Vincent Beck

Géométrie différentielle

Sous-variété.

Définition 1 – Sous-variété. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie de direction E, M un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ et k un entier supérieur ou égal à 1.

On dit que M est une *sous-variété de classe* $\mathscr{C}^k$ *en* $m \in \mathrm{M}$, s'il existe un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\psi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ où U est un voisinage ouvert de m dans $\mathscr{E}$, V un voisinage ouvert de 0 dans E et tel que $\psi(\mathrm{M} \cap \mathrm{U}) = \mathrm{F} \cap \mathrm{V}$ (où F est un sous-espace vectoriel de E) et $\psi(m) = 0$.

La dimension de F est appelé la dimension de M en a et noté $\dim_a(\mathrm{M})$

On dit que M est une *sous-variété de classe* $\mathscr{C}^k$ si M est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^k$ en m pour tout $m \in \mathrm{M}$.

Il est important de bien comprendre le sens de l'égalité $\psi(\mathrm{M} \cap \mathrm{U}) = \mathrm{F} \cap \mathrm{V}$. Elle signifie que ψ transforme ma sous-variété M en quelque chose de tout plat : l'espace vectoriel F. Le tout étant local (c'est-à-dire dans des voisinages des points considérés) ce qui donne l'écriture « complexe » avec les intersections...

Exercice 1 – Propriétés élémentaires.

a) Montrer que l'entier $\dim_a(\mathrm{M})$ est bien défini (c'est-à-dire ne dépend pas de ψ).

b) Montrer que l'ensemble des points m de M tel que M soit une sous-variété est un ouvert de M (éventuellement vide).

c) Montrer que l'application $a \mapsto \dim_a(\mathrm{M})$ est localement constante.

d) Montrer que si φ est un difféomorphisme de $\mathscr{E}$ alors $\varphi(\mathrm{M})$ est une sous-variété en $\varphi(m)$ si et seulement si M est une sous-variété en $m \in \mathrm{M}$.

e) Montrer qu'un ouvert de $\mathscr{E}$ est une sous-variété de dimension $\dim \mathscr{E}$. Inversement que peut-on dire d'une sous-variété de $\mathscr{E}$ de dimension $\dim \mathscr{E}$?

Il n'est pas a priori évident de montrer qu'un ensemble est une sous-variété (même en un point) : trouver un ψ qui convient n'est pas simple. On va donc donner des caractérisations géométriques simples à utiliser pour reconnaître des sous-variétés. C'est le sens du théorème des sous-variétés. Il est indispensable de bien le comprendre et surtout de savoir le démontrer rapidement. Ce théorème n'est en fait rien d'autre que l'interprétation géométrique des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites.

Théorème 2 – Théorème des sous-variétés. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie n de direction E, M un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ et k un entier supérieur ou égal à 1. On a les équivalences suivantes

(i) *Vision sous-variétés.* M est un sous-variété en m de dimension d de classe $\mathscr{C}^k$;

(ii) *Vision fonction implicite.* il existe un voisinage ouvert U de m dans $\mathscr{E}$ et une fonction $f : \mathrm{U} \to \mathrm{G}$ de classe $\mathscr{C}^k$ (où G est un espace vectoriel de dimension $n - d$) telle que $\mathrm{M} \cap \mathrm{U} = f^{-1}(0) \cap \mathrm{U}$ ou encore tel que

$$x \in \mathrm{M} \cap \mathrm{U} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathrm{U} \text{ et } f(x) = 0\,.$$

et telle que $\mathrm{d}f(m)$ soit surjective.

(iii) *Vision paramétrique.* il existe un voisinage ouvert U de m dans $\mathscr{E}$, un voisinage ouvert Ω de 0 dans F (où F est un espace vectoriel de dimension d) et une fonction $\varphi : \Omega \to \mathscr{E}$ telle que $\varphi(0) = m$, φ soit un homéomorphisme de Ω sur $\mathrm{M} \cap \mathrm{U}$ et $\mathrm{d}\varphi(0)$ soit injective.

