Algèbre M1 Cours 11

Caractère linéaire

30 novembre 2010

Programme

Dans ce cours, on étudie les représentations linéaires de dimension 1 d'un groupe : ce sont les caractères linéaires. On détermine leur nombre sur un corps algébriquement clos de « bonne caractéristique ». Ce nombre est indépendant du corps : c'est le cardinal de l'abélianisé $G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ de G.

Un peu d'algèbre linéaire

Proposition – Lemme des noyaux. Soient E un k-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E et $P \in k[X]$. On suppose que $P = P_1 \cdots P_r$ avec $P_i \wedge P_j = 1$ si $i \neq j$. On a alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u).$$

En particulier, si P est un polynôme annulateur de u, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u)$

Preuve. On a bien sûr $\sum_{i=1}^{r} \operatorname{Ker} P_i(u) \subset \operatorname{Ker} P(u)$ car $P_i \mid P$. On définit $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$. Comme les P_i sont premiers entre eux deux à deux, les Q_i sont premiers entre eux dans leur ensemble. On peut ainsi écrire $1 = \sum_{i=1}^{r} U_i Q_i$ pour des $U_i \in k[X]$.

Fin de la preuve

Or si $x \in \operatorname{Ker} P(u)$, on a $Q_i(u)(x) \in \operatorname{Ker} P_i(u)(x)$ et donc $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i = (U_i Q_i)(u)(x) \in \operatorname{Ker} P_i(u)$.

Montrons maintenant que la somme est directe. On écrit $\sum_{i=1}^{r} x_i = 0$ avec $x_i \in \operatorname{Ker} P_i(u)$. En appliquant $Q_i(u)$, on obtient $Q_i(u)(x_i) = 0$ puisque $Q_i(u)(x_j) = 0$ si $j \neq i$ (puisque $P_j \mid Q_i$). Par ailleurs, comme $Q_j(u)(x_i) = 0$ pour tout $j \neq i$, on en déduit que $x_i = \sum_{j=1}^{U} {}_j(u) Q_j(u)(x_i) = 0$.

Applications

Proposition – Critère de diagonalisabilité. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on a les équivalences

(i) Le polynôme minimal de u est scindé à racine simple
(ii) u admet un polynôme annulateur scindé à racine simple
(iii) u est diagonalisable

Application Soit E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Si F est un sous-espace de E stable par u alors u induit par restriction à F (resp. par passage au quotient) un endomorphisme **diagonalisable** u_F (resp. $\overline{u}$) de F (resp. E/F).

Exercice Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $u^q = u$.

Preuves

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. résulte du fait qu'un diviseur d'un polynôme scindé à racine simple est scindé à racine simple.
$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Soit $P = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r)$ un polynôme annulateur de u (avec $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$). Le lemme des noyaux assure que $E = \mathrm{Ker}\,(u - \alpha_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\,(u - \alpha_r)$. En choisissant alors une base de E formé d'une base de $\mathrm{Ker}\,(u - \alpha_1)$ puis d'une base de $\mathrm{Ker}\,(u - \alpha_2)$..., on obtient une base de diagonalisation de u.
$(iii) \Leftrightarrow (ii)$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les valeurs propres distincts de u, on lit sur une forme diagonale de u que $(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r)$ est un polynôme annulateur de u puisque

$$P(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \mathrm{diag}\,(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$$

pour tout polynôme $P \in k[X]$

Preuve. Si P annule u alors P annule u_F et $\overline{u}$ (vérifier que $P(\overline{u}) = \overline{P(u)}$).

Diagonalisabilité commune

Proposition – Codiagonalisabilité. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'endomorphismes de E telle que, pour tout i, f_i est diagonalisable. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que, pour tout i, la matrice de f_i dans $\mathscr{B}$ est diagonale si et seulement si les endomorphismes commutent deux à deux.

Preuve. **($\Rightarrow$)** évident **($\Leftarrow$)** Raisonnons par récurrence sur n. Le résultat est évident pour $n = 0$. Considérons l'endomorphisme f_1 et E_λ le sous-espace propre de f_1 associé à la valeur propre $\lambda \in k$. Comme les f_i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ commutent avec f_1, E_λ est stable par chacun des f_i qui induisent donc un endomorphisme $f_{i,\lambda}$ sur E_λ. Chacun des $f_{i,\lambda}$ est diagonalisable et l'hypothèse de récurrence permet de construire une base de E_λ dans laquelle les $f_{i,\lambda}$ est diagonalisable. Comme $E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f_1)} E_\lambda$ puisque f_1 est diagonalisable, on obtient en concaténant ces bases une base de E qui diagonalise les f_i pour $2 \leqslant i \leqslant n$ mais aussi f_1.

