Algèbre M1 Cours 12

Caractère

7 Décembre 2010

Programme

Aujourd'hui, on va étudier les représentations d'un groupe fini sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Le but est d'en donner le nombre (le nombre de classe de conjugaison de G) et d'obtenir des relations numériques sur leur dimension.
L'un des résultats cruciaux du jour sera l'énoncé de semi-simplicité des représentations de G sur un corps de « bonne » caractéristique qui s'obtient par une méthode de moyennage du dix-neuvième siècle.
Les autres ingrédients sont l'utilisation des caractères qui contiennent toutes l'informations en caractéristique nulle.

Caractère

Définition – Caractère d'une représentation linéaire. Soit G un groupe et V une représentation de dimension finie de G sur k. On définit le caractère de V comme la fonction

$$\chi_V : \begin{cases} G \longrightarrow k \\ g \longmapsto \chi_V(g) := \mathrm{tr}\,(\rho_V(g)) \end{cases}$$

Théorème Soit G un groupe **fini** et k un corps de caractéristique **nulle**. Alors deux représentations (de dimension finie) de G sur k sont isomorphes si et seulement si elles ont les mêmes caractères.

Preuve. **(⇒)** Soient $f : V \to W$ un G-isomorphisme et $\mathscr{B}$ une base de V. On a donc $\rho_W(g) = f\rho_V(g)f^{-1}$. Ainsi pour tout $g \in G$, la matrice de $\rho_V(g)$ dans la base $\mathscr{B}$ coïncide avec la matrice de $\rho_W(g)$ dans la base $f(\mathscr{B})$.
(⇐) Le but de la séance va être de démontrer la réciproque.

Calcul de caractères

Lemme – Somme directe. Soient V et W deux représentations linéaires de dimension finie de G. On a alors

$$\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W \qquad \text{et} \qquad \chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$$

Preuve. En concaténant une base de V à une base de W, on obtient une base de $V \oplus W$ dans laquelle la matrice de $\rho_{V\oplus W}(g)$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} \rho_V(g) & \\ & \rho_W(g) \end{bmatrix}$$

Dans le cours sur le produit tensoriel, on a vu comment obtenir la matrice de $\rho_{V\otimes W}(g) = T(\rho_V(g), \rho_W(g))$ à partir de celle de $\rho_V(g)$ et $\rho_W(g)$:

$$\begin{bmatrix} \rho_V(g)_{11}\rho_W(g) & \cdots & \rho_V(g)_{1n}\rho_W(g) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_V(g)_{n1}\rho_W(g) & \cdots & \rho_V(g)_{nn}\rho_W(g) \end{bmatrix}$$

Calcul de caractères (suite)

Lemme – Dualité et morphisme. Soient V et W deux représentations linéaires de dimension finie de G. On a alors

$$\forall g \in G, \quad \chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \qquad \text{et} \qquad \chi_{\mathrm{Hom}_k(V,W)} = \chi_{V^*}\chi_W$$

Si χ est un caractère linéaire de G, on a alors $\chi_\chi = \chi$. En particulier la fonction de G dans k constante et égale à 1 est le caractère de la représentation triviale. On l'appelle le caractère trivial.

Preuve. Soit $\mathscr{B}$ une base de V. Par définition, on a $\rho_{V^*}(g) = {}^t\rho_V(g^{-1})$. La matrice de $\rho_{V^*}(g)$ dans la base duale de $\mathscr{B}$ est la transposée de celle de $\rho_V(g^{-1})$ dans la base $\mathscr{B}$.

On a vu que $\mathrm{Hom}_k(V, W) \overset{G\text{-mod.}}{\simeq} V^* \otimes W$.

Exercice En calculant la matrice de $\rho_{\mathrm{Hom}_k(V,W)}(g)$ dans la base des E_{ij}, retrouver l'égalité sur le caractère de $\mathrm{Hom}_k(V, W)$.

Un exercice

Exercice – Caractère et dimension. Que vaut $\chi_V(1_G)$. En déduire que la formule $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$ est une généralisation de la formule $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$.