Exercice 2 – Démonstration du théorème des sous-variétés.

a) Pour montrer que (i) $\Rightarrow$ (ii), considérer G un supplémentaire de F dans E tel que p la projection sur G de noyau F et poser $f = p \circ \psi$.

b) Pour montrer que (i) $\Rightarrow$ (iii), considérer $\varphi = \psi^{-1} \circ i$ où i est l'inclusion de F dans E (c'est-à-dire $i(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{F}$).

c) Pour montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i), on définit G′ un supplémentaire de $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f(m)$ et p la projection sur $\operatorname{Ker} \mathrm{d}f(m)$ parallèlement à G′. Montrer que l'application $\psi : \mathrm{U} \to \operatorname{Ker} \mathrm{d}f(m) \times \mathrm{G}$ définie par

$$\psi(x) = (p(x - m), f(x))$$

convient (quitte à restreindre les ensembles de définition).

d) Pour montrer que $(iii) \Rightarrow (i)$, on définit G' un supplémentaire de $\operatorname{Im} \mathrm{d}\varphi(0)$. Montrer que l'application

$$\begin{cases} \Omega \times \mathrm{G}' \longrightarrow \mathscr{E} \\ (x, v) \longmapsto \varphi(x) + v \end{cases}$$

est un difféomorphisme d'un voisinage 0 dans un voisinage de m. Montrer que l'inverse convient.

On peut aussi donner une caractérisation des sous-variétés sous-forme de graphe (voir le livre de Rouvière [ROU]), cette caractérisation revient peu ou proue à démontrer l'équivalence entre le théorème d'inversion local et le théorème des fonctions implicites (ce qu'il est indispensable de savoir faire !). J'ai fait le choix de ne pas donner cette caractérisation pour plusieurs raisons. La première est qu'en pratique, elle n'est pas très utile : ce qui est vraiment utile c'est de savoir démontrer qu'un graphe est une sous-variété (faites-le, ça prend une ligne pour se ramener au cas (ii) ou une autre ligne pour se ramener au cas (iii)). La deuxième est que, dans le cadre abstrait dans lequel je me suis placé, la décomposition de $\mathscr{E}$ en un produit d'ensemble n'est pas naturelle contrairement au cas de l'ensemble $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ et la formulation deviendrait donc très technique et artificiel. Par ailleurs, j'ai fait le choix de ce cadre abstrait pour éviter les problèmes techniques liés au choix des coordonnées (par exemple leur ordre...) et rendre ainsi les démonstrations plus « simples ».

On a dit que localement une sous-variété M est un objet qui est comme un objet plat : un espace vectoriel. Un des inconvénients est qu'il n'y a pas qu'une seule façon d'aplatir M. Ainsi la façon de transformer M en quelque chose de plat n'est pas neutre. Pour contourner ces inconvénients, on va définir de façon intrinsèque un objet plat associé à un point de m : un espace vectoriel de dimension d : l'espace tangent à M en m.

Définition 3 – Vecteur tangent – Espace tangent. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie n de direction E, M un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ et $m \in \mathrm{M}$.

Un vecteur $v \in \mathrm{E}$ est dit *tangent en m à* M s'il existe une fonction dérivable $\gamma : \mathrm{I} \to \mathscr{E}$ où I est un intervalle ouvert contenant 0 telle que

$$\gamma(\mathrm{I}) \subset \mathrm{M}, \qquad \gamma(0) = a \qquad \text{et} \qquad \gamma'(0) = v\,.$$

On appelle *espace tangent à m en* M et on note $\mathrm{T}_m(\mathrm{M})$, l'ensemble des vecteurs tangents à $m \in \mathrm{M}$.

La définition de vecteurs tangents s'applique à tous sous-ensemble de $\mathscr{E}$. Le résultat principal concernant les sous-variétés à propos de l'espace tangent est que l'espace tangent en un point d'une sous-variété est un espace vectoriel dont la dimension est la dimension de la sous-variété.

