Vincent Beck

Distance aux sommets d'un triangle

Lemme 1 — Maximum et fonction distance. Soient C un convexe d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ et $x_0 \in \mathscr{E}$. Un point x de C tel que

$$d(x_0, x) = \max_{y \in \mathrm{C}} d(x_0, y)$$

est un point extremal de C.

Preuve. On note $f : \mathrm{C} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $x \mapsto d(x, x_0)$. Soit $x \in \mathrm{C}$ un point où f atteint son maximum. Pour $y, z \in \mathrm{C}$ tel que $x = (y+z)/2$. On a alors, par convexité, $f(x) \leqslant (f(y) + f(z))/2$. Par maximalité, on a $f(y) \leqslant f(x)$ et $f(z) \leqslant f(x)$. Ainsi on obtient

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}(f(y) + f(z)) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = f(x)$$

On en déduit que $f(x) = f(y) = f(z)$. Ainsi x, y, z sont sur la sphère de centre x_0 de rayon $f(x)$. Par ailleurs, l'égalité de la médiane assure que

$$d(x, x_0)^2 + \frac{1}{4} d(y, z)^2 = \frac{1}{2} d(y, x_0)^2 + \frac{1}{2} d(z, x_0)^2.$$

On en déduit que $d(y, z)^2 = 0$ et donc $y = z = x$.

Lemme 2 — Coordonnées barycentriques et déterminant. Soient k un corps, $\mathscr{E}$ un k-espace affine de dimension n **paire** de direction E, $(\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Pour $i \in [\![0\,,\, n]\!]$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$, on définit $\lambda_i(\mathrm{M})$ par

$$\lambda_i(\mathrm{M}) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{MA}_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{MA}_n}, \overrightarrow{\mathrm{MA}_0}, \overrightarrow{\mathrm{MA}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{MA}_{i-1}}).$$

Pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$, il existe $\lambda \in k^\times$ tel que la famille $(\lambda\lambda_0(\mathrm{M}), \ldots, \lambda\lambda_n(\mathrm{M}))$ est la famille des coordonnées barycentriques de M dans le repère affine $(\mathrm{A}_0, \ldots, \mathrm{A}_n)$. En particulier, M est le barycentre de la famille $((\mathrm{A}_0, \lambda_0(\mathrm{M})), \ldots, (\mathrm{A}_n, \lambda_n(\mathrm{M})))$.

Preuve. Montrons tout d'abord que l'application $\mathrm{M} \mapsto \lambda_i(\mathrm{M})$ est affine. En retranchant la première colonne à chacune des suivantes, on obtient que

$$\lambda_i(\mathrm{M}) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{MA}_{i+1}}, \overrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_{i+2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_n}, \overrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_0}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_{i-1}})\,. \tag{1}$$

On en déduit immédiatement que λ_i est une forme affine et $\overrightarrow{\lambda_i}$ est la forme linéaire donnée par

$$\overrightarrow{u} \mapsto \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_{i+2}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_n}, \overrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_0}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{A}_{i-1}})\,.$$

On note ε_i la forme affine i^{e} coordonnée barycentrique dans le repère affine $\mathscr{E}$. Comme, pour $j \neq i$, on a évidemment $\lambda_i(\mathrm{A}_j) = 0$, on en déduit que $\lambda_i = \lambda_i(\mathrm{A}_i)\varepsilon_i$ puisque les deux formes affines coïncident sur un repère affine. Il ne reste plus qu'à montrer que $\lambda_i(\mathrm{A}_i) = \lambda_j(\mathrm{A}_j)$ pour tous $i, j \in [\![0\,,\, n]\!]$. Or $\lambda_0(\mathrm{A}_0) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n})$. Par ailleurs, on a $\lambda_i(\mathrm{A}_i) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_n}, \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_0}, \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i-1}})$. En retranchant la $(n-i+1)^{\mathrm{e}}$ colonne à chacune des autres, on obtient $\lambda_i(\mathrm{A}_i) = \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n}, \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_0}, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{i-1}})$. En permutant les colonnes, on obtient

$$\lambda_i(\mathrm{A}_i) = (-1)^{i(n-i)+i-1} \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{i-1}}, \overrightarrow{\mathrm{A}_i\mathrm{A}_0}, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n}) = \lambda_0(\mathrm{A}_0).$$

