Vincent Beck

Encore quelques exercices !

Exercice 1 — Centralisateur. Soient G un groupe, S une partie de G et $H \leqslant G$. On note

$$Z_H(S) = \{g \in H, \quad sg = gs \ \forall s \in S\}.$$

a) Montrer que $Z_H(S)$ est un sous-groupe de H.

b) On suppose $S \subset T$. Comparer $Z_H(S)$ et $Z_H(T)$.

c) On suppose $H' \leqslant H$,Comparer $Z_{H'}(S)$ et $Z_H(S)$.

d) En déduire que $Z_H(S) = Z_G(S) \cap H$.

e) On note Z(G) plutôt que $Z_G(G)$. On dit que c'est le *centre de* G. À quelle condition a-t-on $Z(G) = G$?

f) Calculer Z(GL(V)) et $Z(\mathfrak{S}(X))$.

g) Montrer que Z(G) est distingué dans G et que tout sous-groupe de Z(G) est distingué dans G.

h) Relier Z(G) au noyau de $\mathrm{Int} : G \to \mathrm{Aut}(G)$.

Exercice 2 — Sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

a) Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Le groupe $\langle m, n\rangle$ engendré par m et n est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ donc de la forme $k\mathbb{Z}$. Exprimer k en fonction de m et n.

b) Même question avec $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.

Exercice 3 — Sous-groupe d'un groupe. Montrer que l'ensemble $\mathscr{G} = \{H \leqslant G\}$ est sous-groupe de G est un treillis pour la relation d'inclusion.

Exercice 4 — Groupe dérivé. Soit G un groupe. Pour $x, y \in G$, on note $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ le *commutateur* de x et y et on définit D(G) (parfois noté [G, G]) le sous-groupe engendré par les commutateurs.

a) Montrer que tout élément de D(G) est un produit de commutateur.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $D(G) = 1$.

c) Soient G, H deux groupes et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupes. Montrer que φ induit un morphisme de groupe de D(G) dans D(H) (surjectif si φ l'est).

d) En déduire que D(G) est un sous-groupe caractéristique et donc distingué de G.

e) Montrer que si H est commutatif et $\varphi : G \to H$ un morphisme de groupe alors $D(G) \subset \mathrm{Ker}\, f$.

f) Montrer que G/D(G) est commutatif et que tout sous-groupe de G contenant D(G) est un sous-groupe distingué de G.

g) Soit A un groupe abélien. Montrer que tout morphisme de groupes de G dans A se factorise de façon unique par la surjection canonique $\pi : G \to G/D(G)$.

h) Soit A un groupe abélien et $\varphi : G \to A$ un morphisme de groupes de G dans A tel que φ induise (par factorisation) un isomorphisme entre G/D(G) est A. Montrer que tout morphisme de groupes de G dans un groupe abélien B se factorise de façon unique par φ.

i) Déterminer le sous-groupe dérivé de $\mathfrak{S}_n$ et de GL(V) où V est un espace vectoriel de dimension finie.