Jean-Michel Ghidaglia, Vincent Beck

Corrigé Partiel Novembre 2007

Tout commentaire sur ce corrigé me permettra de l'améliorer ! Bonne lecture.

Exercice 1 – Méthode des caractéristiques.

Commentaires. L'objet de cet exercice est de montrer à l'aide des outils du calcul différentiel l'existence et l'unicité de la solution d'une équation aux dérivées partielles d'un type particulier. Cette équation est appelée *loi de conservation* (le nom vient de la propriété de la question **e**). On va démontrer que la solution est obtenue en « translatant » les données initiales $x \mapsto u(0,x)$ le long de droites de pentes $c_0(x)$. La figure **??** montre ces droites dites *caractéristiques* : un point singulier apparaît lorsque deux caractéristiques se rencontrent. Cette équation aux dérivées partielles régit des phénomènes physiques d'évolution. Ainsi, dans la pratique, seuls les temps positifs ($t \geqslant 0$) ont un sens physique. Par ailleurs, lorsque ${c_0}'$ est positif, on peut raffiner le raisonnement et définir la solution sur $]-\mathrm{T}\,,+\infty[\,\times\mathbb{R}$.

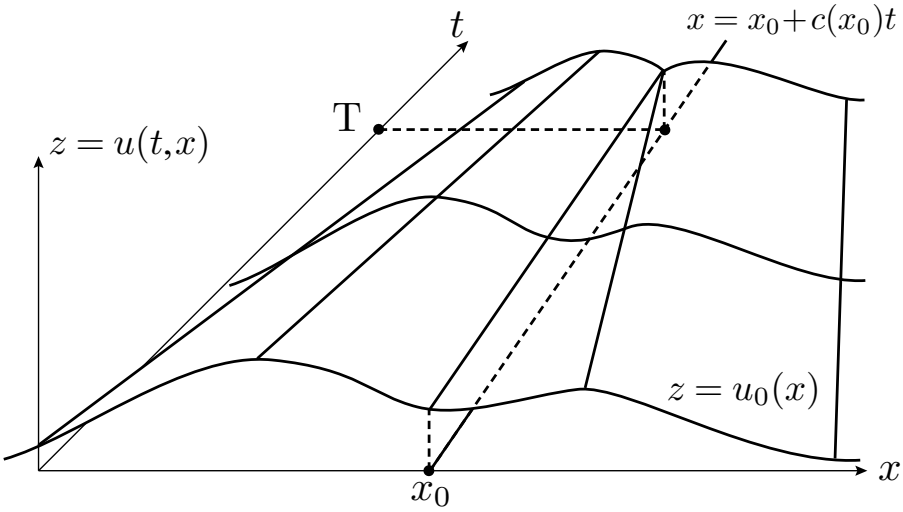

Fig. 1 Solution de l'équation de conservation, avec les lignes caractéristiques

a) Calculons la dérivée de la fonction $t \mapsto u(t, y(t))$ (de classe $\mathscr{C}^1$)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}u(t,y(t)) &= \frac{\partial u}{\partial t}(t,y(t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(t,y(t))\,y'(t)\\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t,y(t))\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto u(t, y(t))$ est donc constante. On en déduit alors que y' est constante (égale à $y'(0)$). Ainsi, $y(t) = y(0) + ty'(0) = x + t\,(a \circ u_0(x))$.

Par ailleurs, l'application y est la solution maximale de ($\mathscr{C}$). Elle est donc définie sur un intervalle de la forme $]\,t_1\,,t_2\,[$ avec $\mathrm{T}_- \leqslant t_1 < t_2 \leqslant \mathrm{T}_+$. Si $\mathrm{T}_- < t_1$ alors $t \mapsto y'(t)$ est bornée (puisque constante) dans un voisinage de t_1. On peut donc prolonger y en une fonction $\widetilde{y}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,t_1\,,t_2\,[$. De plus, par continuité, on a $\widetilde{y}'(t_1) = u(t_1, \widetilde{y}(t_1))$.

