Algèbre M1 Cours 9

G-modules

16 Novembre 2010

Action de groupes

Une action d'un groupe G sur un ensemble X est une application

$$m\colon \begin{cases} G \times X \longrightarrow X \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{cases}$$

vérifiant les deux axiomes suivants :

1. $1_G \cdot x = x$ pour tout $x \in X$
2. $(g'g) \cdot x = g' \cdot (g \cdot x)$ pour tous $g, g' \in G$ et $x \in X$

Chaque élément $g \in G$ définit alors une application $\alpha_g : X \to X$ donnée par $\alpha_g(x) = g \cdot x$. L'axiome (**1**) se réécrit alors $\alpha_{1_G} = \mathrm{id}_X$. L'axiome (**2**) se réécrit $\alpha_{g'g} = \alpha_{g'} \circ \alpha_g$ pour tout $g, g' \in G$. On en déduit que les α_g sont des bijections de X. Finalement une action de G est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes

$$\alpha\colon \begin{cases} G \longrightarrow \mathfrak{S}_X \\ g \longmapsto \alpha_g : x \mapsto g \cdot x \end{cases}$$

Si X est structuré

Lorsque l'espace X est muni d'une structure (groupe, anneau, espace vectoriel, topologie), les actions « respectant cette structure » sont particulièrement intéressantes. Que signifie donc ce « respectant la structure » ? De manière concrète, les α_g ne pas simplement des bijections de X mais des automorphismes pour la structure sur X. Par exemple, l'action de G sur lui-même (ou sur un de ses sous-groupes distingués) par conjugaison respecte la structure de groupe : pour tout $g \in G$, l'application $\alpha_g : x \mapsto gxg^{-1}$ est un automorphisme de groupes.

Une action respectant la structure (ou compatible avec la structure) se résume ainsi à un morphisme de groupe pas uniquement à valeurs dans $\mathfrak{S}_X$ mais à valeurs dans le sous-groupe des automorphismes de X pour la structure considérée.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathfrak{S}_X \\ & \cup \\ & \mathrm{Aut}(X) \end{tikzcd}$$

Action linéaire

Dans la suite du cours, on s'intéresse aux actions d'un groupe G sur un espace vectoriel V qui sont compatibles cette structure.

Définition – G-module. Un G-module (sur k) est un couple (V, ρ) où V est un espace vectoriel sur k et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes. On dit aussi que (V, ρ) est une *représentation linéaire de G sur k*.

En d'autres termes une représentation linéaire (sur k) est une application

$$m : \begin{cases} G \times V \longrightarrow V \\ (g, v) \longmapsto gv \end{cases}$$

où V est un k-espace vectoriel vérifiant

1. $1_G \cdot v = v$ pour tout $v \in V$
2. $(g'g) \cdot v = g' \cdot (g \cdot v)$ pour tous $g, g' \in G$ et $v \in V$
3. $g \cdot (\lambda v + v') = \lambda g \cdot v + g \cdot v'$ pour tous $g \in G$, $v, v' \in V$ et $\lambda \in k$

Premiers exemples

Exemple – Représentation linéaire de $\mathbb{Z}$. Une représentation linéaire de $\mathbb{Z}$ est simplement la donnée d'un espace vectoriel V et d'un automorphisme φ de l'espace vectoriel V (on a $\varphi = \rho(1)$).

Exemple – Représentation linéaire d'un groupe cyclique. Une représentation linéaire de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est simplement la donnée d'un espace vectoriel V et d'un automorphisme φ de l'espace vectoriel V vérifiant $\varphi^n = \mathrm{id}_V$.

Par exemple, la donnée d'une représentation linéaire (en caractéristique différente de 2) de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est la donnée d'une symétrie.

Attention ! Dans les exemples précédents, la notation $\mathbb{Z}$-module ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-module n'est pas appropriée car elle prête à confusion avec celle de groupe abélien ou de $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel.

G-module

Remarque Le morphisme « structurel » ρ est toujours omis et on dit « soit V un G-module » ou « soit V une représentation linéaire de G » et non « soit (V, ρ) un G-module ».

Définition – Degré. Soit V une représentation (linéaire) de G. La dimension de V est appelé le degré de V.