Fonction centrale

Définition – Fonction centrale. Soit $f : G \to k$ une application. On dit que f est une fonction centrale sur G si $f(g) = f(g')$ dès que g et g' sont conjugués (c'est-à-dire il existe $h \in G$ tel que $g' = hgh^{-1}$). Autrement dit, une fonction centrale est une fonction constante sur chacune des classes de conjugaison de G ou encore une fonction qui passe au quotient par la relation d'équivalence $\sim$ de conjugaison.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & k \\ G/\sim \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

L'ensemble des fonctions centrales forme un espace vectoriel dont la dimension est le nombre de classes de conjugaison de G (si G est fini).

Caractère et fonction centrale

Proposition Tout caractère est une fonction centrale.

Preuve. Cela résulte simple de la relation $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$. En effet, on a $\rho_V(g') = \rho_V(h)\rho_V(g)\rho_V(h^{-1})$. En calculant la trace, on obtient le résultat.

Dans la suite, on va comparer l'espace vectoriel des fonctions centrales avec l'espace vectoriel engendré par les caractères. Pour cela, on va utiliser un peu d'algèbre bilinéaire ainsi que la notion de point fixe.

Forme bilinéaire symétrique

À partir de maintenant G désigne un groupe fini et k un corps dont la caractéristique ne divise pas l'ordre du groupe ($\mathrm{car} k = 0$ ou $\mathrm{car} k \wedge |G| = 1$).

Sur l'espace vectoriel $\mathscr{F}(G, k)$ des fonctions de G dans k, on définit la forme bilinéaire

$$\langle f, f' \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) f'(g^{-1})$$

C'est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée qui induit par restriction une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur l'espace vectoriel des fonctions centrales.

Définition – Forme bilinéaire non dégénérée. Soit $b : V \times V \to k$ une forme bilinéaire symétrique. Elle est dit non dégénérée si pour tout $0 \neq x \in V$, il existe $y \in V$ tel que $b(x, y) \neq 0$. C'est équivalent à l'injectivité de l'application

$$\begin{cases} V \longrightarrow V^* \\ x \longmapsto (y \mapsto b(x, y)) \end{cases}$$

Preuve

Preuve. Comme $g \mapsto g^{-1}$ est une bijection de G, on voit que

$$\langle f, f' \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) f'(g^{-1}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g^{-1}) f'(g) = \langle f', f \rangle_G$$

Si $f(g) \neq 0$, on a alors $\langle f, \delta_{g^{-1}} \rangle = |G|^{-1} f(g) \neq 0$. Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ est non dégénérée.

Si f est une fonction centrale non nulle alors il existe $g \in G$ tel que $f(g) \neq 0$. On note C la classe de conjugaison de g^{-1} et on considère la fonction centrale 1_C valant 1 sur C et 0 partout ailleurs. Or C est formée des inverses des éléments de la classe de conjugaison de G. On en déduit que

$$\langle f, 1_C \rangle = \frac{|C|}{|G|} f(g)$$

Comme $|C| \mid |G|$ et donc $\mathrm{car} k \nmid |C|$, on obtient que $\langle f, 1_C \rangle_G \neq 0$.

Point fixe

Définition Soit V une représentation linéaire de G. On note

$$V^G := \{v \in V, \quad \forall g \in G, \quad gv = v\}$$

l'ensemble des points fixes sous G. C'est la composante isotypique de V associé à la représentation triviale.

Exemple – Algèbre du groupe. Dans l'algèbre du groupe $k[G]$, on a $k[G]^G$ est la droite engendrée par

$$e = \sum_{g \in G} g\,.$$

En effet, si $h \in G$ alors la multiplication à gauche par h est une bijection de G et donc $he = e$. Ainsi $e \in k[G]^G$.
Inversement, si $v = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in k[G]^G$, on a $hv = v$ et donc en comparant le coefficient en h de hv (qui est λ_1) et celui de v (qui est λ_h), on obtient $\lambda_1 = \lambda_h$ pour tout $h \in H$ et $v = \lambda_1 e$.
De plus, on a $e^2 = \sum_{g \in G} ge = \sum_{g \in G} e = |G|e$ et $\varepsilon := |G|^{-1}e$ est un idempotent central de $k[G]$.