Exercice 3 – Espace vectoriel tangent à une sous-variété. Soient $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension finie n de direction E, M un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ et $m \in \mathrm{M}$.

a) On suppose que M est une sous-variété de dimension d et de classe $\mathscr{C}^k$ en $m \in \mathrm{M}$. Montrer que $\mathrm{T}_m(\mathrm{M})$ est un espace vectoriel de dimension d. Indication : on pourra considérer les courbes $\gamma(t) = \psi^{-1}(tv)$ pour $v \in \mathrm{F}$.

b) On suppose que M est donnée implicitement autour de m comme en (ii). Exprimer $\mathrm{T}_m(\mathrm{M})$ en fonction de $\mathrm{d}f(m)$.

c) On suppose que M est donnée paramétriquement autour de m comme en (iii). Exprimer $\mathrm{T}_m(\mathrm{M})$ en fonction de $\mathrm{d}\varphi(m)$.

On définit à présent le moyen de passer d'une sous-variété à une autre : la notion d'application de classe $\mathscr{C}^k$. Une application de classe $\mathscr{C}^k$ n'est autre que la restriction (localement) à la sous-variété d'une application usuelle de classe $\mathscr{C}^k$. Ces applications sont les « bonnes » applications entre les sous-variétés car elles induisent aussi des applications linéaires (les différentielles) entre les espaces tangents : elles s'adaptent bien la structure plate de variétés.

Définition 4 – Fonction $\mathscr{C}^k$ entre sous-variétés. Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux $\mathbb{R}$-espaces affines de dimension finie, M (resp. N) un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ (resp. N), k un entier supérieur ou égal à 1 et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application.

On suppose que M est une sous-variété de $\mathscr{E}$ en $m \in \mathrm{M}$ et N une sous-variété de $\mathscr{F}$ en $f(m)$. On dit que $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est *de classe $\mathscr{C}^k$ en m* s'il existe une fonction $g : \mathrm{U} \to \mathscr{F}$ définie dans un voisinage U de m dans $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ telle que $f = g_{|\mathrm{M} \cap \mathrm{U}}$.

Si M (resp. N) est une sous-variété de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$), on dit que $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est de *classe $\mathscr{C}^k$ sur* M si f est de classe $\mathscr{C}^k$ en tout point de M.

Exercice 4 – Différentielle d'une application de classe $\mathscr{C}^k$. Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux $\mathbb{R}$-espaces affines de dimension finie, M (resp. N) un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ (resp. N), k un entier supérieur ou égal à 1 et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application.

a) On suppose que M est une sous-variété de $\mathscr{E}$ en $m \in \mathrm{M}$, N une sous-variété de $\mathscr{F}$ en $f(m)$ et que f est de classe $\mathscr{C}^k$ en m. Définir une application $\mathrm{T}_m(\mathrm{M})$ dans $\mathrm{T}_{f(m)}(\mathrm{N})$ (indication : on pourra considérer un chemin γ à valeurs dans m et le chemin $f \circ \gamma$). On la note $\mathrm{d}f_m$.

b) Si g est comme dans la définition 4, exprimer $\mathrm{d}f_m$ en fonction de $\mathrm{d}g_m$. En déduire que $\mathrm{d}f_m$ est linéaire.

Exercice 5 — Exemples élémentaires.

a) Montrer que $i : m \in \mathrm{M} \mapsto m \in \mathscr{E}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Calculer $\mathrm{d}i_m$.

b) Montrer que la composée d'applications de classe $\mathscr{C}^k$ entre sous-variétés est de classe $\mathscr{C}^k$. Calculer la différentielle de la composée.

Exemples de sous-variétés.

Voici quelques exemples d'exercices sur les sous-variétés (tirés entre autre de [ROU]).

Exercice 6 — Sphère et cylindre, hyperboloïde.

a) Pour quelles valeurs de R, l'ensemble

$$\mathrm{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0\right\}$$

est-il une sous-variété non vide ?

b) Montrer que l'ensemble

$$\mathrm{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 5\right\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 — Cône. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{C} \subset \mathrm{E}$. On dit que C est un cône s'il existe $x_0 \in \mathrm{C}$ (appelé sommet du cône) telle que $(yx_0) \subset \mathrm{C}$ pour tout $y \in \mathrm{C}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un cône soit une sous-variété de E.

