Algèbre M1 Cours 10

Semisimplicité

23 Novembre 2010

Objectifs

Le but de ce cours va être de décrire un certain type de G-modules : les G-modules semi-simples (de type fini). Ces G-modules sont construits à partir des briques élémentaires : les G-modules simples ; exactement comme les espaces vectoriels sont construits à partir d'espace vectoriels de dimension 1.
Dans un premier temps, on explore la notion de G-module simple puis semi-simple (on les caractérise par une propriété intrinsèque).
La deuxième partie du cours est consacrée aux morphismes entre ces G-modules et donne les théorèmes de structure.

Module simple

Définition – G-module simple. Soit V une représentation linéaire d'un groupe G. Si V a exactement deux sous-G-modules (qui sont alors $\{0\}$ et V), on dit que V est un G-module simple ou irréductible.

Exercice – Le cas de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Vérifier qu'une représentation irréductible de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est de dimension 1 donné soit par le module trivial soit par le module D pour lequel l'action de l'élément non trivial sur la droite D se fait par la multiplication par -1. Vérifier que toute représentation (de dimension finie) est somme directe de représentation simple.

Exercice – Le cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Vérifier qu'une représentation irréductible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1. Combien existe-t-il de représentation irréductible non isomorphes sur $\mathbb{C}$? Vérifier que toute représentation (de dimension finie) est somme directe de représentation simple.

Module non simple

Exercice – Le cas de $\mathbb{Z}$. Montrer qu'une représentation irréductible de dimension finie de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{C}$ est de dimension 1. Combien existe-t-il de représentations irréductibles de dimension finie non isomorphes sur $\mathbb{C}$? Que se passe-t-il si on change $\mathbb{C}$ en un autre corps ? Construire une représentation de dimension finie de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas somme directe de modules simples (on pourra penser à un bloc de Jordan).

Module semi-simple

Définition – Module semi-simple. Soit V un G-module. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) V est somme directe de sous-G-module simple
(ii) V est somme de sous-G-module simple
(iii) Tout sous-G-module de V admet un sous-G-module supplémentaire.

Un G-module vérifiant ces conditions est dit semi-simple ou complètement réductible.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii). Évident
(ii) $\Rightarrow$ (iii). On écrit $V = \sum_{i \in I} V_i$. Soit W un sous-G-module de V. On va construire un supplémentaire de W en utilisant le lemme de Zorn. On considère pour cela l'ensemble X des parties J de I telle que la somme $W + \sum_{i \in J} V_i$ soit directe et $\sum_{i \in J} V_i = \bigoplus_{i \in J} V_i$ (l'ensemble X étant ordonné par l'inclusion).

Preuve

L'ensemble X est non vide puisque X contient la partie vide.
L'ensemble X est inductif. En effet, considérons $(J_t)_t$ une famille totalement ordonnée de parties de X. Montrons que $J = \cup_t J_t$ est encore dans X.
Vérifions qu'on a bien $W \oplus \sum_{i \in J} V_i$. On considère $x \in W \cap \sum_{i \in J} V_i$.
L'écriture d'un décomposition de x dans $\sum_{i \in J} V_i$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de V_i. Ainsi, comme la famille $(J_t)_t$ est totalement ordonnée, il existe t tel que $x \in \sum_{i \in J_t} V_i$ et donc $x \in W \cap \sum_{i \in J_t} V_i = \{0\}$.
Montrons aussi que $\sum_{i \in J} V_i = \bigoplus_{i \in J} V_i$. Si $\sum_{i \in J} v_i = \sum_{i \in J} w_i$ avec $v_i, w_i \in V_i$ et seul un nombre fini de termes non nuls. On considère l'ensemble des indices tels que $v_i \neq 0$ ou $w_i \neq 0$. On obtient un sous-ensemble fini de J qui est donc contenu dans l'un des J_t. Ainsi c'est une décomposition dans $\bigoplus_{i \in J_t} V_i$ et on obtient $w_i = v_i$ pour tout i.

