Vincent Beck

Géométrie projective

Définitions d'un espace projectif.

Définition 1 — Définition géométrique. Soient k un corps et V un k-espace vectoriel. On définit l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ associé à V comme l'ensemble des droites (vectoriels) de V :

$$\mathbb{P}(\mathrm{V}) = \{\mathrm{D} \subset \mathrm{V}, \quad \mathrm{D} \text{ sous-espace vectoriel de dimension 1 de V}\}$$

Les éléments (qu'on appelle *point*) de l'ensemble $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ sont donc les droites de V...

Exercice 1 — Définition de l'espace projectif comme quotient. Soient k un corps et V un k-espace vectoriel.

a) Montrer que l'application

$$\pi : \begin{cases} \mathrm{V} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{V}) \\ \quad x \qquad \longmapsto k\,x = \text{ la droite engendrée par } x\,. \end{cases}$$

est surjective.

b) À quelle condition a-t-on $\pi(x) = \pi(y)$?

c) On définit sur $\mathrm{V} \smallsetminus \{0\}$, la relation d'équivalence $x\mathscr{R}y$ s'il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $x = \lambda y$. Montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

d) Déduire de ce qui précède que $(\mathrm{V} \smallsetminus \{0\})/\mathscr{R}$ s'identifie à $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. De quelle façon ? Montrer que l'application canonique entre $(\mathrm{V} \smallsetminus \{0\})/\mathscr{R}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ consiste simplement à ajouter $\{0\}$ à l'ensemble considéré.

Faisons quelques commentaires sur ces définitions de l'espace projectif. La première définition est une définition purement géométrique : elle permet de se représenter géométriquement l'espace projectif. La deuxième définition est quant à elle plus « manipulable » : l'espace projectif est un quotient et donc c'est très facile de définir des applications qui partent d'un espace projectif, il suffit de définir une application depuis $\mathrm{V} \smallsetminus \{0\}$ et de vérifier qu'elle passe au quotient c'est-à-dire que l'image ne dépend pas du vecteur choisi pour engendrer une droite de V. Cette deuxième définition en tant qu'espace quotient permet par exemple lorsque $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de définir une topologie sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$: on prend la topologie quotient sur $(\mathrm{V} \smallsetminus \{0\})/\mathscr{R}$ et on la transfert à $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Remarque 2 — Quelques constatations simples. Montrer que la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie sur $\mathrm{V} \smallsetminus \{0\}$ n'est rien d'autre que la relation d'équivalence « être dans la même orbite » pour l'action du groupe $k^\times$ sur $\mathrm{V} \smallsetminus \{0\}$ par

$$\begin{cases} (\mathrm{V} \smallsetminus \{0\}) \times k^\times \longrightarrow \mathrm{V} \smallsetminus \{0\} \\ \qquad (x, \lambda) \qquad \longmapsto \lambda x\,; \end{cases}$$

action qu'on peut décrire comme l'action du groupe des homothéties de V sur $\mathrm{V} \smallsetminus \{0\}$.

Vérifier que la relation $\mathscr{R}$ peut aussi s'écrire $x\mathscr{R}y$ s'il existe $\lambda \in k$ tel que $x = \lambda y$. Que se passe-t-il si on considère la relation $x\mathscr{R}'y$ s'il existe $\lambda \in k$ tel que $x = \lambda y$ sur l'ensemble V (et pas seulement $\mathrm{V} \smallsetminus \{0\}$) ? Est-ce toujours une relation d'équivalence ?

On considère l'espace vectoriel $\mathrm{V} = \{0\}$. Que vaut $\mathbb{P}(\mathrm{V})$? On considère un espace vectoriel V de dimension 1. Que vaut $\mathbb{P}(\mathrm{V})$? ■

Définition 3 — Dimension d'un espace projectif. On définit la *dimension de* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ comme $\dim(\mathrm{V}) - 1$. Est-ce bien raisonnable ?

Une droite projective est un espace projectif de dimension 1 c'est-à-dire de la forme $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ avec $\dim \mathrm{V} = 2$. Un plan projectif est un espace projectif de dimension 2 c'est-à-dire de la forme $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ avec $\dim \mathrm{V} = 3$.

Exercice 2 — Espace projectif sur un corps fini. Soient k un corps fini et V un k-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer le cardinal de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Exercice 3 — Ensemble des hyperplans. Soient V un k-espace vectoriel. Montrer que l'ensemble des hyperplans de V s'identifie naturellement à $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*)$ (on pourra se souvenir et redémontrer que deux formes linéaires non nulle ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles).

Sous-espace projectif.

Définition 4 — Sous-espace projectif. Soit W un sous-espace vectoriel de V. Montrer avec chacune des deux définitions d'espace projectif que $\mathbb{P}(\mathrm{W}) \subset \mathbb{P}(\mathrm{V})$. Dans la vision en tant que quotient, montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{W})$ s'identifie aussi $\pi(\mathrm{W} \smallsetminus \{0\})$.