En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'équation $z'(t) = u(t, z(t))$ au point $(t_1, y(t_1))$, on construit un prolongement de $\widetilde{y}$ sur un intervalle ouvert contenant t_1 ce qui contredit la maximalité de y. Ainsi $t_1 = \mathrm{T}_-$. De même, on montre que $t_2 = \mathrm{T}_+$.

Remarque. On aurait aussi pu appliquer le théorème de sortie de tout compact pour montrer que $t_1 = \mathrm{T}_-$ et $t_2 = \mathrm{T}_+$.

b) En dérivant c, on obtient $c_0{}'(x) = u_0{}'(x)\, a' \circ u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme la fonction u_0 est bornée, il existe $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_0(\mathbb{R}) \subset [\,-\mathrm{B}\,,\mathrm{B}\,]$. On a alors $a' \circ u_0(\mathbb{R}) \subset a'([\,-\mathrm{B}\,,\mathrm{B}\,])$. Or $[\,-\mathrm{B}\,,\mathrm{B}\,]$ est compact et a' est continue, donc $a' \circ u_0(\mathbb{R})$ est contenu dans un compact c'est-à-dire que la fonction $a' \circ u_0$ est bornée. Comme $u_0{}'$ est aussi bornée, la fonction $c_0{}'$ est bornée.

c) D'après la question **a**, $t \mapsto u(t, x+t\,c_0(x))$ est constante. Sa valeur en 0 est $u_0(x)$. On a donc $u(t, x+t\,c_0(x)) = u_0(x)$, pour tout t. L'idée est alors d'exprimer $x = \varphi(t,y)$ en fonction de $y = x + t\,c_0(x)$ (et de t). On pense donc au théorème des fonctions implicites ou au théorème d'inversion locale. Cependant, on a ici besoin d'un résultat global. Il faut donc vérifier que l'on est en mesure d'appliquer le théorèmed'inversion globale.

Considérons l'application de classe $\mathscr{C}^1$

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t,x) & \longmapsto (t, y = x + tc_0(x)). \end{cases}$$

La matrice jacobienne de F au point (t,x) est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_0(x) & 1 + t\,c_0{}'(x) \end{bmatrix},$$

et donc
$$\det\big(\mathrm{dF}(t,x)\big) = 1 + t\,c_0{}'(x).$$

Pour $(t,x) \in \,]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\,\times \mathbb{R}$, on a $|tc_0{}'(x)| \leqslant |t|\mathrm{M} < 1$. Ainsi $\mathrm{dF}(t,x)$ est inversible pour $(t,x) \in \,]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\,\times \mathbb{R}$.

Pour appliquer le théorème d'inversion globale, il reste à montrer l'injectivité de F. Considérons (t_1,x_1) et (t_2,x_2) tels que $\mathrm{F}(t_1,x_1) = \mathrm{F}(t_2,x_2)$. On a alors

$$t_1 = t_2 = t \qquad \text{et} \qquad x_1 + tc_0(x_1) = x_2 + tc_0(x_2),$$

d'où
$$x_2 - x_1 = t(-c_0(x_2) + c_0(x_1)) = t\int_{x_1}^{x_2} -\,c_0{}'(x)\mathrm{d}\,x.$$

On en déduit que
$$|x_2 - x_1| \leqslant |t|\mathrm{M}\,|x_2 - x_1|.$$

Comme $0 \leqslant |t|\mathrm{M} < 1$, on obtient $x_1 = x_2$ et F est injective.

