Devoir à la maison : algèbre approfondie.

Exercice 1 — Constructibilité.

a) Soit ABCD un rectangle (sur une feuille non quadrillée). Construire à la règle et au compas un carré de même aire que ABCD (on expliquera sa construction).

b) On considère ABC un triangle équilatéral, O le centre de son cercle circonscrit et I le milieu de [AB]. On reporte sur le cercle 7 fois la longueur AI. Que constatez-vous ? Pourtant 7 n'est pas un nombre de Fermat. Expliquez cette apparente contradiction.

Exercice 2 — Non-constructibilité. L'objectif de cet exercice est de montrer que la condition $\deg_{\mathbb{Q}} x$ est une puissance de 2 n'est pas suffisante pour que x soit constructible. Soit $\mathrm{P} = \mathrm{X}^4 - \mathrm{X} - 1 \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$

a) Montrer que P a exactement deux racines réelles (qu'on notera x_1 et x_2) et deux racines complexes non réelles conjuguées (qu'on notera x_3 et x_4).

b) Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (on pourra réduire modulo 2 et déterminer les polynômes irréductible sur $\mathbb{F}_2$ de degré 1 et 2).

c) On cherche à écrire $\mathrm{P} = (\mathrm{X}^2 + a\mathrm{X} + b)(\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} + d)$. Exprimer b, c, d en fonction de a. En déduire un polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$ de degré 3 tel que, a étant fixé, ce système a une solution si et seulement si $\mathrm{Q}(a^2) = 0$.

d) Montrer que Q est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

e) Montrer que x_1 et x_2 sont de degré 4 sur $\mathbb{Q}$ et ne peuvent être tous les deux constructibles. Conclure.

Exercice 3 On considère l'extension $\mathrm{L} = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$. Déterminer $[\mathrm{L} : \mathbb{Q}]$ et une base de L sur $\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3})$ est une sous-extension de L et déterminer son degré. Calculer le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4 Soit k un corps et x un élément algébrique sur k de degré impair. Déterminer $[k(x^2) : k]$.

Exercice 5 Soit K une extension de degré 4 de $\mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe $\mathbb{Q} \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ avec $[\mathrm{L} : \mathbb{Q}] = 2$ si et seulement s'il existe $\delta \in \mathrm{K}$ racine d'un polynôme irréductible de la forme $\mathrm{X}^4 + u\mathrm{X}^2 + v \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}]$.

Exercice 6

a) Soit F une extension quadratique de E. On considère $x \in \mathrm{F} \smallsetminus \mathrm{E}$ tel que $x^2 \in \mathrm{E}$ et $a \in \mathrm{E}$. Montrer que si a est un carré dans F, alors ou bien a est un carré dans E ou bien ax^2 est un carré dans E.

b) Soient $p_1, \ldots, p_n$ des nombres premiers deux à deux distincts.

On note A_n la propriété : $[\mathrm{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$

On note B_n la propriété : un élément $x \in \mathbb{Q}$ est un carré dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ si et seulement s'il existe une partie I de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $x \prod_{i \in \mathrm{I}} p_i$ est un carré dans $\mathbb{Q}$.

Montrer que la conjonction de A_n et B_n implique A_{n+1} et que la conjonction de A_{n+1} et B_n entraîne A_{n+1}. En déduire que A_n et B_n sont vraies pour tout n.

c) Montrer que la famille des $\sqrt{p}$ pour p un nombre premier est une famille libre sur $\mathbb{Q}$.