Diagonalisabilité et ordre fini

Proposition – Diagonalisabilité. Soit E un k-espace vectoriel et $u \in \mathrm{GL}(E)$ un automorphisme de E d'ordre fini n. On suppose que k est algébriquement clos et que $\mathrm{car} k = 0$ ou $\mathrm{car} k \wedge n = 1$. Alors u est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines n^{e} de l'unité.

Preuve. En effet, le polynôme $X^n - 1$ est scindé (puisque k est algébriquement clos) et à racine simple puisque la seule racine de $(X^n - 1)' = nX^{n-1}$ est 0 (puisque $n \neq 0$ dans k).

Proposition Soit G un groupe fini et V un G-module sur k algébriquement clos tel que $\mathrm{car} k = 0$ ou $\mathrm{car} k \wedge |G| = 1$.
Alors tous les éléments de G agissent sur V comme des endomorphismes diagonalisables dont les valeurs propres sont des racines $|G|^{\mathrm{e}}$ de l'unité.

Preuve. Par le théorème de Lagrange, on a $g^{|G|} = 1$ pour tout $g \in G$.

Application : groupes commutatifs

Corollaire Soit G un groupe commutatif fini, k un corps algébriquement clos tel que $\mathrm{car} k = 0$ ou $\mathrm{car} k \wedge |G| = 1$. Alors toutes les représentations irréductibles de G sur k sont de dimension 1 et tout G-module de dimension finie est semi-simple.

Preuve. Soit V une représentation de G sur k. Les automorphismes de G agissent sur V de façon diagonalisable et commutent deux à deux. Ils sont donc codiagonalisables. Chaque vecteur d'une base de diagonalisabilité commune engendre alors une droite qui est un sous-G-module simple (car de dimension 1) de V. On obtient ainsi que V est semi-simple.
De plus, si V est irréductible alors V est une droite.

Caractère linéaire

Définition – Caractère linéaire. Soit G un groupe. On appelle caractère linéaire de G à valeurs dans k un morphisme de groupe $\chi : G \to k^\times$.

Remarque – Représentation de dimension 1. Si V est un G-module de dimension 1 alors $\mathrm{GL}(V)$ s'identifie canoniquement à $k^\times$. En effet, l'application

$$\begin{cases} k^\times \longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ \lambda \longmapsto \lambda \mathrm{id}_V . \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

Ainsi toute représentation linéaire de G de dimension 1 détermine un caractère linéaire de G. Inversement, si χ est un caractère linéaire de G, l'action de G sur k donnée par

$$\begin{cases} G \times k \longrightarrow k \\ (g, \lambda) \longmapsto \chi(g)\lambda \end{cases}$$

détermine une structure de G-module sur k. Le morphisme de groupes associé est donnée par $\chi : G \to k^\times = \mathrm{GL}_1(k)$.

Représentation de dimension 1

On vient de voir qu'un caractère linéaire et une représentation de G de dimension 1 c'est la même chose. Prolongeons cette identification

Remarque – Isomorphisme de représentation de dimension 1. Si V et W sont deux G-modules isomorphes de dimension 1 associé respectivement à χ et χ' alors V et W sont G-isomorphes si et seulement si $\chi = \chi'$.
En effet, si $f : V \to W$ est un G-isomorphisme et v une base de V, on a alors

$$\chi(g)f(e_1) = f(\chi(g)e_1) = f(ge_1) = gf(e_1) = \chi'(g)f(e_1).$$

Inversement si $\chi = \chi'$, on considère v une base de V et w une base de W. Vérifions que l'unique application linéaire f de V dans W envoyant v sur w est un G-isomorphisme. Elle est évidemment bijective et k-linéaire. Pour $x \in V$, on a

$$f(gx) = f(\chi(g)x) = \chi(g)f(x) = \chi'(g)f(x) = gf(x).$$

Un premier bilan

Finalement, il y a autant de classe d'isomorphismes de représentations de G de dimension 1 (sur k) que de caractères linéaires de G (à valeurs dans k).
Par ailleurs, une représentation de dimension 1 est bien sûr simple.
Ainsi, on peut déterminer ainsi un certain nombre de représentations simples de G. Combien ?

Groupe dérivé

Définition – Groupe dérivé. Soit G un groupe. On définit le groupe dérivée de G noté $D(G)$ ou $[G, G]$ comme le sous-groupe engendré par les commutateurs c'est-à-dire les éléments de la forme $ghg^{-1}h^{-1}$ pour $g, h \in G$: on a

$$D(G) = \langle ghg^{-1}h^{-1}, \quad g, h \in G \rangle$$

$D(G)$ est un sous-groupe distingué de G.

