Représentation des groupes finis

Corrigé

a) id_k est l'élément neutre de $\mathrm{GL}(k)$. L'application ρ est donc le morphisme de groupes trivial de G dans $\mathrm{GL}(k)$. Elle définit donc une structure de G-module sur k.

b) L'application $\varphi : \mathrm{GL}(k) \to k^\times$ définie par $\varphi(f) = f(1)$ est un isomorphisme de groupes. Ainsi se donner une structure de G-module sur k revient à se donner un morphisme de groupes de G dans $k^\times$. De plus, comme $k^\times$ est commutatif, tout morphisme de groupes de G dans $k^\times$ passe au quotient par le groupe dérivée de G. Donc, se donner un morphisme de groupes de G dans $k^\times$ revient à se donne un morphisme de groupe de $\mathrm{G}/\mathrm{D}(\mathrm{G})$ dans $k^\times$.

Par ailleurs, si $\rho_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(k)$ et $\rho_2 : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(k)$ sont deux morphismes de groupes définissant sur k deux structures de G-module G-isomorphes alors $\rho_1 = \rho_2$. En effet, si f est un isomorphisme de G-module entre les structures associées à ρ_1 et ρ_2 alors $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Comme $\mathrm{End}_k(k)$ est commutatif et f bijective, on a alors

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f = f \circ \rho_2(g) \qquad \text{et donc} \qquad \rho_1(g) = \rho_2(g)\,.$$

Finalement, le nombre de classe d'isomorphisme de structure de G-module sur k est égal au nombre de morphismes de groupes de G dans $k^\times$ ou encore au nombre de morphismes de groupes de $\mathrm{G}/\mathrm{D}(\mathrm{G})$ dans $k^\times$.

c) Le sous-espace V' est stable par $\rho(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. On en déduit que $\rho(g)$ induit par restriction un endomorphisme $\rho'(g)$ de V' et par passage au quotient un endomorphisme $\widetilde{\rho}(g)$ de V/V' (voir [Bpm, p.158]). Les propriétés des applications induites par restriction et par passage au quotient (voir [Bpm, p.249]) donnent

$$\forall\, g, g' \in \mathrm{G}, \qquad \rho'(gg') = \rho'(g) \circ \rho'(g') \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\rho}(gg') = \widetilde{\rho}(g) \circ \widetilde{\rho}(g'),$$

ainsi que $\rho'(1_\mathrm{G}) = \mathrm{id}_{\mathrm{V}'}$ et $\widetilde{\rho}(1_\mathrm{G}) = \mathrm{id}_{\mathrm{V}/\mathrm{V}'}$. On en déduit alors que $\rho'(g) \in \mathrm{GL}(\mathrm{V}')$ et $\widetilde{\rho}(g) \in \mathrm{GL}(\mathrm{V}/\mathrm{V}')$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et que ρ' et $\widetilde{\rho}$ sont des morphismes de groupes. Ils définissent donc des structures de G-module respectivement sur V' et V/V'.

d) Les applications $\rho_1(g^{-1})$ et $\rho_2(g)$ sont k-linéaires pour tout $g \in \mathrm{G}$. On en déduit que $\rho(g)(f) \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ pour tout $f \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ et tout $g \in \mathrm{G}$ puis que $\rho(g)$ est k-linéaire pour tout $g \in \mathrm{G}$. De plus, pour $g \in \mathrm{G}$ et $f \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$, on a

$$\rho(gg')(f) = \rho_1(gg') \circ f \circ \rho_2((gg')^{-1}) = \rho_1(g) \circ \rho_1(g') \circ f \circ \rho_2(g'^{-1}) \circ \rho_2(g'^{-1}) = \rho(g)\rho(g')(f),$$

et $\rho(1_\mathrm{G})(f) = f$. On en déduit que ρ est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2))$ et que ρ est un morphisme de groupes. Avec $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}$ et $\mathrm{V}_2 = k$, on obtient une structure de G-module sur V^*. Le morphisme ρ associé est donné par $\rho(g) = {}^t(\rho(g^{-1}))$ pour tout $g \in \mathrm{G}$.

e) L'application $\rho(g) = \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$ est définie par $\rho(g)(v_1, v_2) = (\rho_1(g)(v_1), \rho_2(g)(v_2))$ pour $(v_1, v_2) \in \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$. Elle est k-linéaire et on a

$$\rho(gg')(v_1, v_2) = (\rho_1(g) \circ \rho_1(g')(v_1), \rho_2(g) \circ \rho_2(g')(v_2)) = \rho(g)(\rho_1(g')(v_1), \rho_2(g')(v_2)) = \rho(g)\rho(g')(v_1, v_2)$$

De plus, $\rho(1_\mathrm{G})(v_1, v_2) = (v_1, v_2)$. Ainsi ρ est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2)$ et ρ un morphisme de groupes.

f) Commençons par montrer que l'application $\rho_1(g) \otimes \rho_2(g) : v_1 \otimes v_2 \mapsto \rho_1(g)(v_1) \otimes \rho_2(g)(v_2)$ est bien définie. Comme $\rho_1(g)$ et $\rho_2(g)$ sont k-linéaires, l'application $(v_1, v_2) \mapsto \rho_1(g)(v_1) \otimes \rho_2(g)(v_2)$ est une application bilinéaire de $\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2$ dans $\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2$. La propriété universelle du produit tensoriel fournit alors une application k-linéaire notée $\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$ de $\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2$ qui vérifie $\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)(v_1) \otimes \rho_2(g)(v_2)$. L'unicité de l'application obtenue par la propriété universelle du produit tensoriel montre que

$$\rho(gg') = \rho_1(gg') \otimes \rho_2(gg') = (\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)) \circ (\rho_1(g') \otimes \rho_2(g')) = \rho(g) \circ \rho(g') \qquad \text{et} \qquad \rho(1_\mathrm{G}) = \mathrm{id}_{\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2}.$$

Ainsi ρ est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2)$ et ρ est un morphisme de groupes.

g) Les applications $\rho_1(g^{-1})$, $\rho_2(g^{-1})$ et $\rho_\mathrm{W}(g)$ sont k-linéaires. On en déduit que $\rho(g)(\mathrm{B}) \in \mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, \mathrm{W})$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, \mathrm{W})$ et puis que l'application $\rho(g)$ est k-linéaire. De plus, pour $\mathrm{B} \in \mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, k)$, $g \in \mathrm{G}$ et $(x, y) \in \mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2$, on a

$$\rho_\mathrm{W}(g)\rho_\mathrm{W}(g')\mathrm{B}(\rho_1(g'^{-1})\rho_1(g^{-1})(x), \rho_2(g'^{-1})\rho_2(g^{-1})(y)) = \rho_\mathrm{W}(g)(\rho(g')(\mathrm{B}))(\rho_1(g^{-1})(x), \rho_2(g^{-1})(y))$$

ce qui donne
$$(\rho(gg')(\mathrm{B}))(x, y) = (\rho(g)\rho(g')(\mathrm{B}))(x, y)\,.$$

Par ailleurs, $\rho(1_\mathrm{G})(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$. On en déduit que ρ est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}(\mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, \mathrm{W}))$ et ρ un morphisme de groupes. Avec $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$ et $\mathrm{W} = k$, on obtient une structure de G-module sur $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, k)$.

h) Comme $\rho_{\mathrm{V}}(g)$ est k-linéaire, l'application $(\lambda, v) \mapsto \lambda \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g)(v)$ est k-bilinéaire. Grâce à la propriété universelle du produit tensoriel, on obtient une application k-linéaire

$$\rho(g) = \mathrm{id}_{k'} \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g) \colon \begin{cases} k' \otimes \mathrm{V} \longrightarrow k' \otimes \mathrm{V} \\ \lambda \otimes v \longmapsto \lambda \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g)(v)\,. \end{cases}$$

Le k-espace vectoriel $k' \otimes \mathrm{V}$ est en fait un k'-espace vectoriel. L'action de $\mu \in k'$ sur $\lambda \otimes v$ est donnée par $\mu \cdot (\lambda \otimes v) = \lambda\mu \otimes v$. Comme

$$(\mathrm{id}_{k'} \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g))(\mu \cdot (\lambda \otimes v)) = \mu\lambda \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g) = \mu \cdot (\lambda \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g))\,,$$

l'application $\mathrm{id}_{k'} \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g)$ est k'-linéaire. De plus, par unicité de l'application obtenu par la propriété universelle du produit tensoriel, on a

$$\rho(gg') = \mathrm{id}_{k'} \otimes \rho_{\mathrm{V}}(gg') = (\mathrm{id}_{k'} \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g)) \circ (\mathrm{id}k' \otimes \rho_{\mathrm{V}}(g')) = \rho(g) \circ \rho(g') \qquad \text{et} \qquad \rho(1_{\mathrm{G}}) = \mathrm{id}_{k' \otimes \mathrm{V}}\,.$$

On en déduit que ρ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_{k'}(k' \otimes \mathrm{V})$ et que ρ est un morphisme de groupes.

Corrigé

a) id_{V} commute avec toutes les applications de V dans lui-même donc en particulier avec celle de la forme $\rho_{\mathrm{V}}(g)$.

b) Comme $u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}_1)$, on a $v \circ u \circ \rho_{\mathrm{V}}(g) = v \circ \rho_1(g) \circ u$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Comme $v \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$, on obtient $v \circ \rho_1(g) \circ u = \rho_2(g) \circ v \circ u$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. On a donc

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad v \circ u \circ \rho_{\mathrm{V}}(g) = \rho_2(g) \circ v \circ u\,,$$

ce qui signifie que $v \circ u \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}_2)$.

c) Soit $x \in \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$. Comme $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$, on a $gf(x) = f(gx)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Comme $x \in \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$, on a $f(gx) = f(x)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. On a donc $gf(x) = f(x)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$, ce qui signifie que $f(x) \in \mathrm{W}^{\mathrm{G}}$.

Si f est un G-isomorphisme, en appliquant ce qui précède au G-morphisme f^{-1}, on trouve $f^{-1}(\mathrm{W}^{\mathrm{G}}) \subset \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$ et donc $f(f^{-1}(\mathrm{W}^{\mathrm{G}})) \subset f(\mathrm{V}^{\mathrm{G}}) \subset \mathrm{W}^{\mathrm{G}}$. Comme f est bijective, on a $f(f^{-1}(\mathrm{W}^{\mathrm{G}})) = \mathrm{W}^{\mathrm{G}}$ et donc $f(\mathrm{V}^{\mathrm{G}}) = \mathrm{W}^{\mathrm{G}}$.

d) $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont des k-espaces vectoriels. Il reste donc à montrer que $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont stables respectivement par $\rho_{\mathrm{W}}(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et par $\rho_{\mathrm{V}}(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Soient $y = f(x) \in \mathrm{Im}\, f$ et $g \in \mathrm{G}$, on a $gy = gf(x) = f(gx) \in \mathrm{Im}\, f$ et donc $\mathrm{Im}\, f$ est bien stable par $\rho_{\mathrm{W}}(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Soient $x \in \mathrm{Ker}\, f$ et $g \in \mathrm{G}$, on a $f(gx) = gf(x) = 0$ et donc $gx \in \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, f$ est bien stable par $\rho_{\mathrm{V}}(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$.

e) L'application i est k-linéaire. Soient $x \in \mathrm{V}'$ et $g \in \mathrm{G}$. Comme $gx \in \mathrm{V}'$, on peut écrire $i(gx) = gx = gi(x)$.

f) D'après la construction de la structure de G-module sur V/V' (voir la question **c** de l'exercice 1), l'action de $g \in \mathrm{G}$ sur V/V' est donnée par $\widetilde{\rho}(g)$ qui est l'unique k-endomorphisme u de V/V' vérifiant $\pi \circ \rho_{\mathrm{V}}(g) = u \circ \pi$. On a donc

$$\forall\, v \in \mathrm{V}, \qquad \pi(gv) = \widetilde{\rho}(g)(\pi(v)) = g\pi(v)\,,$$

ce qui signifie que π est un morphisme de G-modules.