Remarque – Interprétation matricielle. Si V est une représentation linéaire de G de degré n, en fixant une base $\mathscr{B}$ de V, on obtient une famille de matrice $(M_g)_{g \in G}$ (M_g désigne la matrice de $\rho(g)$ dans la base $\mathscr{B}$) vérifiant $M_{\mathrm{id}} = \mathrm{Id}$ et $M_{gg'} = M_g M_{g'}$ pour tous $g, g' \in G$. Inversement, toute famille de matrices vérifiant ces relations définit une représentation linéaire de G.

G-morphisme

Définition – Morphisme de G-module. Soient V, W deux représentations linéaires de G sur k. Un morphisme de G-modules (sur k) (on dit aussi application G-linéaire, ou G-morphisme) de V dans W est une application k-linéaire et G-équivariante c'est-à-dire

$$f(\lambda v + v') = \lambda f(v) + f(v') \qquad \text{et} \qquad f(gv) = gf(v)$$

pour tout $\lambda \in k$, $v, v' \in V$ et $g \in G$.

On note $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ l'ensemble des G-morphismes de V dans W. C'est un sous-k-espace vectoriel de $\mathrm{Hom}_k(V, W)$.

Définition – Isomorphisme de G-module. Soit V, W deux représentations linéaires de G sur k. Un isomorphisme de G-modules de V dans W est un morphisme de G-module $\varphi : V \to W$ tel qu'il existe un morphisme de G-module $\psi : W \to V$ tel que $\psi\varphi = \mathrm{id}_V$ et $\varphi\psi = \mathrm{id}_W$.
On dit alors que V et W sont des G-modules isomorphes.

G-morphisme

Remarque – Isomorphisme et bijectivité. On vérifie qu'un isomorphisme de G-module est un morphisme bijectif de G-module. Des G-modules isomorphes ont le même degré. La réciproque est bien sûr fausse en général.

Exercice – Le groupe trivial. Qu'est-ce qu'une représentation du groupe trivial ? À quelle condition, deux représentations du groupe trivial sont-elles isomorphes ?

Exemples – Exemples fondamentaux. Soit V une représentation linéaire de G alors id_V est un G-morphisme. La composée de deux G-morphismes est un G-morphisme.

Réduction d'endomorphisme

Remarque – Le groupe $\mathbb{Z}$. Soit (V, ρ), (V', ρ') deux représentations de $\mathbb{Z}$ et $\varphi = \rho(1)$ et $\psi = \rho'(1)$ les automorphismes de V et V' associés.
Les représentations linéaires V et V' sont $\mathbb{Z}$-isomorphes s'il existe $f : V \to V'$ une application linéaire bijective telle que $f\varphi = \psi f$ c'est-à-dire si φ et ψ sont des automorphismes semblables.
L'étude des représentations linéaires de $\mathbb{Z}$ correspond donc à la réduction des endomorphismes.

Remarque – Interprétation matricielle. Soit $(M_g)_{g \in G}$ et $(M'_g)_{g \in G}$ deux représentations matricielles de G. Elles sont isomorphes si et seulement si il existe une matrice inversible M telle que $M_g M = M M'_g$ pour tout $g \in G$.
Autrement dit, les matrices M_g et $M_{g'}$ sont simultanément semblables (pour tous les $g \in G$).
Déterminer les classes d'isomorphismes de représentation de G revient ainsi à chercher des représentants (à conjugaison près) « simples » de famille de matrices indexés par G.

Sous-G-module

Définition – Sous-G-module. Soit (V, ρ) une représentation linéaire de G. On dit que $W \subset V$ est un sous-G-module (une sous-représentation) de V si W est un sous-espace vectoriel de V stable par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$ c'est-à-dire $\rho(g)w \in W$ pour tous $w \in W$ et $g \in G$.
L'inclusion $i : w \in W \mapsto w \in V$ est alors un morphisme de G-modules.

Exercice Qu'est-ce qu'un sous-G-module pour le groupe trivial ? Et pour le groupe $\mathbb{Z}$?

Exemple – G-module simple. Soit V une représentation linéaire de G. Alors $\{0\}$ et V sont deux sous-G-modules de V. Si $V \neq \{0\}$ n'a pas d'autres sous-G-modules que ces deux-là, on dit que V est un G-module simple ou irréductible.

