Dans toute la suite $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$

1 Rappels topologiques

Cette section propose quelques rappels classiques de topologie. L'objectif est d'isoler les résultats topologiques utiles en vue de l'étude des variétés afin de ne pas alourdir, le moment venu, les démonstrations par des faits généraux.

1.1 Recollement d'espaces topologiques

Proposition 1.1 – Recollement d'espace topologique par des ouverts. Soient $(\mathrm{M}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille d'espaces topologiques. On suppose que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, il existe un ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de M_α, un ouvert $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ de M_β et un homéomorphisme $\psi_{\beta\alpha} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ vérifiant les conditions suivantes :

(*i*) $\mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\psi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

(*ii*) Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{A}$, la restriction $\psi^\gamma_{\beta\alpha}$ de $\psi_{\beta\alpha}$ à $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ réalise un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}$ et $\psi^\beta_{\gamma\alpha} = \psi^\alpha_{\gamma\beta} \circ \psi^\gamma_{\beta\alpha}$.

On note

$$\mathrm{X} = \bigsqcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{M}_\alpha$$

l'espace topologique réunion disjointe des M_α et $i_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{X}$ l'injection canonique. Sur X, on considère la relation $\mathscr{R}$ donnée par $y\mathscr{R}z$ si

$$\exists\, \alpha, \beta \in \mathrm{A}, \quad \exists\, x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}, \quad \exists\, x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}, \qquad y = i_\alpha(x_\alpha), \quad z = i_\beta(x_\beta) \quad \text{et} \quad \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta\,.$$

La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. On note $\mathrm{M} = \mathrm{X}/\mathscr{R}$ l'espace topologique quotient de X par $\mathscr{R}$, $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ la surjection canonique et $\varphi_\alpha = \pi \circ i_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$. On dit que M est l'espace topologique *obtenu par recollement des* M_α *le long des* $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ *au moyen des* $\psi_{\beta\alpha}$ et que les φ_α sont *les homéomorphismes associés.*

Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est un ouvert de M et φ_α un homéomorphisme de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. De plus, on a

(*iii*) $\mathrm{M} = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}} \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$.

(*iv*) $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) = \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$.

(*v*) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$ et tout $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on a $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = {\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha(x_\alpha)$.

Soit N un ensemble. On note $\mathscr{F}(\Psi, \mathrm{N})$ l'ensemble des familles $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, f_α soit une application de M_α dans N et, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on ait $f_\alpha{}_{|\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = f_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}$. L'application

$$\Delta^{\mathrm{N},\Phi}_{\mathrm{M}} : \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \longrightarrow \mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N}) \\ \quad g \qquad\quad \longmapsto (g \circ \varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \end{cases}$$

est bijective. En particulier, pour tout $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{F}(\Psi, \mathrm{N})$, il existe une unique application $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ telle que $g \circ \varphi_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Soit N′ un espace topologique. On note $\mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}')$ l'ensemble des familles $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N}')$ telles que pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application f_α soit continue. L'application $\Delta^{\mathrm{N}',\Phi}_{\mathrm{M}}$ induit une bijection entre $\mathscr{C}(\mathrm{M}, \mathrm{N}')$ et $\mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}')$. Autrement dit, si f est une application de M dans N′ alors f est continue si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $f \circ \varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{N}'$ est continue. En particulier, pour tout $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}')$, il existe une unique application $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}'$ telle que $g \circ \varphi_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. De plus, l'application g est continue.

On considère $(\mathrm{M}', \mathscr{T}')$ un espace topologique et pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, un homéomorphisme φ'_α de M_α sur un ouvert $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ de M′ tels que

(*vi*) $\mathrm{M}' = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}} \varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$.

(*vii*) $\varphi'_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi'_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) = \varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$.

(*viii*) Pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$ et tout $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on a $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = {\varphi'_\beta}^{-1} \circ \varphi'_\alpha(x_\alpha)$.

Soit N un ensemble. L'application $\Delta^{\mathrm{N},\Psi}_{\mathrm{M}'}$ est bijective.

Soient N' un espace topologique et $f : \mathrm{M}' \to \mathrm{N}$ une application. Alors f est continue si et seulement si $f_{\big|\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)}$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ si et seulement si $f \circ \varphi'_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{N}$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Autrement dit, l'application $\Delta^{\mathrm{N}',\Psi}_{\mathrm{M}'}$ réalise une bijection entre $\mathscr{C}(\mathrm{M}', \mathrm{N}')$ et $\mathscr{C}(\Psi, \mathrm{N}')$.

De plus, il existe un unique homéomorphisme $\delta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ tel que $\delta \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. En particulier, $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{T}'$) est l'unique topologie sur M (sur M') telle que $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ (resp. $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$) soit un ouvert de M et $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ (resp $\varphi'_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$) soit un homéomorphisme pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Remarque 1.2 – Homéomorphisme. Appliquons la condition (*i*) et la condition (*ii*) avec $\alpha = \gamma$. On obtient alors $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\alpha} = \mathrm{U}_{\beta\alpha}$, $\psi^\alpha_{\beta\alpha} = \psi_{\beta\alpha}$ est un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = \psi_{\beta\alpha} \circ \psi_{\alpha\beta}$. Ainsi $\psi_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\beta\alpha}$ sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Preuve. On note

$$\mathrm{X} = \bigsqcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{M}_\alpha$$

l'espace topologique réunion disjointe des M_α et $i_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{X}$ l'injection canonique. Sur X, on considère la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ donnée par $y\mathscr{R}z$ si

$$\exists\, \alpha, \beta \in \mathrm{A}, \quad \exists\, x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}, \quad \exists\, x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}, \qquad y = i_\alpha(x_\alpha), \quad z = i_\beta(x_\beta) \quad \text{et} \quad \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta\,.$$

Montrons que $\mathscr{R}$ est bien une relation d'équivalence. Soit $y \in \mathrm{X}$, il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ et $x_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha = \mathrm{U}_{\alpha\alpha}$ tel que $y = i_\alpha(x_\alpha)$. Comme $\varphi_\alpha(x_\alpha) = x_\alpha$ par (*iii*), on en déduit que $y\mathscr{R}y$. Soient $y, z \in \mathrm{X}$ tels que $y\mathscr{R}z$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ tels que $y = i_\alpha(x_\alpha)$, $z = i_\beta(x_\beta)$ et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. Comme $\psi_{\alpha\beta}$ est la bijection réciproque de $\psi_{\beta\alpha}$, on a $\psi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ et donc $z\mathscr{R}y$. Soient $x, y, z \in \mathrm{X}$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ tels que $x = i_\alpha(x_\alpha)$, $y = i_\beta(x_\beta)$ et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. Il existe $\beta', \gamma \in \mathrm{A}$, $x_{\beta'} \in \mathrm{U}_{\beta'\gamma}$ et $x_\gamma \in \mathrm{U}_{\gamma\beta'}$ tels que $y = i_{\beta'}(x_{\beta'})$, $z = i_\gamma(x_\gamma)$ et $\psi_{\gamma\beta'}(x_{\beta'}) = x_\gamma$. Par définition de X et injectivité de i_β, on obtient $\beta = \beta'$ et $x_\beta = x_{\beta'} \in \mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}$. L'hypothèse (*iii*) montre qu'il existe un (unique) $x'_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ tel que $x_\beta = \psi^\gamma_{\beta\gamma}(x'_\alpha) = \psi_{\beta\gamma}(x_\alpha)$. L'injectivité de $\psi_{\beta\alpha}$ montre que $x_\alpha = x'_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$. On en déduit alors avec (*iii*) que

$$x_\gamma = \psi_{\gamma\beta}(x_\beta) = \psi^\alpha_{\gamma\beta}(x_\beta) = \psi^\alpha_{\gamma\beta}(\psi^\gamma_{\beta\gamma}(x_\alpha)) = \psi^\beta_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = \psi_{\gamma\alpha}(x_\alpha)\,.$$

Ainsi $x\mathscr{R}z$. Finalement $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est une relation d'équivalence.

On note $\mathrm{M} = \mathrm{X}/\mathscr{R}$ l'espace topologique quotient de X par $\mathscr{R}$, $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ la surjection canonique et $\psi_\alpha = \pi \circ i_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$.