Comme f est k-linéaire, la propriété universelle du quotient pour les applications k-linéaires montre qu'il existe une unique application k-linéaire $\overline{f}$ vérifiant $f = \overline{f} \circ \pi$. Il s'agit à présent de montrer que $\overline{f}$ est un morphisme de G-modules c'est-à-dire que $\overline{f} \circ \widetilde{\rho}(g) = \rho_{\mathrm{W}}(g) \circ \overline{f}$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Soit $y = \pi(x) \in \mathrm{V}/\mathrm{V}'$. Comme π et f sont des morphismes de G-modules, on obtient

$$(\overline{f} \circ \widetilde{\rho}(g))(y) = (\overline{f} \circ \widetilde{\rho}(g))(\pi(x)) = \overline{f} \circ \pi(gx) = f(gx) = g_{\mathrm{W}} f(x) = g_{\mathrm{W}}(\overline{f}\,(\pi(x))) = (\rho_{\mathrm{W}}(g) \circ \overline{f}\,)(y).$$

ce qui montre que $\overline{f}$ est un G-morphisme.

g) Montrons que l'application

$$\Omega \colon \begin{cases} {\mathrm{V}_1}^* \otimes \mathrm{V}_2 \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \\ \varphi_1 \otimes v_2 \longmapsto (v_1 \mapsto \varphi_1(v_1) v_2) \end{cases}$$

est bien définie et est un G-isomorphisme.

L'application $(\varphi_1, v_2) \mapsto (v_1 \mapsto \varphi_1(v_1)v_2)$ est k-bilinéaire. La propriété universelle du produit tensoriel montre qu'il existe une unique application k-linéaire Ω vérifiant $\Omega(\varphi_1 \otimes v_2) = (v_1 \mapsto \varphi_1(v_1)v_2)$ pour tout $(\varphi_1, v_2) \in {\mathrm{V}_1}^* \times \mathrm{V}_2$. L'application Ω est donc bien définie et k-linéaire.

Montrons que Ω est bijective. Comme $\dim_k({\mathrm{V}_1}^* \otimes \mathrm{V}_2) = \dim_k(\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2))$, il suffit de montrer que Ω est surjective. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_\ell)$ une base de V_1, $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_\ell^*)$ sa base duale et $f \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$. On a alors

$$\Omega\left(\sum_{i=1}^{\ell} e_i^*\otimes f(e_i)\right) = \left(v\mapsto \sum_{i=1}^{\ell} e_i^*(v)f(e_i)\right) = \left(v\mapsto f\left(\sum_{i=1}^{\ell} e_i^*(v)e_i\right)\right) = (v\mapsto f(v)) = f\,,$$

ce qui montre que Ω est surjective et donc bijective.

Il reste à montrer que Ω est un G-morphisme. Pour $\varphi_1\in \mathrm{V}_1$, $v_2\in\mathrm{V}_2$ et $g\in\mathrm{G}$, on a

$$\Omega(g(\varphi_1\otimes v_2)) = \Omega(g(\varphi_1)\otimes g(v_2)) = (v_1\mapsto ((g_{\mathrm{V}_1{}^*}\varphi_1)(v_1))g_{\mathrm{V}_2}(v_2)) = (v_1\mapsto \varphi_1({g_{\mathrm{V}_1}}^{-1}v_1)g_{\mathrm{V}_2}(v_2)).$$

Ainsi $$\Omega(g(\varphi_1\otimes v_2)) = \rho_{\mathrm{V}_2}(g)\circ\Omega(\varphi_1\otimes v_2)\circ\rho_{\mathrm{V}_1}(g^{-1}) = g(\Omega(\varphi_1\otimes v_2)).$$

Comme Ω est k-linéaire et que les éléments de la forme $\varphi_1\otimes v_2$ engendre l'espace vectoriel ${\mathrm{V}_1}^*\otimes\mathrm{V}_2$, on en déduit que Ω est un G-morphisme.

h) Commençons par l'isomorphisme entre $(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*$ et $\mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2,k)$. Par définition du produit tensoriel, l'application $(v_1,v_2)\in\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2\mapsto v_1\otimes v_2\in\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2$ est k-bilinéaire. On en déduit que pour $\varphi\in(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*$, l'application $(v_1,v_2)\mapsto\varphi(v_1\otimes v_2)$ est k-bilinéaire. On peut alors définir l'application

$$\Phi\colon\begin{cases}(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^* \longrightarrow \mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2,k)\\ \qquad\varphi \qquad\longmapsto \big((v_1,v_2)\mapsto\varphi(v_1\otimes v_2)\big)\,.\end{cases}$$

Cette application est linéaire. De plus, d'après la propriété universelle du produit tensoriel, elle est bijective.

Il reste à montrer que Φ est un G-morphisme. Soit $\varphi\in(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*$. Pour $(v_1,v_2)\in\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2$ et $g\in\mathrm{G}$, on a

$$(\Phi(g\varphi))(v_1,v_2) = (g\varphi)(v_1\otimes v_2) = \varphi(g^{-1}(v_1\otimes v_2)) = \varphi((g^{-1}v_1)\otimes(g^{-1}v_2)) = \Phi(\varphi)(g^{-1}v_1,g^{-1}v_2).$$

Comme G agit trivialement sur k, on a $\Phi(\varphi)(g^{-1}v_1,g^{-1}v_2) = (g\Phi(\varphi))(v_1,v_2)$ et donc $\Phi(g\varphi) = g\Phi(\varphi)$. L'application Φ réalise donc un G-isomorphisme entre $(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*$ et $\mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2,k)$.

Passons à l'isomorphisme entre ${\mathrm{V}_1}^*\otimes{\mathrm{V}_2}^*$ et $(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*$. Montrons que l'application

$$\Psi\colon\begin{cases}{\mathrm{V}_1}^*\otimes{\mathrm{V}_2}^* \longrightarrow (\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*\\ \quad\varphi_1\otimes\varphi_2 \quad\longmapsto (\varphi_{1,2}: v_1\otimes v_2\mapsto\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2))\end{cases}$$

est bien définie et est un G-isomorphisme.

Soient $\varphi_1\in{\mathrm{V}_1}^*$ et $\varphi_2\in{\mathrm{V}_2}^*$. L'application $(v_1,v_2)\in\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2\mapsto\varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)\in k$ est bilinéaire. Par la propriété universelle du produit tensoriel, il existe une application linéaire $\varphi_{1,2}:\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2\mapsto k$ telle que $\varphi_{1,2}(v_1\otimes v_2) = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)$. L'unicité de l'application linéaire obtenue grâce à la propriété universelle du produit tensoriel assure que l'application $(\varphi_1,\varphi_2)\in{\mathrm{V}_1}^*\times{\mathrm{V}_2}^*\mapsto\varphi_{1,2}\in(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*$ est bilinéaire. Ainsi, une nouvelle fois grâce à la propriété universelle du produit tensoriel, il existe une application linéaire $\Psi:{\mathrm{V}_1}^*\otimes{\mathrm{V}_2}^*\to(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*$ telle que $\Psi(\varphi_1\otimes\varphi_2) = \varphi_{1,2}$. Autrement dit, Ψ est bien définie et linéaire.

Montrons à présent que Ψ est bijective. Pour cela, considérons $\mathscr{B}_1 = (e_1,\dots,e_\ell)$ une base de V_1 et $\mathscr{B}_2 = (f_1,\dots,f_m)$ une base de V_2. La famille $\mathscr{B} = (e_i\otimes f_j)_{i,j}$ est alors une base de $\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2$. On note $\mathscr{B}_1^* = (e_1^*,\dots,e_\ell^*)$ la base duale de $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2^* = (f_1^*,\dots,f_m^*)$ la base duale de $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}^* = (h_{ij}^*)_{i,j}$ la base duale de $\mathscr{B}$. La famille $(e_i^*\otimes f_j^*)_{i,j}$ est alors une base de ${\mathrm{V}_1}^*\otimes{\mathrm{V}_2}^*$ et on a

$$\Psi(e_i^*\otimes f_j^*)(e_k\otimes f_l) = e_i^*(e_k)f_j^*(f_l) = \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \delta_{(i,j),(k,l)} = h_{ij}^*(e_k\otimes f_l)\,.$$

Ainsi $\Psi(e_i^*\otimes f_j^*) = h_{ij}^*$ ce qui montre que Ψ transforme une base de ${\mathrm{V}_1}^*\otimes{\mathrm{V}_2}^*$ en une base de $(\mathrm{V}_1\otimes\mathrm{V}_2)^*$ c'est-à-dire que Ψ est bijective.

Il reste à montrer que Ψ est un G-morphisme. Soient $\varphi_i\in{\mathrm{V}_i}^*$ et $v_i\in\mathrm{V}_i$ pour $i\in\{1,2\}$ et $g\in\mathrm{G}$. On a

$$(\Psi(g(\varphi_1\otimes\varphi_2)))(v_1\otimes v_2) = (\Psi(\varphi_1\circ g^{-1}\otimes\varphi_2\circ g^{-1}))(v_1\otimes v_2) = \varphi_1(g^{-1}v_1)\varphi_2(g^{-1}v_2)$$

et $$(g(\Psi(\varphi_1\otimes\varphi_2)))(v_1\otimes v_2) = (\Psi(\varphi_1\otimes\varphi_2))(g^{-1}(v_1\otimes v_2)) = \varphi_1(g^{-1}v_1)\varphi_2(g^{-1}v_2)\,.$$

Ainsi $\Psi(g(\varphi_1\otimes\varphi_2)) = g\Psi(\varphi_1\otimes\varphi_2)$ pour tout $(\varphi_1,\varphi_2)\in{\mathrm{V}_1}^*\times{\mathrm{V}_2}^*$ et tout $g\in\mathrm{G}$. Comme Ψ est linéaire et que les éléments de la forme $\varphi_1\otimes\varphi_2$ engendre l'espace vectoriel ${\mathrm{V}_1}^*\otimes{\mathrm{V}_2}^*$, on en déduit que Ψ est un G-morphisme.

Passons à l'isomorphisme entre $\mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2,k)$ et $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1,{\mathrm{V}_2}^*)$. Les applications

$$\Upsilon\colon\begin{cases}\mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2,k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1,{\mathrm{V}_2}^*)\\ \qquad\mathrm{B} \qquad\longmapsto (v_1\mapsto(v_2\mapsto\mathrm{B}(v_1,v_2)))\end{cases} \quad\text{et}\quad \Xi\colon\begin{cases}\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1,{\mathrm{V}_2}^*) \longrightarrow \mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1\times\mathrm{V}_2,k)\\ \qquad f \qquad\longmapsto ((v_1,v_2)\mapsto f(v_1)(v_2))\end{cases}$$

sont k-linéaires réciproques l'une de l'autre. Il reste donc à montrer par exemple que Υ est un G-morphisme. Or, pour $(v_1, v_2) \in \mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2$, $\mathrm{B} \in \mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, k)$ et $g \in \mathrm{G}$, on a

$$(\Upsilon(g\mathrm{B}))(v_1)(v_2) = (g\mathrm{B})(v_1, v_2) = \mathrm{B}(g^{-1}v_1, g^{-1}v_2) = \Upsilon(\mathrm{B})(g^{-1}v_1)(g^{-1}v_2) = (g_{\mathrm{V_2}^*}(\Upsilon(\mathrm{B})(g^{-1}v_1))(v_2),$$

et donc $\quad (\Upsilon(g\mathrm{B}))(v_1) = g_{\mathrm{V_2}^*}(\Upsilon(\mathrm{B})(g^{-1}v_1)) = \rho_{\mathrm{V_2}^*}(g) \circ \Upsilon(\mathrm{B}) \circ \rho_{\mathrm{V}_1}(g^{-1})(v_1) = (g\Upsilon(\mathrm{B}))(v_1)\,,$

ce qui montre que Υ est un G-morphisme. Son inverse Ξ en est donc un aussi.