Exercice Quelles sont les G-modules simples lorsque G est le groupe trivial ? et si $G = \mathbb{Z}$ (on pourra commencer par le cas $k = \mathbb{C}$) ?

Sous-module engendré

Proposition – Sous-module engendré. Soit V un G-module et $(W_i)_{i\in I}$ une famille de sous-représentations de V. Alors

$$\bigcap_{i\in I} W_i$$

est une sous-représentation de V.

Si A est une partie de V, l'intersection des sous-représentations de V contenant A est la plus petite sous-représentation de V contenant A. Elle est notée $\langle A\rangle_G$ et est appelée la sous-représentation engendrée par A ou le sous-G-module engendré par A.

On a
$$\langle A\rangle_G = \left\{ \sum_{\substack{\text{finie} \\ g\in G,\, a\in A}} \lambda_{g,a}\, ga, \quad \lambda_{g,a}\in k \right\}.$$

Module quotient

Définition – Module quotient. Soit V un G-module et W un sous-G-module et $\pi : V \to V/W$ la surjection canonique. Il existe sur V/W une unique structure de G-module telle que π soit un morphisme de G-module. On dit que V/W est le G-module quotient de V par W.

Proposition – Propriété universelle du quotient. Soient V un G-module, W un sous-G-module et $\pi : V \to V/W$ la surjection canonique. Pour tout G-module V' et tout G-morphisme $f : V \to V'$, on a les équivalences

(*i*) f se factorise par π : il existe une application $f' : V/W \to V'$ tel que $f'\pi = f$

(*ii*) $W \subset \operatorname{Ker} f$ (ou encore $f(W) = 0$)

Dans ce cas, l'application f' est unique, c'est un morphisme de G-module dont l'image est $f(V')$ et le noyau $\operatorname{Ker} f/W$.

Définition du module quotient

Comme W est un sous-groupe du groupe additif V, V/W est bien défini et a une unique structure de groupe tel que π soit un morphisme de groupes.

Si on veut que π soit un G-morphisme, on doit avoir en particulier $\lambda\pi(v) = \pi(\lambda v)$ pour $\lambda \in k$ et $v \in V$. On définit la structure d'espace vectoriel sur V/W par $\lambda\pi(v) = \pi(\lambda v)$ pour $\lambda \in k$ et $v \in V$.
Si $\pi(v) = \pi(v')$, on a alors $v - v' \in W$ et donc $\lambda(v - v') = \lambda v - \lambda v' \in W$. Ainsi $\pi(\lambda v) = \pi(\lambda v')$ et l'application définissant la structure d'espace vectoriel est bien définie.

Si on veut que π soit un G-morphisme, on doit avoir en particulier $g\pi(v) = \pi(gv)$ pour $g \in G$ et $v \in V$. On définit l'action de G sur V/W par $g\pi(v) = \pi(gv)$ pour $g \in G$ et $v \in V$.
Si $\pi(v) = \pi(v')$, on a alors $v - v' \in W$ et donc $g(v - v') = gv - gv' \in W$. Ainsi $\pi(gv) = \pi(gv')$ et l'application définissant l'action de G est bien définie.

P.U. du quotient

L'équivalence résulte du théorème de factorisation pour les groupes (abéliens). Il reste à vérifier que f' (lorsqu'elle existe) est bien un morphisme de G-module. Toujours par la propriété universelle du quotient pour les groupes, on sait que f' est un morphisme de groupes.

Calculons, pour $\lambda \in k$ et $v \in V$

$$f'(\lambda\pi(v)) = f'(\pi(\lambda v)) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda f'(\pi(v))$$

De même, pour $g \in G$ et $v \in V$, on a

$$f'(g\pi(v)) = f'(\pi(gv)) = f(gv) = gf(v) = gf'(\pi(v))$$

Exercice et quotient

Exercice – Les bonnes relations d'équivalences. Soient V un G-module et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur V telle qu'il existe sur $V/\mathscr{R}$ une structure de G-module telle que la surjection canonique $\pi : V \to V/\mathscr{R}$ soit un morphisme de G-module. Montrer qu'il existe un (unique) sous-G-module W tel que $\mathscr{R}$ soit la relation d'équivalence associée à W.