Un sous-ensemble de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ de la forme $\mathbb{P}(\mathrm{W})$ où W est un sous-espace vectoriel de V s'appelle un *sous-espace projectif de* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ ou encore *variété linéaire projective de* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Exercice 4 — Sous-espace projectif.

a) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriel de V et vlp l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Montrer que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{vlp} \\ \mathrm{W} \longmapsto \mathbb{P}(\mathrm{W}) = \pi(\mathrm{W} \smallsetminus \{0\}) \end{cases}$$

est bijective. Décrire l'application inverse. Ainsi, il y a « autant » de sous-espaces vectoriels de V que de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

b) Montrer que l'intersection de sous-espaces projectifs est un sous-espace projectif.

c) En déduire une notion de sous-espace projectif engendré par une partie. On note $\langle \mathrm{A} \rangle_{\mathrm{pr}}$ le sous-espace projectif engendré par A.

d) Soient A, B deux parties de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Déterminer le sous-espace vectoriel W de V tel que $\langle \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \rangle_{\mathrm{pr}} = \mathbb{P}(\mathrm{W})$.

e) Montrer que si X et Y sont deux sous-espaces projectifs de V alors $\dim \mathrm{X} + \dim \mathrm{Y} = \dim \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} + \dim \langle \mathrm{X} \cup \mathrm{Y} \rangle$.

Quelques corollaires de la relation précédente : questions **f** *à* **i** .

f) Montrer que si X et Y sont deux sous-espaces projectifs de V vérifiant $\dim \mathrm{X} + \dim \mathrm{Y} \geqslant \dim \mathbb{P}(\mathrm{V})$ alors $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing$.

g) Soient H est un hyperplan projectif de V (c'est-à-dire un sous-espace projectif de V de dimension 1 de moins que celle de V) et $m \notin \mathrm{H}$. Toute droite (projective) passant par m rencontre H en un unique point.

h) $\dim \mathrm{V}$ hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ ont toujours au moins un point commun.

i) Deux droites distinctes d'un plan projectif ont une intersection non vide et réduite à un singleton (cette dernière propriété montre la différence essentielle entre la géométrie projective et la géométrie affine : il n'y a pas de parallélisme). Interpréter aussi cette égalité en tant qu'intersection de plans (vectoriels) dans un espace de dimension 3.

j) Soient X, Y deux sous-espaces projectifs de V tel que $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing$. Calculer la dimension de $\langle \mathrm{X} \cup \mathrm{Y} \rangle$.

k) Soient $x \neq y$ deux points de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Montrer qu'il existe une unique droite projective de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ passant par x et y.

3 questions du problème de mathématiques générales de 1999. Soient $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est un espace projectif de dimension 3 et $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3$ trois droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ telle que $\mathrm{D}_i \cap \mathrm{D}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$.

l) Montrer qu'une telle situation existe.

m) Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{D}_1$, il existe une unique droite (projective) passant par x et rencontrant D_2 et D_3. On la note D_x

n) Pour $x, y \in \mathrm{D}_1$, calculer $\mathrm{D}_x \cap \mathrm{D}_y$.

Topologie. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie (avec $k \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) et X un sous-espace projectif strict (c'est-à-dire différent de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$) de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

o) Montrer que X est un fermé d'intérieur vide.

Remarque 5 — Relation d'équivalence - partie saturée. Soient X un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. Une partie Y de X est dite *saturé pour* $\mathscr{R}$ si Y est réunion de classes d'équivalence pour $\mathscr{R}$. On note Sat l'ensemble des parties de X saturées pour $\mathscr{R}$ et $\mathscr{P}_{\mathrm{X}/\mathscr{R}}$ l'ensemble des parties de $\mathrm{X}/\mathscr{R}$.

Montrer que les applications

$$\begin{cases} \mathrm{Sat} \longrightarrow \mathscr{P}_{\mathrm{X}/\mathscr{R}} \\ \mathrm{Y} \longmapsto \pi(\mathrm{Y}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathscr{P}_{\mathrm{X}/\mathscr{R}} \longrightarrow \mathrm{Sat} \\ \mathrm{Z} \longmapsto \pi^{-1}(\mathrm{Z}) \end{cases}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Ainsi on peut relier aisément les parties de l'ensemble quotient avec une certaine famille de partie de l'ensemble de départ : les parties saturées.

Les résultats des questions **a** et **b** est alors simplement une déclinaison de ce résultat puisque les parties de la forme $\mathrm{W} \smallsetminus \{0\}$ (où W est un sous-espace vectoriel de V) sont des parties saturées pour $\mathscr{R}$.

On pourra aussi relier le résultat de cette remarque au lien entre les idéaux d'un anneau quotient et les idéaux de l'anneau de départ, les sous-groupes d'un quotient et les sous-groupes du groupe de départ. ■

Homographie.

