\rangle$ et donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= \mathrm{dF}_{\delta(t)}(\delta'(t)) = 2\langle f(\delta(t)), \mathrm{d}f(\delta(t))(\delta'(t))\rangle \\ &= 2\langle f(\delta(t)), \mathrm{d}f(\delta(t))\mathrm{d}f(\delta(t))^{-1}(f(\delta(t)))\rangle = 2\|f(\delta(t))\|^2 = 2g(t)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $g(t) = \exp(2t)g(0) = \exp(2t)\|f(x_0)\|^2$.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $\mathrm{T}_+ < +\infty$. On note B la boule fermée de centre 0 et de rayon $\exp(\mathrm{T}_+)\|f(x_0)\|$. D'après la question **a**, $\mathrm{K} = f^{-1}(\mathrm{B})$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ et donc $[\,0\,, \mathrm{T}_+\,] \times \mathrm{K}$ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Montrons que $(t, \delta(t)) \in [\,0\,, \mathrm{T}_+\,] \times \mathrm{K}$ pour tout $t \in [\,0\,, \mathrm{T}_+\,[$. Il s'agit de montrer que $\delta(t) \in \mathrm{K}$ pour tout $t \in [\,0\,, \mathrm{T}_+\,[$. D'après ce qui précède, on a $\|f(\delta(t))\| = \exp(t)\|f(x_0)\| \leqslant \exp(\mathrm{T}_+)\|f(x_0)\|$ d'où $f(\delta(t)) \in \mathrm{B}$ et donc $\delta(t) \in \mathrm{K}$. On obtient ainsi une contradiction avec le théorème de sortie de tout compact.

On raisonne par l'absurde. On suppose que $\mathrm{T}_- > -\infty$. On note B' la boule fermée de centre 0 et de rayon $\|f(x_0)\|$. D'après la question **a**, $\mathrm{K}' = f^{-1}(\mathrm{B}')$ est un compact de $\mathbb{R}^n$ et donc $[\,\mathrm{T}_-\,, 0\,] \times \mathrm{K}'$ est un compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Montrons que $(t, \delta(t)) \in [\,\mathrm{T}_-\,, 0\,] \times \mathrm{K}'$ pour tout $t \in]\,\mathrm{T}_-\,, 0\,]$. Il s'agit de montrer que $\delta(t) \in \mathrm{K}'$ pour tout $t \in]\,\mathrm{T}_-\,, 0\,]$. D'après ce qui précède, on a $\|f(\delta(t))\| = \exp(t)\|f(x_0)\| \leqslant \|f(x_0)\|$ d'où $f(\delta(t)) \in \mathrm{B}'$ et donc $\delta(t) \in \mathrm{K}'$. On obtient ainsi une contradiction avec le théorème de sortie de tout compact.

Exercice 5 – Forme quadratique. Pour montrer que q' est une forme quadratique, on polarise. On a clairement

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad q'(x) = b'(x,x)$$

où b' est la forme bilinéaire symétrique

$$b'(x,y) = q(a)b(x,y) - b(a,x)b(a,y)\,.$$

On note (r,s) la signature de q. On distingue alors les cas suivants

- Si a est dans le noyau de q alors $q' = 0$ et donc la signature de q' est $(0,0)$.
- Si a est q-isotrope et n'est pas dans le noyau. La forme linéaire $x \mapsto b(x,a)$ n'est pas nulle et

  $$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad q'(x) = -b(a,x)^2.$$

  La signature de q est donnée par $(0,1)$.
- Si a est n'est pas isotrope alors a commence une base $\mathscr{B} = (a, e_2, \ldots, e_n)$ qui est q-orthogonale. On calcule alors la matrice de q' dans cette base. On a

  $$b'(a,a) = q'(a) = 0, \qquad \forall\, i \in [\![2\,,\, n]\!], \quad b'(a,e_i) = q(a)b(a,e_i) - b(a,a)b(a,e_i) = 0$$

  et
  $$\forall\, i \neq j,\ i,j \geqslant 2, \qquad b'(e_i,e_j) = q(a)b(e_j,e_i) - b(a,e_j)b(a,e_i) = 0$$

  puisque a et e_i sont q-orthogonaux et a et e_j le sont aussi. De même, pour $i \geqslant 2$, on a

  $$b'(e_i,e_i) = q(a)q(e_i) - b(a,e_i)^2 = q(a)q(e_i).$$

  La matrice est alors $\operatorname{diag}(0, q(a)q(e_2), \ldots, q(a)q(e_n))$. La signature d'une forme quadratique mise sous forme diagonale est donnée par (t,u) où t est le nombre de coefficients diagonaux strictement positifs et u est le nombre de coefficients diagonaux strictement négatifs. Ainsi, si $q(a) > 0$ alors la signature de q' est donnée par $(r-1,s)$. Si $q(a) < 0$ alors la signature de q' est donnée par $(s-1,r)$.