Soit $\alpha \in \mathrm{A}$ et U_α un ouvert de M_α. Montrons que $\psi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha)$ est ouvert dans M. Par définition de la topologie quotient, il s'agit de montrer $\pi^{-1}(\psi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$ est un ouvert de X. Or

$$\pi^{-1}(\psi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha)) = \bigsqcup_{\beta \in \mathrm{A}} i_\beta(\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha))\,.$$

En effet, soit $y = i_\beta(x_\beta)$ avec $x_\beta \in \psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\alpha\beta) \subset \mathrm{U}_{\beta\alpha}$. Comme $\psi_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\beta\alpha}$ sont des bijections réciproque l'une de l'autre, l'élément $x_\alpha = \psi_{\alpha\beta}(x_\beta) \in \mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha$. On pose alors $x = i_\alpha(x_\alpha)$. On a alors $y\mathscr{R}x$ c'est-à-dire $\pi(y) = \pi(x) = \varphi_\alpha(x_\alpha)$. Ainsi $y \in \pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$.

Soit $y \in \pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$. Il existe $x_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha$ tel que $\pi(i_\alpha(x_\alpha)) = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \pi(y)$. On pose $z = i_\alpha(x_\alpha)$. On a donc $z\mathscr{R}y$. Par définition de $\mathscr{R}$, il existe $\alpha', \beta \in \mathrm{A}$, $x_{\alpha'} \in \mathrm{U}_{\alpha'\beta}$ et $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha'}$ tel que $z = i_{\alpha'}(x_{\alpha'})$ et $y = i_\beta(x_\beta)$ et $\psi_{\beta\alpha'}(x_\alpha) = x_\beta$. Par définition de X et injectivité de i_α, on obtient $\alpha = \alpha'$ et $x_\alpha = x_{\alpha'} \in \mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha$. Ainsi $y = i_\beta(x_\beta) \in i_\beta(\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha))$.

Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha$ est ouvert dans $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et que $\psi_{\beta\alpha}$ est un homéomorphisme, on en déduit que $\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et donc de M_β. Ainsi, par définition de la topologie de la réunion disjointe, $i_\beta(\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha))$ est un ouvert de X. Finalement, on obtient que $\pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$ est ouvert dans X. On en déduit que $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ est une application ouverte et $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est un ouvert de M.

Par ailleurs, φ_α est continue (comme composée des applications continues i_α et π). Enfin, φ_α est injective. En effet, si $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\alpha(x'_\alpha)$ alors $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R}i_\alpha(x'_\alpha)$. Comme α est l'unique élément β de A tel que $i_\alpha(x_\alpha) \in i_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ (resp. $i_\alpha(x'_\alpha) \in i_\beta(\mathrm{M}_\beta)$) et que i_α est injective, on obtient, par

définition de $\mathscr{R}$, $x_\alpha = \varphi_{\alpha\alpha}(x_\alpha) = x'_\alpha$. Finalement φ_α est un homéomorphisme de M_α sur son image $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ qui est ouverte dans M.

De plus, comme π est surjective, on a $\mathrm{M} = \pi(\mathrm{M}) = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}}\pi(i_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}}\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$.

Soit $y \in \varphi_\beta(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$. Il existe $x_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha$ (resp. $x_\beta \in \mathrm{M}_\beta$) tel que $y = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. Ainsi $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R}i_\beta(x_\beta)$. Comme α (resp. β) est l'unique élément γ de A tel que $i_\alpha(x_\alpha) \in i_\gamma(\mathrm{M}_\gamma)$ (resp. $i_\beta(x_\beta) \in i_\gamma(\mathrm{M}_\gamma)$) et que i_α et i_β sont injectives, on en déduit que $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ (et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$). Ainsi $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$ et $y \in \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$.

Soit $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$. Il existe $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ tel que $y = \varphi_\alpha(x_\alpha)$. On pose $x_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$. Par définition de $\mathscr{R}$, on a alors $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R}i_\beta(x_\beta)$ c'est-à-dire $y = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. Ainsi $y \in \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$ et $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$.

De même, si $y \in \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$, on obtient $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$ et $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$.

Enfin, pour $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on pose $x_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$. Par définition de $\mathscr{R}$, on a alors $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R}i_\beta(x_\beta)$ c'est-à-dire $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. Ainsi ${\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(x_\alpha)) = x_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$.

Comme les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert de M, on obtient la première équivalence. Comme φ_α est un homéomorphisme de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$, on obtient la deuxième équivalence par composition par φ_α et ${\varphi_\alpha}^{-1}$.

Par la propriété universelle de la réunion disjointe, il existe une (unique) application continue $\widetilde{g} : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ telle que $\widetilde{g} \circ i_\alpha = g_\alpha$. Montrons que $\widetilde{g}$ est compatible avec $\mathscr{R}$. Soient $y, z \in \mathrm{X}$ tels que $y\mathscr{R}z$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$ et $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ tel que $y = i_\alpha(x_\alpha)$, $z = i_\beta(x_\beta)$ et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. On a alors

$$\widetilde{g}(y) = \widetilde{g} \circ i_\alpha(x_\alpha) = g_\alpha(x_\alpha) = g_\beta(\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha)) = g_\beta(x_\beta) = \widetilde{g} \circ i_\beta(x_\beta) = \widetilde{g}(z)\,.$$

Donc il existe une (unique) application continue $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ telle que $\widetilde{g} = g \circ \pi$. On a donc $g \circ \varphi_\alpha = g \circ \pi \circ i_\alpha = \widetilde{g} \circ i_\alpha = g_\alpha$. Enfin si g' est une application qui vérifie $g' \circ \varphi_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. On obtient, par composition par ${\varphi_\alpha}^{-1}$,

$$g'_{\big|\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)} = g_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1} = g_{\big|\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)}$$

Comme les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ recouvrent M, on obtient $g = g'$.

Enfin, pour montrer la bijection, il suffit de montrer que $f \circ \varphi_{\alpha\big|\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = f \circ \varphi_\beta \circ \psi\beta\alpha$. Or pour $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$, on a $\psi\beta\alpha(x_\alpha) = {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(x_\alpha))$ (d'après (v)) ce qui donne le résultat.

Comme les $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert de M, on obtient la première équivalence. Comme φ'_α est un homéomorphisme de M_α sur $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$, on obtient la deuxième équivalence par composition par φ'_α et ${\varphi'_\alpha}^{-1}$.

Soit $x \in \mathrm{M}$, il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. On pose alors $g(x) = g_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1}(x)$. Montrons que g est bien définie. Si $x \in \varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ alors $x \in \varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta) \cap \varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) = \varphi'_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi'_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$. Grâce à $(viii)$, on obtient que

$$(g_\beta \circ {\varphi_\beta}^{-1})(x) = (g_\beta \circ {\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha({\varphi_\alpha}^{-1}(x)) = g_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}({\varphi_\alpha}^{-1}(x)) = g_\alpha({\varphi_\alpha}^{-1}(x))\,.$$

Ainsi g est bien défini. De plus, $g_{\big|\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)} = g_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Comme les $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert de M', on en déduit que g est continue. Enfin, si g' est une application qui vérifie $g' \circ \varphi'_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. On obtient, par composition par ${\varphi'_\alpha}^{-1}$,

$$g'_{\big|\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)} = g_\alpha \circ {\varphi'_\alpha}^{-1} = g_{\big|\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)}$$

Comme les $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ recouvrent M, on obtient $g = g'$.

Enfin, pour montrer la bijection, il suffit de montrer que $f \circ \varphi'_{\alpha\big|\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = f \circ \varphi'_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}$. Or pour $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$, on a $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = {\varphi'_\beta}^{-1}(\varphi'_\alpha(x_\alpha))$ (d'après $(viii)$) ce qui donne le résultat.

La famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est une famille d'application continue de $\mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ telle que $\varphi_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = \varphi_\alpha(x_\alpha)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$ et tout $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$. Il existe une unique application continue $\delta' : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ telle que $\delta' \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$. La famille $(\varphi'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est une famille d'application continue de $\mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}'$ telle que $\varphi'_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = \varphi'_\alpha(x_\alpha)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$ et tout $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$. Il existe une unique application continue $\delta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ telle que $\delta \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$.