Preuve (suite)

L'ensemble X est non vide et inductif, il admet donc admet un élément maximal (lemme de Zorn). Notons-le J. On a alors $Y = W \oplus \bigoplus_{i \in I} V_i$. Montrons que $Y = V$. Si $i \in I$, on a $V_i \subset Y$. En effet, $V_i \cap Y$ est un sous-G-module de V_i. Donc comme V_i est simple, on a $V_i \cap Y = \{0\}$ ou $V_i \cap Y = V_i$. Dans le premier cas, on a $i \notin J$ et $J \cup \{i\} \in X$ ce qui contredit la maximalité de J. Ainsi, on a $V_i \subset Y$ pour tout $i \in I$ et donc $Y = V$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. En prenant $W = \{0\}$ dans le raisonnement précédent, on obtient le résultat souhaité.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. On considère un G-module V tel que tout sous-G-module admet un sous-G-module supplémentaire. On admet **pour le moment** que tout sous-G-module non nul de V admet alors un sous-G-module simple. On considère alors $W = \sum_{S \in X} S$ où X désigne l'ensemble des sous-modules simples de V. On peut alors écrire $V = W \oplus W'$. Si $W' \neq 0$ alors W' admet un sous-G-module simple S ce qui contredit le fait que $S \subset W$.

Algèbre de groupes

Il reste à montrer que sous l'hypothèse (*iii*), tout sous-module non nul de V admet un sous-module simple. On introduit pour cela l'algèbre du groupe $k[G]$.

Définition – Algèbre du groupe. On considère dans l'espace vectoriel $\mathscr{F}(G,k)$ des fonctions de G dans k, le sous-espace vectoriel noté $k[G]$ des fonctions dont le support est fini. Cet espace vectoriel admet pour base les $(\delta_g)_{g\in G}$ où δ_g est la fonction donnée par $\delta_g(g') = 1$ si $g' = g$ et 0 sinon : $\delta_g(g') = \delta_{g,g'}$.
On définit alors sur $k[G]$ la multiplication par bilinéarité à partir de la base $(\delta_g)_{g\in G}$: on pose $\delta_g\delta_{g'} = \delta_{gg'}$. La multiplication ainsi définie est associative (car la loi de G l'est), admet un élément neutre (δ_1) et munit ainsi $k[G]$ d'une structure de k-algèbre associative unitaire qui est commutative si G l'est.

Plutôt que d'écrire un élément de $k[G]$ sous la forme $\sum_{g\in G} \lambda_g\delta_g$ avec $\lambda_g \in k$, on l'écrit $\sum_{g\in G} \lambda_g g$ en identifiant g et δ_g.

Sous-module simple

On considère à présent W un sous-G-module non nul de V et v un élément non nul de W. L'ensemble I des $t \in k[G]$ tel que $tv = 0$ (au fait qu'est-ce que ça veut dire tv ?) est un idéal à gauche de $k[G]$ qui ne contient pas 1 (car $v \neq 0$). Il est donc contenu dans un idéal à gauche maximal M de $k[G]$. L'ensemble $Mv := \{mv,\ m \in M\}$ est alors un sous-G-module de V.
Par l'hypothèse (*iii*), il existe W' un sous-G-module tel que $W' \oplus Mv = V$. On a alors $\langle v \rangle_G = Mv \oplus (W' \cap \langle v \rangle_G)$. En effet, on a $\langle v \rangle_G = k[G]v := \{tv,\ t \in k[G]\}$ et donc si $tv \in \langle v \rangle_G$, on peut écrire $tv = mv + w'$ avec $m \in M$ et $w' \in W'$ et ainsi $w' = tv - mv \in k[G]v \cap W'$.
Il suffit alors de montrer que $S = W' \cap k[G]v$ est un G-module simple pour conclure. C'est un G-module comme intersection de deux sous-G-module. Et on va construire un isomorphisme de G-modules entre $k[G]/M$ et S.

L'isomorphisme

La multiplication d'un élément de $k[G]$ par les éléments de la forme δ_g permet de définir une structure de G-module sur $k[G]$. Pour cette structure de G-module sur $k[G]$, les sous-G-module de $k[G]$ sont précisément les idéaux à gauche de $k[G]$. Ainsi, on peut considérer la structure de G-module de $k[G]/M$ qui est un G-module simple (par le théorème de correspondance).

