EXAMEN DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Master ENS Cachan
Parcours L3 Mathématiques

Examen du 16 Janvier 2009
Durée 3 heures

Rappel : Tous les documents sont autorisés, par contre les étudiants ne peuvent ni communiquer, ni se communiquer entre eux des documents (livres inclus)

La qualité de la rédaction sera un des éléments clés d'évaluation des copies.

L'épreuve est constituée de 4 exercices indépendants.
Elle comporte un rappel de cours à la page 4.

Exercice 1

On se donne une application M de classe $\mathcal{C}^\infty$ de l'intervalle $]-1\,,\,1[$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices 2×2 à coefficients réels. On désigne par $\lambda_1(\varepsilon)\leq\lambda_2(\varepsilon)$ les valeurs propres[1] dans $\mathbb{C}$ de $M(\varepsilon)$ pour $\varepsilon\in]-1\,,\,1[$.

1. Quelle est la régularité de l'application $\varepsilon\mapsto\lambda_1(\varepsilon)+\lambda_2(\varepsilon)$?
2. Discuter la régularité de l'application $\varepsilon\mapsto\lambda_1(\varepsilon)$.

Exercice 2

Montrer à l'aide du calcul des variations (Théorème 1 page 4) que le cercle est la courbe fermée qui, à longueur donnée, entoure la surface maximale.

Exercice 3

On s'intéresse à la surface (S) dans $\mathbb{R}^3$ d'équation ($h>0$ est une constante) :

$$z=\frac{x^2+y^2}{2h}\,. \tag{1}$$

1. Représenter cette surface en perspective dans $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa nature ?
2. On considère les courbes tracées sur (S) qui possèdent un paramétrage cylindrique avec $r=r(\theta)$ où r est une fonction régulière de $\theta\in\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'avec la notation $e_\theta=(\cos\theta,\sin\theta,0)$, un vecteur tangent à (S) en $M(\theta)$ est :

$$U(\theta)=\frac{dr}{d\theta}\,e_\theta+r\,e_{(\theta+\frac{\pi}{2})}+\frac{r}{h}\frac{dr}{d\theta}\,e_z\,. \tag{2}$$

3. Construire le repère de Darboux-Ribaucour associé à cette courbe.
4. Montrer que l'équation différentielle des géodésiques sur (S) est :

$$r\left(1+\frac{r^2}{h^2}\right)\frac{d^2r}{d\theta^2}=r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(2+\frac{r^2}{h^2}\right)\,. \tag{3}$$

5. Ramener la résolution de cette équation à une famille d'équations différentielles du premier ordre du type ($\lambda\in\mathbb{R}$ est une constante arbitraire) :

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=F\left(r;h,\lambda\right)\,. \tag{4}$$

[1] rangées suivant l'ordre lexicographique dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4

On considère une fonction régulière H de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$:

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto H(x_1, x_2, y_1, y_2).$$

On s'intéresse alors au système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}(x_1, x_2, y_1, y_2)\,, \tag{5}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2}(x_1, x_2, y_1, y_2)\,, \tag{6}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2, y_1, y_2)\,, \tag{7}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2, y_1, y_2)\,. \tag{8}$$

1. Montrer que quel que soit $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in \mathbb{R}^4$ il existe une unique solution maximale de (5) à (8) passant par ce point en $t = 0$.
2. Calculez $\frac{d}{dt}H(x_1, x_2, y_1, y_2)$ le long de cette solution. Qu'en déduisez vous ?
3. On note $\mathcal{I} \equiv H(\mathbb{R}^4)$ et pour $c \in \mathcal{I}$ on désigne par $\mathcal{E}_c$ l'ensemble de niveau de H, c'est à dire :

$$\mathcal{E}_c = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4\,; H(x_1, x_2, y_1, y_2) = c\}\,. \tag{9}$$

Montrer que $\mathcal{E}_c$ est fermé.
4. Montrer que pour tout $(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\mathcal{E}_{H(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0)}$ est borné, la solution maximale obtenue au numéro **1**. est définie pour $t \in \mathbb{R}$.
5. On dit que la valeur $c \in \mathcal{I}$ est régulière si :

$$\forall m \in \mathcal{E}_c\,, \quad |\nabla H(m)| > 0\,. \tag{10}$$

Montrer que si $c \in \mathcal{I}$ est régulière alors $\mathcal{E}_c$ est une variété. Quelle est sa dimension ?
6. On se donne $\overline{m}$ tel que $\frac{\partial H}{\partial y_2}(\overline{m}) \neq 0$. Montrer que pour m^0 au voisinage de $\overline{m}$, résoudre (5) à (8) avec la condition initiale $m(0) = m^0$ revient à résoudre un système de 3 équations différentielles pour (x_1, x_2, y_1).
*7. Discuter la régularité, de la compacité, de la connexité et de la dimension des ensembles $\mathcal{E}_c$.

Rappel de cours

Donnons nous un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et deux points non forcément distincts a et b. L'espace des chemins tracés dans U allant de a à b est

$$\Gamma(a,b) = \{u \in C^\infty([0,1],U),\ \text{vérifiant } u(0)=a,\ u(1)=b\}\,. \tag{11}$$

Considérons alors une fonction L sur $U \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles, $(u,p) \longmapsto L(u,p)$, et notons pour $u \in \Gamma(a,b)$:

$$\mathcal{L}(u) = \int_0^1 L\left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)\, dt\,. \tag{12}$$

Ecrivons en général la contrainte sous la forme :

$$\int_0^1 Q\left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)\, dt = q_0\,, \tag{13}$$

où Q est similaire à L et q_0 désigne une constante réelle. On montre alors le résultat suivant.

Théorème 1 *Sous les hypothèses qui précèdent, un élément u de $\Gamma(a,b)$ ne vérifiant pas l'équation différentielle :*

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial Q}{\partial p_i}\left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)\right\} = \frac{\partial Q}{\partial u_i}\left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)\,, \tag{14}$$

est extrémal pour $\mathcal{L}$ sous la contrainte (13) si et seulement s'il existe une constante réelle λ telle que u vérifie le système d'équations différentielles : $\forall i = 1 \dots n$,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial (L+\lambda Q)}{\partial p_i}\left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)\right\} = \frac{\partial (L+\lambda Q)}{\partial u_i}\left(u(t), \frac{du}{dt}(t)\right)\,. \tag{15}$$