Exercice 5 — Homographie. Soient V et W deux k-espaces vectoriels et $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ une application linéaire **injective**.

a) Construire à partir de f une application notée $\overline{f} : \mathbb{P}(\mathrm{V}) \to \mathbb{P}(\mathrm{W})$. Où et comment sert l'injectivité de f ? L'application $\overline{f}$ est appelée *homographie associée à* f. Une homographie $h : \mathbb{P}(\mathrm{V}) \to \mathbb{P}(\mathrm{W})$ est une application telle qu'il existe $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ linéaire vérifiant $h = \overline{f}$.

b) Soit $g : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ une application linéaire injective telle que $\overline{g} = \overline{f}$. Que dire de g en fonction de f ?

c) Calculer $\overline{\mathrm{id}_\mathrm{V}}$ et $\overline{gf}$ où W' est un k-espace vectoriel et $g : \mathrm{W} \to \mathrm{W}'$ est une application linéaire injective.

d) On note $\mathrm{PGL}(\mathrm{V})$ l'ensemble des homographies de V dans lui-même. Lorsque V est de dimension finie, montrer $\mathrm{PGL}(\mathrm{V})$ est un groupe isomorphe à $\mathrm{GL}(\mathrm{V})/k^\times$.

e) Montrer que l'image d'un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ par une homographie est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{W})$ de même dimension. Que se passe-t-il pour l'image réciproque ?

f) Que se passe-t-il lorsque $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ n'est pas injective ? Montrer qu'on peut définir une application dont l'ensemble de départ est simplement une partie de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ (laquelle ?) à valeurs dans $\mathbb{P}(\mathrm{W})$.

g) Soit $h : \mathbb{P}(\mathrm{V}) \to \mathbb{P}(\mathrm{V})$ une homographie. Comment interpréter le fait h a un point fixe ? En déduire qu'une homographie d'une droite projective qui a trois points fixes est triviale. Montrer aussi qu'une homographie d'un $\mathbb{C}$-espace projectif de dimension finie a toujours un point fixe et qu'une homographie d'un $\mathbb{R}$-espace projectif de dimension paire a aussi toujours un point fixe.

Exercice 6 — Exemple concret d'homographie.

a) Soit V un k-espace vectoriel de dimension 3 et D une droite de V (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$) et P, P' deux plans supplémentaires de D dans V. Décrire l'homographie de $\mathbb{P}(\mathrm{P}') \to \mathbb{P}(\mathrm{P})$ donné par l'application linéaire bijective $p : \mathrm{P}' \to \mathrm{P}$ où p est la restriction à P' de la projection sur P parallèlement à D. Pour D' une droite (vectoriel de D), on pourra calculer $p(\mathrm{D}')$ en fonction de $\mathrm{D} + \mathrm{D}'$ et P.

L'homographie $\mathbb{P}(\mathrm{P}') \to \mathbb{P}(\mathrm{P})$ obtenue est appelée *la projection de* $\mathbb{P}(\mathrm{P}')$ *sur* $\mathbb{P}(\mathrm{P})$ *de centre* D.

b) Dans le cadre de la question précédente, montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{P})$ et $\mathbb{P}(\mathrm{P}')$ se rencontre en un unique point et calculer l'image par la projection de ce point.

c) Inversement, on se donne X et X' deux droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Montrer qu'elles se rencontrent en un unique point x. Si $h : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est une homographie, montrer que h est une projection de X' sur X si et seulement si $h(x) = x$.

d) Soit X et X' deux droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ et $h : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ une homographie. Pour $\mathrm{M}', \mathrm{N}' \in \mathrm{X}'$, on note $\mathrm{M} = h(\mathrm{M}')$ et $\mathrm{N} = h(\mathrm{N}')$. On suppose que h est une homographie. Montrer que l'ensemble des $(\mathrm{MN}') \cap (\mathrm{N}'\mathrm{M})$ pour $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{X}'$ est une droite passant par $\mathrm{X} \cap \mathrm{X}'$ (c'est plus ou moins le théorème de Desargues). On suppose que h n'est pas une homographie. On note $\mathrm{O} = \mathrm{X} \cap \mathrm{X}'$, $\mathrm{P} = h^{-1}(\mathrm{O}) \in \mathrm{X}'$ et $\mathrm{Q} = h(\mathrm{O}) \in \mathrm{X}$. Montrer que $(\mathrm{MN}') \cap (\mathrm{N}'\mathrm{M}) \in (\mathrm{PQ})$. En déduire que h est d'une infinité de façons (si k est infini !) le produit de deux projections.

e) Soit V un k-espace vectoriel de dimension 3 et D une droite de V (c'est-à-dire un point de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$). Montrer que l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ passant par D est une droite projective (on pourra introduire l'espace vectoriel quotient V/D) notée $\mathrm{D}^\star$.

f) On se place dans le cadre de la question précédente. Soit X une droite projective de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ ne contenant pas D. Montrer que élément d de $\mathrm{D}^\star$ rencontre X en un unique point x_d. Montrer que l'application $d \mapsto x_d$ est une homographie (on pourra considérer l'application linéaire de passage au quotient $\pi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}/\mathrm{D}$ et sa restriction au plan de V associé à X).

g) Soit V un plan vectoriel euclidien. Montrer que l'application $\mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}^\perp$ est une homographie de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

h) Soit V un espace vectoriel euclidien. Montrer que l'application $\mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}^\perp$ est une homographie de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ sur $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*)$.

Coordonnées homogènes et repère projectif.