On écrit $v = m'v + w'$ avec $m' \in M$ et $w' \in S$. L'application

$$\lambda \colon \begin{cases} k[G] \longrightarrow S \\ \quad t \quad \longmapsto tw' \end{cases}$$

est un morphisme de G-module surjectif de noyau M. En effet, pour $m \in M$, on a $mw' = m(1 - m')v \in Mv \cap S = 0$ et donc $M \subset \operatorname{Ker} \lambda$. Comme $\lambda \neq 0$, la maximalité de M assure que $M = \operatorname{Ker} \lambda$.

Si $s \in S$, on a $s \in k[G]v$ et donc $s = tv = tm'v + tw'$. On a alors $tm'v = s - tw' \in Mv \cap S = \{0\}$. Ainsi $s = tw' \in \operatorname{Im} \lambda$.

Finalement, par le premier théorème d'isomorphisme, on a $S \simeq k[G]/M$ est un G-module simple.

Remarques

Remarque – Base incomplète. Les preuves des implications $(ii) \Rightarrow (iii)$ et $(ii) \Rightarrow (i)$ peuvent être interprétées comme un théorème de la base incomplète : On complète W, la notion de somme directe correspond à celle de famille libre et dire que V est somme directe de simple correspond à la notion de famille génératrice. Lorsque G est le groupe trivial, ces énoncés sont précisément le théorème de la base incomplète.

Remarque – Dimension finie. Lorsque V est un G-module de dimension finie, on peut grandement simplifier la démonstration à deux endroits. Le premier endroit consiste à éviter le recours au lemme de Zorn (on utilise une récurrence sur la dimension). Le deuxième point de simplification se trouve dans la preuve de l'existence d'un sous-module simple dans tout sous-module W non nul d'un module vérifiant (iii) : il suffit de considérer un sous-G-module de dimension minimal parmi tous les sous-G-module de W. Exercice : réécrire la preuve avec ces simplifications.

Sous-module et quotient

Proposition Soit V un G-module semisimple et W un sous-G-module de V. Alors W et V/W sont semi-simple.

Preuve. L'image d'un simple par un morphisme de G-module est $\{0\}$ ou ce simple (premier théorème d'isomorphisme). L'image d'une somme de simple est donc une somme de simple. Ainsi $V/W = \pi(V)$ est semisimple (où $\pi : V \to V/W$ est la surjection canonique).
Considérons W' un G-module supplémentaire de V. La surjection canonique $\pi' : V \to V/W'$ induit par restriction un isomorphisme entre W et V/W'. Et donc W est semi-simple puisque V/W' l'est.

Extraction de simples

Remarque Dans la preuve du théorème de semisimplicité, on a vu que si V était somme de simple, on pouvait extraire de cette somme des modules simples tels que V soit la somme directe de la famille extraite. La première partie de la démonstration assure que le quotient est encore une somme directe de simples extraits de la première famille (ou plutôt de leur image par la surjection canonique).
Par contre pour le sous-module, ce sont des modules simples **isomorphes** à ceux de la somme mais pas nécessairement ceux de la somme. En effet, considérons l'action triviale de G sur $ke_1 \oplus ke_2$ alors le sous-G-module $k(e_1 + e_2)$ n'est évidemment pas extrait de la somme précédente.

Morphisme et somme directe

On considère $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ et $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ deux G-modules qui se décomposent en somme directe de G-modules.
On note $p_i : V \to V_i$ la projection selon la i^{e} composante et $i_j : V_j \to V$ l'inclusion naturelle. On note de même $q_i : W \to W_i$ et $j_i : W_i \to W$.
La propriété universelle du produit $W = W_1 \times \cdots \times W_n$ donne une bijection

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_G(V, W) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_G(V, W_i) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto q_i \circ f \end{cases}$$

La propriété universelle de la somme directe $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ donne une bijection

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_G(V, W) \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{p} \mathrm{Hom}_G(V_j, W_i) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto q_i \circ f \circ i_j \end{cases}$$

Morphisme et somme directe

Finalement, il revient au même de se donner un morphisme de V dans W qu'une famille de morphisme $(f_{ij})_{i,j}$ avec $f_{ij} \in \mathrm{Hom}_G(V_j, W_i)$.