Exercice 8 — Contre-exemple. Les sous-ensembles V de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ qui suivent sont-ils des sous-variétés ? Les sous-ensembles $\mathrm{V} \setminus \{0\}$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sont-ils des sous-variétés ?

a) $\mathrm{V} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y = |x|\right\}$;

b) $\mathrm{V} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 = y^2\right\}$;

c) $\mathrm{V} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 = y^3\right\}$;

d) $\mathrm{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 = z^2\right\}$;

e) $\mathrm{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^3 + y^3 = 3xy\right\}$;

f) $\mathrm{V} = \left\{\left(\dfrac{3t}{1+t^3}, \dfrac{3t^2}{1+t^3}\right) \in \mathbb{R}^2, t > -1\right\}$.

Exercice 9 — Graphe. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{F}$ une application $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que $\{(x, f(x)) \in \mathrm{U} \times \mathrm{F}, x \in \mathrm{U}\}$ est une sous-variété de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Exercice 10 — Sous-variétés définies implicitement. Soit V le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$\begin{cases} t^3 + x^3 + y^3 + z^3 &= 0 \\ t + x^2 - y^2 + z^2 &= 0 \\ x - y + z - 2 &= 0 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ du point $(t, x, y, z) = (0, 1, -1, 0)$ tel que $\mathrm{V} \cap \mathcal{V}$ soit une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 11 — Sous-variétés définies implicitement. Démontrer que les équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$

définissent une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Calculer sa dimension.

Exercice 12 — Hypersurface de niveau. Soient $\mathrm{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et $c \in \mathbb{R}$.

a) Donner une condition suffisante pour que l'ensemble $G^{-1}(c)$ soit une hypersurface de $\mathbb{R}^n$.

b) Que se passe-t-il si G est une forme quadratique ? (On distinguera les cas $c = 0$ et $c \neq 0$).

Exercice 13 — Contour apparent d'un ellipsoïde. Soient Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, S l'ellipsoïde d'équation $Q(x) = 1$ et $a \in \mathbb{R}^n$ telle que $Q(a) > 1$. Soit C l'ensemble des points de S où l'hyperplan affine tangent passe par a.

a) Montrer que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que C est l'intersection de S et d'un hyperplan.

c) Montrer que C n'est pas vide (on pourra introduire $a' = a/Q(a)$).

d) Montrer que C est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 14 — Matrice nilpotente. On considère l'ensemble $\mathscr{N} = \big\{M \in M_2(\mathbb{R}), \quad M \neq 0, \quad M^2 = 0\big\}$.

a) Montrer que $M \in \mathscr{N}$ si et seulement si $M \neq 0$ et $(\det(M), \operatorname{tr}(M)) = (0, 0)$.

b) En déduire que $\mathscr{N}$ est une sous-variété différentiable de dimension 2.

Exercice 15 — Projecteur. On considère l'ensemble $\mathscr{P} = \big\{M \in M_2(\mathbb{R}), \quad M \neq 0, \quad M \neq \mathrm{Id}, \quad M^2 = M\big\}$.

a) Montrer que $M \in \mathscr{P}$ si et seulement si $(\det(M), \operatorname{tr}(M)) = (0, 1)$.

b) En déduire que $\mathscr{P}$ est une sous-variété différentiable de dimension 2.

Exercice 16 — Groupes de matrices.

a) Montrer que $G = SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et l'hyperplan tangent en chaque point. Faire le lien entre les espaces tangents en $g \in G$ et en $g' \in G$.

b) Montrer que $G = \mathcal{O}_n$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et l'hyperplan tangent en chaque point. Faire le lien entre les espaces tangents en $g \in G$ et en $g' \in G$.