Exercice – Morphisme et quotient. Soient V un G-module, W un sous-G-module et $\pi : V \to V/W$ la surjection canonique. Montrer que pour tout G-module V', l'application

$$\Delta : \begin{cases} \mathrm{Hom}_G(V/W, V') \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(V, V') \\ \qquad \varphi \qquad\qquad \longmapsto \varphi \circ \pi \end{cases}$$

est un morphisme injectif de k-espaces vectoriels. Montrer que l'image est l'ensemble des morphismes triviaux sur W. En déduire que Δ induit une bijection entre l'ensemble des morphismes de G-modules de V/W dans V' et l'ensemble des G-morphismes de V dans V' triviaux sur W. Déterminer l'isomorphisme réciproque.

Théorèmes d'isomorphisme

Proposition – Premier théorème d'isomorphisme. Soit V, V' deux G-modules et $f : V \to V'$ un morphisme de G-module. Alors f induit un isomorphisme de G-module entre $V/\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ (donner une formule explicite pour cet isomorphisme).
En particulier, si f est surjectif, $V/\mathrm{Ker}\, f \simeq V'$.

Proposition – Deuxième théorème d'isomorphisme. Soit V un G-module et W, W' deux sous-modules de V. Les G-modules $W + W'/W$ et $W/W \cap W'$ sont isomorphes (donner une formule explicite pour l'isomorphisme et l'inverse).

Théorème de correspondance

Lemme – Image directe et image réciproque. Soient V, V' deux représentations linéaires de G et $f : V \to V'$ un G-morphisme. Si W est un sous-G-module de V alors $f(W)$ est un sous-G-module de V'. En particulier, $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-G-module de V'. Si W' est un sous-G-module de V' alors $f^{-1}(W')$ est un sous-G-module de V. En particulier, $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-G-module de V.

Théorème – Théorème de correspondance. Soient V, V' deux représentations linéaires de G et $f : V \to V'$ un G-morphisme **surjectif**. Les applications images directes et images réciproques induisent des bijections réciproques l'une de l'autre entre les sous-G-modules de V contenant $\mathrm{Ker}\, f$ et les sous-G-modules de V'.
Ces applications respectent les inclusions, les intersections, les classes d'isomorphismes de quotients (c'est-à-dire $V/W \simeq V'/f(W)$ (si $\mathrm{Ker}\, f \subset W$) et $V/f^{-1}(W') \simeq V'/W'$).

Troisième théorème d'isomorphisme

Le théorème de correspondance appliqué dans le cas de la surjection canonique $\pi : V \to V/W$ décrit une bijection entre les sous-G-module de V contenant W et les sous-G-module de V/W. Cette bijection conservent les intersections et les inclusions. De plus, si W' est un sous-G-module de V contenant W, on a $(V/W)/(W'/W) \simeq V/W'$.

Produit de G-modules

Définition – G-module produit. Soit V_i une famille de G-modules. L'espace vectoriel

$$X = \prod_{i \in I} V_i$$

peut être muni d'une structure de G-module de la façon suivante : pour $g \in G$ et $x = (v_i)_{i \in I} \in X$, on pose

$$gx = g \cdot (v_i)_{i \in I} := (gv_i)_{i \in I} \,.$$

On dit que X est le G-module produit des V_i.

Pour $j \in I$, l'application $p_j : X \to V_j$ donnée par $p_j((v_i)_{i \in I}) = v_j$ est un G-morphisme.

De plus, pour tout G-module Y, l'application

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_G(Y, X) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_G(Y, V_i) \\ f \longmapsto (p_i \circ f)_{i \in I} \end{cases}$$

est un isomorphisme k-linéaire : il revient au même de se donner un morphisme à valeurs dans un produit qu'un morphisme à valeurs dans chacun des facteurs.

Somme directe de G-modules

Définition – G-module somme directe. Soit V_i une famille de G-modules. Dans le G-module produit des V_i, on considère le sous-espace vectoriel Z formé des familles $(v_i)_{i\in I}$ telles que l'ensemble des $i \in I$ vérifiant $v_i \neq 0$ est fini (il n'y a qu'un nombre fini de coordonnées non nulles). C'est un sous-G-module de X (il est stable par la multiplication par $g \in G$ pour tout $g \in G$).