Points fixes et algèbre de groupe

On peut alors écrire dans l'algèbre de groupe, la décomposition en somme directe de sous-G-module

$$k[G] = k[G]\varepsilon \oplus k[G](1-\varepsilon)$$

En effet, $k[G]\varepsilon$ et $k[G](1-\varepsilon)$ sont évidemment des sous-G-modules.
De plus, si $x \in k[G]$, on a $x = x\varepsilon + x(1-\varepsilon)$ et si $x \in k[G]\varepsilon \cap k[G](1-\varepsilon)$ alors $x\varepsilon = x$ et $x(1-\varepsilon) = x$ (car $(1-\varepsilon)^2 = 1-\varepsilon$). Ainsi $x = x\varepsilon(1-\varepsilon) = 0$.
Par ailleurs, $k[G]\varepsilon = k[G]^G$ puisque si $x = \sum_{g\in G} \lambda_g g$ alors

$$x\varepsilon = \sum_{g\in G} \lambda_g g\varepsilon = \left(\sum_{g\in G} \lambda_g\right)\varepsilon$$

puisque $g\varepsilon = \varepsilon$.
Ainsi $k[G]^G$ admet un supplémentaire G-stable.

Point fixe et algèbre de groupe

Exercice – Augmentation. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} k[G] & \longrightarrow k \\ \sum_{g \in G} \lambda_g g & \longmapsto \sum_{g \in G} \lambda_g \end{cases}$$

est un morphisme surjectif de k-algèbres et un morphisme de G-module (pour l'action triviale de G sur k). On dit que φ est le morphisme d'augmentation de G.

Montrer que $k[G](1-\varepsilon) = \operatorname{Ker}\varphi$ (on pourra vérifier que $k[G](1-\varepsilon)$ est un hyperplan (il admet un supplémentaire qui est une droite) et que $\varphi(x(1-\varepsilon)) = \varphi(x) - \varphi(x\varepsilon) = 0$ à l'aide du calcul de $x\varepsilon$ ci-dessus). On pourra aussi écrire un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$ sous la forme $x(1-\varepsilon)$. On dit que $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'idéal d'augmentation de kG.

Vérifier que $\operatorname{Ker}\varphi$ est le seul supplémentaire G-stable de $k[G]^G$ (si x est dans un tel supplémentaire G-stable alors gx aussi pour tout G et donc εx aussi. Or $\varepsilon x = x\varepsilon = \varphi(x)\varepsilon$ et donc $\varphi(x) = 0$).

Représentation et morphisme d'algèbres

Soit (V, ρ_V) une représentation linéaire de G. On considère l'application

$$\widetilde{\rho_V} : \begin{cases} k[G] & \longrightarrow \mathrm{End}_k(V) \\ x = \sum_{g \in G} \lambda_g g & \longmapsto \sum_{g \in G} \lambda_g \rho_V(g) \end{cases}$$

C'est un morphisme de k-algèbres.

Inversement, soit V un espace vectoriel et $\rho : k[G] \to \mathrm{End}_k(V)$ un morphisme d'algèbres. Comme $g \in G$ est un élément inversible de $k[G]$ (d'inverse g^{-1}), $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$. Ainsi par restriction à G, on obtient un morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$.

Finalement, il revient au même de se donner une représentation V de G ou un morphisme d'algèbres de $k[G]$ dans $\mathrm{GL}(V)$.

On notera ρ_V (plutôt que $\widetilde{\rho_V}$) le prolongement à $k[G]$ du morphisme structurel $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$.

Application I

Proposition – Points fixes. Soit V une représentation linéaire de G. Alors V^G est un sous-G-module qui admet un unique supplémentaire G-stable.
De plus, si $\mathrm{car} k = 0$ alors $\dim_k V^G = \langle \chi_V, \mathbf{1} \rangle_G$.