De plus, si $v = (v_1, \ldots, v_p) = \sum_{\ell=1}^{p} i_\ell(v_\ell) \in V$, on a $f(v) = (q_1 f(v), \ldots, q_n f(v)) = (w_1, \ldots, w_n) \in W$ et $q_j f(v) = \sum_{\ell=1}^{p} q_j f i_\ell(v_\ell)$ ce qui matriciellement s'écrit

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{bmatrix}$$

où $f_{ij} = q_i \, f \, i_j \in \mathrm{Hom}_G(V_j, W_i)$.

On peut alors résumer le calcul précédent

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_G(V_1, W_1) & \cdots & \mathrm{Hom}_G(V_p, W_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Hom}_G(V_1, W_n) & \cdots & \mathrm{Hom}_G(V_p, W_n) \end{bmatrix}$$

Le cas des espaces vectoriels

Exercice – Groupe trivial. On considère G le groupe trivial et V, W deux G-modules de dimension finie. Toute base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ de V donne une décomposition $V = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_p$ en tant que G-module. De même, toute base $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de W donne une décomposition $W = kf_1 \oplus \cdots \oplus kf_n$. De plus, on a $\mathrm{Hom}_G(ke_j, kf_i) \simeq k$ l'isomorphisme inverse étant donné par $\lambda \in k \longmapsto (x = \alpha e_j \mapsto \lambda \alpha f_i)$.
La description donnée ci-dessus correspond alors précisément à l'écriture d'une application linéaire de V dans W dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Matrice et composition

Considérons à présent un G-module $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_m$ qui se décompose en somme directe et $f' \in \mathrm{Hom}_G(W, X)$.
On note $r_i : X \to X_i$ la projection sur la i^{e} composante et on considère la matrice B de f' donnée par la description précédente $B = (f'_{ij})_{i,j}$ avec $f'_{ij} = r_i f' j_j \in \mathrm{Hom}_G(W_j, X_i)$.
Pour $f = (f_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ avec $f_{ij} = q_i f\, i_j \in \mathrm{Hom}_G(V_j, W_i)$, la matrice associée à l'application $f' \circ f \in \mathrm{Hom}_G(V, X)$ est donnée par le produit

$$\begin{bmatrix} f'_{11} & \cdots & f'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{m1} & \cdots & f'_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & f_{np} \end{bmatrix}$$

Cela résulte simplement de l'égalité $\sum_{i=1}^{n} j_i q_i = \mathrm{id}_W$.

Lemme de Schur

Proposition – Lemme de Schur. Soit V un G-module simple et W un G-module.

1. Si $f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ alors f est nul ou injectif.
2. Si $f \in \mathrm{Hom}_G(W, V)$ alors f est nul ou surjectif.
3. Si, de plus, W est simple et que $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ alors f est isomorphisme.

Preuve. Un sous-G-module de V est 0 ou V. Ainsi dans (**1**), $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ ou $\mathrm{Ker}\, f = V$. Dans (**2**), $\mathrm{Im}\, f = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}\, f = V$. Dans (**3**), on a $\mathrm{Im}\, f = W$ et $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

Corollaire – Lemme de Schur. Si V est un G-module simple alors $\mathrm{End}_G(V)$ est une k-algèbre à division.

Corollaire – Lemme de Schur. Si V et W sont deux G-modules simples non isomorphes alors $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \{0\}$.

Lemme de Schur (suite)

Corollaire – Lemme de Schur. Supposons que le corps k est algébriquement clos et que V est un G-module simple de dimension finie. Alors $\mathrm{End}_G(V) = k\mathrm{id}_V$.

Preuve. *Preuve 1.* Soit $f \in \mathrm{End}_G(V)$. Comme k est algébriquement clos, f admet une valeur propre λ (c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie). Ainsi $f - \lambda\mathrm{id}_V$ est un G-endomorphisme de V non injectif. Donc $f - \lambda\mathrm{id}_V = 0$.
Preuve 2. Soit $f \in \mathrm{End}_G(V) \subset \mathrm{End}_k(V)$. Comme V est de dimension finie, f est algébrique sur k (dans la k-algèbre $\mathrm{End}_G(V)$). Mais k est algébriquement clos, ainsi $f \in k = k\mathrm{id}_V$.

Lemme de Schur (fin)

Remarque – Espace de morphismes. Si V et W sont deux G-modules isomorphes et $f : V \to W$ un G-isomorphisme. On a $\mathrm{Hom}_G(V, W) = f\mathrm{End}_G(V) = \mathrm{End}_G(W)f$.
En effet, si $f' \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$, on a $f^{-1}f' \in \mathrm{End}_G(V)$ et $f'f^{-1} \in \mathrm{End}_G(W)$.