Remarque – Groupe dérivé et abélianisé. On a $D(G) = \{1\}$ si et seulement si $ghg^{-1}h^{-1} = 1$ pour tous g, h si et seulement si $gh = hg$ pour tous g, h. Ainsi $D(G) = \{1\}$ si et seulement si G est commutatif.

Remarque – Abélianisé. Le groupe $G^{\mathrm{ab}} := G/D(G)$ est appelé abélianisé de G. C'est un groupe commutatif. En effet, on désigne par $\pi : G \to G/D(G)$ la surjection canonique et si $x = \pi(g)$ et $y = \pi(h)$ sont des éléments de G^{ab}, on a $xyx^{-1}y^{-1} = \pi(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$ car $ghg^{-1}h^{-1} \in D(G)$.

P.U. de l'abélianisé

Proposition – Propriété universelle de l'abélianisé. Pour tout groupe abélien A et tout morphisme de groupes $f : G \to A$, il existe un unique morphisme de groupes $\overline{f} : G^{\mathrm{ab}} \to A$ tel que $\overline{f} \circ \pi = f$ où $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ est la surjection canonique

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ G^{\mathrm{ab}} \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"] & \end{tikzcd}$$

Preuve. Comme A est abélien, on a $f(ghg^{-1}h^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1}f(h)^{-1} = f(g)f(g)^{-1}f(h)f(h)^{-1} = 1$. Ainsi $D(G) \subset \mathrm{Ker}\, f$ et la propriété universelle du quotient donne le résultat.

Compléments

Exercice – Sous-groupe dérivé. En déduire que $D(G)$ est le plus petit sous-groupe H de G tel que G/H est commutatif.
Montrer aussi que tout sous-groupe H de G contenant $D(G)$ est distingué et que le quotient G/H est commutatif. En déduire que G/H est commutatif si et seulement si $D(G) \subset H$.
Soient G, H deux groupes et $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que $f(D(G)) \subset D(H)$. En déduire un morphisme $\overline{f} : G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$.

Exemple – Groupe linéaire et groupe symétrique. Le groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.
Sauf si $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$, le groupe dérivé de $\mathrm{GL}(V)$ est $\mathrm{SL}(V)$.

Applications

Application – Caractère linéaire. Soit G un groupe. On note $\pi : G \to G^{\mathrm{ab}}$ la surjection canonique. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères linéaires de G à valeurs dans k et $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$ l'ensemble des caractères linéaires de G à valeurs dans k. L'application

$$\begin{cases} \widehat{G^{\mathrm{ab}}} \longrightarrow \widehat{G} \\ \chi \longmapsto \chi \circ \pi \end{cases}$$

est une bijection dont la bijection réciproque est donnée par $\chi \mapsto \overline{\chi}$ ($k^\times$ est commutatif).

Remarque Si $\chi : G \to k^\times$ et $\chi' : G \to k^\times$ sont deux caractères linéaires, l'application $\chi\chi' : g \mapsto \chi(g)\chi'(g)$ est un caractère linéaire de G (car $k^\times$ est commutatif). On munit ainsi $\widehat{G}$ d'une structure de groupe (sous-groupe des fonctions de G dans $k^\times$). L'élément neutre est le caractère trivial ($\chi(g) = 1$ pour tout g). Et $\chi^{-1} : g \mapsto \chi(g)^{-1} = \chi(g^{-1})$.
La bijection ci-dessus est en fait un isomorphisme de groupes.

Groupe cyclique

D'après ce qui précède, il suffit de déterminer $\widehat{G}$ lorsque G est un groupe abélien. Dans la suite, on va s'intéresser d'un groupe abélien **fini**. Commençons par le cas d'un groupe cyclique.

Proposition – Groupe cyclique d'ordre n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ou tel que $\mathrm{car} k \wedge n = 1$. Le groupe $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Preuve. D'après la propriété universelle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, se donner un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $k^\times$ revient à se donner un élément x de $k^\times$ (l'image de $\overline{1}$) tel que $x^n = 1$ c'est-à-dire une racine du polynôme $X^n - 1 \in k[X]$.
Or ce polynôme est scindé (puisque k est algébriquement clos) et à racines simples (puisque $(X^n - 1)' = nX^{n-1}$ a 0 comme unique racine (puisque $n \neq 0$ dans k)).