Le théorème d'inversion globale montre qu'il existe une fonction G de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\begin{cases} \mathrm{G} \circ \mathrm{F}(t,x) = (t,x), & \text{pour tout } (t,x) \in \,]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\,\times \mathbb{R}, \\ \mathrm{F} \circ \mathrm{G}(t,y) = (t,y), & \text{pour tout } (t,y) \in \mathrm{F}\,(\,]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\,\times \mathbb{R})\,. \end{cases}$$

En particulier, la fonction G est de la forme $(t,y) \mapsto (t, \varphi(t,y))$. Montrons que $\mathrm{F}(]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\times\mathbb{R}) = \,]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\times\mathbb{R}$. Il suffit de vérifier que $\mathbb{R}$ est l'image de l'application $\psi_t\colon x \mapsto x + tc_0(x)$. On a $\psi_t{}'(x) = 1 + t\,c_0{}'(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la fonction ψ_t est strictement croissante et vérifie

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad |\psi_t(x) - \psi_t(0)| \geqslant (1 - |t|\,\mathrm{M})|x|.$$

On en déduit que
$$|\psi_t(x)| \geqslant (1 - |t|\,\mathrm{M})|x| - |\psi_t(0)|,$$

et donc que $|\psi_t(x)|$ tend vers $+\infty$, lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. De plus, comme ψ_t est croissante, elle admet des limites en $+\infty$ et $-\infty$. Ainsi, on a nécessairement

$$\psi_t(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \psi_t(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty\,.$$

La fonction ψ_t est donc un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et donc

$$\mathrm{F}(\,]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\,\times \mathbb{R}) = \,]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\,\times \mathbb{R}\,.$$

Ainsi F est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $]\,-\mathrm{T}\,,\mathrm{T}\,[\,\times \mathbb{R}$ sur lui-même.

À la question **a**, on a démontré que $u \circ \mathrm{F}(t,x) = u_0(x)$ pour tout (t,x). Ainsi en composant à gauche par G, on obtient

$$u(t,x) = u_0\big(\varphi(t,x)\big).$$

Enfin, comme $\mathrm{F}(0,x) = (0,x)$, on a $\mathrm{G}(0,x) = \mathrm{G}\,(\mathrm{F}(0,x)) = (0,x)$ et $\varphi(0,x) = x$.

d) La fonction φ ne dépend que de u_0 et a. L'expression $u = u_0 \circ \varphi$ montre ainsi l'unicité d'une éventuelle solution de $\mathscr{P}$. Il reste à vérifier que la fonction u ainsi définie est bien une solution de $\mathscr{P}$. Pour cela, on utilise la relation qui « définit » φ :

$$\varphi(t, x + t\, c_0(x)) = x. \tag{$*$}$$

On a
$$\frac{\partial u}{\partial t} = ({u_0}' \circ \varphi)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = ({u_0}' \circ \varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad .$$

Par ailleurs, $a(u) = a(u_0(\varphi)) = c_0 \circ \varphi$, d'où

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = (u_0' \circ \varphi)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \circ \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right). \tag{$**$}$$

En dérivant la deuxième relation $(*)$ par rapport à t, on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathrm{F}(t,x)) + c_0(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\mathrm{F}(t,x)) = 0,$$

c'est-à-dire, en composant par G,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,y) + c_0(\varphi(t,y))\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,y) = 0.$$

L'expression $(**)$ est donc nulle :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{et} \qquad u(0,x) = u_0(\varphi(0,x)) = u_0(x).$$

Exercice 2 — Groupes de Lie.

a) (i) $(\mathbb{R}^n, +)$ est bien sûr un groupe. De plus, les applications $(x,y) \mapsto x+y$ et $x \mapsto -x$ sont linéaires et donc $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi $(\mathbb{R}^n, +)$ est un groupe de Lie.

(ii) $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ est bien sûr un groupe. De plus, l'application $(x,y) \mapsto xy$ est la restriction d'une application bilinéaire donc est $\mathscr{C}^\infty$ et l'application $x \mapsto x^{-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi $\mathbb{R}_+^*$ est un groupe de Lie.

(iii) $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ est bien sûr un groupe. De plus, l'application $(x,y) \mapsto xy$ est la restriction d'une application $\mathbb{C}$-bilinéaire donc $\mathbb{R}$-bilinéaire et donc $\mathscr{C}^\infty$ et l'application

$$\mathrm{inv}\colon \begin{cases} \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z = x + iy \longmapsto z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right) \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^\infty$ puisque ses deux composantes le sont. Ainsi $\mathbb{C}^*$ est un groupe de Lie.