Remarque. En appliquant la question **g** à V_1 et ${\mathrm{V}_2}^*$, on obtient par composition un G-isomorphisme

$$\Phi \circ \Psi \circ \Omega^{-1} : \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, {\mathrm{V}_2}^*) \to \mathrm{Bil}(\mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2, k).$$

Pour $(v_1, v_2) \in \mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2$ et $f \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, {\mathrm{V}_2}^*)$, on a alors

$$[\Phi \circ \Psi \circ \Omega^{-1}(f)](v_1, v_2) = \left[\Phi \circ \Psi \left(\sum_{i=1}^{\ell} e_i^* \otimes f(e_i)\right)\right](v_1, v_2) = \sum_{i=1}^{\ell} e_i^*(v_1)(f(e_i)(v_2)) = \sum_{i=1}^{\ell} f(e_i^*(v_1)e_i)(v_2)\,.$$

Comme $\sum_{i=1}^{\ell} e_i^*(v_1)e_i = v_1$, on trouve $[\Phi \circ \Psi \circ \Omega^{-1}(f)](v_1, v_2) = (\Xi(f))(v_1, v_2)$. Ainsi $\Phi \circ \Psi \circ \Omega^{-1} = \Xi$.

i) Commençons par l'isomorphisme entre $\mathrm{V} \otimes k$ et V. L'application $(v, \lambda) \in \mathrm{V} \times k \mapsto \lambda v \in \mathrm{V}$ est bilinéaire. Par la propriété universelle du produit tensoriel, elle définit une application linéaire Δ vérifiant

$$\Delta\colon \begin{cases} \mathrm{V} \otimes k \longrightarrow \mathrm{V} \\ v \otimes \lambda \longmapsto \lambda v\,. \end{cases}$$

Par ailleurs, l'application linéaire $\Delta' : v \in \mathrm{V} \mapsto v \otimes 1_k \in \mathrm{V} \otimes k$ vérifie $\Delta \circ \Delta' = \mathrm{id}_\mathrm{V}$ et pour tout $(\lambda, v) \in k \times \mathrm{V}$, $(\Delta' \circ \Delta)(v \otimes \lambda) = \lambda v \otimes 1 = v \otimes \lambda$. Comme $\Delta' \circ \Delta$ est linéaire et que les $v \otimes \lambda$ engendrent $\mathrm{V} \otimes k$, on obtient que $\Delta' \circ \Delta = \mathrm{id}_{\mathrm{V}\otimes k}$. L'application Δ est donc bijective.

Il reste à montrer que Δ est un G-morphisme. Pour $v \in \mathrm{V}$, $\lambda \in k$ et $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\Delta(g(v \otimes \lambda)) = \Delta(gv \otimes g\lambda) = \Delta(gv \otimes \lambda) = \lambda(g_\mathrm{V}(v)) = g_\mathrm{V}(\lambda v) = (g_\mathrm{V}\Delta)(v \otimes \lambda).$$

Comme les $v \otimes \lambda$ engendrent $\mathrm{V} \otimes k$, on en déduit que Δ est un G-morphisme.

Passons à l'isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_k(k, \mathrm{V})$ et V. Montrons que l'application linéaire

$$\Gamma\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_k(k, \mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{V} \\ \qquad f \qquad\longmapsto f(1) \end{cases}$$

est un G-isomorphisme. Comme 1_k est une base de k, l'application Γ est bijective. Son inverse est donnée par $v \in \mathrm{V} \mapsto (\lambda \mapsto \lambda v) \in \mathrm{Hom}_k(k, \mathrm{V})$. Montrons que Γ est un G-morphisme. Pour $f \in \mathrm{Hom}_k(k, \mathrm{V})$ et $g \in \mathrm{G}$, on a $\Gamma(g \cdot f) = (\rho_\mathrm{V}(g) \circ f)(\rho_k(g^{-1})(1)) = gf(1) = g\Gamma(f)$, ce qui montre bien que Γ est un G-morphisme.

Corrigé

a) Par définition de l'action de G sur $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ et de $\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$, on a

$$f \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)^\mathrm{G} \iff \forall g \in \mathrm{G}, \quad f = \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g^{-1})\,,$$

et

$$f \in \mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \iff \forall g \in \mathrm{G}, \quad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

Comme $f = \rho_2(g) \circ f \circ \rho_1(g^{-1})$ est équivalent à $f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f$, on en déduit que $f \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)^\mathrm{G}$ si et seulement si $f \in \mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ c'est-à-dire $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)^\mathrm{G} = \mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$.

b) Par définition de l'action de G sur $\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$, on a $g(v_1, v_2) = (gv_1, gv_2)$ pour $g \in \mathrm{G}$ et $(v_1, v_2) \in \mathrm{V}_1 \times \mathrm{V}_2$. On en déduit que

$$(v_1, v_2) \in (\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2)^\mathrm{G} \iff \left(v_1 \in {\mathrm{V}_1}^\mathrm{G} \text{ et } v_2 \in {\mathrm{V}_2}^\mathrm{G}\right) \iff (v_1, v_2) \in {\mathrm{V}_1}^\mathrm{G} \oplus {\mathrm{V}_2}^\mathrm{G}\,,$$

c'est-à-dire $(\mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2)^\mathrm{G} = {\mathrm{V}_1}^\mathrm{G} \oplus {\mathrm{V}_2}^\mathrm{G}$.

Remarque. D'après la question **c** de l'exercice 2,

$$\mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}^\mathrm{G}, \qquad (f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}) \mapsto \left(f_{|\mathrm{V}^\mathrm{G}} : \mathrm{V}^\mathrm{G} \to \mathrm{W}^\mathrm{G}\right)$$

est un foncteur de la catégorie des G-modules dans celle des k-espaces vectoriels de dimension finie. La forme de ce foncteur montre immédiatement qu'il est additif et donc il commute avec les somme directes. On retrouve ainsi le résultat de cette question.

c) Pour $v \in \mathrm{V}$, $\varphi \in \mathrm{V}^*$ et $g \in \mathrm{G}$, on a

$$(g\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{V},\mathrm{V}^*})(v, \varphi) = \langle g^{-1}v, g^{-1}\varphi \rangle_{\mathrm{V},\mathrm{V}^*} = \varphi(gg^{-1}v) = \varphi(v) = \langle v, \varphi \rangle_{\mathrm{V},\mathrm{V}^*}\,,$$

ce qui montre que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{V},\mathrm{V}^*}$ est G-invariant.

d) Soient $\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$. Pour $x, y \in \mathrm{V}$ et $g \in \mathrm{G}$, on a
$$(g\mathrm{B})(x, y) = g\mathrm{B}(g^{-1}x, g^{-1}y) = g\mathrm{B}(g^{-1}y, g^{-1}x) = (g\mathrm{B})(y, x)\,,$$
ce qui signifie que $g\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$. Ainsi $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ est bien un sous-G-module de $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, \mathrm{W})$.

On reprend les notations de la question **h** de l'exercice 2 avec $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$. L'application $\Phi \circ \Psi$ réalise un G-isomorphisme entre $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, k)$ et $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*$. Le sous-G-module correspondant à $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$ est donc $(\Phi \circ \Psi)^{-1}(\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k))$. Posons $\mathrm{W} = \langle \varphi \otimes \varphi \quad \varphi \in \mathrm{V}^* \rangle$ et montrons que $(\Phi \circ \Psi)^{-1}(\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)) = \mathrm{W}$. Pour cela, considérons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_\ell)$ une base de V et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_\ell^*)$ sa base duale. Pour $x, y \in \mathrm{V}$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$, on a
$$x = \sum_{i=1}^{\ell} e_i^*(x) e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{\ell} e_i^*(y) e_i \qquad \text{et donc} \qquad \mathrm{B}(x, y) = \sum_{i,j} \mathrm{B}(e_i, e_j) e_i^*(x) e_j^*(y).$$
Comme $\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$, on a $\mathrm{B}(e_i, e_j) = \mathrm{B}(e_j, e_i)$ pour tout i, j. Ainsi, on obtient
$$\forall\, x, y \in \mathrm{V}, \qquad \mathrm{B}(x, y) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{B}(e_i, e_i) e_i^*(x) e_i^*(y) \;+\; \sum_{i<j} \mathrm{B}(e_i, e_j)(e_i^*(x) e_j^*(y) + e_i^*(y) e_j^*(x))\,.$$
On a donc
$$\mathrm{B} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathrm{B}(e_i, e_i)\, \Phi \circ \Psi(e_i^* \otimes e_i^*) \;+\; \sum_{i<j} \mathrm{B}(e_i, e_j)\, \Phi \circ \Psi(e_i^* \otimes e_j^* + e_j^* \otimes e_i^*)$$
Comme $e_i^* \otimes e_j^* + e_j^* \otimes e_i^* = ((e_i^* + e_j^*) \otimes (e_i^* + e_j^*)) - (e_i^* \otimes e_i^*) - (e_j^* \otimes e_j^*) \in \mathrm{W}$ pour tout i, j, on en déduit que $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k) \subset (\Phi \circ \Psi)(\mathrm{W})$. De plus, pour $\varphi \in \mathrm{V}^*$ et $x \in \mathrm{V}$, on a
$$(\Phi \circ \Psi(\varphi \otimes \varphi))(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) = (\Phi \circ \Psi(\varphi \otimes \varphi))(y, x)$$
et donc $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k) = \Phi \circ \Psi(\langle \varphi \otimes \varphi, \quad \varphi \in \mathrm{V}^* \rangle)$.

e) Soient $\mathrm{B} \in \mathrm{Alt}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$. Pour $x \in \mathrm{V}$ et $g \in \mathrm{G}$, on a $(g\mathrm{B})(x, x) = g\mathrm{B}(g^{-1}x, g^{-1}x) = 0$, ce qui signifie que $g\mathrm{B} \in \mathrm{Alt}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$. Ainsi $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ est bien un sous-G-module de $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, \mathrm{W})$.

On reprend les notations de la question **h** de l'exercice 2 avec $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$. L'application $\Phi \circ \Psi$ réalise un G-isomorphisme entre $\mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, k)$ et $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*$. Le sous-G-module correspondant à $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$ est donc $(\Phi \circ \Psi)^{-1}(\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k))$. Posons $\mathrm{W} = \langle \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi, \quad \varphi, \psi \in \mathrm{V}^* \rangle$ et montrons que $(\Phi \circ \Psi)^{-1}(\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)) = \mathrm{W}$. Pour cela, considérons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_\ell)$ une base de V et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_\ell^*)$ sa base duale. Pour $x, y \in \mathrm{V}$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$, on a
$$x = \sum_{i=1}^{\ell} e_i^*(x) e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{\ell} e_i^*(y) e_i \qquad \text{et donc} \qquad \mathrm{B}(x, y) = \sum_{i,j} \mathrm{B}(e_i, e_j) e_i^*(x) e_j^*(y).$$
Comme $\mathrm{B} \in \mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$, on a $\mathrm{B}(e_i, e_i) = 0$ et $\mathrm{B}(e_i, e_j) = -\mathrm{B}(e_j, e_i)$ pour tout i, j. Ainsi, on obtient
$$\forall\, x, y \in \mathrm{V}, \qquad \mathrm{B}(x, y) = \sum_{i<j} \mathrm{B}(e_i, e_j)(e_i^*(x) e_j^*(y) - e_i^*(y) e_j^*(x))\,.$$
On a donc
$$\mathrm{B} = \sum_{i<j} \mathrm{B}(e_i, e_j) \Phi \circ \Psi(e_i^* \otimes e_j^* - e_j^* \otimes e_i^*) \in (\Phi \circ \Psi)(\mathrm{W})$$
c'est-à-dire $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k) \subset (\Phi \circ \Psi)(\mathrm{W})$. De plus, pour $\varphi, \psi \in \mathrm{V}^*$ et $x \in \mathrm{V}$, on a
$$(\Phi \circ \Psi(\varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi))(x, x) = \varphi(x)\psi(x) - \psi(x)\varphi(x) = 0$$
et donc $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k) = \Phi \circ \Psi(\langle \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi, \quad \varphi, \psi \in \mathrm{V}^* \rangle)$.

f) Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, k)$. Comme $\operatorname{car} k \neq 2$, l'application bilinéaire $(x, y) \mapsto 2^{-1}(\mathrm{B}(x, y) + \mathrm{B}(y, x))$ a bien un sens. On en déduit que l'application
$$p\colon \begin{cases} \mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, k) \longrightarrow \mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, k) \\ \qquad \mathrm{B} \qquad\quad \longmapsto ((x, y) \mapsto 2^{-1}(\mathrm{B}(x, y) + \mathrm{B}(y, x))) \end{cases}$$
est bien définie. Montrons que l'application p est un projecteur linéaire sur $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$ parallèlement à $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$ et un G-morphisme. On a bien sûr $p(\mathrm{B}) \in \mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$ et p linéaire. De plus, pour $\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$, on a $p(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$. On en déduit que p est un projecteur sur $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$. Enfin $p(\mathrm{B}) = 0$ si et seulement si B est antisymétrique. Comme $\operatorname{car} k \neq 2$, l'application B antisymétrique si et seulement si B est alternée. Ainsi p est bien le projecteur sur $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$ parallèlement à $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$.