Fin de la preuve

Finalement on a une bijection

$$\begin{cases} \widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \longrightarrow \{\text{Racines de } X^n - 1\} \\ \quad \chi \quad \longmapsto \chi(\overline{1}) \end{cases}$$

où $\{\text{Racines de } X^n - 1\}$ a exactement n éléments.
Par ailleurs, l'ensemble des racines de $X^n - 1$ forme un sous-groupe de $k^\times$ qui est d'ordre n et donc fini et cyclique. De plus, la bijection ci-dessus est un morphisme de groupes. Ainsi $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Application

Exercice Soient G et H deux groupes. Montrer que les applications

$$\begin{cases} \widehat{G \times H} \longrightarrow \widehat{G} \times \widehat{H} \\ \quad \chi \quad \longmapsto (g \mapsto \chi(g,1), h \mapsto \chi(1,h)) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \widehat{G} \times \widehat{H} \longrightarrow \widehat{G \times H} \\ (\phi, \psi) \longmapsto (g,h) \mapsto \phi(g)\psi(h) \end{cases}$$

sont des isomorphismes de groupes inverses l'un de l'autre.

En admettant le résultat suivant : tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit de groupes cycliques, démontrer que si G est un groupe abélien fini alors $\widehat{G} \simeq G$ (toujours si k est algébriquement clos et $\mathrm{car} k = 0$ ou $\mathrm{car} k \wedge |G| = 1$).

Dénombrement

Dans la suite, on va montrer de manière élémentaire que, lorsque G est un groupe abélien fini, on a l'égalité $|G| = |\widehat{G}|$ (toujours si k est algébriquement clos et $\mathrm{car} k = 0$ ou $\mathrm{car} k \wedge |G| = 1$).

Remarque – Fonctorialité. Soient G et G' deux groupes et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. L'application

$$f^* : \begin{cases} \widehat{G'} \longrightarrow \widehat{G} \\ \chi \longmapsto \chi \circ f \end{cases}$$

est un morphisme de groupes.
De plus, on a ${\mathrm{id}_G}^* = \mathrm{id}_{\widehat{G}}$ et $(f' \circ f)^* = f^* \circ f'^*$ où $f' : G' \to G''$ est un morphisme de groupes.

Caractère linéaire et prolongement

Proposition – Sous-groupe. On suppose que k est algébriquement clos. Soit G un sous-groupe abélien fini et H un sous-groupe (donc distingué) de G. On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} G/H \longrightarrow 0$$

La suite $$0 \longrightarrow \widehat{G/H} \xrightarrow{\pi^*} \widehat{G} \xrightarrow{i^*} \widehat{H} \longrightarrow 0$$

est alors aussi exacte.

Preuve

La propriété universelle du quotient (pour les groupes) dit précisément que π^* est injective et d'image l'ensemble des caractères linéaires de G triviaux sur H ce qui est précisément le noyau de i^* (puisque i^* est l'application de restriction à H).

Il reste donc à montrer la surjectivité de i^*. Raisonnons par récurrence sur $|G/H|$. Si $|G/H| = 1$, on a $G = H$ et l'application $i^* = \mathrm{id}_{\widehat{G}}$ est évidemment bijective dans ce cas. Considérons à présent H un sous-groupe d'indice $\ell > 1$ et $x \notin H$. Soit j le plus petit entier m (strictement positif tel que) $x^m \in H$ (c'est-à-dire que j est l'ordre de $\pi(x)$ dans G/H).

Montrons alors que tout caractère linéaire de H se prolonge en un caractère linéaire de $\langle H, x\rangle$. Soit $\chi \in \widehat{H}$, comme k est algébriquement clos, il existe $t \in k$ tel que $t^j = \chi(x^j)$ ($\chi(x^j)$ admet une racine j^{e}).

Fin de la preuve

On va alors montrer que l'application

$$\chi' : \begin{cases} \langle H, x \rangle & \longrightarrow k^\times \\ hx^\ell & \longmapsto \chi(h)t^\ell \end{cases}$$

est bien définie et que c'est un caractère linéaire de $\langle H, x \rangle$.
Si elle est bien définie, c'est évidemment un morphisme de groupes.
Il suffit de vérifier qu'elle est bien définie. Si $hx^\ell = h'x^{\ell'}$, on a $hh'^{-1} = x^{\ell'-\ell} \in H$. Ainsi $\ell' - \ell = jn$ et donc $\chi(hh'^{-1}) = \chi(x^{\ell'-\ell}) = \chi(x^j)^n = t^{jn} = t^{\ell'-\ell}$. Et finalement $\chi(h)t^\ell = \chi(h')t^{\ell'}$.
On applique alors l'hypothèse de récurrence au sous-groupe $\langle H, x \rangle$ qui est d'indice strictement plus petit que H et on peut prolonger χ' en un caractère de G. Finalement i^* est bien surjective.