Les applications continues $\delta \circ \delta' : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}'$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{M}'}$ vérifient

$$\delta \circ \delta' \circ \varphi'_\alpha = \delta \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{M}'} \circ \varphi'_\alpha$$

Donc $\mathrm{id}'_{\mathrm{M}} = \delta \circ \delta'$. Les applications continues $\delta' \circ \delta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ et id_{M} vérifient

$$\delta' \circ \delta \circ \varphi_\alpha = \delta \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{M}} \circ \varphi_\alpha$$

Donc $\mathrm{id}_{\mathrm{M}} = \delta \circ \delta'$. Finalement δ et δ' sont des homéomorphismes réciproques l'un des l'autre.

Si $\mathscr{T}_1$ (resp. $\mathscr{T}_1'$) est une topologie sur M (resp. M′) telle que les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ (resp. $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$) soient des ouverts de $\mathscr{T}_1$ (resp. $\mathscr{T}_1'$) et les $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ (resp. $\varphi'_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$) soient des homéomorphismes. Comme les conditions $(vi), (vii), (viii)$ sont vérifiées pour l'espace $(\mathrm{M}, \mathscr{T}_1)$ (resp. $(\mathrm{M}', \mathscr{T}_1')$) et les homéomorphismes φ_α (resp. φ'_α) (puisqu'elles ne sont pas de nature topologique). On en déduit qu'il existe un unique homéomorphisme $\delta_1 : (\mathrm{M}, \mathscr{T}) \to (\mathrm{M}, \mathscr{T}_1)$ ($\delta'_1 : (\mathrm{M}, \mathscr{T}) \to (\mathrm{M}', \mathscr{T}_1')$) telle que $\delta_1 \circ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha$ (resp. $\delta'_1 \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$). Mais id_M (resp. δ) est l'unique application g de M dans lui-même vérifiant $g \circ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha$ (resp. $g \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$). Ainsi, $\delta_1 = \mathrm{id}_\mathrm{M}$ (resp. $\delta \circ {\delta'}_1^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}'}$) est un homéomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{T})$ (resp. $(\mathrm{M}', \mathscr{T}_1')$) sur $(\mathrm{M}, \mathscr{T}_1)$ (resp. $(\mathrm{M}', \mathscr{T}')$) c'est-à-dire $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1$ (resp. $\mathscr{T}' = \mathscr{T}_1'$).

Remarque 1.3 Montrons que ${\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)) = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$. Comme, d'après (iv), on a $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) \subset \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$, on en déduit $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \subset {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))$. Réciproquement, $x_\alpha \in {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))$ alors, il existe $x_\beta \in \mathrm{M}_\beta$ tel que $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta) = y$. On en déduit, grâce à (iv) que $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$. Ainsi, il existe $x'_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ tel que $y = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\alpha(x'_\alpha)$. Comme φ_α est injective (puisque c'est un homéomorphisme), on en déduit que $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$.

Montrons que ${\varphi'_\alpha}^{-1}(\varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta)) = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$. Comme, d'après (vii), on a $\varphi'_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) \subset \varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta)$, on en déduit $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \subset {\varphi'_\alpha}^{-1}(\varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta))$. Réciproquement, $x_\alpha \in {\varphi'_\alpha}^{-1}(\varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta))$ alors, il existe $x_\beta \in \mathrm{M}_\beta$ tel que $\varphi'_\alpha(x_\alpha) = \varphi'_\beta(x_\beta) = y$. On en déduit que, grâce à (vii) $y \in \varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta) = \varphi'_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$. Ainsi, il existe $x'_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ tel que $y = \varphi'_\alpha(x_\alpha) = \varphi'_\alpha(x'_\alpha)$. Comme φ'_α est injective (puisque c'est un homéomorphisme), on en déduit que $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$.

Proposition 1.4 — Construction de topologie. Soient M un ensemble, $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille d'espaces topologiques. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, il existe une famille d'applications $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ vérifiant

(i) φ_α est injective, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.
(ii) $\mathrm{M} = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}}\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$;
(iii) ${\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))$ est un ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de M_α, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$;
(iv) $\psi_{\alpha\beta} = {\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est continue, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$.

Il existe sur M une unique topologie telle que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit des ouverts de M et $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ un homéomorphisme.

Remarque 1.5 — Conséquence des hypothèses. L'application φ_α réalise une bijection de φ_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ (d'après (i)).

Par définition de $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$, on a $\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) \subset \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. Ainsi ${\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{M}_\alpha$ a bien un sens. Enfin, par définition de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on obtient que $\psi_{\beta\alpha} : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est bien définie. Comme $\psi_{\beta\alpha} \circ \psi_{\alpha\beta} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\beta\alpha}}$ et $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$, on en déduit que $\psi_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\beta\alpha}$ sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Par définition, on a $\mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\psi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_\alpha}$. Montrons que

$$\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) = \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta). \qquad (*)$$

En effet, soit $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $y_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$), on pose $x_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$ (resp. $y_\alpha = \psi_{\alpha\beta}(y_\beta)$). On a alors $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$ (resp. $\varphi_\alpha(y_\alpha) = \varphi_\beta(y_\beta)$). Ainsi on obtient $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$,

et
$$\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) \subset \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta).$$

Si $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ alors, il existe $x_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha$ (resp. $x_\beta \in \mathrm{M}_\beta$) $y = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. On a alors $x_\alpha \in {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)) = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, d'où $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$.

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$. Comme $\psi_{\alpha\beta}$ (resp. $\psi_{\gamma\beta}$) est un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $\mathrm{U}_{\gamma\beta}$) sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ (resp. $\mathrm{U}_{\gamma\beta}$), l'égalité $(*)$ montre que la restriction $\psi^\gamma_{\beta\alpha}$ de $\psi_{\beta\alpha}$ à $\mathrm{U}_{\alpha\gamma} \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un homéomorphisme sur

$$\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha \mathrm{U}_{\alpha\gamma}) = \mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\gamma(\mathrm{U}_{\gamma\beta})) = \mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}\,.$$

De plus, la définition des $\psi_{\alpha\beta}$ montre immédiatement que $\psi^\beta_{\gamma\alpha} = \psi^\alpha_{\gamma\beta} \circ \psi^\gamma_{\beta\alpha}$.

Preuve. *Première démonstration.* D'après la remarque 1.5, les hypothèses (i) et (ii) de la proposition 1.1 sont vérifiées. On peut donc considérer l'espace Y obtenu par recollement des M_α le long des $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ au moyen des $\psi_{\beta\alpha}$. On note φ'_α les homéomorphismes associés.

On considère alors la famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in \mathrm{A}}$. Par définition des $\psi_{\beta\alpha}$, on a $\varphi_\alpha\big|_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = \varphi_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}$. Il existe une unique application $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{M}$ telle que $g \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$ (voir la proposition 1.1).

Montrons que g est bijective. Comme $g \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$, on obtient que $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \subset g(\mathrm{X})$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Ainsi, d'après (ii), on obtient que g est surjective. Soient $x, y \in \mathrm{M}$ tels que $g(x) = g(y)$. Par définition de l'espace obtenu par recollement, il existe $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha$ et $x_\beta \in \mathrm{M}_\alpha$ tels que $x = \varphi'_\alpha(x_\alpha)$ et $y = \varphi'_\beta(x_\beta)$. En composant par g, on obtient l'égalité $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. D'où, par définition des $\psi_{\beta\alpha}$, on a $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. Ainsi, en reprenant les notations de la définition 1.1, on a $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R} i_\beta(x_\beta)$ c'est-à-dire $x = y$.

Par transfert de structure, il existe une unique topologie sur M telle que g soit un homéomorphisme. Comme $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est un ouvert de Y, on en déduit que $g(\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est un ouvert de M et par restriction, g induit un homéomorphisme de $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. Par composition, on en déduit que $g \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$ est un homéomorphisme de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$.

Enfin, soit $\mathscr{T}$ une topologie sur M telle que $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit un ouvert de M et $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ un homéomorphisme. Comme, d'après la remarque 1.5, $(\mathrm{M}, \mathscr{T})$ vérifie les propositions (vi), (vii) et $(viii)$ de la proposition 1.1, on en déduit l'unicité de la topologie cherchée.

