Discriminant.

Définition 1 – Discriminant. Soit $\mathrm{P} = a_m \mathrm{X}^m + \cdots + a_0 \in k[\mathrm{X}]$ non nul et de degré m et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les racines de P dans une extension de k dans laquelle P est scindée. On définit le discriminant de P comme

$$\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) = (-1)^{m(m-1)/2} {a_m}^{2m-2} \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant m} (\alpha_i - \alpha_j) = {a_m}^{2m-2} \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\alpha_i - \alpha_j)^2 .$$

Proposition 2 On a $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) \in k$.

Preuve. Il suffit de montrer que

$$\mathrm{D} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \in k.$$

Pour cela, on va montrer que D est un polynôme symétrique en les α_i. On écrit alors

$$\mathrm{D} = \mathrm{V}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2$$

où $\mathrm{V}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ est le déterminant de Vandermonde des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On pose

$$\mathrm{M}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & & & \alpha_n \\ \vdots & & & \vdots \\ {\alpha_1}^{m-1} & \cdots & \cdots & {\alpha_m}^{m-1} \end{bmatrix}$$

On a ainsi $\mathrm{D} = \det(\mathrm{M}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)^2) = \det(\mathrm{M}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\, {}^t\mathrm{M}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m))$. Or

$$\mathrm{M}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\, {}^t\mathrm{M}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{m-1} & s_m & \cdots & s_{2m-2} \end{bmatrix}$$

où $s_i = {\alpha_1}^i + {\alpha_2}^i + \cdots + {\alpha_m}^i = \mathrm{S}_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ où $\mathrm{S}_i = {\mathrm{X}_1}^i + \cdots + {\mathrm{X}_m}^i$ est un polynôme symétrique en $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$. Ainsi $s_i \in k$ et $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) \in k$.

Exercice 1 Calculer $\mathrm{Disc}(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c)$ et $\mathrm{Disc}(\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q)$.

Exercice 2 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré m. Montrer que si $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) > 0$ alors le nombre de racines réelles de P est congru à m modulo 4.

Montrer que si $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) < 0$ alors le nombre de racines réelles de P est congru à $m - 2$ modulo 4.

Qu'obtient-on pour des polynômes de degré 2 et 3 ?

Proposition 3 On a $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) = (-1)^{m(m-1)/2} \mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{P}')/a_m$

Preuve. On a $\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = (-1)^{m(m-1)} {a_m}^{m-1} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{P}'(\alpha_i)$.

Or
$$\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = a_m \sum_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} (\mathrm{X} - \alpha_j).$$

On évalue en α_ℓ. Les termes de la somme d'indice $i \neq \ell$, ont $\mathrm{X} - \alpha_\ell$ en facteur et donc s'annulent en α_ℓ, il reste donc

$$\mathrm{P}'(\alpha_\ell) = a_m \prod_{1 \leqslant j \leqslant m, j \neq \ell} (\alpha_\ell - \alpha_j)$$

On obtient ainsi

$$\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = {a_m}^{2m-1} \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant m} (\alpha_\ell - \alpha_j) = a_m (-1)^{m(m-1)/2} \mathrm{Disc}(\mathrm{P})$$

Proposition 4 On a l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $\deg \mathrm{pgcd}(\mathrm{P}, \mathrm{P}') \geqslant 1$

(ii) P et P′ ont une racine commune dans une extension de k

(iii) P a une racine multiple dans une extension de k
(iv) $\mathrm{Disc}(\mathrm{P}) = 0$.

Preuve. L'expression en fonction du résultant de P et P' donne immédiatement le résultat, la définition en terme de produit des différences des racines aussi.

Application 5 L'ensemble $\mathcal{U}_n$ des polynômes unitaires de degré n à racines distinctes est un ouvert de l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficient dans $\mathbb{C}$.

En effet, l'expression du discriminant en fonction du résultant montre que l'application $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{Disc}(\mathrm{P})$ est continue. L'ensemble cherché est alors l'image réciproque de $\mathbb{C}^*$.

Application 6 L'ensemble des matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables à valeurs propres distinctes est un ouvert de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. En effet, c'est l'image réciproque de $\mathcal{U}_n$ par l'application polynôme caractéristique.

Exercice 3 Montrer que $\mathrm{Disc}(\mathrm{PQ}) = \mathrm{Disc}(\mathrm{P})\mathrm{Disc}(\mathrm{Q})\mathrm{Res}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})^2$

Exercice 4 Calculer $\mathrm{Disc}(\mathrm{P})$ où $\mathrm{P} = \mathrm{X}^m + p\mathrm{X} + q$. On pourra remarquer que pour x une racine de P, on a $\mathrm{P}'(x) = (-(m-1)px - mq)/x$. On trouve $(-1)^{m(m-1)/2}(m^m q^{m-1} + (-1)^{m-1}(m-1)^{m-1}p^m)$.