(iv) $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$ est bien sûr un groupe. De plus, l'application $(x,y) \mapsto xy$ est la restriction d'une application bilinéaire donc est $\mathscr{C}^\infty$ et l'application $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$ puisque $\mathrm{A}^{-1} = \det^{-1}(\mathrm{A})\,{}^t\mathrm{com}(\mathrm{A})$. Ainsi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe de Lie.

(v) Montrons que $(\mathbb{R}_+^*, *)$ n'est pas un groupe. Si e était l'élément neutre, on aurait $x * e = \sqrt{x^2+e^2} = x$. En élevant au carré, on obtiendrait $x^2 + e^2 = x^2$ et donc $e = 0 \notin \mathbb{R}_+^*$. Cependant l'application μ est $\mathscr{C}^\infty$ comme composée d'application $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi $(\mathbb{R}_+^*, *)$ n'est pas un groupe de Lie

(vi) $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe obtenu par transfert de structure via $x \mapsto x^3$ (voir aussi la question **h**). Montrons-le. Commençons par l'associativité : pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$(x * y) * z = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)^3 + z^3} = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$$

et
$$x * (y * z) = \sqrt[3]{(x^3 + \sqrt[3]{y^3+z^3})^3} = \sqrt[3]{x^3+y^3+z^3}$$

Ainsi $*$ est associative. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x * 0 = \sqrt[3]{x^3+0^3} = x \qquad \text{et} \qquad 0 * x = \sqrt[3]{0^3+x^3} = x\,.$$

Ainsi 0 est élément neutre. Enfin, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x * -x = \sqrt[3]{x^3+(-x)^3} = 0 \qquad \text{et} \qquad (-x) * x = \sqrt[3]{(-x)^3+x^3} = 0\,.$$

Ainsi $-x$ est l'inverse de x pour la loi $*$ et $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe. Mais ce n'est pas un groupe de Lie. En effet, μ n'est pas différentiable en $(0,0)$ et donc n'est pas $\mathscr{C}^\infty$. Montrons que μ n'est pas différentiable en $(0,0)$. L'application μ admet des dérivés directionnelles à l'origine dans toutes les directions puisque pour $v = (x, y)$, on a $\mu(tv) = t\mu(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$. Ainsi la dérivée directionnelle de μ à l'origine dans la direction v est

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu(tv) - \mu(0,0)}{t} = \mu(v)\,.$$

$(*)$ Si μ était différentiable en $(0,0)$, l'application qui à v associe la dérivée directionnelle de μ à l'origine dans la direction v serait linéaire égale à $\mathrm{d}\mu(0)$. et donc, grâce à $(*)$, μ serait linéaire. Or $\mu(1,1) + \mu(-1,1) = \sqrt[3]{2} \neq \mu((1,1) + (-1,1)) = \mu(0,2) = 2$ et donc μ n'est pas linéaire.

(vii) Montrons que $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe. Commençons par montrer que $*$ est associative. On calcule pour $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$x*(y*z) = x*(y_1+z_1, y_2+e^{y_1}z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+e^{x_1}(y_2+e^{y_1}z_2) = (x_1+y_1+z_1, x_2+e^{x_1}y_2+e^{x_1+y_1}z_2)$$

et $$(x*y)*z = (x_1+y_1, x_2+e^{y_1}y_2)*z = (x_1+y_1+z_1, x_2+e^{x_1}y_2+e^{x_1+y_1}z_2)\,.$$

Ainsi $*$ est associative. De plus, pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(0,0)*(x_1,x_2) = (x_1, 0+e^0x_2) = (x_1,x_2) \qquad \text{et} \qquad (x_1,x_2)*(0,0) = (x_1, x_2+e^{x_1}0) = (x_1,x_2)\,.$$