Définition 6 — Coordonnée projective. Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ une base de V. Pour $x \in \mathbb{P}(\mathrm{V})$, *un système de coordonnées projectives de* x *dans* $\mathscr{B}$ est donnée par la famille

$(x_0, \dots, x_n)$ où les x_i sont définis par $v = x_0 e_0 + \cdots x_n e_n \in \mathrm{V}$ où v engendre la droite x. Un système de coordonnée projective est noté par $[x_0 : x_1 : \cdots : x_n]$ plutôt que $(x_0, \dots, x_n)$ pour ne pas confondre avec les coordonnées de v dans $\mathscr{B}$.

Montrer que deux systèmes de coordonnées projectives de x dans $\mathscr{B}$ sont proportionnels. Montrer que l'ensemble des points de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ dont les coordonnées projectives dans $\mathscr{B}$ sont de la forme $[x_0 : x_1 : \cdots : x_{n-1} : 0]$ est un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Une base de V détermine donc pour chaque point de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ un système de coordonnées projectives ; deux systèmes de coordonnées projectives d'un même point étant proportionnel. Par ailleurs, en considérant les images de $e_0, \dots, e_n$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ c'est-à-dire les droites vectorielles D_i engendrées par les e_i, on obtient $n+1$ points de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Peut-on retrouver les coordonnées projectives des points de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ à partir des D_i (on a perdu de l'information : puisqu'on a remplacé une famille de vecteurs par les droites qu'ils engendrent). La réponse est **non** (sauf sur $\mathbb{F}_2$). Pour pouvoir définir les coordonnées projectives sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ uniquement à partir de données sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, on a besoin d'une information supplémentaire : c'est la notion de « repère projectif ». En effet, on voit bien que si on choisit des f_i sur chacun des D_i, on peut écrire $f_i = \lambda_i e_i$ mais si tous les λ_i ne sont pas égaux, les coordonnées dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ ne vont pas être proportionnelles à celles dans la base $\mathscr{B}$.

Définition 7 — Famille projectivement indépendante. Soit V un espace vectoriel et $(m_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'élément de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. On dit que la famille $(m_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est *projectivement indépendante* si pour tout $i \in \mathrm{I}$, $m_i \notin \langle m_j, j \neq i \rangle_{\mathrm{proj}}$.

Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on note e_i un vecteur non nul de m_i. Montrer que la famille $(m_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est projectivement indépendante si et seulement si $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille libre de V.

Soit $(m_1, \dots, m_{k+1}) \in \mathbb{P}(\mathrm{V})^{k+1}$. Montrer que $(m_1, \dots, m_{k+1})$ est projectivement libre si et seulement si $\dim \langle m_1, \dots, m_{k+1} \rangle_{\mathrm{proj}} = k$.

En déduire que si V est un espace vectoriel de dimension finie, le cardinal des parties projectivement indépendantes est bornée (par $\dim \mathrm{V}$).

Une famille $(m_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est *projectivement génératrice* si $\langle m_i, i \in \mathrm{I} \rangle_{\mathrm{proj}} = \mathbb{P}(\mathrm{V})$. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on note e_i un vecteur non nul de m_i. Montrer que la famille $(m_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est projectivement génératrice si et seulement si $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille génératrice de V.

Définition 8 — Repère projectif. Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$. Un *repère projectif* de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est une famille $(m_i)_{i \in \mathrm{I}}$ telle que pour tout $i \in \mathrm{I}$, la famille $(m_j)_{j \neq i}$ est projectivement libre et projectivement génératrice. On notera la différence avec le cas d'un repère affine ou celui de repère linéaire (c'est-à-dire de base) : on ne demande pas que la famille considérée soit libre et génératrice, mais on demande que chacune des familles obtenues quand on enlève un point le soit.

Montrer que le cardinal d'une telle famille est nécessairement $n+2$.

Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on note e_i un vecteur non nul de m_i. Montrer que $(m_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est un repère projectif si et seulement si pour tout $i \in \mathrm{I}$ alors $(e_j)_{j \neq i}$ est une base de V.

Un exemple : montrer que les (grandes) diagonales d'un cube forment un repère projectif.

Exercice 7 — Où on relie repère projectif et coordonnée projective. Soient V un espace vectoriel de dimension $n+1$.

a) Soit $(e_0, \dots, e_n)$ une base de V et $e_{n+1} = \lambda_0 e_0 + \cdots \lambda_n e_n \in \mathrm{V}$. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note m_i la droite engendrée par e_i. À quelle condition la famille $(e_i)_{i \in [\![0, n+1]\!]}$ est-elle un repère projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

b) Réciproquement $(m_0, \dots, m_{n+1}) \in \mathbb{P}(\mathrm{V})^{n+2}$. Pour tout $i \in [\![0, n+1]\!]$, on note e_i un vecteur non nul de m_i. Montrer qu'on peut choisir les e_i de telle sorte que $e_{n+1} = e_0 + \cdots + e_n$. Que peut-on dire de deux telles familles ?

Ainsi lorsqu'on fixe un repère projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, on peut obtenir une famille de bases de V deux à deux proportionnelles. Les systèmes de coordonnées projectives d'un point de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ dans ces différentes bases sont donc bien deux à deux proportionnels. Finalement, pour pouvoir obtenir des coordonnées projectives à partir de données uniquement sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Il faut se donner un repère projectif.