Montrons que p est un G-morphisme. Pour $\mathrm{B} \in \mathrm{Bil}(\mathrm{V} \times \mathrm{V}, k)$ et $x, y \in \mathrm{V}$, on a
$$p(g\mathrm{B})(x, y) = 2^{-1}(g\mathrm{B}(g^{-1}x, g^{-1}y) + g\mathrm{B}(g^{-1}y, g^{-1}x)) = g(p(\mathrm{B})(g^{-1}x, g^{-1}y)) = (gp(\mathrm{B}))(x, y)\,,$$
ce qui montre que p est bien un G-morphisme.

En reprenant les notations de la question **h** de l'exercice 2 avec $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$, on obtient que l'application $\delta = p \circ \Phi \circ \Psi$ est un G-morphisme surjectif de $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*$ sur $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$. De plus,
$$\delta(x) = 0 \iff (\Phi \circ \Psi)(x) \in \mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k).$$
On en déduit grâce à la question **e** que le noyau de δ est $\langle \varphi \otimes \psi - \psi \otimes \varphi, \quad \varphi, \psi \in \mathrm{V}^* \rangle$. Ainsi, par passage au quotient, l'application δ fournit l'isomorphisme souhaité.

g) Reprenons les notations de la question **f**. L'application $p' = \mathrm{id} - p$ est un G-morphisme et un projecteur sur $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$ parallèlement à $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k)$. Avec les notations de la question **h** de l'exercice 2 appliquée à $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2 = \mathrm{V}$, on obtient que l'application $\delta' = p' \circ \Phi \circ \Psi$ est un G-morphisme surjectif de $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^*$ sur $\mathrm{Alt}(\mathrm{V}, k)$. De plus,
$$\delta'(x) = 0 \iff (\Phi \circ \Psi)(x) \in \mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k).$$
On en déduit grâce à la question **d** que le noyau de δ' est $\langle \varphi \otimes \varphi, \quad \varphi \in \mathrm{V}^* \rangle$. Ainsi, par passage au quotient, l'application δ' fournit l'isomorphisme souhaité.

Corrigé

a) Soit $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ un G-isomorphisme. On a donc $\rho_{\mathrm{V}}(g) = f^{-1} \rho_{\mathrm{W}}(g) f$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Les propriétés de la trace montrent alors que $\chi_{\mathrm{V}}(g) = \mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{V}}(g)) = \mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{W}}(g)) = \chi_{\mathrm{W}}(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$.

b) Par définition de χ_{V}, on a $\chi_{\mathrm{V}}(1_{\mathrm{G}}) = \mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{V}}(1_{\mathrm{G}})) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{id}_{\mathrm{V}}) = \dim_k(\mathrm{V})$.

c) Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\chi_k(g) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{id}_k) = 1$.

d) En considérant une base de $\mathrm{V} \oplus \mathrm{W}$ composée d'une base $\mathscr{B}_{\mathrm{V}}$ de V suivie d'une base $\mathscr{B}_{\mathrm{W}}$ de W, la matrice de $\rho_{\mathrm{V}\oplus\mathrm{W}}(g)$ est une matrice diagonale par blocs constituée de deux blocs. Le premier bloc est la matrice de $\rho_{\mathrm{V}}(g)$ dans $\mathscr{B}_{\mathrm{V}}$. Le deuxième bloc est la matrice de $\rho_{\mathrm{W}}(g)$ dans $\mathscr{B}_{\mathrm{W}}$. En calculant la trace, on obtient $\chi_{\mathrm{V}\oplus\mathrm{W}}(g) = \mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{V}\oplus\mathrm{W}}(g)) = \mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{V}}(g)) + \mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{W}}(g)) = \chi_{\mathrm{V}}(g) + \chi_{\mathrm{W}}(g)$. On a donc $\chi_{\mathrm{V}\oplus\mathrm{W}} = \chi_{\mathrm{V}} + \chi_{\mathrm{W}}$.

Par définition de la structure de G-module sur V^*, on a $\rho_{\mathrm{V}^*}(g) = {}^t\rho_{\mathrm{V}}(g^{-1})$. Ainsi $\chi^*_{\mathrm{V}}(g) = \chi_{\mathrm{V}}(g^{-1})$ pour tout $g \in \mathrm{G}$.

Considérons une base $\mathscr{B}_{\mathrm{V}} = (e_1, \dots, e_m)$ de V, une base $\mathscr{B}_{\mathrm{W}} = (f_1, \dots, f_n)$ de W et $g \in \mathrm{G}$. On note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{V}}}(\rho_{\mathrm{V}}(g)) = [a_{ij}]_{i,j}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{\mathrm{W}}}(\rho_{\mathrm{W}}(g)) = [b_{ij}]_{i,j}$. On a alors
$$g_{\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}}(e_i \otimes f_j) = g_{\mathrm{V}} e_i \otimes g_{\mathrm{W}} f_j = a_{ii} b_{jj} e_i \otimes f_j + \sum_{(k,n)\neq(i,j)} a_{ki} b_{\ell j} e_k \otimes f_\ell\,.$$
Comme la famille $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ forme alors une base de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}$, on obtient
$$\chi_{\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}}(g) = \mathrm{tr}\,(g_{\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}}) = \sum_{i,j} a_{ii} b_{jj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} \sum_{j=1}^{n} b_{jj} = \mathrm{tr}\,(g_{\mathrm{V}})\mathrm{tr}\,(g_{\mathrm{W}}) = \chi_{\mathrm{V}}(g)\chi_{\mathrm{W}}(g).$$
D'après la question **g** de l'exercice 2 et la question **a**, on a $\chi_{\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V},\mathrm{W})} = \chi_{\mathrm{V}^*\otimes\mathrm{W}} = \chi_{\mathrm{V}^*}\chi_{\mathrm{W}}$. On a donc
$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad \chi_{\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V},\mathrm{W})}(g) = \chi_{\mathrm{V}}(g^{-1})\chi_{\mathrm{W}}(g).$$
Dans le livre [Pey, p.207], on trouvera une démonstration de ce résultat qui n'utilise pas l'isomorphisme $\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{W} \overset{\text{G-mod}}{\simeq} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{V}, \mathrm{W})$.

Corrigé

a) Considérons l'application $\widetilde{\sigma} : g \in \mathrm{G} \mapsto g^{-1} \in \mathrm{G}$. Pour $\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$, on a alors $\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{F} \circ \widetilde{\sigma}$. On en déduit que F est linéaire. De plus, comme $\widetilde{\sigma}$ est une involution, on en déduit que σ est une involution et donc bijective.

Enfin, si g et h sont conjugués par k (c'est-à-dire $g = khk^{-1}$) alors g^{-1} et h^{-1} sont conjugués par k. On en déduit que, si F est centrale et g et h sont conjugués alors $(\sigma(\mathrm{F}))(g) = \mathrm{F}(g^{-1}) = \mathrm{F}(h^{-1}) = (\sigma(\mathrm{F}))(h)$ et donc $\sigma(\mathrm{F})$ est constante sur les classes de conjugaison c'est-à-dire centrale.

b) On note $\mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$ engendré par les caractères de G. Soient V une représentation de G et χ_{V} son caractère. Montrons que χ_{V} est central. Soient $g, h \in \mathrm{G}$ tels qu'il existe $k \in \mathrm{G}$ vérifiant $g = khk^{-1}$. On a alors $\chi_{\mathrm{V}}(g) = \chi_{\mathrm{V}}(khk^{-1}) = \mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{V}}(k)\rho_{\mathrm{V}}(h)\rho_{\mathrm{V}}(k)^{-1})$. Les propriétés de la trace donnent $\mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{V}}(k)\rho_{\mathrm{V}}(h)\rho_{\mathrm{V}}(k)^{-1}) = \mathrm{tr}\,(\rho_{\mathrm{V}}(h)) = \chi_{\mathrm{V}}(h)$. On obtient donc $\chi_{\mathrm{V}}(g) = \chi_{\mathrm{V}}(h)$. Ainsi χ_{V} est constante sur les classes de conjugaison c'est-à-dire centrale. On en déduit que $\mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$ est inclus dans la k-algèbre des fonctions centrales. Comme $\chi_k = \mathbf{1}$ est l'élément neutre de $\mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$ et de la k-algèbre des fonctions centrale, il suffit de montrer que $\mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$ est stable par produit. Or, d'après la question **d** de l'exercice 4, on a $\chi_{\mathrm{V}}\chi_{\mathrm{W}} = \chi_{\mathrm{V}\otimes\mathrm{W}} \in \mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$. On obtient ainsi que $\mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$ est une sous-k-algèbre de l'espace des fonctions centrales.

Enfin, d'après la question **d** de l'exercice 4, on a $\sigma(\chi_{\mathrm{V}}) = \chi_{\mathrm{V}^*}$ ce qui montre que $\mathrm{Car}_{\mathrm{G}}$ est stable par σ.

c) Pour $g \in \mathrm{G}$, on note $e_g \in \mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$ la fonction définie par $e_g(g') = \delta_{g,g'}$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien sûr bilinéaire. De plus, comme $\widetilde{\sigma}$ est une bijection de G, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique. Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénérée. Soit $\mathrm{F} \neq 0$ une fonction de G dans k. Il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{F}(g) \neq 0$. On a alors $\langle \mathrm{F}, e_{g^{-1}} \rangle = |\mathrm{G}|^{-1}\mathrm{F}(g) \neq 0$ et donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non dégénérée.

Soit F une fonction centrale non nulle. Il existe $g \in \mathrm{G}$ telle que $\mathrm{F}(g) \neq 0$. On note C_g la classe de conjugaison de g et $\mathrm{C}_{g^{-1}}$ celle de g^{-1}. On considère alors F' la fonction indicatrice de la classe de conjugaison de g^{-1} c'est-à-dire $\mathrm{F}' = \mathbf{1}_{\mathbf{C}_{\boldsymbol{g}^{-1}}}$. Par construction, la fonction F' est centrale. Par ailleurs, on a vu à la question **a** que $(\mathrm{C}_g)^{-1} = \mathrm{C}_{g^{-1}}$ c'est-à-dire $\sigma(\mathrm{F}') = \mathbf{1}_{\mathbf{C}_{\boldsymbol{g}}}$. On a alors $\langle \mathrm{F}, \mathrm{F}' \rangle = |\mathrm{C}_g||\mathrm{G}|^{-1}\mathrm{F}(g)$. Comme $|\mathrm{C}_g|$ est l'orbite d'un élément de G sous l'action de G par conjugaison, $|\mathrm{C}_g|$ divise $|\mathrm{G}|$. Ainsi car k ne divise pas $|\mathrm{C}_g|$ et donc $\langle \mathrm{F}, \mathrm{F}'\rangle \neq 0$. La restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aux fonctions centrales est donc non dégénérée.