Ainsi $(0,0)$ est élément neutre pour $*$. Enfin, pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose $y = (-x_1, -e^{-x_1}x_2)$. On a

$$x*y = (0, x_2+e^{x_1}(-e^{-x_1}x_2)) = (0,0) \qquad \text{et} \qquad y*x = (0, -e^{-x_1}x_2+e^{-x_1}x_2) = (0,0)\,.$$

Ainsi y est l'inverse de x pour $*$ et $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe. De plus l'application μ est $\mathscr{C}^\infty$ (puisque chacune de ses composantes l'est) et l'application $x \mapsto (-x_1, -e^{-x_1}x_2)$ est $\mathscr{C}^\infty$ (puisque chacune de ses composantes l'est). Ainsi $(\mathbb{R}^2, *)$ est un groupe de Lie.

b) L'associativité de $*$ se traduit par $\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x, \mu(y,z))$ pour tout $(x,y,z) \in \mathrm{U}^3$. En différentiant par rapport à z avec x et y fixé, on obtient dans le membre de gauche $\mathrm{D}_2\mu(\mu(x,y),z)$. Pour le membre de droite, on l'écrit comme la composée de l'application $z \mapsto \mu(y,z)$ et de l'application $t \mapsto \mu(x,t)$. Ainsi on obtient $\mathrm{D}_2\mu(x, \mu(y,z)) \circ \mathrm{D}_2\mu(y,z)$. On obtient bien l'égalité souhaitée.

Par ailleurs, pour $y \in \mathrm{U}$, on a $\mu(1,y) = 1*y = y$ et donc en différentiant par rapport à y, on obtient $\mathrm{D}_2\mu(1,y) = \mathrm{id}$.

c) $(i) \Rightarrow (ii)$. L'application α est la composée de $(x,y) \mapsto (x, y^{-1})$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ (puisque chacune de ses composantes l'est) et de μ qui est $\mathscr{C}^\infty$ par hypothèse. Ainsi α est $\mathscr{C}^\infty$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. L'application $x \mapsto x^{-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de l'application $x \mapsto (x,1)$ (qui est $\mathscr{C}^\infty$ puisque chacune de ses composantes l'est) et de l'application α qui est $\mathscr{C}^\infty$ par hypothèse. L'application μ est alors $\mathscr{C}^\infty$ comme composée de l'application $(x,y) \mapsto (x, y^{-1})$ et de l'application α. Ainsi $(\mathrm{U}, *)$ est un groupe de Lie.

$(i) \Rightarrow (iii)$ est évident.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit $x \in \mathrm{U}$. On considère l'application $f : (y,z) \mapsto \mu(y,z) - 1$ à laquelle on va appliquer le théorème des fonctions implicites dans un voisinage de (x, x^{-1}). On a $f(x, x^{-1}) = 0$ et $\mathrm{D}_2 f(x, x^{-1}) = \mathrm{D}_2\mu(x, x^{-1})$.

La question **b** appliquée avec $y = x^{-1}$ et $z = 1$ donne

$$\mathrm{D}_2\mu(1,1) = \mathrm{id} = \mathrm{D}_2\mu(x, x^{-1}) \circ \mathrm{D}_2\mu(x^{-1}, 1)\,.$$

Ainsi $\mathrm{D}_2\mu(x, x^{-1}) = \mathrm{D}_2 f(x, x^{-1})$ est inversible. On en déduit qu'il existe une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie dans un voisinage ouvert V de x tel que $f(y, \varphi(y)) = 0$ pour tout $y \in \mathrm{V}$. Par définition de f, on a $\varphi(y) = y^{-1}$ pour tout $y \in \mathrm{V}$. Ainsi l'application $y \mapsto y^{-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$ en x pour tout $x \in \mathrm{U}$ et donc $x \mapsto x^{-1}$ est $\mathscr{C}^\infty$ et $(\mathrm{U}, *)$ est un groupe de Lie.

d) Soit W un groupe de Lie. Pour $x \in \mathrm{W}$, les applications $\rho_x : z \mapsto z*x$ et $\lambda_x : z \mapsto x*z$ sont $\mathscr{C}^\infty$. En effet, ρ_x (resp. λ_x) est la composée de l'application $z \mapsto (z,x)$ (qui est $\mathscr{C}^\infty$ puisque chacune de ses composantes l'est) (resp. de l'application $z \mapsto (x,z)$) avec l'application μ.

