Vincent Beck

Orthogonalisation simultanée

Théorème 1 — Orthogonalisation simultanée de formes quadratiques.
Version linéaire. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, q, q' deux formes quadratiques sur E. On suppose que q est définie positive. Il existe une base $\mathscr{B}$ de E orthonormée pour q et orthogonale pour q'.
Version matricielle. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques avec M symétrique définie positive. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MP} = \mathrm{I}_n$ et ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{NP} = \mathrm{D}$ avec D diagonale.

Remarque 2 — Une (demi)-version de plus. L'énoncé du théorème 1 est évidemment synonyme du suivant : soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et q' une forme quadratique sur E. Il existe une base orthonormée (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$) qui est orthogonale pour q'. ■

Remarque 3 — Liens entre versions linéaires et matricielles. Les versions linéaires et matricielles du théorème 1 sont synonymes pour les raisons suivantes :

(*i*) La matrice d'une forme quadratique dans une base est symétrique et toute matrice symétrique M définit une forme quadratique $q : \mathrm{X} \mapsto {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{MX}$;
(*ii*) Lorsqu'on change de base par la matrice P, on transforme la matrice M de la forme quadratique se transforme en ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MP}$;
(*iii*) Une base est orthonormée pour une forme quadratique si et seulement si la matrice de la forme quadratique dans cette base est I_n ;
(*iv*) Une base est orthogonale pour une forme quadratique si et seulement si la matrice de la forme quadratique dans cette base est diagonale. ■

Théorème 4 — Réduction des endomorphismes symétriques.
Version linéaire. Soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie, u un endomorphisme symétrique (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$) de E. Il existe une base $\mathscr{B}$ orthonormée (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$) de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
Version matricielle. Soient $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive et $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{U}\,\mathrm{M} = \mathrm{MU}$. Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MP} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{UP} = \mathrm{D}$ avec D diagonale.

Remarque 5 — Une (demi)-version de plus. L'énoncé du théorème 4 est évidemment synonyme du suivant : soient $(\mathrm{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension finie et u un endomorphisme symétrique (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$) de E. L'endomorphisme u est diagonalisable en base orthonormée (pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

Remarque 6 — Liens entre version linéaire et matricielle.
Les versions linéaires et matricielles du théorème 4 sont synonymes pour les raisons suivantes :

(*i*) La matrice d'une forme quadratique dans une base est symétrique et toute matrice symétrique M définit une forme quadratique $q : \mathrm{X} \mapsto {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{MX}$;
(*ii*) Le fait que u soit symétrique pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ s'écrit ${}^t\mathrm{UX}\,\mathrm{MY} = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{MUY}$ c'est-à-dire ${}^t\mathrm{U}\,\mathrm{M} = \mathrm{MU}$;
(*iii*) Lorsqu'on change de base par la matrice P, on transforme la matrice M de la forme quadratique se transforme en ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MP}$; la matrice de l'endomorphisme U se transforme en $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{UP}$;
(*iv*) Une base est orthonormée pour une forme quadratique si et seulement si la matrice de la forme quadratique dans cette base est I_n. ■

Preuve. Il ne s'agit pas ici de démontrer le théorème 1 ou 4 (on se reportera à [RDO2, 2.2]) mais de montrer que ce sont deux aspects d'un même énoncé : on va montrer l'équivalence des théorèmes 1 et 4. On va même donner deux démonstrations de cette équivalence : on va montrer l'équivalence est version linéaire et l'équivalence des versions matricielles.

Équivalence des versions linéaires.
$1 \Rightarrow 4$. On considère la forme quadratique définie positive $q : x \mapsto q(x) = \langle x, x\rangle$ et la forme quadratique $q' : x \mapsto q'(x) = \langle x, u(x)\rangle$. On note b' la forme bilinéaire symétrique associée à q'. Comme u est symétrique pour b, on a $b'(x, y) = \langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$. On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée pour q et orthogonale pour q'. Calculons $u(e_i)$. Comme $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour un produit scalaire, on a

$$u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, u(e_i)\rangle e_j = \sum_{j=1}^{n} b'(e_j, e_i) e_j.$$

Or $\mathscr{B}$ est un base orthogonale pour q' donc $u(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i = b'(e_i, e_i) \in k$ et u est diagonalisable en base orthonormée.