On dit que Z est le G-module ou la représentation somme directe des V_i et on note $Z = \bigoplus_{i\in I} V_i$.

Pour $\ell \in I$, l'application $j_\ell : V_\ell \to Z$ donnée par $j_\ell(v_\ell) = (0, \ldots, 0, v_\ell, 0, \ldots, 0)$ (où le seul coefficient non nul est à la place ℓ et égal à v_ℓ) est un G-morphisme.
En fait, le morphisme obtenu par la propriété universelle du produit de la façon suivante : pour tout $i \neq \ell$, on considère le morphisme $0 : V_\ell \to V_i$ et on considère le morphisme $\mathrm{id}_{V_\ell} : V_\ell \to V_\ell$ est à valeurs dans Z et définit ainsi j_ℓ. On a donc $p_\ell j_\ell = \mathrm{id}_{V_\ell}$ et $p_i j_\ell = 0$ si $i \neq \ell$.

P.U. de la somme directe

Proposition – Propriété universelle. Pour tout G-module Y, l'application

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_G(\bigoplus_{i\in I} V_i, Y) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(V_i, Y) \\ f \longmapsto (f \circ j_i)_{i\in I} \end{cases}$$

est un isomorphisme k-linéaire : il revient au même de se donner un morphisme issu d'une somme directe qu'un morphisme issu de chacun des termes.

La bijection réciproque est donnée par

$$\begin{cases} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_G(V_i, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(\bigoplus_{i\in I} V_i, Y) \\ (f_i)_{i\in I} \longmapsto \left((v_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} f_i(v_i) \right) . \end{cases}$$

Somme directe et produit

Remarque – Ensemble d'indice fini. Lorsque I est fini, somme directe et produit coïncident et on utilise le plus fréquemment la notation somme directe. De plus, on a

$$\sum_{i \in I} j_i p_i = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i \in I} V_i}$$

Exercice Soit V un G-module et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-G-modules de V. On suppose que $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ (tout élément v de V se décompose de manière unique sous la forme $v = \sum_{i \in I} v_i$ avec $v_i \in V_i$). Montrer que le G-module V est G-isomorphe à la somme directe des V_i.

G-module et morphisme

Proposition Soient V, W deux G-modules. L'application

$$\begin{cases} G \times \mathrm{Hom}_k(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(V,W) \\ \qquad (g,f) \qquad\qquad \longmapsto g \cdot f := gfg^{-1} = \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1}) \end{cases}$$

munit $\mathrm{Hom}_k(V,W)$ d'une structure de G-module dont l'ensemble des points fixes est $\mathrm{Hom}_G(V,W)$.

Exemple – Un exemple de G-module. On considère l'action triviale de G sur k : $gx = x$ pour tous $g \in G$ et $x \in k$. On obtient ainsi une structure de G-module sur k (le morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(k)$ correspondant est le morphisme trivial). Le module obtenu est appelé le G-module trivial.

Application – Représentation contragrédiente. Soit (V, ρ) un G-module. La représentation contragrédiente est la représentation associée à $V^* = \mathrm{Hom}_k(V,k)$ où G agit sur V par ρ et trivialement sur k. On a donc $\rho_{V^*}(g) = {}^t\rho(g)^{-1}$.

Produit tensoriel d'espaces vectoriels

Le produit tensoriel sert à transformer le bilinéaire en linéaire. On considère V et W deux k-espaces vectoriels. L'objectif va être alors de construire un espace vectoriel $V \otimes W$ et une application bilinéaire notée $\otimes$ de $V \times W$ dans $V \otimes W$ vérifiant la propriété suivante : pour tout espace vectoriel X et toute application bilinéaire $b : V \times W \to X$, on peut factoriser b par l'application $\otimes$. De façon plus précise : il existe une unique application linéaire $f : V \otimes W \to P$ telle que $b = f \circ \otimes$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & P \\
M \otimes N \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Construction du produit tensoriel

On note $\mathscr{F}(V \times W, k)$ l'espace vectoriel des applications de $V \times W$ dans k et $X = k^{(V \times W)}$ des applications de $V \times W$ dans k dont le support (c'est-à-dire l'ensemble des (v, w) tel que $\varphi(v, w) \neq 0$) est fini. L'espace vectoriel X admet une base formée des applications $\delta_{(v,w)}$ donnée par $\delta_{(v,w)}(v', w') = 1$ si $(v, w) = (v', w')$ et 0 sinon. On considère Y alors le sous-espace vectoriel de X engendré par