Exercice 8 — Repère projectif et homographie. Soient V, W deux espaces vectoriels de même dimension finie.

a) Montrer que l'image d'un repère projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ par une homographie est un repère projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{W})$.

b) Inversement, montrer que pour tout repère projectif $\mathcal{R}$ de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ et tout repère projectif $\mathcal{R}'$ de $\mathbb{P}(\mathrm{W})$, il existe une unique homographie envoyant $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$ (comme dans le cas affine et linéaire, un repère projectif permet de déterminer de façon unique une « bonne » application entre espaces projectifs c'est-à-dire une homographie). C'est le « premier » théorème fondamental de la géométrie projective.

c) En déduire que PGL(V) agit simplement transitivement sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ (lorsque).

d) Qu'est ce qu'un repère projectif d'une droite projective ? En déduire qu'une homographie issue d'une droite projective est déterminée par l'image de 3 points. En déduire que PGL(V) agit 3-transitivement sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ lorsque V est de dimension 2.

e) Montrer que le choix d'un repère projectif de V (de dimension $n+1$) est équivalent au choix d'une homographie de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ dans $\mathbb{P}(k^{n+1}) = \mathbb{P}_n(k)$ (qui a un repère projectif canonique). On retrouve ainsi le lien entre repère projectif et coordonnées projectives.

Lien Affine-Projectif.

Dans cette partie, on fait le lien entre la géométrie affine et la géométrie projective. En géométrie affine, il manque des points (deux droites dans un plan ne s'intersectent pas toujours...). En un certain sens, ces points qui manquent sont à l'infini. C'est cette idée que nous proposons d'étudier dans ce qui suit.

Dans un premier temps, on passe du projectif vers l'affine. C'est la partie « facile » : on enlève une « bonne » partie d'un espace projectif et ce qui reste est un espace affine. Les bonnes parties à enlever sont en fait les hyperplans projectifs. Ainsi à chaque choix d'hyperplans projectifs, on obtient une structure d'espaces affines sur le complémentaire. Cette partie qu'on enlève est appelé les points à l'infini. L'objectif de l'exercice qui suit est de vérifier qu'avec cette construction, on obtient les propriétés dont on a envie.

Dans un deuxième temps, on passe de l'affine au projectif. La difficulté est qu'il faut rajouter des points et donc construire ces nouveaux points. C'est l'enveloppe vectorielle de notre espace affine qui nous permettra de faire les choses proprement.

Exercice 9 – Du projectif vers l'affine. Soient $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ un espace projectif et $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. On note $\mathrm{U_H} = \mathbb{P}(\mathrm{V}) \smallsetminus \mathbb{P}(\mathrm{H})$. On considère f une forme linéaire sur V de noyau H et l'hyperplan affine $\mathrm{H}_f = \{x \in \mathrm{V}, \quad f(x) = 1\}$.

a) Montrer que

$$\mathrm{U_H} = \{\mathrm{D} \in \mathbb{P}(\mathrm{V}), \quad \mathrm{D} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}\} = \{\mathrm{D} \in \mathbb{P}(\mathrm{V}), \quad f(\mathrm{D}) \neq 0\} = \{\mathrm{D} \in \mathbb{P}(\mathrm{V}), \quad \mathrm{D} \oplus \operatorname{Ker} f = \mathrm{V}\}$$

b) Montrer que l'application $\varphi_f : \mathrm{U_H} \to \mathrm{H}_f$ qui, à $\mathrm{D} \in \mathrm{U_H}$ associe l'intersection de D avec H_f est bijective. Décrire la bijection réciproque. En déduire une structure d'espace affine sur U_f (de direction H).

c) Montrer que cette structure d'espace affine ne dépend pas de f telle que $\operatorname{Ker} f = \mathrm{H}$.

Moralité. Ainsi sur le complémentaire d'un hyperplan projectif, on peut mettre une structure d'espace affine. En mettant la structure d'espace affine sur le complémentaire de l'hyperplan projectif $\mathbb{P}(\mathrm{H})$, on dit qu'on a envoyé $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ à l'infini. Et on peut le faire pour n'importe quel hyperplan projectif.

d) Soit $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ une droite projective. Qu'est-ce qu'un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$? Expliquer pourquoi on représente $\mathbb{P}^1(k) = \mathbb{P}(k^2)$ sous la forme $k \sqcup \{\infty\}$.

e) Soit $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ un plan projectif et $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ trois droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. On note $y = \mathrm{X} \cap \mathrm{Y}$ et $z = \mathrm{X} \cap \mathrm{Z}$. Montrer que $\mathrm{Y} \smallsetminus \{y\}$ et $\mathrm{Z} \smallsetminus \{z\}$ sont deux droites affines de $\mathbb{P}(\mathrm{V}) \smallsetminus \mathrm{X}$. Montrer que ces deux droites sont parallèles si et seulement si le point $\mathrm{Y} \cap \mathrm{Z}$ est dans X. En d'autres termes : en choisissant X comme droite à l'infini, les 2 droites affines sont parallèles si et seulement si les 2 droites projectives se rencontrent à l'infini.

