EXAMEN DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Master ENS Cachan
Parcours L3 Mathématiques

Examen du 10 Janvier 2007
Durée 3 heures

Rappel : Tous les documents sont autorisés, par contre les étudiants ne peuvent ni communiquer, ni se communiquer entre eux des documents (livres inclus)

L'objet de ce problème est d'étudier la fonction distance d'un point de $\mathbb{R}^{n+1}$ à une sous-variété de dimension n.

1ère partie. Définition de la fonction distance

A. Etude de quelques exemples.
On se donne un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$, tel que sa frontière $\Gamma \equiv \overline{\Omega} \backslash \Omega$ soit une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. On désigne par :

$$\Omega_1 = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad x_0^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}\,, \tag{1}$$

$$\Omega_2 = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad x_0^2 < 1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2\}\,, \tag{2}$$

$$\Omega_3 = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad |x_0| < 1\,, x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}\,, \tag{3}$$

$$\Omega_4 = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 < x_0^2\}\,, \tag{4}$$

$$\Omega_5 = \Omega_3 \cap \Omega_4 \,, \tag{5}$$

$$\Omega_6 = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,, \quad 1 < x_0^2 + \cdots + x_n^2 < 4\} \,, \tag{6}$$

Représentez par un dessin à main levée ces ensembles dans les cas $n = 1$ et $n = 2$ (x_0 représentera l'axe vertical).

2. On admettra qu'il s'agit bien d'ouverts. On note : $\Gamma_i \equiv \overline{\Omega}_i \backslash \Omega_i$. Quels sont les Γ_i qui sont des sous-variétés de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$ et quel sont ceux qui n'en sont pas (justifier brièvement).

B. Cas général.

3. On se donne $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrez que

$$\exists y \in \Gamma \,, \quad \forall z \in \Gamma \,, \quad ||y - x|| \leq ||z - x|| \,, \tag{7}$$

où $|| \cdot ||$ désigne la norme usuelle sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

4. Un tel y est-il nécessairement unique[1] ?

5. Soit donc $d_\Gamma(x) = ||y - x||$ où y est solution de (7). Montrez que le nombre $d_\Gamma(x)$ ne dépend pas du point y solution de (7).

6. Montrez que

$$\forall x_1 \,, x_2 \in \mathbb{R}^{n+1} \,, \quad |d_\Gamma(x_1) - d_\Gamma(x_2)| \leq ||x_1 - x_2|| \,. \tag{8}$$

7. Explicitez $d_{\Gamma_1}(x)$.

8. L'estimation (8) est elle optimale ?

2ème partie. Etude du cas où Γ est un graphe

On se donne une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, notée φ. On prend dorénavant

$$\Omega = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \,, \quad x_0 < \varphi(x_1, \ldots, x_n)\} \,, \tag{9}$$

[1] Indication : considérer $x = 0$ pour Γ_1

et on admettra que $\Gamma = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad x_0 = \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}$.

9. Montrez que Γ est une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.

C. Le cas $n = 1$.

10. Soit $x = (x_0, x_1)$ un point arbitraire de $\mathbb{R}^2$. Montrez que si $(\varphi(y_1), y_1) \in \Gamma$ est tel que $||y - x|| = d_\Gamma(x)$ alors

$$y_1 - x_1 + \varphi'(y_1)(\varphi(y_1) - x_0) = 0\,. \tag{10}$$

11. En déduire que :

$$d_\Gamma(x)^2 = (1 + \varphi'(y_1)^2)(\varphi(y_1) - x_0)^2 \tag{11}$$

12. Observer que $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\,, \quad d_\Gamma(x) = 0\}$ et montrer que si $x \notin \Gamma$ et si $y \in \Gamma$ vérifie $||y - x|| = d_\Gamma(x)$ alors $\varphi(y_1) - x_0 \neq 0$. On note alors $\varepsilon(y_1)$ son signe.

