Ecole Normale Supérieure de Cachan
L3, Année universitaire 2005/2006
Géométrie

Examen du 20 janvier 2006
Durée 3 heures

Rappel : Tous les documents sont autorisés, par contre les étudiants ne peuvent ni communiquer, ni se communiquer entre eux des documents (livres inclus)

L'examen est constitué de deux exercices et d'un problème totalement indépendants les uns des autres.

Exercice 1

1. Tracer la courbe plane d'équation polaire : $r = \cos\theta \sin 2\theta$.
2. Quelle est l'équation cartésienne de cette courbe ?

Exercice 2

Quels sont les arcs réguliers de classe C^2 dans le plan euclidien dont le produit de la courbure et de l'abscisse curviligne vaut 1 ?

Problème

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On se donne une application $G \in C^\infty(I\!R^n, I\!R)$. On désigne par $\Sigma_c = \{v \in I\!R^n\,, G(v) = c\}$ les hypersurfaces de niveau de G ($c \in I\!R$). On dira que la valeur $c \in I\!R$ est régulière pour G si

(i) l'ensemble Σ_c est non vide,

(ii) $\forall v \in \Sigma_c\,, \nabla G(v) \neq 0$ [1].

1. Quelles sont les valeurs régulières dans les cas suivants :

$$G_1(v) = ||v||^2\,, \tag{1}$$
$$G_2(v) = (||v||^2 - 1)^2\,, \tag{2}$$
$$G_3(v) = (v_1)^2 - (v_2)^2\,, \text{ ici } n = 2\,. \tag{3}$$

Revenons au cas général. Soit $v_0 \in I\!R^n$ tel que $c_0 = G(v_0)$ soit une valeur régulière pour G. On désigne par ξ^n le vecteur $\nabla G(v_0)/||\nabla G(v_0)||$ et l'on complète ce vecteur de sorte que $(\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, \xi^n)$ soit une base orthonormée de $I\!R^n$. On désigne alors par $f\ : I\!R^{n-1} \times I\!R \to I\!R$ l'application définie par :

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = G(v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \xi^i + \alpha_n \xi^n) - G(v_0)\,.$$

[1] Le symbole ∇ désigne le gradient : $(\nabla G(v))_i = \frac{\partial G(v)}{\partial v_i}$

2. Montrer, en utilisant f, qu'il existe un voisinage U de v_0 et une application $\varphi \in C^\infty(\Omega, I\!R)$ où Ω est un ouvert non vide de $I\!R^{n-1}$ contenant 0 tels que

$$\Sigma_{c_0} \cap U = \{v = v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \xi^i + \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\xi^n, (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \Omega\}.$$

3. Interpréter géométriquement ce résultat.

4. Montrer que pour $v \in \Sigma_{c_0} \cap U$, $v = v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \xi^i + \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\xi^n$,

$$\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}, \nabla G(v) \cdot (\xi^i + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\xi^n) = 0.$$

On se donne une application $F \in C^\infty(I\!R^n, I\!R^n)$, et on considère l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = F(u)\,, \tag{4}$$

où u est une application d'un intervalle de $I\!R$ dans $I\!R^n$.

5. Justifier rapidement, en faisant appel à des résultats de cours, que pour tout $u_0 \in I\!R^n$, l'équation (4) possède une solution vérifiant $u(0) = u_0$.

On dit qu'un ensemble $E \subset I\!R^n$ est invariant par (4) si $\forall u_0 \in E$, il existe $\epsilon_0 > 0$ et une solution de (4) telle que $u(0) = u_0$ et $u(t) \in E\,, \forall t \in]-\epsilon_0, \epsilon_0[$.

6. Soit $c \in I\!R$ tel que Σ_c soit non vide. Montrer que si Σ_c est invariant par (4) alors

$$\forall v \in \Sigma_c\,, \quad \nabla G(v) \cdot F(v) = 0\,. \tag{5}$$

Soit c une valeur régulière pour G. *On suppose que (5) a lieu.*

7. Montrer qu'il existe $n-1$ fonctions $\lambda_i \in C^\infty(\Omega, I\!R)$ telles que pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \Omega$:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \xi^i + \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\xi^n\,, \\ F(v) &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(\xi^i + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})\xi^n)\,. \end{aligned}$$

8. En déduire que Σ_c est invariant par (4).

On suppose que $n = 2m$ est pair. On désigne alors par (p, q) le point courant de $I\!R^n$ avec $p \in I\!R^m$ et $q \in I\!R^m$. On prend alors

$$F(p, q) = \left(-\frac{\partial G(p, q)}{\partial q}\,, \frac{\partial G(p, q)}{\partial p}\right)\,.$$

9. Montrer que les ensembles Σ_c sont invariants.

10. On se place dans le cas $m = 1$ et on se donne $(p_0\,, q_0) \in I\!R^2$ tel que $\Sigma_{G(p_0, q_0)}$ soit régulière. Montrer que (4) se réduit localement à une équation différentielle ordinaire du premier ordre $\dot{x} = \zeta(x)$ où $x(\cdot)$ est à valeurs dans $I\!R$.