Points à l'infini, homographies et application affines.

f) On suppose V de dimension finie. Montrer qu'une homographie de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ qui laisse stable l'hyperplan à l'infini $\mathbb{P}(\mathrm{H})$ définit une application affine de $\mathrm{U_H} = \mathbb{P}(\mathrm{V}) \smallsetminus \mathbb{P}(\mathrm{H})$. Obtient-on ainsi toutes les bijections affines de $\mathrm{U_H}$? En déduire que $\mathrm{GA}(\mathrm{U_H}) \subset \mathrm{PGL}(\mathrm{V})$.

g) On suppose V de dimension finie. Que dire de la restriction à $\mathrm{U_H}$ d'une homographie de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ qui laisse stable point par point l'hyperplan à l'infini ?

Points à l'infini, sous-espaces projectif et sous-espaces affines.

h) Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathrm{U_H}$. Montrer que $\langle \mathscr{F} \rangle_{\mathrm{proj}} = \mathscr{F} \cup \mathbb{P}(\mathrm{F})$ en fonction de $\mathscr{F}$. On dit que $\mathbb{P}(\mathrm{F})$ est l'ensemble des points à l'infini de $\mathscr{F}$ (c'est l'ensemble des directions de $\mathscr{F}$).

i) Soit $\mathrm{X} = \mathbb{P}(\mathrm{W})$ un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. À quelle condition $\mathrm{X} \cap \mathrm{U_H}$ est-il un sous-espace affine de $\mathrm{U_H}$?

j) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathrm{U_H}$ et $\mathrm{vlp_H}$ l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ non contenus dans $\mathbb{P}(\mathrm{H})$. En déduire que les applications

$$\begin{cases} \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{vlp_H} \\ \mathscr{F} \longmapsto \langle \mathscr{F} \rangle_{\mathrm{proj}} = \mathscr{F} \cup \mathbb{P}(\mathrm{F}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{vlp_H} \longrightarrow \mathcal{S} \\ \mathrm{X} \longmapsto \mathrm{X} \cap \mathrm{U_H} \end{cases}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

k) Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathrm{U_H}$. Montrer que $\mathscr{F}$ est faiblement parallèle à $\mathscr{G}$ si et seulement si les points à l'infini de $\mathscr{F}$ sont contenus dans les points à l'infini de $\mathscr{G}$. Montrer que $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles si et seulement si les points à l'infini de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{G}$ coïncident.

Un peu de topologie si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

l) Montrer que $\mathrm{U_H}$ est un ouvert dense de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ et que l'application φ_f est un homéomorphisme.

m) Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{P}(\mathrm{V})$, il existe un hyperplan H de V tel que $x, y \in \mathrm{U_H}$. En déduire que $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est séparé.

n) Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est compact et connexe par arcs (on prendra garde à la dimension 1).

o) Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathrm{U_H}$. Montrer que $\langle \mathscr{F} \rangle$ est l'adhérence de $\mathscr{F}$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Pappus et Desargues

p) Démontrer les théorèmes de Pappus et Desargues en envoyant des choses à l'infini (voir [BER, 5.4]).

Dans ce deuxième exercice, on va construire un espace projectif à partir d'un espace affine. On le fait à partir de l'enveloppe vectorielle de $\mathscr{E}$. Ainsi $\mathscr{E}$ s'identifie au complémentaire d'un hyperplan projectif dans un espace projectif et les résultats de l'exercice précédent s'appliquent.

Exercice 10 — De l'affine vers le projectif. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E.

a) Montrer que $\mathscr{E}$ et $\mathbb{P}(\mathrm{E})$ s'identifient à des parties de $\mathbb{P}(\widehat{\mathrm{E}})$ et que $\mathbb{P}(\widehat{\mathrm{E}}) = \mathscr{E} \sqcup \mathbb{P}(\mathrm{E})$. Ainsi $\mathscr{E}$ s'identifie au complémentaire d'un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(\widehat{\mathrm{E}})$. Montrer que la structure d'espace affine sur $\mathscr{E}$ obtenue par la construction de l'exercice précédent est la même que la structure initiale.

On peut alors utiliser tous les résultats de l'exercice précédent dans ce cadre : par exemple étendre les applications affines de $\mathscr{E}$ à $\mathbb{P}(\widehat{\mathrm{E}})$...

Explicitons quelque peu l'intérêt de cette méthode. Lorsqu'on considère une configuration affine, on peut la voir en complétant l'espace affine en un espace projectif, comme une configuration projective (on peut aussi partir d'une configuration déjà projective). En envoyant alors un certain ensemble à l'infini (c'est à nous de choisir l'ensemble en question pour « simplifier » le problème), on se retrouve avec une situation affine plus simple. En un sens, envoyer des points à l'infini revient à choisir un bon système de coordonnées pour faire les calculs.

Dans l'exercice qui suit, on poursuit notre étude du lien entre l'affine et le projectif. On étudie le lien entre les zéros dans l'espace projectif de dimension n d'un polynôme homogène en $n+1$ variables et les zéros d'un polynôme en n variable dans un espace affine de dimension n. On montre comment passer de l'un à l'autre.

