Vincent Beck

Partiel du 2 Novembre 2010

La clarté de l'argumentation de même que la qualité de la rédaction seront des éléments importants dans l'appréciation de la copie.

Les seuls documents autorisés sont les notes personnelle (cours et TD), les transparents de cours et les feuilles de TD.

Les résultats **démontrés** *en cours et en TD peuvent être utilisés librement en citant précisément la référence.*

Les exercices sont indépendants excepté la dernière question de l'exercice 3 qui utilise la première question de l'exercice 2.

Exercice 1 – Fermeture séparable. Soit k un corps et K une extension de k. On note $\mathrm{K}_s := \{x \in \mathrm{K},\ x \text{ séparable sur } k\}$ et on dit que K_s est la *fermeture séparable de k dans* K.

a) Montrer que K_s est une extension de k qui est séparable.

b) Soit k un corps. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes

(i) Tout polynôme irréductible sur k et séparable est de degré 1.

(ii) Toute extension séparable de k est de degré 1.

Un corps vérifiant ces propriétés est dit *séparablement clos.*

Soit k un corps et K une extension de k. On dit que K est une clôture séparable de k si $(\mathrm{K} : k)$ est séparable et K est séparablement clos.

c) Montrer qu'un corps algébriquement clos est séparablement clos.

d) Montrer que tout corps admet une clôture séparable.

e) Soit k un corps parfait. Montrer que toute clôture algébrique de k est une clôture séparable de k et inversement.

f) Soient K une clôture séparable de k et L une extension séparable de k. Montrer qu'il existe $[\mathrm{L} : k]_{\mathrm{s}}$ k-morphisme de L dans K (en particulier, il en existe un).

g) Montrer que deux clôtures séparables d'un même corps k sont k-isomorphes.

h) Soit K une clôture séparable de k. Montrer que K est une extension normale de k.

Exercice 2 – Polynôme irréductible et dérivation. Soit k un corps de caractéristique p

a) Montrer que si P est un polynôme irréductible alors il existe un entier unique entier e et un unique polynôme $\mathrm{Q} \in k[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{Q}(\mathrm{X}^{p^e})$ et Q est irréductible et séparable. On dit que e est *l'exposant radical de e.*

b) Soit $\mathrm{K} = k(x)$ une extension algébrique monogène de k et P le polynôme minimal de x sur k. Montrer que $[\mathrm{K} : k]_{\mathrm{s}} p^e = [\mathrm{K} : k]$ où e est l'exposant radical de P.

c) En déduire que si K est une extension algébrique finie de k alors $[\mathrm{K} : k]_{\mathrm{s}} \mid [\mathrm{K} : k]$ et que le quotient est une puissance de p.

d) Soit $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}]$ un polynôme irréductible non séparable. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{Q} \in k[\mathrm{X}]$ vérifiant $\mathrm{P} = \mathrm{Q}(\mathrm{X}^p)$. Montrer que Q est irréductible et que tous les coefficients de Q ne sont pas dans $k^{[p]}$.

Les deux questions qui suivent proposent de montrer une réciproque à la question **d**. Soit $\mathrm{Q} \in k[\mathrm{X}]$ un polynôme irréductible dont tous les coefficients ne sont pas dans $k^{[p]}$. Le but est de montrer que $\mathrm{P} := \mathrm{Q}(\mathrm{X}^p)$ est irréductible.

e) On suppose qu'on peut écrire une factorisation de P sous la forme $\mathrm{P} = \mathrm{UV}$ avec U et V premier entre eux. En utilisant une relation de Bézout entre U et V, montrer que $\mathrm{U}' = \mathrm{V}' = 0$. En déduire qu'une telle factorisation n'est pas possible.

f) Déduire de la question précédente qu'il existe U irréductible sur k et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P} = \mathrm{U}^n$. Montrer que n n'est pas un multiple de p puis que $\mathrm{U}' = 0$. Conclure.

Exercice 3 – Extension purement inséparable. Soient k un corps de caractéristique p et K une extension de k et L une extension de K.

a) Soit $\alpha \in \mathrm{K}$. On note P_α le polynôme minimal de α sur k. Montrer l'équivalence des propositions suivantes

(i) P_α a une unique racine dans Ω une clôture algébrique de k ;
(ii) P_α a une unique racine dans son corps de décomposition ;
(iii) il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a \in k$ tel que $\mathrm{P}_\alpha = \mathrm{X}^{p^n} - a$;
(iv) il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha^{p^n} \in k$;
(v) $[k(\alpha) : k]_{\mathrm{s}} = 1$.

Un élément α vérifiant ces conditions est dit *purement inséparable sur* k.

b) Montrer l'équivalence des propositions

(i) $[\mathrm{K} : k]_s = 1$;
(ii) Tous les éléments de K sont purement inséparables ;
(iii) K est engendré sur k par des éléments purement inséparables.

Une telle extension dite extension purement inséparable sur k.

c) Montrer que l'extension L est une extension purement inséparable de k et si et seulement si L est une extension purement inséparable de K et K une extension purement inséparable de k.

d) Soient M, N deux sous-extensions de K. On suppose que M est purement inséparable sur k. Montrer que MN (la sous-k-extension engendrée par M et N) est purement inséparable sur N.

e) On suppose que K est une extension à la fois séparable et purement inséparable de k. Que peut-on en déduire ?

f) On suppose que K est une extension algébrique de k. Montrer qu'il existe une unique sous-extension K_{s} de K vérifiant les deux propriétés suivantes : K_{s} est une extension séparable de k et K est une extension purement inséparable de K_{s} (on pourra utiliser la question **a** de l'exercice 2).

Exercice 4 — Corps parfait. Soit K un corps.

a) On suppose que K est parfait. Soit L une extension algébrique de K. Montrer que L est parfait.

b) On suppose que K est un corps de caractéristique p. Soient k un sous-corps de K et $x \in \mathrm{K}$ tel que $x^p \in k$. Montrer que si $x \notin k$ et $x = y^p \in \mathrm{K}^{[p]}$ alors $[k(x) : k] = p$ et $[k(y) : k(x)] = p$ (on pourra montrer que le polynôme $\mathrm{X}^{p^2} - x^p \in k[\mathrm{X}]$ est irréductible).

c) On suppose que K est parfait. Soit k un sous-corps de K tel que $[\mathrm{K} : k] < +\infty$. Montrer que k est parfait.

Exercice 5 — Racines de l'unité et corps finis. Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$ et $q = p^n$.

a) Montrer que $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si $q = -1[3]$ (on pourra distinguer le cas où $p = 3$ et $p \neq 3$ et étudier l'ordre d'une racine de $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$ dans $\mathbb{F}_q[\mathrm{X}]/\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1^\times$).

b) Montrer que $\mathrm{X}^2 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ si et seulement si $q = -1[4]$ (on pourra distinguer le cas où $p = 2$ et $p \neq 2$ et et étudier l'ordre d'une racine de $\mathrm{X}^2 + 1$ dans $\mathbb{F}_q[\mathrm{X}]/\mathrm{X}^2 + 1^\times$).

c) En déduire que si $q = -1[12]$ alors $\mathbb{F}_q[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1)$ et $\mathbb{F}_q[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^2 + 1)$ sont isomorphes et décrire de façon explicite un isomorphisme entre les deux.

Exercice 6 — Extension normale. Soit K une extension de k engendrée par des éléments de degré 2. Montrer que $(\mathrm{K} : k)$ est normale.