Lemme 3 — Coordonnée barycentrique du centre du cercle circonscrit. Soit ABC un triangle d'un plan euclidien. On note O le centre du cercle circonscrit. Alors O est le barycentre de $(\mathrm{A}, \sin(2\widehat{\mathrm{A}}))$, $(\mathrm{B}, \sin(2\widehat{\mathrm{B}}))$ et $(\mathrm{C}, \sin(2\widehat{\mathrm{C}}))$.

Preuve. On choisit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de $\mathscr{E}$. D'après le lemme 2, O est le barycentre de $(\mathrm{A}, \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}))$, $(\mathrm{B}, \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}))$ et $(\mathrm{C}, \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}))$. Mais $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \|u\|\|v\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Le théorème de l'angle au centre et la relation $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ donne alors le résultat.

Corollaire 4 — Position du centre du cercle circonscrit. Soit ABC un triangle d'un plan euclidien. On note O le centre du cercle circonscrit. Le triangle a ses trois angles (strictement) aigus si et seulement si O est strictement à l'intérieur de ABC. Le triangle est rectangle si et seulement O est sur l'un des cotés. Dans ce cas,

il est le milieu de l'hypoténuse. Le triangle a un angle (strictement) obtu si et seulement si O est à l'extérieur. On suppose que A est l'angle obtu, O est alors dans le demi-plan délimité par (BC) qui ne contient pas A.

Preuve. O est strictement à l'intérieur de ABC si et seulement si $\sin(2\widehat{\mathrm{A}})$, $\sin(2\widehat{\mathrm{B}})$ et $\sin(2\widehat{\mathrm{C}})$ sont tous les trois du même signe (et non nul). Comme $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{C}} = \pi$, au moins un des trois angles $\widehat{\mathrm{A}}, \widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ a une mesure strictement inférieure à $\pi/2$ et donc l'un des trois réels $\sin(2\widehat{\mathrm{A}})$, $\sin(2\widehat{\mathrm{B}})$ et $\sin(2\widehat{\mathrm{C}})$ est strictement positif. On en déduit que O est strictement à l'intérieur de ABC si et seulement si $\sin(2\widehat{\mathrm{A}})$, $\sin(2\widehat{\mathrm{B}})$ et $\sin(2\widehat{\mathrm{C}})$ sont tous les trois strictement positifs. Ceci s'écrit aussi $0 < 2\widehat{\mathrm{A}} < \pi$, $0 < 2\widehat{\mathrm{B}} < \pi$, $0 < 2\widehat{\mathrm{C}} < \pi$.

O est sur l'un des cotés si et seulement si l'un des coefficients $\sin(2\widehat{\mathrm{A}})$, $\sin(2\widehat{\mathrm{B}})$ et $\sin(2\widehat{\mathrm{C}})$ est nul. Ceci s'écrit aussi $2\widehat{\mathrm{A}} = \pi$ ou $2\widehat{\mathrm{B}} = \pi$ ou $2\widehat{\mathrm{C}} = \pi$. Si le triangle est rectangle en A alors $\widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\mathrm{C}} = \pi/2$ et donc $\sin(2\widehat{\mathrm{B}}) = \sin(\pi - 2\widehat{\mathrm{C}}) = \sin(2\widehat{\mathrm{C}})$ ce qui donne le résultat souhaité O est le milieu de [BC].