Il est clair qu'un morphisme de groupes $\mathscr{C}^\infty$ est un morphisme de groupe qui est $\mathscr{C}^\infty$ en 1.

Montrons la réciproque. Soit $x \in \mathrm{U}$. L'application $\rho_{x^{-1}}$ est $\mathscr{C}^\infty$ et envoie x sur 1. Ainsi comme f est $\mathscr{C}^\infty$ en 1, on en déduit, par composition que l'application $f \circ \rho_{x^{-1}} : y \mapsto f(y *_{\mathrm{U}} x^{-1})$ est $\mathscr{C}^\infty$ en x. Toujours par composition, on en déduit que l'application $\rho_{f(x)} \circ f \circ \rho_{x^{-1}}$ est $\mathscr{C}^\infty$ en x. Or

$$\forall\, y \in \mathrm{U}, \qquad \rho_{f(x)} \circ f \circ \rho_{x^{-1}}(y) = f(y *_{\mathrm{U}} x^{-1}) *_{\mathrm{V}} f(x) = f(y) *_{\mathrm{V}} f(x)^{-1} *_{\mathrm{V}} f(x) = f(y)\,.$$

Autrement dit, f est $\mathscr{C}^\infty$ en x pour tout $x \in \mathrm{U}$ et donc f est $\mathscr{C}^\infty$ sur U.

L'application det est polynomiale donc $\mathscr{C}^\infty$. De plus $\det(uv) = \det(u)\det(v)$ pour tout $u, v \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, autrement det est un morphisme de groupes.

e) Si f est un isomorphisme de groupes de Lie alors f est un morphisme de groupe $\mathscr{C}^\infty$. De plus f^{-1} est aussi un morphisme de groupes $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi f et f^{-1} sont $\mathscr{C}^\infty$ et f est donc $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme.

Si f est un morphisme de groupes et un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme alors f est bijective, f est $\mathscr{C}^\infty$ et f est un morphisme de groupes. Ainsi f est un morphisme de groupes de Lie. De plus, f^{-1} est aussi $\mathscr{C}^\infty$ (puisque f est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme) et un morphisme de groupes (puisque f en est un).

f) L'application ln est $\mathscr{C}^\infty$ bijective et de bijection réciproque exp qui est $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi l'application ln est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme et ln est un morphisme de groupe puisque pour $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)\,.$$

La question précédente assure que ln est un isomorphisme de groupes de Lie.

g) Montrons que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe. Commençons par vérifier l'associativité de $*$. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on a

$$(x * y) * z = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))) + \varphi(z)) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z))\,,$$

et
$$(x * (y * z) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(y) + \varphi(y)))) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z))\,,$$

Ainsi $*$ est associative. Montrons que $\varphi^{-1}(0)$ est l'élément pour $*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x * \varphi^{-1}(0) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + 0) = x \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1}(0) * x = \varphi^{-1}(0 + \varphi(x)) = x\,.$$

Ainsi $\varphi^{-1}(0)$ est bien l'élément neutre pour $*$. Enfin pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x * \varphi^{-1}(-\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + (-\varphi(x))) = \varphi^{-1}(0) \qquad \text{et} \qquad \varphi^{-1}(-\varphi(x)) * x = \varphi^{-1}(-\varphi(x) + \varphi(x)) = \varphi^{-1}(0)\,.$$

Ainsi $\varphi^{-1}(-\varphi(x))$ est l'inverse de x pour $*$ et $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe (cette construction s'appelle le transfert de structure par la bijection φ).