- $\alpha_{v,v',w} = \delta_{(v+v',w)} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v',w)}$ pour $v, v' \in V$ et $w \in W$
- $\beta_{\lambda,v,w} = \delta_{(\lambda v,w)} - \lambda\delta_{(v,w)}$ pour $\lambda \in k$, $v \in V$ et $w \in W$
- $\gamma_{v,w,w'} = \delta_{(v,w+w')} - \delta_{(v,w)} - \delta_{(v,w')}$ pour $v \in V$ et $w, w' \in W$
- $\delta_{\lambda,v,w} = \delta_{(v,\lambda w)} - \lambda\delta_{(v,w)}$ pour $\lambda \in k$, $v \in V$ et $w \in W$

On définit alors $M \otimes N := X/Y$ et $\otimes(m, n) := \pi(\delta_{(m,n)})$ où $\pi : X \to X/Y$ est la surjection canonique. Plutôt que d'écrire $\otimes(m, n)$, on écrit $m \otimes n$.

Vérification

$M \otimes N$ est bien un k-espace vectoriel comme quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace vectoriel.
Montrons que $\otimes$ est bilinéaire. On a $\alpha_{v,v',w} \in Y$ et donc $\pi(\alpha_{v,v',w}) = 0$. Par linéarité de π, on en déduit que

$$\pi(\delta_{(v+v',w)}) - \pi(\delta_{(v,w)}) - \pi(\delta_{(v',w)}) = 0$$

c'est-à-dire $$(v + v') \otimes w = v \otimes w + v' \otimes w$$

De même, la relation $\beta_{\lambda,v,w} \in Y$ se traduit par $(\lambda v) \otimes w = \lambda(v \otimes w)$; la relation $\gamma_{v,w,w'} \in Y$ se traduit par $v \otimes (w + w') = v \otimes w + v \otimes w'$ et la relation $\delta_{\lambda,v,w} \in W$ se traduit par $v \otimes (\lambda w) = \lambda(v \otimes w)$.

Finalement $\otimes$ est bien bilinéaire.

Factorisation

Soit $b : V \times W \to V'$ une application bilinéaire. Comme la famille $(\delta_{(v,w)})_{(v,w)\in V\times W}$ est une base de X, il existe une unique application linéaire $\varphi : X \to V'$ telle que $\varphi(\delta_{(v,w)}) = b(v,w)$ pour tout $(v,w) \in V \times W$.
Par linéarité de φ, on a alors
$\varphi(\alpha_{v,v',w}) = b(v+v',w) - b(v,w) - b(v',w) = 0$ puisque b est bilinéaire. De même, on a $\varphi(\beta_{\lambda,v,w}) = 0$, $\varphi(\gamma_{v,w,w'}) = 0$ et $\varphi(\delta_{\lambda,v,w}) = 0$. Ainsi φ est nulle sur Y et définit par passage au quotient une application linéaire $f : X/Y = V \otimes W \to V'$ telle que $f \circ \pi = \varphi$. En particulier, on a

$$f(v \otimes w) = f \circ \pi(\delta_{v,w}) = \varphi(\delta_{(v,w)}) = b(v,w).$$

On a donc bien la factorisation souhaitée.

Unicité de la factorisation

La famille $(\delta_{(v,w)})_{(v,w)\in V\times W}$ est une base de X. La famille des $v \otimes w = \pi(\delta_{(v,w)})$ est donc une famille génératrice de $V \otimes W = X/Y$. Une application linéaire issue de $V \otimes W$ est donc entièrement déterminée par ces valeurs sur les $v \otimes w$. Ainsi il existe au plus une application linéaire f vérifiant $f(v \otimes w) = b(v, w)$ pour tous $v \in V$ et $w \in W$.

Attention ! L'espace vectoriel $V \otimes W$ est engendré par les $v \otimes w$ mais tout élément de $V \otimes W$ n'est pas de la forme $v \otimes w$.