Exercice 17 — Matrices de rang donnée. Soient $M_{n,m}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour $0 \leqslant r \leqslant \inf(n, m)$, on note X_r l'ensemble des matrices de rang exactement r.

a) Soit $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

avec $A \in GL_r(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in X_r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.

b) Montrer que X_r est une sous-variété de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ en tout point de X_r tel que $A \in GL_r(\mathbb{R})$. Déterminer la dimension en chacun de ses points.

c) En déduire que X_r est une sous-variété de $M_{n,m}(\mathbb{R})$.

Exercice 18 — Polynôme. Montrer que l'ensemble D des polynômes de degré exactement 2 ayant une racine double est une sous-variété de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera la dimension et que l'application $P \in D \mapsto \text{racine}(P)$ est $\mathscr{C}^\infty$.

Montrer que l'ensemble D_u des polynômes unitaires de degré 2 ayant une racine double est une sous-variété de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera la dimension et que l'application $P \in D \mapsto \text{racine}(P)$ est $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 19 — Matrice. Montrer que l'ensemble $D \subset M_2(\mathbb{R})$ des matrices non scalaires ayant une valeur propre double est une sous-variété de $M_2(\mathbb{R})$ dont on déterminera la dimension et que l'application

$$\mathrm{vp} : A \in D \longmapsto \text{valeur propre}(A) \in \mathbb{R}$$

est une fonction est une fonction $\mathscr{C}^\infty$.

Surfaces.

Intuitivement, une surface est un objet géométrique de dimension 2. De même, une courbe est un objet géométrique de dimension 1. On pourrait donc définir une surface (resp. une courbe) comme une sous-variété de dimension 2 (resp. de dimension 1). Cependant, cette définition exclut des objets qu'on a envie d'appeler courbe ou surface : par exemple une cycloïde (qui a des points singuliers), un tore à collier nul... Nous adaptons donc ici un point de vue plutôt « prépa » : nos objets sont paramétrés (voir [RDO5] pour des définitions bien plus complètes). L'objectif dans ce qui suit est de définir la courbure de Gauss d'une surface.

Définition 5 — Surface. Soient $f : \mathrm{U} \to \mathscr{E}$ (resp. $g : \mathrm{V} \to \mathscr{E}$) une application de classe $\mathscr{C}^k$ où U (resp. V) est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine. On dit que f et g sont équivalentes (et on note $f \sim g$), s'ils existe $\theta : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme tel que $g\theta = f$ (c'est-à-dire f et g diffèrent d'un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme à la source).

Une surface S de $\mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence (on vérifiera qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence) $\sim$. On dit que f (qui est dans la classe d'équivalence de notre surface S) est un paramétrage de S.

Pour que f soit une « vraie » surface, il faut demander que $\mathrm{d}f_x$ soit de rang 2 pour tout $x \in \mathrm{U}$ c'est-à-dire que f soit une immersion. Mais, on ne va pas s'étendre sur le problème.

La courbure de Gauss est définie à partir d'objet construit sur le plan tangent à une surface. Commençons donc par définir ce qu'est le plan tangent (on pourra comparer avec les sous-variétés).

Définition 6 — Plan tangent. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathscr{E}$ une surface notée S telle que $\mathrm{d}f_x$ est de rang 2 pour tout $x \in \mathrm{U}$. Le plan tangent en $f(x)$ (ou plutôt en x) à la surface définie par f est l'image de $\mathrm{d}f_x$ et est noté $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$.

On suppose que $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien orienté de dimension 3 (c'est-à-dire que sa direction E est un espace euclidien orienté). On note u et v les coordonnées dans U. On définit alors le vecteur normal à la surface définie par f en $x = (u, v)$ par

$$\mathrm{N}(u, v) = \frac{\partial_u f \wedge \partial_v f}{\|\partial_u f \wedge \partial_v f\|}\,.$$

Le vecteur $\mathrm{N}(u, v)$ dirige la normale au plan tangent qui est engendré par définition par $\partial_u f$ et $\partial_v f$.

Dans toute la suite, on suppose que E est un espace vectoriel **euclidien orienté**.