Preuve. Comme ε est un idempotent, $\rho_V(\varepsilon)$ est un projecteur de V. De plus, $\varepsilon \in Z(k[G])$ donc $\rho_V(\varepsilon)\rho_V(g) = \rho_V(g)\rho_V(\varepsilon)$ pour tout $g \in G$. Ainsi $\rho_V(\varepsilon)$ est un G-morphisme.
Montrons que l'image de ε est V^G. Ainsi on aura $V = V^G \oplus \mathrm{Ker}\, \rho_V(\varepsilon)$ qui sera un décomposition en somme directe de G-modules.
Si $gv = v$ pour tout $g \in G$, alors $v = |G|^{-1} \sum_{g \in G} gv = \rho_V(\varepsilon)(v)$.
Inversement si $v \in \mathrm{Im}\, \rho_V(\varepsilon)$ alors, il existe $w \in V$ tel que

$$\rho_V(g)v = \rho_V(g)\rho_V(\varepsilon)(w) = \rho_V(g\varepsilon)(w) = \rho_V(\varepsilon)(w) = v.$$

Si W est un sous-G-module de V supplémentaire de V^G alors pour $w \in W$, on a $\rho_V(\varepsilon)(w) \in W \cap V^G = \{0\}$. Ainsi $W \subset \mathrm{Ker}\, \rho_V(\varepsilon)$...

Fin de la preuve

Pour un projecteur $p \in \mathrm{End}_k(V)$, on a $\mathrm{tr}\,(p) = \mathrm{rg}(p)1_k$. Si $\mathrm{car}k = 0$, cette égalité se lit alors dans $\mathbb{N} \subset k$. Pour $p = \rho_V(\varepsilon)$, on obtient alors

$$\mathrm{tr}\,(\rho_V(\varepsilon)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{tr}\,(\rho_V(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) = \langle \chi_V, \mathbf{1}\rangle\,.$$

Application II

Proposition – Semisimplicité. Toute représentation de G est semisimple.

Preuve. Soit V une représentation de G et W un sous-G-module de V. On considère $p : V \to V$ un projecteur d'image W et on pose

$$q := \rho_{\mathrm{End}_k(V)}(\varepsilon)(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g) \circ p \circ \rho_V(g^{-1})$$

C'est un G-endomorphisme de V.

Montrons que q est un projecteur d'image W.

On commence par remarquer que $p \circ \rho_V(g^{-1})(V) \subset W$ et donc $\rho_V(g) \circ p \circ \rho_V(g^{-1})(V) \subset W$ pour tout $g \in G$ (puisque W est G-stable). Ainsi $\mathrm{Im}\, q \subset W$.

Fin de la preuve

Considérons à présent $v \in W$. Comme $\rho_V(g^{-1})(v) \in W$ (puisque W est un G-module), on a

$$q(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_V(g)p(\rho_V(g^{-1})(v)) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_V(g)(\rho_V(g^{-1})(v)) = v$$

Ainsi $q_{|W} = \mathrm{id}_W$ et $W \subset \mathrm{Im}\, q$.
Finalement $W = \mathrm{Im}\, q$ et $q_{|\mathrm{Im}\, q} = \mathrm{id}$. Ainsi q est un projecteur d'image W et on a $\mathrm{Ker}\, q$ qui est un supplémentaire G-stable (puisque q est un G-morphisme) de W.

Autre preuve de la semisimplicité

Exercice – Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère une représentation linéaire V de G sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et W un sous-G-module de V. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire (hermitien si on est sur $\mathbb{C}$).
Construire un produit scalaire (hermitien) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ G-invariant (on pourra considérer $\rho(\varepsilon)(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ où ρ est l'action sur les formes bilinéaires (resp. les formes sesquilinéaires) sur V).
Montrer que l'orthogonal de W pour ce nouveau produit scalaire fournit un supplémentaire G-stable de W.

Conséquences

Proposition Tout caractère est somme de caractères (de représentations) irréductibles.
Le sous-espace vectoriel engendré par les caractères est donc engendré par les caractères irréductibles.

Preuve. Soit V une représentation de G de dimension finie. C'est évidemment un G-module de type fini (une base de V est une partie génératrice en tant que G-module) qui est semi-simple d'après ce qui précède. On peut donc écrire $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ et donc $\chi_V = \sum_{i=1}^{n} \chi_{V_i}$.