Exercice 11 — Cône et homogénéisation.

a) On suppose $\dim \mathrm{V} = n+1$ muni d'une base. Montrer que l'ensemble des zéros de $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}_0, \ldots, \mathrm{X}_n]$ **homogène** défini un sous-ensemble de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. On considère alors l'hyperplan projectif déterminé par $\mathrm{X}_n = 0$. On munit le complémentaire d'une structure d'espace affine. Quel est l'équation du l'intersection de l'espace affine avec les zéros de P.

b) Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et $(\mathrm{O}, e_1, \ldots, e_n)$ un repère cartésien de $\mathscr{E}$. On considère alors un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ donnée par une équation de la forme $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ désignent les coordonnées cartésienne d'un point de $\mathscr{E}$ (on supposera f polynomiale). Déterminer une équation du cône de $\widehat{\mathrm{E}}$ déterminé par l'équation f (on appellera t la coordonnée supplémentaire). Écrire cette équation de façon homogène. En déduire une partie de $\mathbb{P}(\widehat{\mathrm{E}})$ le complété projectif de $\mathscr{E}$ donnée par les zéros d'un polynôme. Que se passe-t-il lorsqu'on fait $t = 0$? Étudier les cas $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ et $f(x, y) = xy - 1$ et $f(x, y) = x^2 - y$. **Faire des dessins.**

c) Reprendre les parties 4 et 5 du sujet de mathématiques générales de 2007.

Droite projective.

Exercice 12 — Droite projective.

a) Considérons l'espace projective $\mathbb{P}^1(k) = \mathbb{P}(k^2)$. Que donne la construction précédente lorsqu'on choisit comme point à l'infini la droite vectorielle de k^2 engendré par e_1 (le premier vecteur de la base canonique) et comme forme linéaire f la forme linéaire deuxième coordonnée ? Montrer que toute droite vectoriel de k^2 (autre que le point à l'infini) rencontre la droite d'équation $y = 1$ en un unique point qui est donc de la forme $(x, 1)$. En

déduire une bijection de $\mathbb{P}^1(k) = \mathbb{P}(k^2)$ avec $k \sqcup \{\infty\}$. Exprimer x en fonction des coordonnées projectives du point de $\mathbb{P}^1(k)$ dans la base canonique.

b) Soit f une homographie de $\mathbb{P}^1(k)$ donnée par sa matrice dans la base canonique. Calculer « l'expression de f » dans $k \sqcup \{\infty\}$.

c) Rappeler ce qu'est un repère projectif sur $\mathbb{P}^1(k)$ et plus généralement sur une droite projective. Montrer que $(\infty, 0, 1)$ est un repère projectif de $\mathbb{P}^1(k)$: expliquer pourquoi ce repère est « naturel » (en vue du calcul du birapport, il est fondamental de choisir un ordre sur les points $\infty, 0$ et 1, les auteurs ne font pas tous le même choix, donc soyez vigilants).

d) Montrer que $\mathrm{PGL}(2, k) = \mathrm{PGL}(k^2)$ agit 3-transitivement sur $\mathbb{P}^1(k)$. En déduire que $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_2)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ et $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

e) Montrer que topologiquement $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est un cercle et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la sphère de $\mathbb{R}^3$.

L'outil fondamental du calcul pour l'étude des propriétés de la droite projective est le birapport. Nous donnons ici une définition en terme d'action de groupe du birapport des 4 points d'une droite projectives : pour nous le birapport sera une orbite. Ensuite, nous montrons que le birapport est caractérisé par un nombre : un élément de $k \smallsetminus \{0, 1\} = k \sqcup \{\infty\} \smallsetminus \{\infty, 0, 1\}$ (c'est ce principe qui est mis en avant dans [Mné]). Ainsi, notre théorème est le fait que le birapport est caractérisé par un nombre. Classiquement, c'est plutôt le contraire qui est fait. Le birapport est défini comme un nombre et on montre ensuite qu'il caractérise une orbite.

Exercice 13 — Birapport. Soit (a_1, a_2, a_3, a_4) quatre points **distincts** d'une droite projective $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Le birapport de la famille (a_1, a_2, a_3, a_4) est alors par définition l'orbite de (a_1, a_2, a_3, a_4) sous l'action de $\mathrm{PGL}(\mathrm{V})$ (où l'homographie f agit par $(a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (f(a_1), \ldots, f(a_4))$). On note $[a_1, \ldots, a_4]$ le birapport. Ainsi par définition (a_1, a_2, a_3, a_4) et (b_1, b_2, b_3, b_4) ont même birapport si et seulement s'il existe une homographie telle que $f(a_i) = b_i$ pour tout i. En particulier, par définition les homographies conservent le birapport.