Un élément général de $V \otimes W$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i \otimes w_i)$ qu'on peut aussi écrire $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i v_i) \otimes w_i = \sum_{i=1}^{n} v_i' \otimes w_i$.

Base d'un produit tensoriel

Lemme – Base d'un produit tensoriel. Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base de V et $(f_j)_{j\in J}$ une base de W. La famille $\mathscr{B} = (e_i \otimes f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $V \otimes W$.

Preuve. Si $v = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ et $w = \sum_{j\in J} \mu_j f_j$, on a $v \otimes w = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j)$. Une somme d'élément de la forme $v \otimes w$ est donc combinaison linéaire des éléments de la forme $e_i \otimes f_j$ et $\mathscr{B}$ est une famille génératrice.

Par ailleurs, pour $i \in I$ et $j \in J$, il existe une unique forme bilinéaire $b_{i,j} : V \times W \to k$ vérifiant $b_{i,j}(e_i, f_j) = 1$ et $b_{(i,j)}(e_{i'}, f_{j'}) = 0$ si $(i', j') \neq (i, j)$. On note alors $\varphi_{i,j} : V \otimes W \to k$ la forme linéaire déduite de $b_{i,j}$ par la propriété universelle du produit tensoriel. Si $\sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{i,j} e_i \otimes f_j = 0$, en évaluant selon $\varphi_{i,j}$, on obtient $\lambda_{i,j} = 0$ et la famille $\mathscr{B}$ est libre.

Dimension du produit tensoriel

Corollaire Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $V \otimes W$ est un espace vectoriel de dimension $\dim V \dim W$.

Exercice – Quelques isomorphismes classiques. Déterminer des isomorphismes explicites entre

1. $V \otimes k$ et V
2. $V \otimes W$ et $W \otimes V$
3. $(V \otimes W) \otimes W'$ et $V \otimes (W \otimes W')$
4. $V \otimes \bigoplus_{i \in I} W_i$ et $\bigoplus_{i \in I} (V \otimes W_i)$

À partir des isomorphismes de (**1**) et (**4**), retrouver le résultat du lemme sur les bases du produit tensoriel.

Produit tensoriel et application linéaire

Lemme Soient V, V', W, W' quatre k-espaces vectoriels et $f : V \to V'$ et $f' : W \to W'$ deux applications k-linéaires. Il existe une unique application linéaire notée $T(f, f') : V \otimes W \to V' \otimes W'$ vérifiant

$$T(f, f')(v \otimes w) = f(v) \otimes f'(w)$$

De plus, si V'' et W'' sont deux k-espaces vectoriels et $h : V' \to V''$ et $h'' : W' \to W''$ deux applications k-linéaires, on a $T(h, h') \circ T(f, f') = T(hf, h'f')$. De plus, $T(\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_W) = \mathrm{id}_{V \otimes W}$.

Preuve. L'application $(v, w) \mapsto f(v) \otimes f'(w)$ est évidemment bilinéaire (puisque f et f' sont linéaire et $\otimes$ est bilinéaire). Ainsi par la propriété universelle du produit tensoriel, on obtient $T(f, f')$.
On a évidemment $T(h, h')T(f, f')(v \otimes w) = hf(v) \otimes h'f'(w)$. Par unicité, on obtient l'égalité voulue.
Enfin par définition, on a $T(\mathrm{id}_V, \mathrm{id}_W)(v \otimes w) = v \otimes w$ pour tout $v \in V$, $w \in W$. Par unicité, on obtient le résultat voulu.

Produit tensoriel et application linéaire (suite)

Exercice À l'aide du lemme précédent, construire une application linéaire de $\mathrm{Hom}_k(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_k(W, W')$ dans $\mathrm{Hom}_k(V \otimes W, V' \otimes W')$.
Montrer que c'est un isomorphisme lorsque V, V', W et W' sont de dimension finie (on peut en fait même affaiblir cette hypothèse et supposer que seul V et V' sont de dimension finie, ou alors que W et W' sont de dimension finie ou enfin que V et W sont de dimension finie).