Par ailleurs l'application $x \mapsto \varphi^{-1}(-\varphi(x))$ est $\mathscr{C}^\infty$ puisque l'est application φ, $x \mapsto -x$ et φ^{-1} le sont (cette phrase est inutile en vertu de la question **c**). Enfin l'application $(x, y) \mapsto \mu(x, y)$ est $\mathscr{C}^\infty$ puisque les applications $(x, y) \mapsto (\varphi(x), \varphi(y))$, $(x, y) \mapsto x + y$ et φ^{-1} le sont. On en déduit que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe de Lie.

De plus, par construction de $*$, on a $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Ainsi φ est un morphisme de groupes. Enfin φ est par définition un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme. La question **e** assure que f est un isomorphisme de groupes de Lie.

h) La question **b** appliquée à $x = y^{-1}$ et $z = e$ assure que

$$\partial_y \mu(e, e) = e = \partial_y \mu(y^{-1}, y) \partial_y(y, e)\,.$$

Ainsi $\partial_y(y, e) \neq 0$ pour tout y et donc, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, est de signe constant. Comme $\partial_y(e, e) = e$, on en déduit $\partial_y(y, e) > 0$ pour tout y.

i) Supposons que φ est $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie $\varphi(x * y) = \varphi \circ \mu(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout x, y. En dérivant par rapport à y à x fixé, on obtient

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x * y) \partial_y \mu(x, y) = \varphi'(y)\,.$$

Ainsi pour $y = e$, on en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) \partial_y \mu(x, e) = \varphi'(e)\,.$$

La question précédente assure alors que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = \frac{\varphi'(e)}{\partial_y \mu(x, e)}.$$

et donc
$$\varphi(x) - \varphi(e) = a \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\partial_y \mu(t, e)}\,.$$

avec $a = \varphi'(1)$. Par ailleurs, on a $\varphi(e * e) = \varphi(e) = \varphi(e) + \varphi(e)$ et donc $\varphi(e) = 0$ ce qui donne l'égalité souhaitée.

j) Par construction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ de dérivée $\varphi'(x) = a\partial_y\mu(x,e)^{-1}$. Ainsi φ' et donc φ sont $\mathscr{C}^\infty$. De plus φ' est de signe constant (puisque $a \neq 0$) et donc φ est strictement monotone et donc injective. Le théorème d'inversion globale en une dimension (qui est au programme de Sup ou de première année) assure que φ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de φ sur $\varphi(\mathbb{R})$.

Montrons que $\varphi(x*y) - \varphi(x) - \varphi(y) = 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On fixe x et on calcule la dérivé par rapport de la fonction $g : y \mapsto \varphi(x*y) - \varphi(x) - \varphi(y)$. On a, pour $y \in \mathbb{R}$,

$$g'(y) = \varphi'(x*y)\partial_y\mu(x,y) - \varphi'(y) = a\left(\frac{\partial_y\mu(x,y)}{\partial_y\mu(x*y,e)} - \frac{1}{\partial_y\mu(y,e)}\right).$$

La question **b** appliquée à $z = e$ assure que $g'(y) = 0$ et donc g est constante. Or $g(e) = \varphi(x) - \varphi(x) - \varphi(e)$ et $\varphi(e) = 0$ par définition de φ. Ainsi $g = 0$ et $\varphi(x*y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. L'application φ est donc un morphisme de groupes.

D'après la question **e**, il reste à montrer que $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Or $\varphi(\mathbb{R})$ est un intervalle (puisque φ est continue et $\mathbb{R}$ est un intervalle) ouvert (car φ est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme) stable par addition (puisque $\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi(x*y)$) et contenant $\varphi(e) = 0$. Ainsi $\varphi(\mathbb{R})$ contient un intervalle de la forme $]-\varepsilon\,,\varepsilon\,[$ avec $\varepsilon > 0$ et donc $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

On en déduit que $x*y = \varphi^{-1}(\varphi(x)+\varphi(y)) = \varphi^{-1}(\varphi(y)+\varphi(x)) = y*x$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $*$ est commutative.

k) Soit $*$ une loi sur I qui fait de I un groupe de Lie. On va montrer qu'il existe un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme φ de I sur $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(x*y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ pour tout $x, y \in \mathrm{I}$ (autrement dit la loi sur I est obtenue par transfert de structure de celle de $\mathbb{R}$ via φ^{-1}).