$4 \Rightarrow 1$. On cherche à construire à partir de q' un endomorphisme de E symétrique q. On note b (resp b') la forme bilinéaire symétrique associée à q (resp. q') et φ_b et $\varphi_{b'}$ les applications linéaires (« de Riesz »)

$$\varphi_b : \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^* \\ x \longmapsto (y \mapsto b(x,y)) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_{b'} : \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^* \\ x \longmapsto (y \mapsto b'(x,y)\,. \end{cases}$$

Comme q est non dégénérée, φ_b est un isomorphisme. On définit alors l'endomorphisme u de E

$$u = {\varphi_b}^{-1}\varphi_{b'} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}. \tag{1}$$

Montrons à présent que u est symétrique pour b. Par définition, on a, pour $x, y \in \mathrm{E}$,

$$b(u(x), y) = \varphi_b(u(x))(y) = \varphi_{b'}(x)(y) = b'(x,y) = b'(y,x) = \varphi_{b'}(y)(x) = \varphi_b(u(y))(x) = b(u(y), x) = b(x, u(y)).$$

Le théorème 4 donne l'existence d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ orthonormée pour q et dans laquelle la matrice de u est diagonale. Montrons que $\mathscr{B}$ est orthogonale pour q'. Pour $i \neq j$, on a

$$b'(e_i, e_j) = b(u(e_i), e_j) = b(\lambda_i e_i, e_j) = \lambda_i b(e_i, e_j) = 0\,.$$

Équivalence des versions matricielles.

$1 \Rightarrow 4$. Comme M est symétrique, l'hypothèse sur U assure que la matrice $\mathrm{N} = \mathrm{MU}$ est symétrique (comparez la définition de N avec (**1**)). Ainsi le théorème 1 montre qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MP} = \mathrm{I}_n$ et ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{NP} = \mathrm{D}$ avec D diagonale. Or $\mathrm{D} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{NP} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MPP}^{-1}\mathrm{UP} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{UP}$.

$1 \Rightarrow 4$. On pose $\mathrm{U} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}$ (comparez avec (**1**)). Comme M et N sont symétrique, on a ${}^t\mathrm{U}\,\mathrm{M} = {}^t\mathrm{N}\,{}^t\mathrm{M}^{-1}\mathrm{M} = \mathrm{N} = \mathrm{MU}$. Ainsi le théorème 1 montre qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MP} = \mathrm{I}_n$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{UP} = \mathrm{D}$ avec D diagonale. Or ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{NP} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MUP} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{MPP}^{-1}\mathrm{UP} = \mathrm{D}$. ■

Remarque 7 — Piège. Attention, il faut toujours avoir en tête la relation (**1**) ou son équivalent matriciel $\mathrm{U} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}$ qui fait le lien entre la matrice de l'endomorphisme symétrique et la matrice de la forme quadratique.

Le piège vient du fait que la matrice d'une forme quadratique est par définition toujours une matrice symétrique alors que la matrice d'un endomorphisme u symétrique (pour un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$) n'est pas forcément symétrique. En fait, on a le résultat suivant : soit $\mathscr{B}$ une base de E, la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est symétrique si $\mathscr{B}$ est une base orthonormée pour $\langle\cdot,\cdot\rangle$ puisque dans ce cas $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$ et donc $\mathrm{U} = \mathrm{N}$ est symétrique (c'est le cas auquel on est habitué). ■

Remarque 8 — Complément. Pour un énoncé plus général sur l'orthogonalisation simultanée de deux formes quadratiques (dans un cadre non euclidien), on pourra consulter [RDO2, 1.3.2.4].

Pour d'autres commentaires sur la relation (**1**), on pourra consulter [PAU, Chapitre 2]. Pour les problèmes de changements de base, le chapitre 1 de [PAU] regroupe différents points de vue.

Références

[PAU] A. Paugam. *Questions délicates en algèbre et géométrie.* Dunod, 2007.

[RDO2] E. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux. *Cours de Mathématiques 2, Algèbre et applications à la géométrie.* Dunod, 1998.