Définition 7 — Première forme fondamentale. L'espace tangent $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$ à S en x est un sous-espace vectoriel de E. Ainsi, on peut considérer la restriction du produit scalaire de E à $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$, c'est ce qu'on appelle la première forme fondamentale de S en x.

Exercice. Calculer la matrice de la première forme fondamentale dans la base $(\partial_u f, \partial_v f)$ de $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$.

On va maintenant définir l'endomorphisme de Weingarten qui va permettre de définir la courbure de Gauss.

Exercice 20 — Endomorphisme de Weingarten. Soit $f : \mathrm{U} \to \mathscr{E}$ une surface notée S telle que $\mathrm{d}f_x$ est de rang 2 pour tout $x \in \mathrm{U}$.

a) Montrer que dN_x est à valeurs dans $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$ (on pourra dériver la relation $\|\mathrm{N}\|^2 = 1$).

b) Montrer que $\mathrm{d}f_x$ réalise un isomorphisme avec $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$. Par abus de notation, on note ${\mathrm{d}f_x}^{-1}$ l'isomorphisme réciproque.

On définit l'*endomorphisme de Weingarten de* S *en* x par $h_x = -\mathrm{dN}_x \circ {\mathrm{d}f_x}^{-1}$: c'est un endomorphisme de $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$ le plan tangent à S en M.

c) Montrer que h est un endomorphisme symétrique pour la première forme fondamentale (on pourra dériver les relations $\langle \partial_u f, \mathrm{N} \rangle = 0$ et $\langle \partial_v f, \mathrm{N} \rangle = 0$).

Définition 8 — Courbure de Gauss. La courbure de Gauss à S en x est $\mathrm{K} = \det h_x$. Les courbures principales de S en m sont les valeurs propres de h_x. La courbure moyenne de S en m est $1/2\mathrm{tr}\,(h_x)$.

Les directions propres de h_x sont appelées les directions principales de courbures.

Définition 9 — Deuxième forme fondamentale. La deuxième forme fondamentale notée $\mathrm{II}_{x,\mathrm{S}}$ sur $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$ est la forme quadratique sur $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$ associée à h. c'est-à-dire

$$\forall\, w \in \mathrm{T}_x(\mathrm{S}), \qquad \mathrm{II}_{x,\mathrm{S}}(w) = \langle w, h(w) \rangle.$$

Exercice 21 — Matrice, Weingarten et deuxième forme fondamentale.

a) Déterminer la matrice de la forme quadratique $\mathrm{II}_{x,\mathrm{S}}$ dans la base $(\partial_u f, \partial_v f)$ de $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$. On pourra introduire les quantités

$$\mathrm{L} = \det(\partial_u f, \partial_v f, \partial^2_{uu} f), \qquad \mathrm{M} = \det(\partial_u f, \partial_v f, \partial^2_{uv} f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} = \det(\partial_u f, \partial_v f, \partial^2_{vv} f)$$

b) Question piège : avez-vous bien compris le théorème de réduction simultanée des formes quadratiques. Déterminer la matrice de h_x dans la base $(\partial_u f, \partial_v f)$ de $\mathrm{T}_x(\mathrm{S})$ (voir la question **d** de l'exercice 23).

Cette dernière question de l'exercice 23 pose la question du lien entre la réduction d'endomorphisme et l'orthogonalisation simultanée de formes quadratiques. C'est ce que propose la suite.

Autour de la réduction simultanée de formes quadratiques.

Exercice 22 — Forme bilinéaire et application linéaire associée. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie (k corps quelconque) et $b : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to k$ une forme bilinéaire symétrique.

a) Montrer que b définit une application linéaire

$$\varphi_b : \begin{cases} \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}^* \\ x \longmapsto (y \mapsto b(x,y)) \,. \end{cases}$$

Le rang de b est défini comme le rang de φ_b. On dit que b est non dégénérée si φ_b est bijective.

b) Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Exprimer la matrice de φ_b dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$ (base duale de $\mathscr{B}$). Comparer à la matrice de la forme bilinéaire b (ou de la forme quadratique associée à b) dans cette base.