On construit d'abord $\varphi_1 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme. Si $\mathrm{I} =]\,a\,,b\,[$ avec $a > -\infty$ et $b < +\infty$ alors on prend

$$\varphi_1(t) = \tan\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\frac{t-a}{b-a}\right)$$

(on transforme d'abord l'intervalle $]\,a\,,b\,[$ en $]-\pi/2\,,\pi/2\,[$ de façon affine puis on compose avec tan). Si $a > -\infty$ et $b = +\infty$, on prend $\varphi_1(t) = \ln(t-a)$. Si $a = -\infty$ et $b < +\infty$, on prend $\varphi_1(t) = \ln(b-t)$.

En adaptant la question **g**, on construit sur $\mathbb{R}$ une structure de groupe de Lie, en posant

$$\mu(x,y) = \varphi_1({\varphi_1}^{-1}(x) * {\varphi_1}^{-1}(y)).$$

Les questions **h**, **i** et **j** montrent qu'il existe un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme φ_2 de $\mathbb{R}$ tel que $\varphi_2(\mu(x,y)) = \varphi_2(x) + \varphi_2(y)$. Le $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ vérifie alors l'égalité.

l) On a $(1,1)*(1,0) = (2, 1+e\cdot 0) = (2,1) \neq (1,0)*(1,1) = (2, 0+e) = (2,e)$.

m) On considère l'application $i : x_2 \mapsto (0, x_2)$. Elle est linéaire donc $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie $i(x_2 + x_2') = (0, x_2 + x_2') = (0,x_2)*(0,x_2') = i(x_2)*i(x_2')$. Ainsi i est un morphisme de groupes de Lie. On considère aussi l'application $\pi : (x_1, x_2) \mapsto x_1$. L'application π est linéaire donc $\mathscr{C}^\infty$ et est un morphisme de groupes ainsi π est un morphisme de groupes de Lie.

L'application i est injective, l'application π est surjective et on a $\operatorname{Ker}\pi = \{(0,x_2),\ x_2 \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Im} i$. Ainsi

$$0 \longrightarrow (\mathbb{R},+) \xrightarrow{\ i\ } (\mathbb{R}^2,*) \xrightarrow{\ \pi\ } (\mathbb{R},+) \longrightarrow 0$$

est bien une suite exacte de groupes de Lie. L'application $s : x_1 \mapsto (x_1, 0)$ est une section de π (puisque $s(x_1)*s(x_1') = s(x_1+x_1') = (x_1+x_1', 0)$ et $\pi \circ s(x_1) = x_1$). Ainsi le groupe $(\mathbb{R}^2,*)$ est un produit semi-direct de $(\mathbb{R},+)$ par lui-même. Le morphisme γ de $\mathbb{R}$ dans $\operatorname{Aut}_{\mathrm{Gr.}}(\mathbb{R})$ associé à ce produit semi-direct est $x_1 \mapsto \delta_{\exp(x_1)}$ où δ_λ désigne la multiplication par $\lambda \neq 0$. En effet, pour calculer ce morphisme, il suffit que calculer

$$(x_1,0)*(0,x_2)*(x_1,0)^{-1} = (x_1, \exp(x_1)x_2)*(-x_1, e^{-x_1}0) = (0, \exp(x_1)x_2)$$

et de se souvenir que dans le cas général le morphisme δ de H dans Aut(N) est donné par la restriction à N de la conjugaison par un élément de $h \in \mathrm{H}$.