Conséquences (suite)

Proposition Soient V et W deux représentations linéaires de G de dimension finie.
On suppose que V et W sont simples et non isomorphes alors $\langle \chi_V, \chi_W \rangle_G = 0$.
Si V est simple et $\mathrm{car} k = 0$ alors $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G \neq 0$.
Et si V et simple, $\mathrm{car} k = 0$ et k algébriquement clos alors $\langle \chi_V, \chi_V \rangle_G = 1$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
\langle \chi_V, \chi_W \rangle_G &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_W(g^{-1}) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi_V(g) \chi_{W^*}(g) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi_{V \otimes W^*}(g) \\
&= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi_{\mathrm{Hom}_k(W,V)}(g) = \langle \chi_{\mathrm{Hom}_k(W,V)}, \mathbf{1} \rangle_G \\
&= \dim_k \mathrm{Hom}_k(W, V)^G 1_k = \dim_k \mathrm{Hom}_G(W, V) 1_k \,.
\end{aligned}$$

Les résultats s'obtiennent alors directement comme conséquences du lemme de Schur.

Conséquences (suite)

Proposition Toute représentation irréductible de G est de dimension finie.
Si $\mathrm{car} k = 0$ alors deux représentations irréductibles non isomorphes ont des caractères distincts.
Si $\mathrm{car} k = 0$ les caractères irréductibles forment une famille libre de l'espace vectoriel des fonctions centrales.

Preuve. Si V est une représentation irréductible de G et $0 \neq v \in V$ alors $\langle gv,\ g \in G\rangle_{\mathrm{ev}}$ est un sous-G-module non nul de V et donc égal à V. Ainsi V est de dimension finie.
Soient V et W deux représentations irréductibles non isomorphes de G vérifiant $\chi_V = \chi_W$. On a $0 = \langle \chi_V, \chi_W\rangle_G = \langle \chi_V, \chi_V\rangle_G \neq 0$.
Considérons une relation de dépendance linéaire $\sum \lambda_i \chi_i = 0$ où $\chi_i \neq \chi_j$ si $i \neq j$. On a alors

$$\langle \sum \lambda_i \chi_i, \chi_j\rangle_G = \sum \lambda_i \langle \chi_i, \chi_j\rangle_G = \lambda_j \langle \chi_j, \chi_j\rangle_G$$

puisque $\langle \chi_i, \chi_j\rangle_G = 0$ si $i \neq j$. Comme $\langle \chi_j, \chi_j\rangle_G \neq 0$, on en déduit que $\lambda_j = 0$.

Nombre fini de simples

Corollaire En caractéristique nulle, le nombre de représentations simples deux à deux non isomorphes est inférieur ou égal au nombre de classes de conjugaison de G.

Preuve. Le nombre de représentations simples deux à deux non isomorphes s'identifie au nombre de caractères irréductibles de G qui forment une famille libre de l'espace des fonctions centrales de G dans k qui est un espace de dimension le nombre de classes de conjugaison de G.

La réciproque

Remarque – Représentation de dimension finie. Comme une représentation simple de G est de dimension finie, toute somme directe finie de G-modules simples est de dimension finie. Inversement, toute représentation de dimension finie est évidemment de type fini. De plus, elle est semi-simple. Elle est donc somme directe finie de représentations simples.

Corollaire On suppose $\mathrm{car} k = 0$. Deux représentations linéaires de dimension finie de G qui ont même caractère sont isomorphes.

Preuve. On note $V_1, \ldots, V_s$ les représentations irréductibles de G. On peut écrire $V = {V_1}^{n_1} \oplus \cdots \oplus {V_s}^{n_s}$ et $W = {V_1}^{m_1} \oplus \cdots \oplus {V_s}^{m_s}$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{s} n_i \chi_{V_i} = \chi_V = \chi_W = \sum_{i=1}^{s} m_i \chi_{V_i}$$

En prenant le produit scalaire avec χ_{V_i}, on obtient que $n_i \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle = m_i \langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle$; puis $n_i = m_i$. Ainsi V et W sont isomorphes.

Si k algébriquement clos

On suppose à présent que $\mathrm{car} k = 0$ et k algébriquement clos. On va montrer que dans ce cas les caractères irréductibles forment une base de l'espace vectoriel des fonctions centrales.

Lemme – L'argument crucial. Soit f une fonction centrale orthogonale à tous les caractères irréductibles. Alors f est nulle.

Preuve. Soit f une fonction centrale. On considère alors $x = \sum_{g \in G} f(g^{-1})g \in k[G]$. Comme f est une fonction centrale, l'application $g \mapsto f(g^{-1})$ aussi. On a donc $hxh^{-1} = x$ pour tout $h \in H$ puisque $f(g^{-1}) = f(hg^{-1}h^{-1})$ et que $g \mapsto hgh^{-1}$ est une bijection de G. Ainsi x est dans le centre de $k[G]$.

