

Extension de corps

Exercice 1 Soient p, q deux nombres premiers. Pour quels valeurs de p et q a-t-on $\mathbb{Q}(\sqrt{p}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{q})$?

Exercice 2 Soit p un nombre premier, k un corps et K une extension de k de degré p premier.

Exercice 3 Déterminer une $\mathbb{Q}$ -base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Déterminer les automorphismes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Exercice 4 Soient K une extension de k de degré impair. Comparer $k(a)$ et $k(a^2)$.

Exercice 5 Soient K une extension algébrique de k et a, b des éléments de K de degrés respectifs m et n sur k .

a) On note $r = [k(a, b) : k(b)]$ et $s = [k(a, b) : k(a)]$. Montrer que $r = m$ si et seulement si $s = n$.

b) Montrer que les conditions précédentes sont vérifiées si m et n sont premiers entre eux.

Exercice 6 Déterminer le degré sur $\mathbb{Q}$ du corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$ de $X^5 - 7$.

Exercice 7 — Cube et corps fini. Soit K un corps fini de caractéristique p et $|K|$ son cardinal.

a) On suppose $p \neq 2$. Montrer l'équivalence

(i) Tout élément de K est un cube ;

(ii) -3 n'est pas un carré dans K .

b) On suppose $p = 3$. Quelle est la situation ?

c) On suppose $p = 2$. Quelle est la situation ?

Exercice 8 Déterminer les sous-corps $\mathbb{F}_{2^6} = \mathbb{F}_{64}$.

Exercice 9

a) Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ de degré 1, 2 et 3, 4 ?

b) Quels sont les polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_3$ de degré 1, 2 et 3 ?

c) Factoriser sur $\mathbb{F}_2$ les polynômes suivants $X^4 + X^2 + 1$, $X^5 + X^4 + 1$.

d) Factoriser sur $\mathbb{F}_3$ le polynôme $X^4 + 1$.

e) Factoriser sur $\mathbb{F}_p$ le polynôme $X^p - X + 1$.

f) Pour quelles valeurs de $q = p^n$, $X^4 + 1$ est-il scindé sur $\mathbb{F}_q$?