Corrigé

a) Pour $\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$, on a $\mathrm{F} = \sum_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(x) e_x$ et $\sum_{x \in \mathrm{X}} \lambda_x e_x = 0$ implique $\lambda_y = \sum_{x \in \mathrm{X}} \lambda_x e_x(y) = 0$ pour tout $y \in \mathrm{X}$. La famille des $(e_x)_{x \in \mathrm{X}}$ est donc libre et génératrice c'est-à-dire une base de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$.

b) Le groupe G agit sur X. Il agit donc sur l'ensemble des fonctions de X dans un autre ensemble (ici k) de la façon suivante : pour $g \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$, on pose $g\mathrm{F} : x \mapsto \mathrm{F}(g^{-1}x)$. (On passe à l'inverse pour que l'action de G soit une action à gauche). Par définition de la structure d'espace vectoriel sur $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$, l'application $\mathrm{F} \mapsto g\mathrm{F}$ est bien sûr linéaire. De plus, pour $x \in \mathrm{X}$ et $g, g' \in \mathrm{G}$, on a

$$(g(g'\mathrm{F}))(x) = (g'\mathrm{F})(g^{-1}x) = \mathrm{F}(g'^{-1}g^{-1}x) = \mathrm{F}((gg')^{-1}x) = (gg'\mathrm{F})(x) \qquad \text{et} \qquad (1_\mathrm{G})\mathrm{F} = \mathrm{F}.$$

On en déduit que $\mathrm{F} \mapsto g\mathrm{F}$ est une application bijective puis que l'application $g \in \mathrm{G} \mapsto (\mathrm{F} \mapsto g\mathrm{F})$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(\mathscr{F}(\mathrm{X}, k))$. On a donc défini une structure de G-module sur $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$.

De plus, $(ge_x)(y) = e_x(g^{-1}y) = \delta_{x, g^{-1}y} = \delta_{gx, y} = e_{gx}(y)$ pour tout $x, y \in \mathrm{X}$ et tout $g \in \mathrm{G}$. Ainsi $ge_x = e_{gx}$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et $g \in \mathrm{G}$.

c) Pour $\mathrm{Y} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}$, on note $\mathbf{1}_\mathbf{Y}$ la fonction indicatrice de $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Comme $g^{-1}x \in \mathrm{Y}$ si et seulement si $x \in \mathrm{Y}$, on a $g\mathbf{1}_\mathbf{Y} = \mathbf{1}_\mathbf{Y}$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. On a donc $\mathbf{1}_\mathbf{Y} \in \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^\mathrm{G}$. Les parties $\mathrm{Y} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}$ forment une partition de X et $\mathbf{1}_\mathbf{Y} = \sum_{x \in \mathrm{Y}} e_x$. Les fonctions $\mathbf{1}_\mathbf{Y}$ sont donc k-linéairement indépendantes et $\dim_k(\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^\mathrm{G}) \geqslant |\mathrm{X}/\mathrm{G}|$.

Réciproquement, soit $\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^\mathrm{G}$. On a $\mathrm{F} = \sum_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(x) e_x$. D'après la question **b**, on a

$$g\mathrm{F} = \sum_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(x) e_{gx} = \sum_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(g^{-1}x) e_x.$$

Comme F est G-invariante, on en déduit que $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(g^{-1}x)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{X}$ et donc F est constante sur chacune des orbites de X sous G. Pour $\mathrm{Y} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}$, on note $\mathrm{F}(\mathrm{Y})$ la valeur commune des $\mathrm{F}(x)$ pour $x \in \mathrm{Y}$. On a alors

$$\mathrm{F} = \sum_{\mathrm{Y} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}} \sum_{x \in \mathrm{Y}} \mathrm{F}(x) e_x = \sum_{\mathrm{Y} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}} \mathrm{F}(\mathrm{Y}) \left(\sum_{x \in \mathrm{Y}} e_x \right) = \sum_{\mathrm{Y} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}} \mathrm{F}(\mathrm{Y}) \mathbf{1}_\mathbf{Y},$$

ce qui montre que la famille $(\mathbf{1}_\mathbf{Y})_{\mathrm{Y} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}}$ est une famille génératrice de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^\mathrm{G}$.

Ainsi on obtient que $(\mathbf{1}_\mathbf{Y})_{\mathrm{Y} \in \mathrm{X}/\mathrm{G}}$ est une base de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^\mathrm{G}$ et donc $\dim_k(\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^\mathrm{G}) = |\mathrm{X}/\mathrm{G}|$.

d) Considérons la matrice de $\rho_{\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)}(g)$ dans la base $(e_x)_{x \in \mathrm{X}}$. D'après la relation $ge_x = e_{gx}$ de la question **b**, le coefficient selon e_x de ge_x est $\delta_{x, gx}$ (c'est-à-dire 1 si $gx = x$ et 0 sinon). On a donc

$$\chi(g) = \sum_{x \in \mathrm{X}} \delta_{x, gx} = |\{x \in \mathrm{X}, \quad gx = x\}| = |\mathrm{X}^g|.$$

Corrigé

a) Il suffit d'appliquer la question **d** de l'exercice 6. On trouve alors que $\chi_{\mathrm{reg}}(g) = |\{h \in \mathrm{G}, gh = h\}|$. Comme

$$\forall\, h \in \mathrm{G}, \quad gh = h \qquad \iff \qquad \exists\, h \in \mathrm{G}, \quad gh = h \qquad \iff \qquad g = 1_\mathrm{G}\,,$$

on en déduit que pour $g \neq 1_\mathrm{G}$, on a $\chi_{\mathrm{reg}}(g) = 0$ et $\chi_{\mathrm{reg}}(1_\mathrm{G}) = |\mathrm{G}|$. Ainsi $\chi_{\mathrm{reg}} = |\mathrm{G}| e_{1_\mathrm{G}}$.

b) Par définition de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on a

$$\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi_\mathrm{V} \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \chi_{\mathrm{reg}}(g) \chi_\mathrm{V}(g^{-1}).$$

Comme, d'après la question **a**, $\chi_{\mathrm{reg}}(g) = 0$ si $g \neq 1_\mathrm{G}$, on obtient, $\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi_\mathrm{V} \rangle = |\mathrm{G}|^{-1} \chi_{\mathrm{reg}}(1_\mathrm{G}) \chi_\mathrm{V}(1_\mathrm{G})$. Finalement, grâce à la question **a** et la question **b** de l'exercice 4, on trouve $\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi_\mathrm{V} \rangle = \dim_k(\mathrm{V})$.

Corrigé

a) Supposons que f ne soit pas nulle. D'après la question **d** de l'exercice 2, $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-G-module de V et $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-G-module de W. Comme $f \neq 0$, on a $\mathrm{Ker}\, f \neq \mathrm{V}$. Par irréductibilité de V, on obtient alors $\mathrm{Ker}\, f = 0$ c'est-à-dire f injective. Comme $f \neq 0$, on a $\mathrm{Im}\, f \neq \{0\}$. Par irréductibilité de W, on obtient alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{W}$ c'est-à-dire f surjective. On a donc f bijective. Finalement, l'application f est un G-isomorphisme.

b) Si $\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) \neq 0$ alors il existe un G-morphisme non nul $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$. D'après la question **a**, f est un G-isomorphisme entre V et W. Ainsi V et W sont G-isomorphes.

c) D'après la définition 2 et les questions **a** et **b** de l'exercice 2, $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est une sous-k-algèbre de $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$. Grâce à la question **a**, on obtient que dans cette k-algèbre, tout élément est nul ou inversible. Autrement dit, $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ est une k-algèbre à division.

d) Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}) \subset \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$. Comme k est algébriquement clos, f admet une valeur propre $\lambda \in k$. D'après la définition 2 et la question **a** de l'exercice 2, on a $f - \lambda \mathrm{id}_{\mathrm{V}} \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$. La question **d** de l'exercice 2 montre que $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id}_{\mathrm{V}})$ est un sous-G-module de V. Comme λ est une valeur propre de f, on a $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda\mathrm{id}_{\mathrm{V}}) \neq 0$ et donc par irréductibilité de V, on en déduit que $\mathrm{V} = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\mathrm{id}_{\mathrm{V}})$. Finalement, on obtient $f = \lambda\mathrm{id}_{\mathrm{V}}$.

e) D'après la question **b**, si V et W ne sont pas isomorphes alors $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V},\mathrm{W}) = 0$. On suppose à présent que V et W sont isomorphes et on note $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ un G-isomorphisme. Comme V et W sont irréductibles, ils ne sont pas réduit à 0. Ainsi $f \neq 0$ et donc $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V},\mathrm{W}) \geqslant 1$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V},\mathrm{W}) \subset kf$. Or pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V},\mathrm{W})$, on a $f^{-1}\circ\varphi \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ grâce à la question **b** de l'exercice 2. Ainsi, avec la question **d**, on obtient $f^{-1}\circ\varphi = \lambda\mathrm{id}$ et donc $\varphi = \lambda f \in kf$, ce qui conclut la preuve.

Corrigé

a) Soit $x \in \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$. On a alors $\rho(g)x = x$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et donc $p_{\mathrm{V}}(x) = |\mathrm{G}|^{-1}\sum\limits_{g\in\mathrm{G}} x = x$. Ainsi $\mathrm{V}^{\mathrm{G}} \subset \mathrm{Im}\,p_{\mathrm{V}}$.

Par ailleurs, pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\rho(g)\circ p_{\mathrm{V}} = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{h\in\mathrm{G}}\rho(gh) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{h\in\mathrm{G}}\rho(h) = p_{\mathrm{V}} = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{h\in\mathrm{G}}\rho(hg) = p_{\mathrm{V}}\circ\rho(g).$$

On a donc $\rho(g)\circ p_{\mathrm{V}} = p_{\mathrm{V}}\circ\rho(g)$ pour tout $g\in\mathrm{G}$, c'est-à-dire $p \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$. De plus, comme $\rho(g)\circ p_{\mathrm{V}} = p_{\mathrm{V}}$ pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $gp_{\mathrm{V}}(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{V}$ et $g\in\mathrm{G}$, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\,p_{\mathrm{V}} \subset \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$. On a donc bien $\mathrm{Im}\,p_{\mathrm{V}} = \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$. En particulier, $p(x) \in \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$ pour tout $x \in \mathrm{V}$ et comme $p(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{V}^{\mathrm{G}}$, on a $p(p(x)) = p(x)$ pour tout $x\in\mathrm{V}$ c'est-à-dire que p est un projecteur.