Fin de la preuve

On en déduit que pour toute représentation V de G, $\rho_V(x)$ est un G-morphisme de V dans lui-même. Si, de plus, V est irréductible, $\rho_V(x)$ est une homothétie (c'est lemme de Schur). Le rapport λ est alors donné par

$$\lambda = \frac{1}{\dim V}\mathrm{tr}\,(\rho_V(x)) = \frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G} f(g^{-1})\chi_V(g) = \frac{|G|}{\dim V}\langle f, \chi_V\rangle = 0$$

Ainsi x agit sur V comme 0 pour toute représentation irréductible V de G.

Comme toute représentation de dimension finie est semisimple, on en déduit que $\rho_V(x) = 0$ pour toute représentation de dimension finie V. En particulier, pour $V = k[G]$, on obtient que $\rho_{k[G]}(x) = 0$. En calculant, l'image de 1, on obtient $x = 0$.

Le résultat

Proposition Soit k un corps algébriquement de caractéristique nulle et G un groupe fini. Alors les représentations de G sont semisimples et le nombre de représentations irréductibles de G deux à deux non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

Preuve. Il suffit de montrer que les caractères irréductibles forment une famille génératrice de l'espace vectoriel des fonctions centrales. On note $V_1, \ldots, V_s$ une famille de représentants des classes d'isomorphismes des G-modules simples. Pour f une fonction centrale, on considère la fonction centrale

$$f - \sum_{i=1}^{s} \langle f, \chi_{V_i} \rangle_G \chi_{V_i}$$

Elle est orthogonale à tous les caractères irréductibles puisque $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_i} \rangle_G = 1$ et donc nulle. Ainsi f est bien dans l'espace engendré par les caractères irréductibles.

Quelques remarques

Remarque La décomposition d'une fonction centrale dans la base des caractères irréductibles se fait alors avec le produit scalaire :

$$f = \sum_{i=1}^{s} \langle f, \chi_{V_i} \rangle_G \chi_{V_i}$$

En particulier, si $f = \chi$ est le caractère d'une représentation linéaire, on a $\langle \chi, \chi_{V_i} \rangle_G = n_i$ est la multiplicité de V_i dans V. En effet, $\chi = \sum_{i=1}^{s} n_i \chi_{V_i}$.

Exercice Dans la preuve du résultat crucial, où a servi l'hypothèse que k est algébriquement clos ?

Représentation régulière

Définition Le G-module $k[G]$ est appelé la *représentation régulière de G*.

Proposition – Décomposition de la représentation régulière. On a $\chi_{k[G]}(g) = 0$ si $g \neq 0$ et $\chi_{k[G]}(1) = |G|$.
De plus $k[G] = {V_1}^{\dim V_1} \oplus \cdots \oplus {V_s}^{\dim V_s}$.

Preuve. Le premier résultat provient simplement du fait que les éléments de G forment une base de $k[G]$ et que $gg' \neq g'$ si $g \neq 1$.
La multiplicité de V_i dans $k[G]$ est donnée par
$\langle \chi_{k[G]}, \chi_{V_i} \rangle_G = \dfrac{1}{|G|} |G| \chi_{V_i}(1) = \dim V_i$.
En particulier toutes les représentations irréductibles apparaissent dans $k[G]$.

Corollaire – Une identité numérique. On a
$|G| = \dim {V_1}^2 + \cdots + \dim {V_s}^2$

Groupe commutatif

Proposition Soit G un groupe fini. Alors G est commutatif si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1.

Preuve. **($\Rightarrow$)** On l'a déjà vu dans le cours sur les caractères linéaires. On peut le redémontrer ainsi : si G est commutatif alors le nombre de classe de conjugaison de G est $|G|$. Ainsi G admet $|G|$ représentations simples non isomorphes qui sont nécessairement de dimension 1 au vu de l'identité numérique précédente.
($\Leftarrow$) Si toutes les représentations irréductibles sont de dimension 1, on a $s = |G|$. Ainsi s le nombre de classe de conjugaison de G est $|G|$ ce qui n'est possible que si G est commutatif.