13. Sous ces hypothèses, montrez que

$$y_1 - x_1 = -\frac{\varepsilon(y_1)\varphi'(y_1)}{\sqrt{1 + \varphi'(y_1)^2}}\, d_\Gamma(x)\,. \tag{12}$$

14. On suppose que $x \notin \Gamma$ et qu'il existe $y \in \Gamma$ et $z \in \Gamma$ tels que $||y - x|| = ||z - x|| = d_\Gamma(x)$. Montrer que $\varepsilon(y_1) = \varepsilon(z_1)$.

15. Montrez[2] que la courbure géométrique de Γ au point $(\varphi(x_1), x_1)$ vaut

$$\rho(x_1) = \frac{|\varphi''(x_1)|}{(1 + \varphi'(x_1)^2)^{3/2}}\,. \tag{13}$$

16. On suppose désormais que la fonction ρ est majorée sur $\mathbb{R}$:

$$\kappa = \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} \frac{|\varphi''(x_1)|}{(1 + \varphi'(x_1)^2)^{3/2}} < \infty\,. \tag{14}$$

[2]Cette question est indépendante de ce qui précède

Montrez que si $x \in \mathbb{R}^2$ vérifie $\kappa d_\Gamma(x) < 1$ alors (7) possède une et une seule solution. Indication. On pourra utilement établir que :

$$\left| \frac{\varphi'(y_1)}{\sqrt{1+\varphi'(y_1)^2}} - \frac{\varphi'(z_1)}{\sqrt{1+\varphi'(z_1)^2}} \right| \leq \kappa |y_1 - z_1| \,, \quad \forall (y_1, z_1) \in \mathbb{R}^2 \,. \tag{15}$$

17. Montrer à l'aide d'un exemple qu'on ne peut pas affaiblir la condition $\kappa d_\Gamma(x) < 1$ et garder l'unicité dans la question précédente.

18. On désigne par $T = \{x \in \mathbb{R}^2 \,, \quad \kappa d_\Gamma(x) < 1\}$. Montrez que T est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

19. On considère l'application ζ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$(y_1, \delta) \longmapsto \left(\varphi(y_1) + \frac{\delta}{\sqrt{1+\varphi'(y_1)^2}} \,, y_1 - \frac{\delta \varphi'(y_1)}{\sqrt{1+\varphi'(y_1)^2}} \right) \,. \tag{16}$$

Montrer que ζ est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2 \times]-\frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}[$ sur $\zeta(\mathbb{R}^2 \times]-\frac{1}{\kappa}, \frac{1}{\kappa}[)$.

20. En déduire que la restriction de d_Γ à $T \cap \Omega$ peut être prolongée sur T en une application de classe C^∞, notée $\bar{d}_\Gamma$, telle que $(\nabla \bar{d}_\Gamma)(x)$ soit un vecteur unitaire normal à Γ lorsque $x \in \Gamma$.

FIN DE L'EPREUVE

D. Le cas $n \geq 2$.

21. Pour $y^\sharp = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on désigne par $R(y^\sharp)$ la matrice $n \times n$:

$$R_{i,j}(y^\sharp) = \frac{(1+|\nabla\varphi|^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_k \partial y_j}\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}}{(1+|\nabla\varphi|^2)^{3/2}}(y^\sharp)\,. \tag{17}$$

Montrez que $R(y^\sharp)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

22. On note $\rho(R(y^\sharp))$ la plus grande valeur absolue des valeurs propres de $K(y^\sharp)$ et on suppose que

$$\kappa = \sup_{y^\sharp \in \mathbb{R}^n} \rho(R(y^\sharp)) < \infty\,. \tag{18}$$

Généralisez les résultats de la partie **C**.

3ème partie. Etude du cas où Γ est une sous-variété

23. Généralisez les résultats de la partie **C** au cas où Γ est une sous-variété de classe C^∞ de dimension n de $\mathbb{R}^{n+1}$.