Et lorsque G n'est pas fini

Remarque Dans la proposition précédente, on peut retirer l'hypothèse G fini à l'aide du lemme de Zorn.

En effet, soit $\chi \in \widehat{H}$. On considère l'ensemble X formé des couples (H', χ') où H' est un sous-groupe de G contenant H et $\chi' : H' \to k^\times$ un morphisme de groupes prolongeant χ.

On munit alors X de l'ordre $(H', \chi') \leqslant (H'', \chi'')$ si $H' \subset H''$ et $\chi''_{|H'} = \chi'$.

On obtient ainsi un ensemble non vide (X contient (H, χ)) et inductif : si (H_t, χ_t) est une famille totalement ordonnée de H alors $\cup_t H_t = H'$ est un sous-groupe de G contenant H et on pose $\chi'(h') = \chi'_t(h')$ si $h' \in H_t$. On définit bien un morphisme de groupes ainsi.

Et lorsque G n'est pas fini

Par le lemme de Zorn, X admet un élément maximal (H', χ'). Montrons que $H' = G$. Supposons qu'il existe $x \in G \smallsetminus H'$. On distingue alors deux cas

- 0 est le seul entier m tel que $x^m \in H'$. On choisit alors $t \in k^\times$ quelconque.
- Sinon, il existe un plus petit entier $m > 0$ tel que $x^m \in H'$ qu'on appelle j. On choisit alors $t \in k^\times$ tel que $\chi'(x^j) = t^j$.

Comme précédemment, on montre alors que l'application

$$\chi'' : \begin{cases} \langle H, x \rangle & \longrightarrow k^\times \\ hx^\ell & \longmapsto \chi'(h)t^\ell \end{cases}$$

est bien définie et que c'est un caractère linéaire de $\langle H, x \rangle$ ce qui contredit la maximalité de (H', χ').

Contre-exemples

Remarque – Lorsque G n'est pas abélien. Si G n'est pas abélien et $H \lhd G$ alors i^* n'est pas forcément surjective. Par exemple si $G = \mathfrak{S}_3$ et $H = \mathfrak{A}_3$, le caractère linéaire donnée par $(1,2,3)^\ell \mapsto j^\ell$ (où $j \in \mathbb{C}^\times$ est une racine cubique primitive de l'unité) ne se prolonge pas à $\mathfrak{S}_3$.
Cela résulte du fait que l'application $\bar{i} : H^{\mathrm{ab}} \to G^{\mathrm{ab}}$ n'est pas nécessairement injective.
Démontrer que i^* est surjective si et seulement si $\bar{i}$ est injective.

Remarque – Lorsque k n'est pas algébriquement clos. Si k n'est pas algébriquement clos, i^* n'est pas forcément surjective. Par exemple, on considère l'inclusion $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et le morphisme $\chi : 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^\times$ donné par $\chi(\bar{2}) = -1 \in \mathbb{R}^\times$ et $\chi(0) = 1$. Alors χ ne se prolonge pas à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Applications

Corollaire Soit G un groupe fini et k un corps algébriquement clos vérifiant $\mathrm{car} k = 0$ ou $\mathrm{car} k \wedge |G| = 1$. On a $|G| = |\widehat{G}|$.

Preuve. On raisonne par récurrence sur le cardinal de G. On a vu que le résultat est vrai si G est cyclique. Si G n'est pas cyclique et $1 \neq x \in G$ alors $\{1\} \neq \langle x \rangle \neq G$ est un sous-groupe strict et non trivial de G. Avec $H = \langle x \rangle$, on a alors $|\widehat{G}| = |\widehat{H}||\widehat{G/H}|$ c'est la proposition précédente. Par ailleurs, par hypothèse de récurrence, on a $|H| = |\widehat{H}|$ et $|\widehat{G/H}| = |G/H|$ et donc $|\widehat{G}| = |H||G/H| = |G|$.

Bilan

Soit G un groupe fini et k un corps algébriquement clos vérifiant $\mathrm{car} k = 0$ ou $\mathrm{car} k \wedge |G| = 1$.

Il y a $|G/[G,G]|$ classes d'isomorphismes de représentations de G (sur k) de dimension 1 qui sont (évidemment) simples.

Si G est abélien alors toutes les représentations de G (sur k) sont semi-simples. Les représentations simples de G sont toutes de dimension 1 et il y a $|G|$ classes d'isomorphismes de représentations simples.