La dernière équivalence découle des cas précédents. Si le triangle à un angle obtu en A alors $\sin(2\widehat{\mathrm{A}}) < 0$ et $\sin(2\widehat{\mathrm{B}}) > 0$ et $\sin(2\widehat{\mathrm{C}}) > 0$. De plus, on a

$$\sin(2\widehat{\mathrm{A}})+\sin(2\widehat{\mathrm{B}})+\sin(2\widehat{\mathrm{C}}) = \sin(2\widehat{\mathrm{B}})+\sin(2\widehat{\mathrm{C}})-\sin(2\widehat{\mathrm{B}}+2\widehat{\mathrm{C}}) = \sin(2\widehat{\mathrm{B}})(1-\cos(2\widehat{\mathrm{C}}))+\sin(2\widehat{\mathrm{C}})(1-\cos(2\widehat{\mathrm{B}})) > 0$$

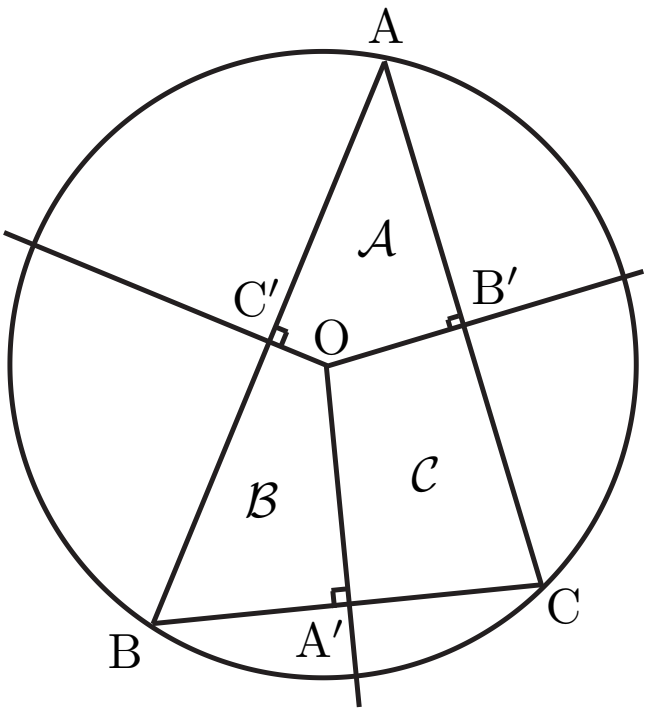
ce qui donne la position de O par rapport à la droite (BC) : les coordonnées barycentriques sont respectivement négative, positive,positive.

Proposition 5 — Distance au sommet. Soit ABC un triangle d'un plan euclidien ayant ses trois angles strictement aigus. Le point intérieur au triangle le plus éloigné des trois sommets est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

La distance est alors donnée par

$$d(\mathrm{O}, \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}) = \mathrm{R} = \frac{\mathrm{BC}}{2\sin(\mathrm{A})} = \frac{\mathrm{AC}}{2\sin(\mathrm{B})} = \frac{\mathrm{AB}}{2\sin(\mathrm{C})}\,.$$

Preuve.
Il s'agit de montrer que le point O réalise le maximum de la fonction

$$f : x \longmapsto \inf(d(x,\mathrm{A}), d(x,\mathrm{B}), d(x,\mathrm{C}))$$

pour x parcourant l'intérieur du triangle. Par continuité et compacité, on sait qu'un tel point existe.
D'après le corollaire 4, O est bien à l'intérieur du triangle ABC. On obtient ainsi le dessin suivant où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des points tel que $f(x) = d(x,\mathrm{A})$, $\mathcal{B}$ est l'ensemble des points tel que $f(x) = d(x,\mathrm{B})$ et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points tel que $f(x) = d(x,\mathrm{C})$ (puisque les points sont déterminés par les médiatrices).
On note A′ le milieu de [BC], B′ le milieu de [AC] et C′ le milieu de [AB]. D'après le lemme 1, f atteint son maximum sur $\mathcal{A}$ en $\mathrm{A}, \mathrm{B}', \mathrm{C}'$ ou O. Mais comme AB′O et AC′O est rectangle en O, on a $d(\mathrm{O},\mathrm{A}) > d(\mathrm{O},\mathrm{B}')$ et $d(\mathrm{O},\mathrm{A}) > d(\mathrm{O},\mathrm{C}')$ et $d(\mathrm{O},\mathrm{A}) > d(\mathrm{A},\mathrm{A})$. Ainsi O réalise le maximum sur $\mathcal{A}$. En raisonnant de même sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on obtient le résultat.