Remarque. Comme $\rho(g)\circ p = p$ pour tout $g\in\mathrm{G}$, on obtient $p\circ p = p$ en sommant sur $g \in \mathrm{G}$.

b) Comme p_{V} est un projecteur, on a $\mathrm{tr}\,(p_{\mathrm{V}}) = \dim(\mathrm{Im}\,p_{\mathrm{V}})1_k = \dim(\mathrm{V}^{\mathrm{G}})1_k$ (prendre une base de V commençant par une base de $\mathrm{Im}\,p_{\mathrm{V}}$). Par ailleurs, par définition de p_{V}, on a

$$\mathrm{tr}\,(p_{\mathrm{V}}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\mathrm{tr}\,(\rho(g)) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{V}}(g) = \langle\chi_{\mathrm{V}},\chi_k\rangle\,,$$

ce qui donne le résultat.

c) D'après la question **d** de l'exercice 4, on a

$$\langle\chi_{\mathrm{V}},\chi_{\mathrm{W}}\rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{V}}(g)\chi_{\mathrm{W}}(g^{-1}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{Hom}_k(\mathrm{W},\mathrm{V})}(g)\,.$$

La question **b** donne $\langle\chi_{\mathrm{V}},\chi_{\mathrm{W}}\rangle = \dim_k((\mathrm{Hom}_k(\mathrm{W},\mathrm{V}))^{\mathrm{G}})$. Enfin, grâce à la question **a** de l'exercice 3, on a $\langle\chi_{\mathrm{V}},\chi_{\mathrm{W}}\rangle = \dim_k(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{W},\mathrm{V}))1_k$. De plus, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, donc $\langle\chi_{\mathrm{V}},\chi_{\mathrm{W}}\rangle = \dim_k(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V},\mathrm{W}))1_k$.

d) *Première démonstration.* V est de dimension 1 donc $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ est commutatif. En particulier, on obtient $\mathrm{End}_k(\mathrm{V}) = \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$. Avec la question **c**, on obtient $\langle\chi_{\mathrm{V}},\chi_{\mathrm{V}}\rangle = \dim_k(\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}))1_k = \dim_k(\mathrm{End}_k(\mathrm{V}))1_k = 1_k$.
Deuxième démonstration. Comme V est de dimension 1, on a $\rho_{\mathrm{V}}(g) = \chi_{\mathrm{V}}(g^{-1})$ et donc $\chi_{\mathrm{V}}(g^{-1}) = (\chi_{\mathrm{V}}(g))^{-1}$. Ainsi, $\langle\chi_{\mathrm{V}},\chi_{\mathrm{V}}\rangle = |\mathrm{G}|^{-1}\sum\limits_{g\in\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{V}}(g)(\chi_{\mathrm{V}}(g))^{-1} = 1_k$.

e) V' admet un sous-espace vectoriel supplémentaire $\widetilde{\mathrm{V}}$. Soit p le projecteur sur V' parallèlement à $\widetilde{\mathrm{V}}$. D'après la question **a** et la question **a** de l'exercice 3, on a $q = p_{\mathrm{End}_k(\mathrm{V})}(p) \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$. Or par définition de l'action de G sur $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, on a

$$q = p_{\mathrm{End}_k(\mathrm{V})}(p) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}}\rho(g)\circ p\circ\rho(g^{-1})\,.$$

Comme V' est un sous-G-module de V, on a $\rho(g^{-1})(x) \in \mathrm{V}'$ pour tout $x \in \mathrm{V}'$ et tout $g \in \mathrm{G}$. On en déduit que $p(\rho(g^{-1})(x)) = \rho(g^{-1})(x)$ puis que $\rho(g)(p(\rho(g^{-1})(x))) = x$ et finalement

$$\forall\, x\in\mathrm{V}',\qquad q(x) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} x = x.$$

En particulier, $\mathrm{V}' \subset \mathrm{Im}\,q$. Par ailleurs, pour $x \in \mathrm{V}$, on a $p(\rho(g^{-1})(x)) \in \mathrm{Im}\,p = \mathrm{V}'$. Comme V' est un sous-G-module de V, on en déduit que $\rho(g)(p(\rho(g^{-1})(x))) \in \mathrm{V}'$. On obtient alors $q(x) \in \mathrm{F}$ et donc $\mathrm{Im}\,q \subset \mathrm{F}$. Finalement $\mathrm{Im}\,q = \mathrm{F}$ et comme $q(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{F} = \mathrm{Im}\,q$, on a $q(q(x)) = q(x)$ pour tout $x\in\mathrm{V}$. L'endomorphisme q est donc un projecteur d'image V'. L'espace $\mathrm{V}'' = \mathrm{Ker}\,q$ est donc un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Im}\,q = \mathrm{V}'$. De plus, comme $q \in \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$, la question **d** de l'exercice 2 montre que V'' est un sous-G-module de V. Ainsi V'' est bien un sous-G-module supplémentaire de V'.

Finalement, tout sous-G-module de V admet un sous-G-module supplémentaire et donc V est semisimple.

f) Si V est irréductible alors $\mathrm{V} \neq 0$. De plus, si $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ alors V_1 est un sous-G-module de V. Par irréductibilité, on a $\mathrm{V}_1 = \{0\}$ ou $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}$ et dans ce cas $\mathrm{V}_2 = \{0\}$. Ainsi V est indécomposable.

Supposons V non nul et indécomposable. Soit V_1 un sous-G-module de V. D'après la question **e**, il existe un sous-G-module V_2 tel que $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$. Comme V est indécomposable, on a alors $\mathrm{V}_1 = \{0\}$ ou $\mathrm{V}_2 = \{0\}$ et dans ce cas $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}$. Ainsi V est irréductible.

g) Raisonnons par récurrence sur $\dim \mathrm{V}$. Si $\dim \mathrm{V} = 0$ alors V est une somme vide de G-modules irréductibles. Supposons que tout G-module de dimension inférieure ou égale à $n \geqslant 0$ soit somme directe de G-modules irréductibles. Soit V un G-module de dimension $n+1$. Si V est irréductible alors V est somme directe de G-modules irréductibles. Sinon, il existe un sous-G-module $\{0\} \subsetneq \mathrm{V}_1 \subsetneq \mathrm{V}$. D'après la question **e**, il existe un sous-G-module V_2 tel que $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$. On a alors $\dim \mathrm{V}_i < n+1$ pour $i \in \{1,2\}$. L'hypothèse de récurrence assure alors que V_1 et V_2 se décompose en somme directe d'irréductibles et donc V aussi.

h) La question **d** de l'exercice 4 et la question **g** montrent que le caractère d'un G-module est une somme de caractères irréductibles. Ainsi, tout caractère appartient à l'espace vectoriel engendré par les caractères irréductibles et donc Car_G est engendré par les caractères irréductibles.

Corrigé

a) D'après les questions **c** de l'exercice 9 et **b** de l'exercice 8, on a $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle = \dim_k(\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V},\mathrm{W}))1_k = 0$.

b) D'après la question **c** de l'exercice 9, on a $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle = \dim_k(\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V},\mathrm{W}))1_k \in \mathbb{N}1_k$. Comme $\mathrm{car}\, k = 0$, on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset k$ et donc $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle \in \mathbb{N}$.

c) D'après la question **b**, on a $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle > 0$ si et seulement si $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle \neq 0$. D'après les questions **b** de l'exercice 8 et **c** de l'exercice 9, $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle \neq 0$ implique $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{W}$. D'après la question **a** de l'exercice 4, $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{W}$ implique $\chi_\mathrm{V} = \chi_\mathrm{W}$. Enfin, si $\chi_\mathrm{V} = \chi_\mathrm{W}$ alors $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle = \langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{V} \rangle = \dim_k(\mathrm{End}_\mathrm{G}(\mathrm{V}))$ (question **c** exercice 9). Or V est irréductible donc $\mathrm{V} \neq 0$ et $\mathrm{id}_\mathrm{V} = 0$. Comme $\mathrm{id}_\mathrm{V} \in \mathrm{End}_\mathrm{G}(\mathrm{V})$ (question **a** exercice 2), on en déduit que $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle = \dim_k(\mathrm{End}_\mathrm{G}(\mathrm{V})) > 0$.

d) L'équivalence $\left(\mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{W} \iff \chi_\mathrm{V} = \chi_\mathrm{W}\right)$ de la question **c** montre que le nombre de classe d'isomorphisme de G-module irréductible est égal au nombre de caractère irréductible.

Les relations $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle = 0$ pour V et W deux G-modules irréductibles non G-isomorphes et $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{W} \rangle \neq 0$ pour V et W deux G-modules irréductibles et G-isomorphes montrent que les caractères irréductibles forment une famille orthogonale formée de vecteurs non isotropes pour la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. C'est donc une famille libre. Ainsi d'après la question **h** de l'exercice 9, les caractères forment une base de Car_G. Comme Car_G est un sous-espace vectoriel des fonctions centrales, on en déduit que le nombre de caractères irréductibles est inférieur $\dim_k \mathscr{F}(\mathrm{G}/\mathscr{R}, k)$. Or $\dim_k \mathscr{F}(\mathrm{G}/\mathscr{R}, k)$ est le nombre de classes de conjugaison de G. Finalement, le nombre de caractères irréductibles de G est inférieur au nombre de classes de conjugaison de G.

e) On a vu dans la question **d** que la famille $(\chi_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ forme une base de Car_G. Il existe donc une unique famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant s} \in k^s$ telle que $\chi_\mathrm{V} = \lambda_1 \chi_1 + \cdots + \lambda_s \chi_s$. La question **g** de l'exercice 9 montre que les λ_i sont des entiers naturels et que lorsque l'on décompose V en somme directe de représentations irréductibles de G, λ_i est le nombre de fois que V_i apparaît.

f) Les relations d'orthogonalité de la question **a** montrent que $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_i \rangle = d_i(\mathrm{V}) \langle \chi_i, \chi_i \rangle$ et donc

$$\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{V} \rangle = \sum_{i=1}^{s} d_i(\mathrm{V}) \langle \chi_\mathrm{V}, \chi_i \rangle = \sum_{i=1}^{s} (d_i(\mathrm{V}))^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle \,.$$

g) Si $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{W}$ alors $\chi_\mathrm{V} = \chi_\mathrm{W}$ d'après la question **a** de l'exercice 4. Si $\chi_\mathrm{V} = \chi_\mathrm{W}$ alors $d_i(\mathrm{V}) = d_i(\mathrm{W})$ pour tout $i \in [\![1\,,\, s]\!]$ puisque les $d_i(\mathrm{V})$ sont les coordonnées de χ_V dans la base $(\chi_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$. Si $d_i(\mathrm{V}) = d_i(\mathrm{W})$ pour tout $i \in [\![1\,,\, s]\!]$ alors

$$\mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{s} {\mathrm{V}_i}^{d_i(\mathrm{V})} = \bigoplus_{i=1}^{s} {\mathrm{V}_i}^{d_i(\mathrm{W})} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{W} \,.$$

h) D'après la question **b** de l'exercice 7, on a $\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi_\mathrm{V} \rangle = \dim_k \mathrm{V}$ et $\langle \chi_{\mathrm{reg}}, \chi_{\mathrm{reg}} \rangle = \dim_k \mathscr{F}(\mathrm{G}, k) = |\mathrm{G}|$. En reportant ces égalités dans celles de la question **f** pour $\mathrm{V} = \mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$, on obtient le résultat souhaité.

i) Si $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{V} \rangle = 1$ alors d'après la question **f**, on a

$$\sum_{i=1}^{s} (d_i(\mathrm{V}))^2 \langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1 \,.$$

Or, d'après les questions **b**, **c** et **e**, $\langle \chi_i, \chi_i \rangle$ est un entier strictement positif et $d_i(\mathrm{V})$ un entier naturel. On en déduit qu'il existe $i \in [\![1\,,\, s]\!]$ tel que $d_i(\mathrm{V}) = 1$ et $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$ et $d_j(\mathrm{V}) = 0$ pour tout $j \neq i$. On a alors $d_j(\mathrm{V}) = d_j(\mathrm{V}_i)$ pour tout $j \in [\![1\,,\, s]\!]$ et donc d'après la question **g**, $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{V}_i$ est irréductible.

j) D'après la question **i**, si $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{V} \rangle = 1$ alors V est irréductible. Si V est irréductible alors d'après les questions **c** de l'exercice 9 et **e** de l'exercice 8, on a $\langle \chi_\mathrm{V}, \chi_\mathrm{V} \rangle = \dim_k(\mathrm{End}_\mathrm{G}(\mathrm{V})) = 1$.

k) D'après la question **j**, $\langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$ pour tout $i \in [\![1\,,\, s]\!]$. La question **h** donne alors les résultats souhaités.

l) Utilisons le critère de la question **d** de l'exercice 8 en montrant que $\varphi_\mathrm{V} \in \mathrm{End}_\mathrm{G}(\mathrm{V})$. Pour $h \in \mathrm{H}$, on a

$$\rho(h)\varphi_\mathrm{V}\rho(h^{-1}) = \sum_{g \in \mathrm{G}} f(g)\rho(hg^{-1}h^{-1})$$