2 Carte et Atlas

2.1 Pseudocartes

Définition 2.1 – Recouvrement. Soient M un ensemble et $\mathscr{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille de sous-ensemble de M. On dit que $\mathscr{U}$ est un *recouvrement de* M si

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha\,.$$

Soient M un espace topologique et $\mathscr{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement de M. On dit que $\mathscr{U}$ est un *recouvrement ouvert de* M si U_α est ouvert, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Définition 2.2 – Pseudocartes.

- Soit M un ensemble (resp. un espace topologique). On dit qu'un quadruplet $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une *pseudocarte* (resp. une *pseudocarte topologique*) sur M si U est une partie de M, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une bijection (resp. U est un ouvert de M, V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ un homéomorphisme). On dit que U est le *domaine* de la pseudocarte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, n sa *dimension* et φ son *transfert*.
- Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi), \mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes (resp. deux pseudocartes topologiques) sur M. On dit que les applications

$$\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} \circ \left(\varphi_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}') \longrightarrow \varphi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')$$

et

$$\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} \circ \left(\varphi_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}') \longrightarrow \varphi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')$$

sont les *applications de transition* entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$.

Remarque 2.3 – Pseudocarte et pseudocarte topologique. Soit M un espace topologique. Une pseudocarte topologique sur M est toujours une pseudocarte sur l'ensemble M.

Remarque 2.4 – Carte vide. Soient M ensemble (resp. un espace topologique). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, le quadruplet $(\varnothing, \varnothing, m, \varnothing)$ est une pseudocarte (resp. topologique) de M appelée carte vide de dimension m.

Remarque 2.5 – Bijectivité. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ deux pseudocartes (resp. deux pseudocartes topologiques) sur M. Les applications de transitions $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre (resp. des homéomorphismes réciproque l'un de l'autre).

En effet, si $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ alors l'application φ est une bijection (resp. un homéomorphisme) de U sur V. Donc la restriction de φ réalise une bijection (resp. un homéomorphisme) de $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ sur $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$. De même, la restriction de φ' réalise une bijection (resp. un homéomorphisme) de $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ sur $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$. Par composition, on en déduit que $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre (resp. des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre).

Remarque 2.6 – Restriction. Soient M un ensemble, $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une pseudocarte sur M et V' un ouvert de V. On pose $\mathrm{U}' = \varphi^{-1}(\mathrm{V}')$. Le quadruplet $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n, \varphi_{|\mathrm{U}'})$ est une pseudocarte sur M notée $\mathcal{U}_{|\mathrm{U}'}$ et appelé *restriction de* $\mathcal{U}$ *à* U'. En effet, V' est ouvert dans V donc dans $\mathbb{R}^n$ et $\varphi_{|\mathrm{U}'}$ réalise une bijection entre U' et V'.

Soient M un espace topologique, $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une pseudocarte topologique sur M et U' un ouvert de U Le quadruplet $(\mathrm{U}', \varphi(\mathrm{U}'), n, \varphi_{|\mathrm{U}'})$ est une pseudocarte topologique sur M notée $\mathcal{U}_{|\mathrm{U}'}$ et appelé *restriction de* $\mathcal{U}$ *à* U'. En effet, U' est ouvert dans U donc dans M. De plus, comme φ est un homéomorphisme $\varphi(\mathrm{U}')$ est ouvert dans V donc dans $\mathbb{R}^n$. Enfin, $\varphi_{|\mathrm{U}'}$ réalise un homéomorphisme entre U' et $\varphi(\mathrm{U}')$.

Soient M un espace topologique, $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une pseudocarte topologique sur M et V' un ouvert de V. Comme $\mathrm{U}' = \varphi^{-1}(\mathrm{V}')$ est un ouvert de U donc de M et que $\varphi(\varphi^{-1}(\mathrm{V}')) = \mathrm{V}'$, la restriction de $\mathcal{U}$ à U' au sens des pseudocartes coïncide avec la restriction de $\mathcal{U}$ à l'ouvert U' au

sens des pseudocartes topologiques.

2.2 Atlas

Définition 2.7 — Atlas.

- Soient M un ensemble et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes sur M. On dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont *$\mathscr{C}^k$-compatibles* si les *conditions de compatibilité* suivantes sont vérifiées
  - (i) $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est un ouvert de V et $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est un ouvert de V' ;
  - (ii) les applications de transitions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont de classe $\mathscr{C}^k$.
- Soient M un espace topologique et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes topologiques sur M. On dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont *$\mathscr{C}^k$-compatibles* si les applications de transitions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont de classe $\mathscr{C}^k$.
- Soit M un ensemble. Un ensemble de pseudocartes $\mathscr{A} = \{\mathcal{U}_\alpha, \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ est un *$\mathscr{C}^k$-atlas sur* M si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
  - (i) les domaines des $\mathcal{U}_\alpha$ forment un recouvrement de M ;
  - (ii) pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, les pseudocartes $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles.
- Soit M un espace topologique. Un ensemble de pseudocartes topologiques $\mathscr{A} = \{\mathcal{U}_\alpha, \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ est un *$\mathscr{C}^k$-atlas topologique sur* M si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
  - (i) les domaines des $\mathcal{U}_\alpha$ forment un recouvrement (qui est donc un recouvrement ouvert) de M ;
  - (ii) pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, les pseudocartes topologiques $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles.
- Soient $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. On dit que $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ (ou plus brièvement U) est une *carte de $\mathscr{A}$*. Et, si $x \in \mathrm{U}$, on dit que $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est *une carte de $\mathscr{A}$ en x*.

Remarque 2.8 — Compatibilité pour les pseudocartes. Soient M un espace topologique et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux pseudocartes topologiques sur M qui sont $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant que pseudocartes sur l'ensemble M alors il est évident que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant que pseudocartes topologiques.

Réciproquement, si M un espace topologique et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux pseudocartes topologiques sur M qui sont $\mathscr{C}^k$-compatibles (en tant que pseudocartes topologiques). Alors $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant que pseudocartes sur l'ensemble M. En effet, U et U' sont des ouverts de M donc $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ est un ouvert de M contenu dans U et dans U'. Ainsi $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ est ouvert dans U et dans U'. Comme φ est un homéomorphisme, on obtient que $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ sont ouverts respectivement dans V et V'.

Finalement, pour des pseudocartes topologiques, les $\mathscr{C}^k$-compatibilités au sens des pseudocartes et au sens des pseudocartes topologiques coïncident.

Exemple 2.9 — Exemple stupide. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une pseudocarte (resp. topologique) de M. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la carte vide de dimension m est $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathcal{U}$. En effet, $\varphi(\mathrm{U} \cap \varnothing) = \varnothing$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varnothing(\mathrm{U} \cap \varnothing)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et les applications de transitions sont les applications vides qui sont de classe $\mathscr{C}^k$.

Exemple 2.10 — Pseudocartes disjointes. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ deux pseudocartes (resp. topologiques) de M. Si les domaines de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont disjoints alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles puisque les applications de transitions sont les applications vides qui sont de classe $\mathscr{C}^k$. On dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont des *pseudocartes disjointes*.

Remarque 2.11 — Atlas et atlas topologique. Les remarques 2.3 et 2.8 montrent qu'un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique sur l'espace topologique M est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur l'ensemble M.

Par ailleurs, soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M et $\mathscr{T}$ une topologie sur M. Pour que $\mathscr{A}$ soit un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique sur $(\mathrm{M}, \mathscr{T})$, il faut et il suffit que les cartes de $\mathscr{A}$ soient des pseudocartes topologiques c'est-à-dire que les domaines soient des ouverts de M et les transferts des homéomorphismes.

En effet, la définition de $\mathscr{C}^k$-atlas topologique impose que les cartes de $\mathscr{A}$ des pseudocartes topologiques. Réciproquement, on suppose que les cartes de $\mathscr{A}$ sont des pseudocartes topologiques. Par hypothèse, les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ forment un recouvrement de M. Il reste à vérifier que les cartes de $\mathscr{A}$ sont deux à deux compatibles en tant que pseudocartes topologiques. Comme $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas, elles sont compatibles en tant que pseudocarte. La remarque 2.8 montre qu'elles sont alors $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant que pseudocartes topologiques.