Exercice 23 — Réduction simultanée de forme quadratique. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie (k corps de caractéristique différente de 2) et $b, b' : \mathrm{E} \times \mathrm{E} \to k$ deux formes bilinéaires symétriques sur E. On suppose que b est non dégénérée et on considère $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ l'endomorphisme donné par $u = {\varphi_b}^{-1} \circ \varphi_{b'}$.

a) Exprimer b' en fonction de b et u.

b) Montrer que u est un endomorphisme symétrique pour b.

c) Montrer qu'il existe une base orthogonale commune à b et b' si et seulement si u est diagonalisable. De façon plus précise, on pourra montrer qu'une base de E est orthogonale pour b et b' si et seulement si c'est une base de diagonalisation de u. *Moralité.* Trouver une base d'orthogonalisation commune à b et b' revient simplement à trouver une base de diagonalisation de u.

d) *Version Matricielle.* Soient $\mathscr{B}$ une base de E. On note M (resp. N) la matrice de b (resp. b') dans $\mathscr{B}$. Déterminer la matrice de u dans $\mathscr{B}$ (on pourra utiliser la question **b** de l'exercice 22). **Ainsi pour trouver une base orthogonale commune à b et b', il ne faut pas diagonaliser la matrice symétrique** N **mais la matrice (pas forcément symétrique)** $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{N}$**.**

Courbes.

Il s'agit ici de parcourir très brièvement les propriétés métriques des courbes. On trouvera moult détails dans [RDO5], [LFA3] ou encore [DOC].

Exercice 24 — Courbe dans le plan. Soient $\mathscr{E}$ un **plan** affine **euclidien orienté** et $f : \mathrm{I} \to \mathscr{E}$ une courbe régulière (on ne se pose pas ici la question des hypothèses minimales de dérivabilité : on pourra consulter [RDO5] pour des détails à ce sujet).

a) Qu'est-ce qu'une courbe de $\mathscr{E}$ (comparer à la définition des surfaces ci-dessus) ?

b) Montrer qu'une courbe régulière de $\mathscr{E}$ admet une paramétrisation normale.

c) Définir le repère de Frenet associé à f (on utilisera le fait que $\mathscr{E}$ est un espace affine **euclidien orienté**).

d) Définir la courbure de f, étudier sa régularité en fonction de celle de f.

e) Montrer les formules de Frenet.

f) Montrer que si $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une isométrie directe alors φf a la même courbure que f. Que se passe-t-il si φ est une isométrie indirecte ?

g) Montrer que si g est une courbe ayant même courbure que f alors il existe φ une isométrie (directe) telle que $g = \varphi f$.

h) Si $\rho : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer qu'il existe une courbe de $\mathscr{E}$ unique à isométrie près dont la courbure est ρ.

Remarque. Les questions **g** et **h** forment le théorème fondamental sur les courbes dans le plan. Il faut savoir le démontrer : c'est une application du théorème de Cauchy-Lipschitz qui mérite de figurer en illustration dans les leçons.

i) Calculer la courbure d'une droite, d'un cercle. En déduire les courbes à courbures constantes.

j) Comment calculer la courbure lorsque la paramétrisation n'est pas normale ? Traiter un exemple concret (voir la feuille d'exercice sur les courbes). Comment calculer la courbure en polaire ?

k) Déterminer une courbe telle que $\rho(s) = s$ pour tout s.

Exercice 25 — Courbe dans l'espace. Soient $\mathscr{E}$ un **espace** affine **euclidien orienté** (de dimension 3) et $f : \mathrm{I} \to \mathscr{E}$ une courbe régulière (on ne se pose pas ici la question des hypothèses minimales de dérivabilité : on pourra consulter [RDO5] pour des détails à ce sujet).

a) Qu'est-ce qu'une courbe de $\mathscr{E}$ (comparer à la définition des surfaces ci-dessus) ?

b) Montrer qu'une courbe régulière de $\mathscr{E}$ admet une paramétrisation normale.

c) Définir la courbure de f (on suppose que f est une paramétrisation normale), étudier sa régularité en fonction de celle de f.