Corollaire – Lemme de Schur. Si V et W sont deux G-modules simples isomorphes et $0 \neq f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$. Alors $\mathrm{Hom}_G(V, W) = f\mathrm{End}_G(V) = \mathrm{End}_G(W)f$.
En particulier, si k est algébriquement clos et V et W deux G-modules simples isomorphes alors $\mathrm{Hom}_G(V, W)$ est une droite vectorielle.

Semi-simplicité et type fini

Remarque – G-module semi-simple et de type fini. Soit V un G-module de type fini (c'est-à-dire engendré en tant que G-module par un nombre fini d'éléments) qui est semi-simple. On peut alors écrire $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ où les V_i sont des G-modules simples.
En effet, par hypothèse $V = \bigoplus V_i$ est somme directe d'une famille de G-modules simples. On note alors $(v_1, \ldots, v_\ell)$ une famille génératrice de V en tant que G-module. L'écriture de chacun des v_i dans la décomposition de V en somme directe ne fait intervenir qu'un nombre fini de termes. Ainsi, il y a un nombre fini d'indices.

Inversement, tout G-module de la forme $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ où les V_i sont simples est un G-module semi-simple de type fini.
En effet, V est semi-simple. De plus, chacun des V_i est monogène puisque si $0 \neq v \in V_i$ alors $\langle v \rangle_G = V_i$ (puisque V_i est simple).
Ainsi $V = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle_G$ avec $0 \neq v_i \in V_i$ (Attention à l'abus d'écriture !).

Une application

Application Soient V, W deux G-modules semi-simples de type fini. On écrit $V \simeq {V_1}^{n_1} \oplus \cdots \oplus {V_r}^{n_r}$ avec V_i et V_j non isomorphes si $i \neq j$ et $n_i \in \mathbb{N}$. De même, on écrit $W \simeq {V_1}^{m_1} \oplus \cdots \oplus {V_r}^{m_r}$ avec $m_i \in \mathbb{N}$. On peut alors écrire

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) \simeq \begin{bmatrix} \mathrm{Hom}_G({V_1}^{n_1}, {V_1}^{m_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{Hom}_G({V_r}^{n_r}, {V_r}^{m_r}) \end{bmatrix}$$

et $$\mathrm{Hom}_G(V, W) \simeq \begin{bmatrix} \mathrm{M}_{m_1,n_1}(K_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{M}_{m_p,n_p}(K_p) \end{bmatrix}$$

où $K_i = \mathrm{End}_G(V_i)$ est une k-algèbre à division.

Le cas où $V = W$

Si $V = {V_1}^{n_1} \oplus \cdots \oplus {V_r}^{n_r}$ avec V_i et V_j simples et non isomorphes si $i \neq j$ et $n_i \in \mathbb{N}$ alors

$$\mathrm{End}_G(V) \simeq \mathrm{M}_{n_1}(K_1) \times \cdots \times \mathrm{M}_{n_r}(K_r)\,.$$

où $K_i = \mathrm{End}_G(V_i)$.

Module semisimple de type fini

Théorème – Unicité de la décomposition. Soit V un G-module semi-simple de type fini. On considère deux décompositions $V \simeq {V_1}^{n_1} \oplus \cdots \oplus {V_r}^{n_r}$ avec V_i et V_j non isomorphes si $i \neq j$ et $n_i \in \mathbb{N}^*$ et $V = \simeq {V'_1}^{n'_1} \oplus \cdots \oplus {V'_s}^{n'_s}$ avec V'_i et V'_j non isomorphes si $i \neq j$ et $n'_i \in \mathbb{N}^*$.
Alors $r = s$ et il existe une bijection $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ tel que $V_i \simeq V'_{\sigma(i)}$ et $n_i = n'_{\sigma(i)}$.
L'entier n_i s'appelle la multiplicité de V_i dans V.