Remarque 2.12 – Compatibilité et restriction. Soient M un ensemble et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux pseudocartes sur M qui sont $\mathscr{C}^k$-compatibles. Comme $\varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')$ et $\varphi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')$ sont ouverts respectivement dans V et dans V′ et que $\varphi^{-1}(\varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')) = \mathrm{U}\cap\mathrm{U}'$ et $\varphi'^{-1}(\varphi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')) = \mathrm{U}\cap\mathrm{U}'$, on peut parler des pseudocartes $\mathcal{U}_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$ et $\mathcal{U}'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$. Comme $(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')\cap(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}') = \mathrm{U}\cap\mathrm{U}'$, elles sont $\mathscr{C}^k$-compatibles.

La remarque 2.8 montre que ce qui précède s'applique au cas où M est un espace topologique et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux cartes topologiques sur M.

Remarque 2.13 – Compatibilité et restriction 2. On considère un espace topologique M et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes topologiques sur M. Soient $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{U}'_1 \subset \mathrm{U}'$ deux ouverts de M. Montrons que si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles alors $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}_1}$ et $\mathcal{U}'_1 = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}'_1}$ le sont aussi.

Comme φ (resp. φ') est un homéomorphisme, $\varphi(\mathrm{U}_1\cap\mathrm{U}'_1)$ (resp. $\varphi'(\mathrm{U}_1\cap\mathrm{U}'_1)$) est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^{n'}$). Par ailleurs, les applications de transition $\psi_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}$ et $\psi_{\mathcal{U}'_1\mathcal{U}_1}$ entre $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}'_1$ sont les restrictions à $\varphi(\mathrm{U}_1\cap\mathrm{U}'_1)$ et $\varphi'(\mathrm{U}_1\cap\mathrm{U}'_1)$ de $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$. Elles sont donc de classe $\mathscr{C}^k$.

Remarque 2.14 – Difféomorphisme. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes (resp. pseudocartes topologiques) sur M qui soient $\mathscr{C}^k$-compatibles. Les applications de transitions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont alors des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes. En effet, ce sont des bijections réciproques l'une de l'autre (voir remarque 2.5) qui sont de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi, si $\mathrm{U}\cap\mathrm{U}' \neq \varnothing$ alors $n = n'$. Autrement dit, les dimensions de deux pseudocartes (resp. topologiques) $\mathscr{C}^k$-compatibles dont les domaines se rencontrent sont identiques.

Proposition 2.15 – Prévariété. Soient M un ensemble et $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. Il existe sur M une unique topologie $\mathscr{T}$ (appelée *topologie associée à* $\mathscr{A}$) telle que $\mathscr{A}$ soit un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique c'est-à-dire telle que pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble U_α soit un ouvert et $\varphi_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{V}_\alpha$ soit un homéomorphisme (remarque 2.11).

De plus, $\mathscr{T}$ est la topologie la plus fine rendant continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$ pour $\alpha \in \mathrm{A}$ et la moins fine rendant continue les φ_α pour $\alpha \in \mathrm{A}$.

Enfin, soit X un espace topologique X. Une application $f : \mathrm{M} \to \mathrm{X}$ est continue si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ est continue. Une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ est continue si et seulement si, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $\varphi_\alpha \circ f_{|f^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)}$ est continue.

Preuve. Soit $\mathscr{T}'$ une topologie telle que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble U_α soit un ouvert et $\varphi_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{V}_\alpha$ soit un homéomorphisme et considérons $\mathrm{U} \in \mathscr{T}'$. On a alors $\mathrm{U}\cap\mathrm{U}_\alpha$ est un ouvert de U_α et comme φ_α est un homéomorphisme $\varphi_\alpha(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de V_α. Définissons alors

$$\mathscr{T} = \{\mathrm{U} \subset \mathrm{M}, \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \quad \varphi_\alpha(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}_\alpha) \text{ soit un ouvert de } \mathrm{V}_\alpha\}$$

et montrons que $\mathscr{T}$ est un topologie.

- Comme $\varphi_\alpha(\varnothing) = \varnothing$, on a bien $\varnothing \in \mathscr{T}$.
- Comme $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha) = \mathrm{V}_\alpha$, on a bien $\mathrm{M} \in \mathscr{T}$.
- On considère un ensemble I et pour $i \in \mathrm{I}$, un élément $\mathrm{U}_i \in \mathscr{T}$. On pose

$$\mathrm{U} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{U}_i\,.$$

On a alors
$$\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}) = \varphi_\alpha\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}_i)\right) = \bigcup_{i\in\mathrm{I}}\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}_i)\,.$$

Comme une réunion d'ouvert est ouvert, on obtient que $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U})$ est un ouvert de V_α et donc $\mathrm{U} \in \mathscr{T}$.

– On considère un ensemble fini I et pour $i \in \mathrm{I}$, un élément $\mathrm{U}_i \in \mathscr{T}$. On pose

$$\mathrm{U} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i \,.$$

On a alors
$$\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}) = \varphi_\alpha\left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_i)\right) = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_i)\,;$$

la dernière égalité étant valable car φ_α est un bijection. Comme une intersection finie d'ouvert est ouvert, on en déduit que $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U})$ est un ouvert de V_α et donc $\mathrm{U} \in \mathscr{T}$.

Ainsi $\mathscr{T}$ est bien une topologie sur M. Montrons que $\mathrm{U}_\beta \in \mathscr{T}$ pour tout $\beta \in \mathrm{A}$. Par hypothèse, pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, on a $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$ est un ouvert de V_α et donc $\mathrm{U}_\beta \in \mathscr{T}$. Enfin, montrons que les φ_α sont des homéomorphismes. Comme les φ_α sont bijectives, il suffit de montrer que les φ_α sont continues et ouvertes. Soit V un ouvert de U_α. Comme U_α est ouvert, V est un ouvert de M et donc $\varphi_\alpha(\mathrm{V}) = \varphi_\alpha(\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de V_α. Ainsi φ_α est ouverte. Soit W un ouvert de V_α, montrons que ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{W}) \in \mathscr{T}$. Comme $\mathrm{U}_\alpha = {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$, on a, pour $\beta \in \mathrm{A}$,

$$\varphi_\beta(\mathrm{U}_\beta \cap {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{W})) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_\beta \cap {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{V}_\alpha \cap \mathrm{W})) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_\beta \cap \mathrm{U}_\alpha \cap {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{W}))\,.$$

Comme φ_α est bijective, on a $\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta = {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta))$ et donc

$$\varphi_\beta(\mathrm{U}_\beta \cap {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{W})) = \varphi_\beta({\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{W})) = \psi_{\alpha\beta}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{W})\,.$$

Or, par hypothèse, $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$ et W sont des ouverts de V_α, on en déduit que $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{W}$ est aussi un ouvert de V_α. Ainsi, comme $\psi_{\alpha\beta}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, $\varphi_\beta(\mathrm{U}_\beta \cap {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{W}))$ est un ouvert de V_β. On a donc ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{W}) \in \mathscr{T}$ et φ_α est continue. Finalement, les φ_α sont bien des homéomorphismes.

Montrons à présent que $\mathscr{T}$ est la seule topologie ayant les propriétés souhaités. Au début de la preuve, on a vu que si $\mathscr{T}'$ vérifie les propriétés souhaitées alors $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. De plus, si $\mathrm{V} \notin \mathscr{T}'$, alors il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha$ ne soit pas dans $\mathscr{T}'$. Sinon, comme les U_α recouvrent M, on aurait

$$\mathrm{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} (\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha) \in \mathscr{T}'\,.$$

Comme $\mathrm{U}_\alpha \in \mathscr{T}'$, l'ensemble $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha$ n'est pas un ouvert de U_α et comme φ_α est un homéomorphisme, $\varphi_\alpha(\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha)$ n'est pas un ouvert de V_α. Ainsi $\mathrm{V} \notin \mathscr{T}$. On obtient donc ${}^{\mathrm{c}}\mathscr{T}' \subset {}^{\mathrm{c}}\mathscr{T}$. Finalement, on a bien $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.