d) Définir le repère de Frenet associé à f (on utilisera le fait que $\mathscr{E}$ est un espace affine **euclidien orienté**). On remarquera l'interversion des questions **c** et **d** par rapport à l'exercice 25, pourquoi ?

e) Définir la torsion de f.

f) Montrer les formules de Frenet-Serret.

g) Montrer que si $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est une isométrie directe alors φf a la même courbure et la même torsion que f. Que se passe-t-il si φ est une isométrie indirecte ?

h) Montrer que si g est une courbe ayant même courbure et même torsion que f alors il existe φ une isométrie (directe) telle que $g = \varphi f$.

i) Si $\rho : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+^*$ et $\tau : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, montrer qu'il existe une courbe de $\mathscr{E}$ unique à isométrie près dont la courbure est ρ et la torsion est τ.

Remarque. Les questions **h** et **i** forment le théorème fondamental sur les courbes dans le plan. Il faut savoir le démontrer : c'est une application du théorème de Cauchy-Lipschitz qui mérite de figurer en illustration dans les leçons.

j) Calculer la courbure et la torsion (lorsqu'elle existe) d'une droite, d'un cercle, d'une courbe plane, de la courbe $t \mapsto (a\cos(ct), a\sin(ct), bt)$ (c'est ce qu'on appelle une hélice circulaire). Déterminer les courbes à courbure nulle, les courbes à torsion nulle, les courbes à courbure constante et torsion nulle, et les courbes à courbure et torsion constante.

k) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la courbure et la torsion pour qu'une courbe soit tracée sur une sphère.

l) Comment calculer la courbure lorsque la paramétrisation n'est pas normale ?

Exercice 26 — Un résultat général.

a) Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer l'équivalence des trois propositions

(i) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, $f(t) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, il existe $\mathrm{A}(t)$ une matrice antisymétrique telle que $f'(t) = \mathrm{A}(t)f(t)$ et il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(t_0) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

(iii) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, il existe $\mathrm{A}(t)$ une matrice antisymétrique telle que $f'(t) = f(t)\mathrm{A}(t)$ et il existe $t_0 \in \mathrm{I}$ tel que $f(t_0) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

On trouvera des commentaires au sujet de ce résultat dans [ROU].

b) Retrouver alors immédiatement les formules de Frenet, Frenet-Serret et l'existence et l'unicité à isométrie des courbes (resp. courbes planes) à courbure et torsion (resp. courbure) donnée.

Exercice 27 — Courbe tracée sur une surface. Soient $\mathscr{E}$ un **espace** affine **euclidien orienté** (de dimension 3), $f : \mathrm{U} \to \mathscr{E}$ une « bonne » surface notée S.

a) Qu'est-ce qu'une courbe tracée g sur S ?

b) Définir le repère de Darboux-Ribaucour associé à g. On remarquera que le fait d'être sur une surface donne un vecteur unitaire orthogonal au vecteur tangent à la courbe : le vecteur normal à la surface.

c) Définir les courbures géodésique et normale et la torsion géodésique.

d) Montrer les formules de Darboux : c'est l'équivalent des formules de Frenet-Serret (on pourra aussi utiliser l'exercice précédent).

e) Faire le lien avec le repère de Frenet, la courbure et la torsion de g vue comme courbe à valeurs dans $\mathscr{E}$.

f) Exprimer la torsion géodésique et la courbure normale à l'aide de la deuxième forme fondamentale.

g) Qu'est-ce qu'une ligne de courbure, qu'une ligne asymptotique et qu'une géodésique ?

Références

[DOC] M. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Pearson Education, 1976.

[LFA3] J. Lelong-Ferrand et J.-M. Arnaudiès. *cours de mathématiques 3, géométrie et cinématique.* Dunod, 1975.

[RDO5] E. Ramis, C. Deschamps, et J. Odoux. *Cours de Mathématiques 5, Applications de l'analyse à la géométrie.* Dunod, 1998.

[ROU] F. Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation.* Cassini, 1999.