Devoir 3

Exercice 1 — Autour de Dedekind. Soient k un corps, K une extension de k (pas nécessairement de dimension finie) et $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathrm{K}/k)$.

a) On suppose que σ vérifie $\sigma(x) + \sigma^2(x) = x + \sigma^3(x)$ pour tout $x \in \mathrm{K}$. Montrer que $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathrm{K}}$.

b) Montrer que l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) σ est d'ordre fini dans le groupe $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}/k)$;
(ii) le k-endomorphisme σ de K admet un polynôme minimal ;
(iii) l'algèbre $k[\sigma]$ est de dimension finie.

c) On suppose que les conditions de la question **b** sont vérifiées. Déterminer le polynôme minimal de σ.

d) Montrer que les conditions de la question **b** sont vérifiées si $[\mathrm{K} : k] < +\infty$. En déduire qu'un k-automorphisme de K ne peut être d'ordre infini que si $[\mathrm{K} : k] = +\infty$.

e) Reprendre la question **a** en utilisant les résultats des questions **b** et **c**.