Montrons que $\mathscr{T}$ est la topologie la plus fine rendant continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$. Comme les φ_α sont des homéomorphismes lorsqu'on munit M de la topologie $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}$ rend continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$. Soit $\mathscr{T}'$ une topologie qui rende continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$ et $\mathrm{U} \in \mathscr{T}'$. L'ensemble $({\varphi_\alpha}^{-1})^{-1}(\mathrm{U})$ est donc un ouvert de V_α. Comme $({\varphi_\alpha}^{-1})^{-1}(\mathrm{U}) = \varphi_\alpha(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha)$, on obtient que $\mathrm{U} \in \mathscr{T}$ et donc $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. Autrement dit $\mathscr{T}'$ est moins fine que $\mathscr{T}$.

Montrons que $\mathscr{T}$ est la topologie la moins fine rendant continue les φ_α. Comme les φ_α sont des homéomorphismes lorsqu'on munit M de la topologie $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}$ rend continue les φ_α. Soit $\mathscr{T}'$ une topologie qui rende continue les φ_α et $\mathrm{V} \in \mathscr{T}$. L'ensemble $\varphi_\alpha(\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha)$ est alors un ouvert de V_α. Comme φ_α est continue pour $\mathscr{T}'$, on a

$${\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha)) = \mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha \in \mathscr{T}'$$

et donc
$$\mathrm{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} (\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_\alpha) \in \mathscr{T}'.$$

Ainsi $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$. Autrement dit $\mathscr{T}$ est moins fine que $\mathscr{T}'$.

Si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{X}$ est continue alors $f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Réciproquement supposons que $f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Soit U un ouvert de X, on a

$$f^{-1}(\mathrm{U}) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} (f^{-1}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{U}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} {\varphi_\alpha}^{-1}((f \circ {\varphi_\alpha}^{-1})^{-1}(\mathrm{U}))$$

Comme $(f \circ {\varphi_\alpha}^{-1})^{-1}(\mathrm{U})$ est ouvert (puisque $f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ est continue) et que ${\varphi_\alpha}^{-1}$ est un homéomorphisme, on obtient que $f^{-1}(\mathrm{U})$ est ouvert.

Enfin, si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ est continue alors

$$f_\alpha = f_{\big|f^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)}$$

est continue. Par composition, $\varphi_\alpha \circ f_\alpha$ est continue. Réciproquement, supposons $\varphi_\alpha \circ f_\alpha$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ et montrons que f est continue. Soit U un ouvert de M, comme les U_α recouvrent M, on a

$$f^{-1}(\mathrm{U}) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} f^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha).$$

Or $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha = {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha))$, donc

$$f^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha) = {f_\alpha}^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha) = (\varphi_\alpha \circ f_\alpha)^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha)).$$

Comme $\mathrm{U} \in \mathscr{T}$, l'ensemble $\varphi_\alpha(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de V_α. Comme $\varphi_\alpha \circ f_\alpha$ est continue, on obtient que $f^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de X. On en déduit que $f^{-1}(\mathrm{U})$ est aussi ouvert et donc que f est continue.

Corollaire 2.16 — Prévariété. Soit M un ensemble. Il revient au même de se donner

(i) un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M ;

(ii) une topologie $\mathscr{T}$ sur M et un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique sur M.

Preuve. **(⇒)** Il s'agit de la proposition 2.15. **(⇐)** Il s'agit de la remarque 2.11.

Remarque 2.17 — Topologie. On reprend les notations du corollaire 2.16. On suppose que l'on se trouve dans la situtation (ii). D'après le corollaire 2.16, on est aussi dans la situation (i) (avec les mêmes U_α, V_α, n_α et φ_α). La proposition 2.15 montre qu'il existe sur M une unique topologie $\mathscr{T}'$ telle que les U_α sont des ouverts (pour $\mathscr{T}'$) et les φ_α sont des homéomorphismes. Comme les U_α sont déjà des ouverts et les φ_α des homéomorphismes pour $\mathscr{T}$, on en déduit que $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. Autrement dit, la nouvelle topologie est la même que la précédente.

Remarque 2.18 — Vérification. Soient M un ensemble et $\mathscr{A} = \{\mathcal{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ une famille de pseudocartes dont les domaines recouvrent M. Pour que $\mathscr{A}$ soit un $\mathscr{C}^k$-atlas, il suffit que les pseudocartes $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$ soient $\mathscr{C}^k$-compatibles pour tous $\alpha \neq \beta$. En effet, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, on a $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\alpha) = \mathrm{V}_\alpha$ est un ouvert de V_α et $\psi_{\mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}_\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

De même, soient M un espace topologique et $\mathscr{A} = \{\mathcal{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ une famille de pseudocartes topologiques dont les domaines recouvrent M. Pour que $\mathscr{A}$ soit un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique, il suffit que les pseudocartes topologiques $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$ soient $\mathscr{C}^k$-compatibles pour tous $\alpha \neq \beta$. En effet, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $\psi_{\mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}_\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

2.3 Atlas maximal

Définition 2.19 — Compatibilité. Soient M un ensemble et $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ deux $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. On dit que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont *$\mathscr{C}^k$-compatibles* si $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas.

Soient M un espace topologique et $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ deux $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M. On dit que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont *$\mathscr{C}^k$-compatibles* si $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique.

Remarque 2.20 — Topologie. On considère un ensemble M et $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ et $\mathscr{A}' = \{(\mathrm{U}'_\alpha, \mathrm{V}'_\alpha, n'_\alpha, \varphi'_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}'\}$ deux $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles alors les topologies sur M associées à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ coïncident. En effet, $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ est un atlas sur M. Pour $\alpha \in \mathrm{A}$ et $\alpha' \in \mathrm{A}'$, les U_α et les U'_α sont des ouverts et les φ_α et les $\varphi'_{\alpha'}$ sont des homéomorphismes pour la topologie associée à l'atlas $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$. Par unicité (proposition 2.15), les topologies associées à $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ coïncident.

Attention, il se peut que deux atlas sur M définissent la même topologie sans être compatibles (voir l'exemple 3.13). Autrement dit, la topologie ne détermine pas la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. De façon heuristique, la notion de prévariété n'est pas purement topologique.

Remarque 2.21 — Inclusion d'atlas. Par ailleurs, si $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas (resp. topologique) contenu dans $\mathscr{C}^k$-atlas (resp. topologique) $\mathscr{A}'$ alors $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles.

Remarque 2.22 — Vérifications. Soient M un ensemble (resp. espace topologiques) et $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ deux $\mathscr{C}^k$-atlas (resp. topologiques) sur M. Les atlas $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles si, pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ et tout $\mathcal{U}' \in \mathscr{A}'$, les pseudocartes (resp. topologiques) $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles.

En effet, comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent déjà M, il suffit de vérifier les conditions de compatibilité entre les cartes. Si les deux cartes considérées sont dans $\mathscr{A}$ ou dans $\mathscr{A}'$, le fait que $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{A}'$ soit un $\mathscr{C}^k$-atlas (resp. topologique) donne le résultat voulu.

Remarque 2.23 — Compatibilité, atlas et atlas topologique. Dans cette remarque, on compare les notions de compatibilité entre $\mathscr{C}^k$-atlas et de compatibilité entre $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques.

a. Soient M un espace topologique et $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M qui sont $\mathscr{C}^k$-compatibles (en tant qu'atlas topologiques). D'après la remarque 2.11, ils sont $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant que $\mathscr{C}^k$-atlas sur l'ensemble M.

b. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatibles sur M et $\mathscr{T}$ une topologie. Si la topologie $\mathscr{T}$ fait de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ des atlas topologiques sur M (l'unicité dans la proposition 2.15 montre que $\mathscr{T}$ est nécessairement la topologie à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$, voir aussi le point **c**), alors $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant que $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M. Il s'agit de montrer que $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique. D'après la remarque 2.11, il suffit de montrer que pseudocartes de $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ sont des pseudocartes topologiques. Comme une pseudocarte de $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ appartient à l'atlas topologique $\mathscr{A}$ ou à l'atlas topologique $\mathscr{A}'$, on obtient le résultat.

c. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatibles sur M. D'après la proposition 2.15 et la remarque 2.20, les topologies associée à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ coïncident et font de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ des $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M. Le point **b** assure que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant que $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M.

d. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatibles sur M. Si $\mathscr{A}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique sur M (pour la topologie associée à $\mathscr{A}$) $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathscr{A}$ en tant qu'atlas topologique alors le point **a** montre que $\mathscr{A}'$ est $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathscr{A}$ en tant que $\mathscr{C}^k$-atlas sur $\mathscr{A}$.

e. Soient M est un espace topologique et $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M. On suppose que $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant qu'atlas sur l'ensemble M. Comme la topologie de M fait de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ des $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques, le point **b** montre que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ son $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant que $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M.

