Formation en Mathématiques Commune Cachan / P7 — Année 2009–2010
Calcul différentiel — Frédéric Pascal, Vincent Beck

# Examen du 13 janvier 2010

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées. Il est interdit de communiquer par un quelconque moyen. Les exercices sont indépendants.

## Exercice 1

**a)** On pose
$$C = \{X \in \mathbb{R}^3, \quad \forall\, i \in \{1,2,3\}, \quad 0 < X_i < 1\}$$
et
$$S = \left\{ Y \in \mathbb{R}^3, \quad \forall\, i \in \{1,2,3\}, \quad Y_i > 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{3} Y_i < 1 \right\}.$$
Soit $\varphi$ de $C$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(X) = Y$ avec $Y_k = (1 - X_1)\cdots(1 - X_{k-1})X_k$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{3} Y_i = 1 - \prod_{i=1}^{3}(1 - X_i),$$
puis que $\varphi$ est un difféomorphisme de $C$ sur $S$ et déterminer son inverse.

**b)** On pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y\}$. Trouver un difféormorphisme local $f$ près de $(0,0)$ tel que
$$f(C) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \quad v = 0\}.$$

**c)** On pose
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad xz + \sin(xy) + \cos(xz) = 1\}.$$
Déterminer si dans un voisinage de $(0,1,1)$ l'ensemble $S$ peut être écrit sous la forme $z = f(x,y)$ ou $y = g(x,z)$ ou $x = h(y,z)$.

## Exercice 2 – Équation de Burgers (Johannes (Jan) Martinus Burgers (1895-1981)).

Soit $a$ et $u_0$ 2 fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$. On cherche $u(t,x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{ et } \quad u(0,x) = u_0(x).$$

**a)** Pour $u$ solution, on définit les courbes caractéristiques par la donnée de $s$ et de $X(t)$ tels que
$$\frac{dX}{dt} = a(u(t, X(t))) \quad \text{ avec } X(0) = s\,.$$
Montrer que $u(t, X(t))$ est constante et en déduire que $X(t)$ est une fonction affine que l'on déterminera.

**b)** Montrer qu'en « remontant la caractéristique », on a nécessairement
$$u(t,x) = u_0(x - ta(u(t,x)))\,.$$
En introduisant $F(s,x,t) = s - u_0(x - ta(s))$, montrer qu'il existe une solution définie localement de l'équation de Burgers.

**Exercice 3 – Groupe orthogonal.**

**a)** Montrer que l'ensemble $O_n = \{O \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tO\,O = \mathrm{Id}\}$ est une sous-variété de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ contenant Id et dont on donnera la dimension.

**b)** Déterminer l'espace tangent $T$ à $O_n$ en Id puis en tout point de $O_n$ en fonction de $T$.

**c)** Montrer que $O_n$ est formé de matrices inversibles, que l'application

$$\mathrm{inv}\colon \begin{cases} O_n \longrightarrow O_n \\ O \longmapsto O^{-1} \end{cases}$$

est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Calculer sa différentielle.

**d)** Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie sur une sous-variété $M$. On suppose que $f$ admet un maximum en $x_0$. Montrer que $\mathrm{d}f_{x_0} = 0$.

**e)** Soit $D_0 = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$ et $S$ une matrice symétrique. Montrer que $\varphi : O \mapsto \mathrm{tr}\,(OSO^{-1}D_0)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $O_n$ et qu'elle y atteint son maximum.

**f)** Soit $O_0$ un point où $\varphi$ atteint son maximum. Montrer que $O_0S\,{}^tO_0$ commute avec $D_0$. En déduire que $O_0S\,{}^tO_0$ est diagonale.

**Exercice 4 – Inégalité de Kantorovitch.** Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. On note $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de $A$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de $A$ telle que $Ae_i = \lambda_i e_i$. On suppose que $A$ a $r$ valeurs propres distinctes : $\mathrm{Spec}(A) = \{\mu_j,\ \ j \in \{1, \ldots, r\}\}$ avec $\mu_i < \mu_j$ si $i < j$ (en particulier $\mu_1 = \lambda_1$ et $\mu_r = \lambda_n$). Pour $j \in \{1, \ldots, r\}$, on note $E_j = \ker(A - \mu_j\mathrm{Id})$ le sous-espace propre de $A$ associé à la valeur propre $\mu_j$. Tout élément $x$ de $\mathbb{R}^n$ se décompose donc de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{j=1}^{r} v_j \qquad \text{avec} \quad v_j \in E_j\,. \tag{1}$$

**a)** Montrer que l'application

$$J\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \langle x, Ax\rangle\langle x, A^{-1}x\rangle \end{cases}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa différentielle et son gradient.

**b)** On considère $\widetilde{J}$, la restriction de $J$ à la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\widetilde{J}$ admet un minimum et un maximum.

**c)** En utilisant le théorème des extrema liés, montrer qu'un point extrémal de $\widetilde{J}$ est dans la somme directe d'au plus deux sous-espaces propres de $A$ (c'est-à-dire qu'au plus deux des $v_j$ de (**1**) sont non nuls).

**d)** Soit $x = x_ie_i + x_je_j$ avec ${x_i}^2 + {x_j}^2 = 1$. Calculer $J(x)$.

On rappelle les deux inégalités suivantes : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $x + 1/x \geqslant 2$ ; pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $u + v \leqslant 1$ et tout $\alpha \geqslant 1$, on a

$$u^2 + 2\alpha uv + v^2 \leqslant 1 + (\alpha - 1)/2\,.$$

**e)** En déduire la valeur minimale de $J$.

**f)** En déduire la valeur maximale de $\widetilde{J}$.

**g)** Montrer que la fonction $J$ n'est pas convexe si $\lambda_n/\lambda_1$ est suffisamment grand (on pourra considérer la restriction de $J$ au plan engendré par $e_1$ et $e_n$).

**Exercice 5 – Problème de Fermat.** Soit $A, B, C$ trois points non alignés du plan.

**a)** Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto MA + MB + MC$ est strictement convexe.

**b)** Montrer que l'application $\varphi$ admet un unique minimum.

**c)** Soit $M_0$ le point où le minimum de $\varphi$ est atteint. A-t-on $\mathrm{d}\varphi_{M_0} = 0$ ?