Vincent Beck

Devoir 4

Un exercice au choix parmi les deux suivants.

Exercice 1 — Élément primitif.

a) Soient k un corps de caractéristique nulle et K une extension finie de k et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $[\mathrm{K} : k] \leqslant n$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[k(x) : k] \leqslant n$ pour tout $x \in \mathrm{K}$. En particulier, si le degré des éléments de K est borné, celui de K l'est aussi.

b) Montrer que, dans la question **a**, on peut remplacer l'hypothèse k est de caractéristique nulle par K est une extension séparable de k.

c) Montrer que dans les question **a** et **b**, on peut retirer l'hypothèse $[\mathrm{K} : k]$ est fini c'est-à-dire montrer que si K est une extension séparable de k telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[k(x) : k] \leqslant n$ pour tout $x \in \mathrm{K}$ alors $[\mathrm{K} : k] \leqslant n$.

d) Soit K une extension d'un corps k. A-t-on l'équivalence : $[k[x] : k] < +\infty$ pour tout $x \in \mathrm{K}$ si et seulement si $[\mathrm{K} : k] < +\infty$?

e) Soient p un nombre premier, k un corps de caractéristique p et X, Y deux indéterminées sur k. On considère $\mathrm{K} = k(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{L} = k(\mathrm{X}^p, \mathrm{Y}^p) \subset \mathrm{K}$. Déterminer $[\mathrm{K} : \mathrm{L}]$. Pour $x \in \mathrm{K}$, déterminer $[\mathrm{L}(x) : \mathrm{L}]$. En déduire que l'extension $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ n'est pas monogène ni séparable.

f) Montrer que le résultat des questions **a** et **b** est faux si on ne suppose pas l'extension $k \subset \mathrm{K}$ séparable.

Exercice 2 — Un exemple d'extension non monogène. Soient p un nombre premier, k un corps de caractéristique p et X, Y deux indéterminées sur k. On considère $\mathrm{K} = k(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et $\mathrm{L} = k(\mathrm{X}^p, \mathrm{Y}^p) \subset \mathrm{K}$.

a) Déterminer $[\mathrm{K} : \mathrm{L}]$.

b) Pour $x \in \mathrm{K}$, déterminer $[\mathrm{L}(x) : \mathrm{L}]$. En déduire que l'extension $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ n'est pas monogène ni séparable.

c) Déterminer l'ensemble des éléments de K qui sont séparables sur L.

d) Montrer que l'extension $\mathrm{L} \subset \mathrm{K}$ est normale. Déterminer $\mathrm{Aut}_{\mathrm{L}}(\mathrm{K}) = \mathrm{Gal}(\mathrm{K} \mid \mathrm{L})$.