Lemme 2.24 — Compatibilité et relation d'équivalence. Soit M un ensemble. La relation « être $\mathscr{C}^k$-compatible » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des $\mathscr{C}^k$-atlas de M.

Soit M un espace topologique. La relation « être $\mathscr{C}^k$-compatible » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des $\mathscr{C}^k$-atlas topologique de M.

Preuve. La réflexivité et la symétrie de la relation « être $\mathscr{C}^k$-compatible » sont évidentes puisque $\mathscr{A} \cup \mathscr{A} = \mathscr{A}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas (resp. topologique) et que $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}' = \mathscr{A}' \cup \mathscr{A}$. Il reste à montrer la transitivité. Commençons par nous ramener au cas topologique. Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ trois $\mathscr{C}^k$-atlas sur M tels que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ soient $\mathscr{C}^k$-compatibles et $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ soient $\mathscr{C}^k$-compatibles. D'après la remarque 2.20, $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ sont des $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M pour la topologie associé à $\mathscr{A}$. Le point **b** de la remarque 2.23 montre que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$) sont $\mathscr{C}^k$-compatibles en tant qu'atlas topologique sur M. Le point **d** de la remarque 2.23 assure alors que l'on peut se contenter du cas topologique.

Soient $\mathscr{A} = \{\mathcal{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$, $\mathscr{A}' = \{\mathcal{U}_\alpha = (\mathrm{U}'_\alpha, \mathrm{V}'_\alpha, n'_\alpha, \varphi'_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}'\}$ et $\mathscr{A}'' = \{\mathcal{U}_\alpha = (\mathrm{U}''_\alpha, \mathrm{V}''_\alpha, n''_\alpha, \varphi''_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}''\}$ trois $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques sur M tels que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ soient $\mathscr{C}^k$-compatibles et $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ soient $\mathscr{C}^k$-compatibles. Montrons que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}''$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles. Soient $(\alpha, \alpha'') \in \mathrm{A} \times \mathrm{A}''$. D'après la remarque 2.22, il suffit de montrer que $\psi_{\mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_{\alpha''}}$ et $\psi_{\mathcal{U}_{\alpha''} \mathcal{U}_\alpha}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$. Or, pour tout $\alpha' \in \mathrm{A}'$, l'ensemble $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_{\alpha'} \cap \mathrm{U}''_{\alpha''})$ (resp. $\varphi'_{\alpha'}(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_{\alpha'} \cap \mathrm{U}''_{\alpha''})$) est un ouvert de $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}''_{\alpha''})$ (resp. $\varphi'_{\alpha'}(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_{\alpha'})$) puisque φ_α (resp. $\varphi'_{\alpha'}$) est un homéomorphisme et que $\mathrm{U}'_{\alpha'}$ (resp. $\mathrm{U}''_{\alpha''}$) est ouvert de M. De plus, la restriction de $\psi_{\mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_{\alpha''}}$ à $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_{\alpha'} \cap \mathrm{U}''_{\alpha''})$ coïncide avec la composée de la restriction de $\psi_{\mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_{\alpha'}}$ à $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_{\alpha'} \cap \mathrm{U}''_{\alpha''})$ et de $\psi_{\mathcal{U}_{\alpha'} \mathcal{U}_{\alpha''}}$ à $\varphi'_{\alpha'}(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_{\alpha'} \cap \mathrm{U}''_{\alpha''})$. Comme chacun de ces deux applications est de classe $\mathscr{C}^k$ (comme restriction à un ouvert de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$), leur composée est $\mathscr{C}^k$. Comme

$$\bigcup_{\alpha' \in \mathrm{A}'} \varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_{\alpha'} \cap \mathrm{U}''_{\alpha''}) = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}''_{\alpha''}),$$

$\psi_{\mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_{\alpha''}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}''_{\alpha''})$. Par un raisonnement analogue, on montre que $\psi_{\mathcal{U}_{\alpha''} \mathcal{U}_{\alpha'}}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^k$.

Remarque 2.25 — Classe d'équivalence. Soient M un ensemble et $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. D'après les points **c** et **d** de la remarque 2.23, l'ensemble des $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatibles avec $\mathscr{A}$ et l'ensemble des $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques (pour la topologie associée à $\mathscr{A}$) $\mathscr{C}^k$-compatibles (en tant qu'atlas topologiques) avec $\mathscr{A}$ coïncident.

Soient M un atlas topologique et $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique sur M. D'après les points **a** et **e** de la remarque 2.23, l'ensemble des $\mathscr{C}^k$-atlas sur l'ensemble M qui sont $\mathscr{C}^k$-compatibles avec $\mathscr{A}$ et l'ensemble des $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques $\mathscr{C}^k$-compatibles avec $\mathscr{A}$ coïncident.

Proposition 2.26 — Atlas maximal. Soient M un ensemble et $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. La réunion de tous les $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatibles avec $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas noté $\mathscr{A}_{\max}$ compatible avec $\mathscr{A}$. L'atlas $\mathscr{A}_{\max}$ est l'unique $\mathscr{C}^k$-atlas maximal (pour l'inclusion) contenant $\mathscr{A}$.

Soient M un espace topologique et $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique sur M. La réunion de tous les $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques $\mathscr{C}^k$-compatibles avec $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique noté $\mathscr{A}_{\max}$ compatible avec $\mathscr{A}$. L'atlas $\mathscr{A}_{\max}$ est l'unique $\mathscr{C}^k$-atlas topologique maximal (pour l'inclusion) contenant $\mathscr{A}$.

Preuve. Commençons par les atlas topologiques. Comme $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathscr{A}$, on a $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_{\max}$ et donc les domaines des pseudocartes de $\mathscr{A}_{\max}$ recouvrent M. Montrons la compatibilité entre les pseudocartes de $\mathscr{A}_{\max}$. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes topologiques de $\mathscr{A}_{\max}$. Il existe $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{A}''$) un $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathscr{A}$ contenant $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$). D'après la définition 2.19 et la remarque 2.21, $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}''$) est un $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathscr{A}$. Par transitivité (lemme 2.24), on obtient que $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}' \cup \mathscr{A}''$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas contenant $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$. Ainsi, les applications de transitions $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$. On en déduit que $\mathscr{A}_{\max}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas.

Passons au cas non topologique. Considérons $\mathscr{A}_{\max}$ la réunion de tous les $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{C}^k$-compatibles avec $\mathscr{A}$. D'après la remarque 2.25, $\mathscr{A}_{\max}$ est la réunion de tous les $\mathscr{C}^k$-atlas topologiques (pour la topologie associée à $\mathscr{A}$) $\mathscr{C}^k$-compatibles avec $\mathscr{A}$. D'après ce qui précède, $\mathscr{A}_{\max}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique contenant $\mathscr{A}$. Ainsi, d'après la remarque 2.11, $\mathscr{A}_{\max}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas contenant $\mathscr{A}$.

Montrons la propriété de maximalité de $\mathscr{A}_{\max}$. Si $\mathscr{A}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas (resp. topologique) contenant $\mathscr{A}_{\max}$, il contient $\mathscr{A}$ et est donc compatible avec $\mathscr{A}$ (remarque 2.21). Par définition de $\mathscr{A}_{\max}$, on a $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}_{\max}$ et donc $\mathscr{A}_{\max} = \mathscr{A}'$. Finissons par l'unicité de l'atlas cherché. Si $\mathscr{A}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas (resp. topologique) maximal contenant $\mathscr{A}$ alors, d'après la remarque 2.21, $\mathscr{A}'$ est $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathscr{A}$ donc il est contenu dans $\mathscr{A}_{\max}$. Par maximalité de $\mathscr{A}'$, on a $\mathscr{A}' = \mathscr{A}_{\max}$. ■

Ainsi, chaque classe d'équivalence de $\mathscr{C}^k$-atlas contient un représentant privilégié : la réunion de tous les éléments de la classe d'équivalence.

Lemme 2.27 — Cartes d'un atlas maximal. Soient M un espace topologique, $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique maximal sur M et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$. Pour tout ouvert U_1 de U, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}_1}$ est une carte de $\mathscr{A}$.