Comme f est centrale, on a $f(g) = f(hgh^{-1})$ pour tous $g, h \in \mathrm{G}$. On obtient alors $\rho(h)\varphi_\mathrm{V}\rho(h^{-1}) = \varphi_\mathrm{V}$ et donc $\varphi_\mathrm{V} \in \mathrm{End}_\mathrm{G}(\mathrm{V})$. Ainsi φ_V est une homothétie. Soit $\lambda \in k$ tel que $\varphi_\mathrm{V} = \lambda \mathrm{id}$. On a alors

$$\dim_k(\mathrm{V})\lambda = \mathrm{tr}\,(\varphi_\mathrm{V}) = \sum_{g \in \mathrm{G}} f(g)\chi_\mathrm{V}(g^{-1}) = |\mathrm{G}|\langle f, \chi_\mathrm{V} \rangle\,.$$

Finalement
$$\lambda = (\dim_k(\mathrm{V}))^{-1}|\mathrm{G}|\langle f, \chi_\mathrm{V} \rangle\,.$$

m) Si f est orthogonale à tous les caractères irréductibles alors, pour tout G-module irréductible V, $\varphi_\mathrm{V} = 0$ (question **l**). Par ailleurs, si $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ où V_1 et V_2 sont deux G-modules alors $\varphi_\mathrm{V} = \varphi_{\mathrm{V}_1} \oplus \varphi_{\mathrm{V}_2}$ (car $\rho_\mathrm{V}(g) = \rho_{\mathrm{V}_1}(g) \oplus \rho_{\mathrm{V}_2}(g)$ pour tout $g \in \mathrm{G}$). On en déduit alors grâce à la question **g** de l'exercice 9, $\varphi_\mathrm{V} = 0$ pour tout G-module V. En particulier avec la représentation régulière $\mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$, on obtient

$$\sum_{g \in \mathrm{G}} f(g)e_{g^{-1}} = \varphi_\mathrm{V}(e_{1_\mathrm{G}}) = 0\,.$$

Comme les $(e_g)_{g \in \mathrm{G}}$ forment une base de $\mathscr{F}(\mathrm{G}, k)$, on en déduit que $f(g) = 0$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et donc $f = 0$.

n) D'après les questions **a**, **d** et **i**, les $(\chi_i)_{1 \leqslant i \leqslant s}$ forment une base orthonormée de Car_G. En particulier, la restriction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à Car_G est non dégénérée. L'orthogonal de Car_G pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans l'espace des fonctions centrale a donc pour dimension $\dim_k(\mathscr{F}(\mathrm{G}/\mathscr{R}, k)) - \dim_k(\mathrm{Car}_\mathrm{G})$. Or, d'après la question **m**, cet orthogonal est réduit à 0, ainsi Car_G est l'espace des fonctions centrales. Le nombre de représentations irréductibles (qui est la dimension de Car_G) est donc égal au nombre de classes de conjugaison de G (qui est la dimension de $\mathscr{F}(\mathrm{G}/\mathscr{R}, k)$).

Corrigé

a) Soit k un corps de caractéristique nulle. On applique le résultat de la question **b** de l'exercice 9 à la représentation de G sur $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ définie à l'exercice 6. Les questions **c** et **d** de l'exercice 6 donnent $\dim \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^\mathrm{G} = |\mathrm{X}/\mathrm{G}|$ et $\chi_\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)(g) = |\mathrm{X}^g|$. On obtient ainsi $|\mathrm{G}|^{-1} \sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{X}^g| = |\mathrm{X}/\mathrm{G}|$.

b) Si aucun élément de G n'est sans point fixe alors $|\mathrm{X}^g| \geqslant 1$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Comme $|\mathrm{X}^{1_\mathrm{G}}| = |\mathrm{X}| \geqslant 2$, on a $|\mathrm{X}/\mathrm{G}| = |\mathrm{G}|^{-1} \sum_{g \in \mathrm{G}} |\mathrm{X}^g| > 1$, ce qui contredit le fait que l'action est transitive.

c) L'action de G sur X définit une action de G sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ par $g(x, y) = (gx, gy)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$ et tout $g \in \mathrm{G}$. On constate que la diagonale et son complémentaire sont G-stables. Comme $|\mathrm{X}| \geqslant 2$, la diagonale et son complémentaire sont non vides et l'action de G sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ admet donc au moins deux orbites.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Comme G est transitif sur X la diagonale forme une seule orbite sous G. Par ailleurs, dire que G agit de façon doublement transitive signifie exactement que le complémentaire de la diagonale forme une seule orbite. On a donc exactement deux orbites qui sont la diagonale et son complémentaire.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. On applique la formule de la question **a** à l'action de G sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$. Comme $(\mathrm{X} \times \mathrm{X})^g = \mathrm{X}^g \times \mathrm{X}^g$ pour tout $g \in \mathrm{G}$, on obtient le résultat voulu.

$(iii) \Rightarrow (i)$. La formule de la question **a** appliquée l'action de G sur $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ montre que cette action n'a que deux orbites. Or elle en a au moins deux. Ainsi le complémentaire de la diagonale forme une orbite sous G ce qui signifie que l'action est doublement transitive.

d) Considérons la forme linéaire

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{X}, k) \longrightarrow k \\ \quad \mathrm{F} \quad \longmapsto \sum_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(x)\,. \end{cases}$$

L'application φ est un G-morphisme. En effet, pour tout $g \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$, on a

$$\varphi(g\mathrm{F}) = \sum_{x \in \mathrm{X}} (g\mathrm{F})(x) = \sum_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(g^{-1}x) = \sum_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{F}(x) = \varphi(\mathrm{F}) = g\varphi(\mathrm{F}).$$

On en déduit, grâce à la question **d** de l'exercice 2, que $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous-G-module de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$. Par ailleurs, d'après la question **d** de l'exercice 6, $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ est de dimension 1 de base $\mathbf{1_X}$ la fonction constante égale à 1. On a alors $\operatorname{Ker}\varphi \cap \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} = \{0\}$. En effet, si $\mathrm{F} = \lambda \mathbf{1_X} \in \operatorname{Ker}\varphi$ alors $\lambda|\mathrm{X}| = \varphi(\lambda 1_{\mathrm{X}}) = 0$. Comme $\operatorname{car} k = 0$, on a $\lambda = 0$ et donc $\mathrm{F} = 0$. Comme $\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$, on en déduit que $\mathrm{V} = \operatorname{Ker}\varphi$ convient.

Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi$ est le seul sous-espace de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ qui convienne. Plus précisément, si W est un G-module tel que $\mathrm{W}^{\mathrm{G}} = \mathrm{W} \cap \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} = \{0\}$ alors $\mathrm{W} \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Soit $w \in \mathrm{W}$. On pose $\lambda = \varphi(w) \in k$. Comme φ est un G-morphisme, on a $\varphi(gw) = g\varphi(w) = \lambda$ et donc

$$\varphi(p_{\mathrm{W}}(w)) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \varphi(gw) = \lambda\,.$$

Comme $p_{\mathrm{W}}(w) \in \mathrm{W}^{\mathrm{G}} = \{0\}$ (question **a** de l'exercice 9), on obtient $\lambda = 0$ et donc $w \in \operatorname{Ker}\varphi$.

Remarque. $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ est la composante isotypique associé au G-module trivial. Il admet donc un unique supplémentaire G-stable : la somme des composantes isotypiques associés aux G-modules irréductibles distincts du G-module trivial. De plus, tout sous-G-module W de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ tel que $\mathrm{W}^{\mathrm{G}} = \mathrm{W} \cap \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} = \{0\}$ admet une décomposition en composante irréductible ne contenant pas le module trivial et donc est contenu dans la somme des composantes isotypiques associés aux G-modules irréductibles distincts du G-module trivial.

e) L'objectif est d'utiliser le critère d'irréductibilité de la question **i** de l'exercice 10. D'après la question **d** de l'exercice 6, on a $\chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)}(g) = |\mathrm{X}^g|$. Comme $\mathrm{X}^g = \mathrm{X}^{g^{-1}}$, on en déduit que $\chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)}(g)\chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)}(g^{-1}) = |\mathrm{X}^g|^2$. La question **c** donne alors

$$2 = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)}(g)\chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)}(g^{-1}) = \langle \chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)}, \chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)}\rangle.$$

Par définition de V, on a $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k) = \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} \oplus \mathrm{V}$ et donc $\chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)} = \chi_{\mathrm{V}} + \chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)^{\mathrm{G}}}$ (question **d** exercice 4). Or $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ est un G-module de dimension un sur lequel G agit trivialement donc $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} k$. Ainsi, d'après la question **a** de l'exercice 4, on obtient $\chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)} = \chi_{\mathrm{V}} + \chi_k$. On a alors, par bilinéarité

$$\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}}\rangle + \langle \chi_k, \chi_k\rangle + 2\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_k\rangle = 2\,.$$

Comme k est de dimension 1, on en déduit, grâce à la question **d** de l'exercice 9, que $\langle \chi_k, \chi_k\rangle = 1$ et donc

$$\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}}\rangle + 2\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_k\rangle = 1\,.$$

Par ailleurs, d'après la question **b** de l'exercice 10, on a $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}}\rangle \in \mathbb{N}$ et $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_k\rangle \in \mathbb{N}$. On a alors nécessairement $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}}\rangle = 1$ et $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_k\rangle = 0$. En particulier, V est irréductible (question **i** de l'exercice 10).

Soient W un sous-G-module de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$. Comme $\dim_k(\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}) = 1$, on a soit $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} \subset \mathrm{W}$ soit $\mathrm{W}^{\mathrm{G}} = \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} \cap \mathrm{W} = \{0\}$. Dans le premier cas, $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ admet un supplémentaire G-stable dans W que l'on note W′. On a alors $\mathrm{W}' \cap \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} = \{0\}$. D'après ce que l'on a vu à la question **d**, on a $\mathrm{W}' \subset \mathrm{V}$. Par irréductibilité de V, on obtient $\mathrm{W}' = 0$ et donc $\mathrm{W} = \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ ou $\mathrm{W}' = \mathrm{V}$ et donc $\mathrm{W} = \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$. Dans le deuxième cas, on obtient de la même façon $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ et par irréductibilité $\mathrm{W} = \{0\}$ ou $\mathrm{W} = \mathrm{V}$. Ainsi $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ a exactement 4 sous-G-modules : 0, $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} = k\mathbf{1_X}$, V et $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$.

Remarque. Comme V est irréductible et non trivial, la décomposition $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k) = \mathrm{V} \oplus \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ est la décomposition en composante isotypique de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$. Comme la décomposition d'un sous-G-module de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)$ respecte la décomposition en composante isotypique, on obtient le résultat souhaité.

f) D'après ce qu'on a vu à la question **e**, on a $\chi_{\mathscr{F}(\mathrm{X},k)} = \chi_{\mathrm{V}} + \chi_k$ et donc

$$\langle \chi_{\mathscr{F}}(\mathrm{X}, k), \chi_{\mathscr{F}}(\mathrm{X}, k)\rangle = \langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}}\rangle + \langle \chi_k, \chi_k\rangle + 2\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_k\rangle.$$

Comme V est irréductible, la question **j** de l'exercice 10 donne $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}}\rangle = 1$. Comme k est de dimension 1, la question **d** de l'exercice 9 donne $\langle \chi_k, \chi_k\rangle = 1$. Comme $(\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}})^{\mathrm{G}} = \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ et $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k) = \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} \oplus \mathrm{V}$, la question **c** de l'exercice 3 donne $\mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}} = \mathrm{V}^{\mathrm{G}} \oplus \mathscr{F}(\mathrm{X}, k)^{\mathrm{G}}$ et donc $\mathrm{V}^{\mathrm{G}} = 0$. La question **b** de l'exercice 9 montre alors que $\langle \chi_k, \chi_{\mathrm{V}}\rangle = 0$. Finalement, on obtient

$$\langle \chi_{\mathscr{F}}(\mathrm{X}, k), \chi_{\mathscr{F}}(\mathrm{X}, k)\rangle = 2.$$

Or, d'après ce qu'on a vu à la question **e**, on a

$$\langle \chi_{\mathscr{F}}(\mathrm{X}, k), \chi_{\mathscr{F}}(\mathrm{X}, k)\rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} |\mathrm{X}^g|^2\,.$$

Ainsi les propriétés de la question **c** sont vérifiées.

