EXAMEN DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Master ENS Cachan
Parcours L3 Mathématiques

Examen du 18 Janvier 2008
Durée 3 heures

Rappel : Tous les documents sont autorisés, par contre les étudiants ne peuvent ni communiquer, ni se communiquer entre eux des documents (livres inclus)

La qualité de la rédaction sera un des éléments clés d'évaluation des copies.

L'épreuve est constituée par 5 exercices indépendants.

Exercice 1

1. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer qu'il existe une et une seule fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$f(x) = f(0) + xg(x)\,, \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

2. Généraliser à $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.
3. On se donne $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $k \geq 1$. Montrer que la décomposition (1) est valable avec $g \in \mathcal{C}^{k-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'en général $g \notin \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2

1. Tracer la courbe plane d'équation polaire $r = \sin \frac{2\theta}{3}$.
2. Déterminer une abscisse curviligne $\theta \to s(\theta)$ sur cette courbe sous la forme d'une intégrale.

Exercice 3

Une loi d'état est une fonction régulière $f : (\mathbb{R}_*^+)^3 \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial P}\frac{\partial f}{\partial V}\frac{\partial f}{\partial T}$ ne s'annule pas. On a noté (P, V, T) le point courant de $(\mathbb{R}_*^+)^3$.
1. Montrer que pour toute constante positive R, $f_R(P, V, T) \equiv PV - RT$ est une loi d'état.
2. Résoudre $f_R(P, V, T) = 0$ en exprimant $P = P(V, T)$, $V = V(T, P)$ et $T = T(P, V)$ puis monter que

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -1\,. \tag{2}$$

3. Généralisez cette identité à une loi d'état arbitraire.

Exercice 4

On considère les courbes dans $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{C} = \{(x, y(x), 0)\,, x \in [x_0\,, x_1]\}$ où $y(\cdot)$ est une fonction régulière à valeurs positives ou nulles.

1. Montrer par un raisonnement géométrique simple que l'aire de la surface que l'on obtient en faisant tourner $\mathcal{C}$ autour de l'axe des x dans $\mathbb{R}^3$ est

$$2\pi \int_{x_0}^{x_1} y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx\,.$$

2. On se donne deux réels positifs y_0 et y_1. Quelles sont les courbes $\mathcal{C}$, vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$ qui minimisent l'aire de la surface précédente ?

Exercice 5

Etant donnés $R > r > 0$, on considère la surface paramétrée :

$$\begin{aligned} x &= (R + r\cos\varphi)\,\cos\theta\,, \\ y &= (R + r\cos\varphi)\,\sin\theta\,, \\ z &= r\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

1. Représenter l'intersection de cette surface avec le plan $y = 0$ puis avec le plan $z = 0$. Reconnaître cette surface.
2. Calculer la première forme quadratique fondamentale de cette surface.
3. Déterminer un système différentiel dont les solutions sont les géodésiques.
4. Etudier ce système d'équations.