Version matricielle

Proposition Soient V, V', W, W' quatre k-espaces vectoriels de dimension finie et $f : V \to V'$ et $f' : W \to W'$ deux applications k-linéaires.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n), \mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_{n'}), \mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_m), \mathscr{C}' = (f'_1, \ldots, f'_{m'})$ des bases respectives de V, V', W, W'.
On note A, A' les matrices respectives de f et f' dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
La matrice de $T(f, f')$ dans les bases $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ et $(e'_i \otimes f'_j)_{i,j}$ ordonnées lexicographiquement est donnée par

$$\begin{bmatrix} a_{11}A' & \cdots & a_{1n}A' \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n'1}A' & \cdots & a_{n'n}A' \end{bmatrix}$$

Version matricielle

Preuve. On a

$$T(f,f')(e_i \otimes f_j) = f(e_i) \otimes f'(f_j) = \sum_{\ell=1}^{n'} a_{\ell i} e'_\ell \otimes \sum_{\ell'=1}^{m'} a'_{\ell' j} f'_{\ell'}.$$

Ainsi $T(f,f')(e_i \otimes f_j) = \sum_{(\ell,\ell')} a_{\ell i} a'_{\ell' j} (e'_\ell \otimes f'_{\ell'})$.

Exercice Trouver un autre ordre sur les bases de telle sorte que la matrice de $T(f,f')$ soit

$$\begin{bmatrix} Aa'_{11} & \cdots & Aa'_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Aa'_{m'1} & \cdots & Aa_{m'm} \end{bmatrix}$$

Produit tensoriel et G-module

Soient V et W deux G-modules. L'espace vectoriel $V \otimes W$ peut être muni d'une structure de G-module via l'action dite diagonale donnée par $g \cdot (v \otimes w) = gv \otimes gw$ pour $g \in G$, $v \in V$ et $w \in W$. Le morphisme de groupe associé cette action diagonale est $\rho_{V \otimes W} : g \in G \mapsto T(\rho_V(g), \rho_W(g))$ qui est bien un morphisme de groupes d'après le lemme précédent.

Un isomorphisme fondamental

Soit V et W deux k-espaces vectoriels. L'application $(f, w) \in V^* \times W \mapsto (v \mapsto f(v)w) \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$ est bilinéaire.
Elle donne une application linéaire $\tau_{V,W} : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}_k(V, W)$ décrite par $(f \otimes w) \mapsto (v \mapsto f(v)w)$.
Si V ou W est de dimension finie alors cette application linéaire $\tau_{V,W}$ est un isomorphisme.
Supposons pour commencer que V est de dimension finie. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ la base duale. Pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, on définit $\alpha(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \otimes \varphi(e_i) \in V^* \otimes W$.
On vérifie alors que $\alpha \circ \tau_{V,W} = \mathrm{id}$ (car $\sum_{i=1}^{n} f(e_i)\delta_i = f$) et $\tau_{V,W} \circ \alpha = \mathrm{id}$ (car $\sum_{i=1}^{n} \delta_i(x)e_i = x$).

Un isomorphisme fondamental (suite)

Si W est de dimension finie, on note $(f_1, \ldots, f_m)$ une base de W et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ la base duale. Pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, on définit par $\beta(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} (\gamma_i \circ \varphi) \otimes f_i$.
On vérifie alors que $\beta \circ \tau_{V,W} = \mathrm{id}$ et $\tau_{V,W} \circ \beta = \mathrm{id}$.

Lorsque V et W sont deux G-modules, on vérifie que $\tau_{V,W}$ est un morphisme de G-modules. En effet,

$$\tau_{V,W}(g(f \otimes w)) = \tau_{V,W}(gf \otimes gw) = \tau_{V,W}(f \circ g^{-1} \otimes gw)$$

On en déduit que

$$\tau_{V,W}(g(f \otimes w)) = (v \mapsto f(g^{-1}v)gw) = g\tau_{V,W}(f \otimes w)g^{-1}\,.$$

Un dernier calcul

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. L'application $V^* \times V \to k$ donnée par $(f, v) \mapsto f(v)$ (c'est le crochet de la dualité) est bilinéaire. Elle produit ainsi une application linéaire de $t : V^* \otimes V \to k$.
Lorsqu'on identifie $V^* \otimes V$ à $\mathrm{End}_k(V)$ via l'application $\tau_{V,V}$ que devient la forme linéaire t : à quelle forme linéaire sur $\mathrm{End}_k(V)$ correspond-elle ?