Corrigé

a) Le caractère χ est à valeurs réelles si et seulement si $\chi = \overline{\chi}$. Comme une représentation est caractérisée par son caractère (question **g** exercice 10), on a $\chi = \overline{\chi}$ si et seulement si $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod}}{\simeq} \mathrm{V}^*$. Par définition, on a $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod}}{\simeq} \mathrm{V}^*$ si et seulement s'il existe $f \in \operatorname{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}^*)$ bijectif.

On reprend les notations de la question **h** de l'exercice 2. Comme Ξ réalise un G-isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{V},\mathrm{V}^*)$ et $\mathrm{Bil}(\mathrm{V}\times\mathrm{V},k)$, on en déduit grâce aux questions **c** de l'exercice 2 et **a** de l'exercice 3 que Ξ réalise une bijection entre $\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V},\mathrm{V}^*)$ et $\mathrm{Bil}(\mathrm{V}\times\mathrm{V},k)^\mathrm{G}$.

On obtient alors $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod}}{\simeq} \mathrm{V}^*$ si et seulement s'il existe $\mathrm{B}\in\mathrm{Bil}(\mathrm{V}\times\mathrm{V},k)^\mathrm{G}$ tel que $\Xi^{-1}(\mathrm{B}) = \Upsilon(\mathrm{B})$ bijectif.

Or B est non dégénérée si et seulement si $\Upsilon(\mathrm{B})$ est bijective. En effet, si $\Upsilon(\mathrm{B})$ est bijective alors

$$(\forall\, w\in\mathrm{V},\quad \mathrm{B}(v,w)=0) \iff (\Upsilon(\mathrm{B}))(v)=0 \iff v=0$$

et $$(\forall\, v\in\mathrm{V},\quad \mathrm{B}(v,w)=0) \iff w\in(\mathrm{Im}\,(\Upsilon(\mathrm{B})))^\circ \iff w\in(\mathrm{V}^*)^\circ=\{0\}\,.$$

Ainsi, les noyaux de B à droite et à gauche sont nuls. La forme bilinéaire B est donc non dégénérée (il aurait suffit de ne vérifier qu'un seul des deux cotés). Réciproquement, si B est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée alors, par définition de la non dégénérescence, $\Upsilon(\mathrm{B})$ est bijective.

On en déduit finalement le critère souhaité $\mathrm{V} \overset{\text{G-mod}}{\simeq} \mathrm{V}^*$ si et seulement s'il existe $\mathrm{B}\in\mathrm{Bil}(\mathrm{V}\times\mathrm{V},k)^\mathrm{G}$ non dégénérée.

b) Soit V' un $\mathbb{R}$G-module tel que $\mathbb{C}\otimes\mathrm{V}' \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{V}$. Montrons qu'il existe sur V' un produit scalaire G-invariant. Pour cela, considérons un produit scalaire b sur V'. La question **a** de l'exercice 9 montre que

$$b' = p_{\mathrm{Sym}(\mathrm{V}',k)}(b) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} b(g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot)$$

est une forme bilinéaire symétrique G-invariante. De plus, pour $x\in\mathrm{V}'$, l'élément $b'(x,x)\in\mathbb{R}$ est une somme de termes positifs donc $b'(x,x)\geqslant 0$ et $b'(x,x)=0$ implique successivement $b(x,x)=0$ et $x=0$. Ainsi b' est un produit scalaire G-invariant.

Considérons alors l'application

$$b''\colon \begin{cases} (\mathbb{C}\otimes\mathrm{V}')\times(\mathbb{C}\otimes\mathrm{V}') \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad (\lambda\otimes v_1, \mu\otimes v_2) \quad \longmapsto \lambda\,\mu\, b'(v_1,v_2)\,. \end{cases}$$

Elle est bien définie. On vérifie qu'elle est bilinéaire symétrique non dégénérée et G-invariante.

c) Considérons un produit scalaire hermitien B' sur V. On a alors

$$(x,y)\longmapsto \mathrm{B}(x,y) = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} \mathrm{B}'(g^{-1}x, g^{-1}y)$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne G-invariante. De plus, pour $x\in\mathrm{V}'$, l'élément $\mathrm{B}(x,x)$ est une somme de réels positifs donc $\mathrm{B}(x,x)\geqslant 0$ et $\mathrm{B}(x,x)=0$ implique successivement $\mathrm{B}'(x,x)=0$ et $x=0$. Ainsi B est un produit scalaire hermitien G-invariant.

d) Soit $w\in\mathrm{W}$. Comme B est un produit scalaire hermitien, B est non dégénérée. On peut donc représenter la forme linéaire $v\mapsto b(w,v)$ avec B. De façon précise, il existe un unique $\varphi(w)\in\mathrm{V}$ tel que

$$\forall\, v\in\mathrm{V},\qquad b(w,v)=\overline{\mathrm{B}(\varphi(w),v)}.$$

L'unicité de $\varphi(w)$ assure la semilinéarité de φ. De plus, φ est bijective puisque b et B ne sont pas dégénérées. Enfin, comme b et B sont G-invariantes, φ commute avec tous les éléments de G. En effet,

$$\forall\,(v,w)\in\mathrm{V}^2,\qquad \overline{\mathrm{B}(\varphi(gw),v)} = b(gw,v) = b(w,g^{-1}v) = \overline{\mathrm{B}(\varphi(w),g^{-1}v)} = \overline{\mathrm{B}(g\varphi(w),v)}\,,$$

ce qui donne bien $\varphi(gw)=g\varphi(w)$ pour tout $w\in\mathrm{V}$ puisque B est non dégénérée. On en déduit alors que φ^2 est linéaire bijective et commute avec tous les éléments de G. Ainsi, φ^2 est un G-isomorphisme de V. Par ailleurs, pour $v,w\in\mathrm{V}$, on a

$$\mathrm{B}(\varphi^2(w),v) = \overline{b(\varphi(w),v)} = \overline{b(v,\varphi(w))} = \mathrm{B}(\varphi(v),\varphi(w)),$$

et donc $$\mathrm{B}(\varphi^2(w),v) = \mathrm{B}(\varphi(v),\varphi(w)) = \overline{\mathrm{B}(\varphi(w),\varphi(v))} = \overline{\mathrm{B}(\varphi^2(v),w)} = \mathrm{B}(w,\varphi^2(v))\,.$$

L'endomorphisme φ^2 est donc hermitien. De plus, comme $\mathrm{B}(\varphi^2(v),v)=\mathrm{B}(\varphi(v),\varphi(v))\geqslant 0$, on en déduit que φ^2 est hermitien positif. Enfin, comme φ^2 est bijectif, φ^2 est hermitien défini positif.

e) L'endomorphisme ψ est un polynôme en φ^2 et ψ^{-1} est un polynôme en ψ. Ainsi ψ^{-1} et φ commutent. On en déduit que $\sigma^2=\mathrm{id}$. L'endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire σ est donc une symétrie de V et on peut décomposer $\mathrm{V}=\mathrm{V}_+\oplus\mathrm{V}_-$ en les sous-espaces (réels) propres de σ associés aux valeurs propres 1 et -1. Comme σ est semilinéaire, on a $i\mathrm{V}_+=\mathrm{V}_-$ et $i\mathrm{V}_-=\mathrm{V}_+$. Ainsi $\mathrm{V}=\mathrm{V}_+\oplus i\mathrm{V}_+$. Par ailleurs, G commute à φ et donc à ψ^{-1}. Les éléments de G commutent donc avec σ. On en déduit que les sous-espaces propres de σ c'est-à-dire V_+ et $\mathrm{V}_-=i\mathrm{V}_+$ sont stables par G, ce qui achève la démonstration.

f) Comme b est G-invariante, les ensembles

$$\mathrm{V}^\circ=\{v\in\mathrm{V},\quad \forall\, w\in\mathrm{V},\quad b(v,w)=0\}\qquad\text{et}\qquad {}^\circ\mathrm{V}=\{w\in\mathrm{V},\quad \forall\, v\in\mathrm{V},\quad b(v,w)=0\}$$

sont des sous-G-modules de V donc sont nuls ou V c'est-à-dire $b = 0$ ou b non dégénérée.

Soit b' une forme bilinéaire G-invariante. Avec les notations de la question **h** de l'exercice 2, $\Upsilon(b)$ et $\Upsilon(b')$ sont des G-morphismes et $\Upsilon(b)$ est bijectif. Ainsi $(\Upsilon(b))^{-1} \circ \Upsilon(b') : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ est un morphisme de G-modules. Comme V est irréductible, le lemme de Schur (**d** exercice 8) assure que $(\Upsilon(b))^{-1} \circ \Upsilon(b') = \alpha \mathrm{id}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$. On en déduit alors que $b' = \alpha b$.

On considère alors la forme bilinéaire G-invariante $b' : (v, w) \to b(w, v)$. D'après ce qui précède,

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall\, (v, w) \in \mathrm{V}^2, \qquad b(w, v) = b'(v, w) = \alpha b(v, w) = \alpha b'(w, v) = \alpha^2 b(w, v)\,.$$

Comme $b \neq 0$, on en déduit que $\alpha^2 = 1$ et donc $\alpha = \pm 1$, ce qui donne le résultat voulu.

g) Pour $g \in \mathrm{G}$, on note $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ les valeurs propres de g agissant sur V. On a alors

$$\chi(g^2) = \sum_{i=1}^{r} {\lambda_i}^2 = \sum_{i \leqslant j} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \chi_{\mathrm{S}^2(\mathrm{V})}(g) - \chi_{\mathrm{Alt}^2(\mathrm{V})}(g).$$

On en déduit que

$$\mathrm{C} := \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{g \in \mathrm{G}} \chi(g^2) = \langle \chi_{\mathrm{S}^2(\mathrm{V})}, 1 \rangle - \langle \chi_{\mathrm{Alt}^2(\mathrm{V})}, 1 \rangle = \langle \chi_{\mathrm{S}^2(\mathrm{V}^*)}, 1 \rangle - \langle \chi_{\mathrm{Alt}^2(\mathrm{V}^*)}, 1 \rangle\,.$$

La question **c** assure que $\mathrm{C} \in \{0, -1, 1\}$. Les questions **a** et **b** donne la distinction des cas.

h) Si G est un groupe de Coxeter, la question **b** montre qu'il existe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée G-invariante sur V. Or, d'après la question **f** de l'exercice 3, on a $\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k) \overset{\text{G-mod.}}{\simeq} \mathrm{S}^2(\mathrm{V}^*)$. On a alors, avec la question **c** de l'exercice 2, $0 \neq (\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k))^{\mathrm{G}} \simeq (\mathrm{S}^2(\mathrm{V}^*))^{\mathrm{G}}$. Comme G est irréductible, tous les d_i sont strictement plus grands que 1. On en déduit que, si aucun des d_i n'est 2 alors tous les polynômes invariants non nuls sont de degrés strictement plus grands que 2, ce qui est absurde. Donc l'un des d_i est 2.

Si l'un des d_i est 2 alors $(\mathrm{S}^2(\mathrm{V}^*))^{\mathrm{G}} \neq 0$ et donc $(\mathrm{Sym}(\mathrm{V}, k))^{\mathrm{G}} \neq$. Il existe donc une forme bilinéaire symétrique G-invariante b non nulle. La question **c** montre que b est non dégénérée. Avec la question **e**, on en déduit que la représentation est réelle et donc G est de Coxeter.

i) Pour un groupe de réflexions complexes, la représentation a lieu sur le corps des caractères. On en déduit que si $\chi = \overline{\chi}$ alors χ est réel et la représentation aussi. On est alors dans le deuxième cas.

Références

[Bpm] V. Beck, J. Malick, et G.Peyré. *Objectif Agrégation.* H & K, 2004.

[Pey] G. Peyré. *L'algèbre discrète de la tranformée de Fourier.* Ellipses, 2003.