L'inconvénient de cette définition est qu'elle est purement interne à une droite projective (ici $\mathbb{P}(\mathrm{V})$). Pour pouvoir relier entre elles des droites projectives distinctes, on va passer par notre droite projective privilégiée $\mathbb{P}^1(k)$ et voir le birapport comme un nombre (c'est la question **b**). On déroule ensuite le fil classique des propriétés du birapport.

a) Pourquoi ne définit-on pas le birapport de 1,2 ou 3 points d'une droite projectives ?

b) *Le birapport en tant que nombre.* Soient X une droite projective et $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathrm{X}$ quatre points distincts de X. Montrer qu'il existe une unique homographie $f : \mathrm{X} \to \mathbb{P}^1(k)$ telle que $f(a_1) = \infty$, $f(a_2) = 0$ et $f(a_3) = 1$. On pose $f(a_4) = z = z(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Montrer que z ne dépend que du birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ c'est-à-dire si $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ alors $z(a_1, a_2, a_3, a_4) = z(b_1, b_2, b_3, b_4)$. Inversement, montrer que si $z(a_1, a_2, a_3, a_4) = z(b_1, b_2, b_3, b_4)$ alors $[a_1, a_2, a_3, a_4] = [b_1, b_2, b_3, b_4]$. Ainsi l'élément z détermine complètement le birapport. On identifie donc le birapport en tant qu'orbite et le z qui lui est associé. Il reste à déterminer quelles sont les valeurs possibles de z. Montrer qu'il s'agit de $k \smallsetminus \{0, 1\}$.

c) Soit X et Y deux droites projectives et (a_1, a_2, a_3, a_4) (resp. (b_1, b_2, b_3, b_4)) quatre points distincts de X (resp. Y). Montrer que les 2 birapports sont égaux (en tant qu'élément de $k \smallsetminus \{0, 1\}$) si et seulement si il existe une homographie de X sur Y telle que $f(a_i) = b_i$ pour tout i.

d) Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application qui conserve le birapport entre deux droites projectives. Montrer que f est une homographie.

e) Expression du birapport dans $\mathbb{P}^1(k)$. Soit $(a, b, c, d) \in k \sqcup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(k)$ quatre éléments distincts. Calculer $[a, b, c, d] \in k \smallsetminus \{0, 1\}$. Étudier le cas particulier où $d = \infty$.

f) Calcul « vectoriel » du birapport. Soit a_1, a_2, a_3, a_4 quatre points distincts d'une droite projective $\mathrm{X} = \mathbb{P}(\mathrm{V})$. Montrer qu'il existe v_1 un vecteur directeur de a_1, v_2 un vecteur directeur de a_2 tel que $v_1 + v_2$ soit un vecteur directeur de a_3. Montrer qu'il existe un unique $z \in k \smallsetminus \{0, 1\}$ tel que $zv_1 + v_2$ soit un vecteur directeur de a_4. Montrer que z ne dépend pas du choix de v_1, v_2. Montrer que $[a_1, a_2, a_3, a_4] = z$.

Exercice 14 — Birapport et permutation.

a) Montrer que le groupe $\mathfrak{S}_4$ agit sur l'ensemble des quadruplets de points distincts de X (où X est une droite projective).

b) Montrer que l'action des éléments de $\mathfrak{S}_4$ commutent avec celle des homographies.

c) En déduire que pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, le birapport de $\sigma(a_1, \ldots, a_4)$ ne dépend que du birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ et pas seulement de (a_1, a_2, a_3, a_4). On note $\sigma[a_1, a_2, a_3, a_4]$ le birapport de $\sigma(a_1, \ldots, a_4)$.

d) En déduire une action de $\mathfrak{S}_4$ sur $k \smallsetminus \{0, 1\}$.

e) Montrer que les éléments du sous-groupe V_4 de $\mathfrak{S}_4$ (c'est-à-dire les doubles-transpositions et l'identité) agissent trivialement sur les birapports.

f) Déterminer les orbites des différents éléments de $k \smallsetminus \{0,1\}$ sous l'action de $\mathfrak{S}_4$ ainsi que leurs stabilisateurs. Les éléments de V_4 sont-ils les seuls à agir trivialement ?

Exercice 15 — Birapport de quatre droites dans le plan projectif. Soit $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ un plan projectif et x un point de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

a) Expliquer pourquoi les droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ passant par x forment un espace projectif de dimension 1. En particulier, on peut calculer le birapport de quatre droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ passant par x.

b) Soit D une droite projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ ne passant pas X et $(\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4)$ quatre droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ passant par x. on note $x_i = \mathrm{D}_i \cap \mathrm{D}$. Montrer que le birapport $[\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{D}_4]$ et le birapport $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ des quatre points de D sont égaux. En particulier, ce birapport ne dépend pas du choix de la droite D (voir l'exercice 6 questions **e** et **f**).

Dualité.

Exercice 16 — Dualité. Soit V un espace vectoriel de dimension 3.

a) Montrer que les droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ forment un plan projectif (penser à $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*)$). Qu'est-ce qu'une droite projective de $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*)$?

b) Traduire dans $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ ce que deviennent les théorèmes de Pappus et Desargues dans le plan projectif des droites projectives de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Références

[BER] M. Berger. *Géométrie.* Cedic Nathan, 1977.

[Mné] R. Mneimné. *Éléments de géométrie.* Cassini, 1997.