Preuve

On considère l'écriture matricielle $A = (f_{ij})_{i,j}$ de id_V de la première décomposition dans la deuxième décomposition. De même, on considère $B = (f'_{ij})_{i,j}$ l'écriture matricielle de id_V de la deuxième décomposition de V dans la première décomposition.
On a $AB = \mathrm{diag}\left(\mathrm{id}_{V'_1}, \ldots, \mathrm{id}_{V'_1}, \ldots, \mathrm{id}_{V'_s}, \ldots, \mathrm{id}_{V'_s}\right)$ et $BA = \mathrm{diag}\left(\mathrm{id}_{V_1}, \ldots, \mathrm{id}_{V_1}, \ldots, \mathrm{id}_{V_r}, \ldots, \mathrm{id}_{V_r}\right)$. Ainsi, aucune des colonnes de A n'est nulle. En particulier, il existe donc $i = \sigma(1)$ tel que $f_{i1} \neq 0$. Ainsi $V_1 \simeq V'_i$. De même, $V_j \simeq V'_{\sigma(j)}$. En regardant les lignes de B, on obtient aussi que chacun des V'_i est isomorphe à l'un (unique) des V_j. Ainsi $r = s$ et on obtient l'existence de la bijection σ.

Unicité des exposants

Montrons à présent l'unicité des n_i. On a vu qu'on peut supposer $V_i = V_i'$ pour tout $i \in [\![1\,,\, r]\!]$ et on note $K_i = \mathrm{End}_G(V_i)$. Pour tout G-module, l'application

$$\begin{cases} K_i \times \mathrm{Hom}_G(W, V_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_G(W, V_i) \\ \qquad (f, \varphi) \qquad\qquad \longmapsto f\varphi \end{cases}$$

définit une structure d'espace vectoriel (à gauche) sur K_i sur $\mathrm{Hom}_G(W, V_i)$ et l'isomorphisme
$\Delta : \mathrm{Hom}_G(W \oplus W', V_i) \simeq \mathrm{Hom}_G(W, V_i) \times \mathrm{Hom}_G(W', V_i)$ est un isomorphisme de K_i-espace vectoriel.
En effet, $\Delta(f\varphi) = (f\varphi j, f\varphi j') = f(\varphi j, \varphi j')$ où $j : W \to W \oplus W'$ et $j' : W' \to W \oplus W'$ sont les applications canoniques.
Comme d'après le lemme de Schur, $\mathrm{Hom}_G(W, V_i) = 0$ si W n'est pas isomorphe à V_i et est un K_i-espace vectoriel de dimension 1 si W et V_i sont isomorphes. On en déduit que $\mathrm{Hom}_G(V, V_i)$ est un K_i-espace vectoriel de dimension n_i.

Composante isotypique

Soit S un G-module simple et V un G-module quelconque (pas forcément semi-simple). La somme de tous les sous-G-modules de V isomorphe à S est un sous-G-module semi-simple de V (éventuellement nul) noté V_S et appelé composante S-isotypique de V. Si $f : V \to W$ est un G-module, on a $f(V_S) \subset W_S$ (car si T est un sous-G-module isomorphe à S alors $f(T)$ est nul ou un sous-G-module de W isomorphe à S).
Si S' est un G-module simple non isomorphe à S, on a $V_S \cap V_{S'} = \{0\}$. En effet, $V_S \cap V_{S'}$ est un sous-G-module d'un module semisimple. S'il est non nul, il admet donc un sous-module simple qui doit être isomorphe à S et à S'. On en déduit que V est semisimple si et seulement si $V = \bigoplus_S V_S$ où la somme porte sur un famille de représentants des classes d'isomorphismes des G-modules simples.

Composante isotypique

Exercice – Composante isotypique et sous-module. Soit V est un G-module et W un sous-G-module de V. Pour tout G-module simple S, on a $W_S = V_S \cap W$.

Exercice – Composante isotypique et module semisimple. Soit $V = {V_1}^{n_1} \oplus \cdots \oplus {V_r}^{n_r}$ un G-module semi-simple avec V_i et V_j simples et non isomorphes si $i \neq j$ et $n_i \in \mathbb{N}$.
La composante V_i-isotypique de V est ${V_i}^{n_i}$. Ainsi, le sous-G-module ${V_i}^{n_i}$ est uniquement déterminé. Par contre, chacune des copies de V_i n'est pas uniquement définie. Le choix d'une décomposition explicite revient au choix d'une K_i-base de $\mathrm{Hom}_G(V, V_i)$.