Soient M un ensemble (resp. espace topologique), $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas (resp. topologique) sur M et $\mathcal{U}$ une pseudocarte (resp. topologique). Si $\mathcal{U}$ est $\mathscr{C}^k$-compatible avec toutes les cartes de $\mathscr{A}$ alors $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_{\max}$.

Preuve. Comme $\mathcal{U}$ est $\mathscr{C}^k$-compatible avec toutes les cartes de $\mathscr{A}$, la remarque 2.13 montre que $\mathcal{U}_1$ est $\mathscr{C}^k$-compatible avec toutes les cartes de $\mathscr{A}$. Ainsi $\mathscr{A} \cup \{\mathcal{U}_1\}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas puisque les ouverts de $\mathscr{A}$ recouvrent déjà M. Par maximalité de $\mathscr{A}$, on obtient que $\mathcal{U}_1 \in \mathscr{A}$.

Par hypothèse, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} \cup \{\mathcal{U}\}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas puisque les ouverts de $\mathscr{A}$ recouvrent M. Comme $\mathscr{A}_1$ contient $\mathscr{A}$, il est $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathscr{A}$ et donc $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_{\max}$.

Exemple 2.28 — Carte vide. Soit M un ensemble (resp. espace topologique) et $\mathscr{A}$ un atlas alors $\mathscr{A}_{\max}$ contient toutes les cartes vides c'est-à-dire pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(\varnothing, \varnothing, m, \varnothing) \in \mathscr{A}_{\max}$. En effet, d'après l'exemple 2.9, les cartes vides sont $\mathscr{C}^k$-compatibles avec toutes les cartes de $\mathscr{A}$. Le lemme 2.27 montre qu'elles appartiennent à $\mathscr{A}_{\max}$.

3 La catégorie des prévariétés

3.1 Les objets : les prévariétés

Définition 3.1 — Prévariété. Une prévariété de classe $\mathscr{C}^k$ ou $\mathscr{C}^k$-prévariété est un couple $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ formé d'un ensemble et d'un $\mathscr{C}^k$-atlas maximal ou de façon équivalente un couple $(\mathrm{M}, \mathcal{A})$ formé d'un ensemble et d'une classe d'équivalence de $\mathscr{C}^k$-atlas.

On dit que l'atlas $\mathscr{A}$ munit l'ensemble M d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété.

Remarque 3.2 — Prévariété. Tout couple formé d'un ensemble $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ formé d'un ensemble et d'un $\mathscr{C}^k$-atlas détermine sur M une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. Il suffit de considérer l'atlas maximal associé à $\mathscr{A}$ (proposition 2.26). Lorsqu'on parlera de la structure de variété d'un ensemble muni d'un atlas, il s'agira de cette structure naturelle associée à l'atlas maximal.

Proposition 3.3 — Propriétés locales d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $x \in \mathrm{M}$. Il existe une base de voisinages de x formée de domaines de cartes contractiles et connexes par arcs. En particulier, les domaines des cartes en x forment une base de voisinage de x et M est localement connexe, localement connexe par arcs, localement simplement connexe, localement contractile. De plus, pour tout $x \in \mathrm{M}$, le singleton $\{x\}$ est fermé dans M.

Preuve. Il existe une carte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ de $\mathscr{A}$ en x. L'ensemble V est un voisinage de $\varphi(x)$. Comme V est localement contractile (puisque localement convexe), il existe une base de voisinage $\mathcal{V}_{\varphi(x)}$ de $\varphi(x)$ formée d'ouverts contractiles et connexes par arcs (par exemple, les boules de centre $\varphi(x)$ de rayon r pour r suffisamment petit). Comme φ est un homéomorphisme, l'ensemble $\left\{\varphi^{-1}(\mathrm{V}'), \quad \mathrm{V}' \in \mathcal{V}_{\varphi(x)}\right\}$ est une base de voisinage de x formée d'ensembles contractiles et connexes par arcs. Comme $\varphi^{-1}(\mathrm{V}') \subset \mathrm{U}$, le lemme 2.27 donne le résultat. Comme un espace contractile et connexe par arcs est connexe et simplement connexe, on obtient aussi la locale simple connexité et la locale connexité de M. Enfin, si $y \neq x$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert de y ne contenant pas x. Soit $\mathcal{U}$ une carte de $\mathscr{A}$ en y. Si x appartient au domaine U de $\mathcal{U}$ alors, comme U est séparé, il existe deux ouverts U_x et U_y contenant respectivement x et y contenu dans U et d'intersection vide. L'ouvert U_y convient. Si x n'appartient pas à U alors U convient.

3.2 Exemples de prévariétés

Exemple 3.4 — Ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathscr{A} = \{\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{U}})\}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur U. En effet, U est ouvert dans U et recouvre U, id_{U} est un homéomorphisme de U sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et comme il n'y qu'une carte, la remarque 2.18 montre que $\mathscr{A}$ est bien un $\mathscr{C}^k$-atlas. D'après la remarque 3.2, on peut alors munir U d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. Lorsque l'on parlera de la structure de prévariété d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$, il s'agira de cette structure de prévariété (sauf mention explicite du contraire). L'atlas maximal $\mathscr{A}_{\max}$ est alors la réunion de l'ensemble des pseudocartes topologiques de U de dimension n dont le transfert est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme et de l'ensemble des cartes vides. En effet, soit $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}, m, \varphi) \in \mathscr{A}_{\max}$. Alors $\mathcal{U}$ est une pseudocarte topologique de U. Par hypothèse, $\mathcal{U}'$ est compatible avec $\mathcal{U}$. Or $\mathrm{U}' \cap \mathrm{U} = \mathrm{U}'$ et $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = \varphi^{-1}$. Ainsi, la remarque 2.14 montre que φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme et $m = n$ (sauf si $\mathrm{U}' = \varnothing$ auquel cas $\mathcal{U}'$ est une carte vide). Réciproquement, si $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}, m, \varphi)$ est une pseudocarte topologique de dimension n dont le transfert est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme alors, comme $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = \varphi^{-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles. Le lemme 2.27 montre que $\mathcal{U}' \in \mathscr{A}_{\max}$.

Exemple 3.5 — Ouvert d'un espace vectoriel normé. Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, U un ouvert de E et f un isomorphisme linéaire de E sur $\mathbb{R}^n$. La continuité des applications linéaires en dimension finie assure que l'application f est un homéomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$. En particulier, $f(\mathrm{U})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f_{|\mathrm{U}}$ réalise un homéomorphisme de U sur $f(\mathrm{U})$. Finalement, comme U est un ouvert de U et recouvre U, la remarque 2.18 montre

que $\mathscr{A} = \left\{\mathcal{U} = (\mathrm{U}, f(\mathrm{U}), n, f_{|\mathrm{U}})\right\}$ est bien un $\mathscr{C}^k$-atlas sur U. D'après la remarque 3.2, on peut alors munir U d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. Lorsque l'on parlera de la structure de prévariété d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, il s'agira de cette structure de prévariété (sauf mention explicite du contraire).

Par ailleurs, on remarque que la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété construite ne dépend pas du choix de l'isomorphisme linéaire f. En effet, si $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme linéaire alors l'atlas $\mathscr{B} = \left\{\mathcal{V} = (\mathrm{U}, g(\mathrm{U}), n, g_{|\mathrm{U}})\right\}$ est $\mathscr{C}^k$-compatible avec $\mathscr{A}$ puisque les pseudocartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles. En effet, les applications de transition entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont données par $g \circ f^{-1}{}_{|f(\mathrm{U})}$ et $f \circ g^{-1}{}_{|g(\mathrm{U})}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^k$ comme restrictions d'applications linéaires.

Enfin, remarquons que l'application id : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bien sûr un isomorphisme linéaire. L'exemple 3.4 des ouverts de $\mathbb{R}^n$ est donc un cas particulier de celui-ci.

Exemple 3.6 — Groupe linéaire. L'ensemble $\mathrm{GL(E)} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$ est naturellement muni d'un structure de prévariété. En effet, GL(E) est un ouvert de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$ puisque $\mathrm{GL(E)} = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et det une application continue. De même, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut être muni d'une structure de prévariété.

Exemple 3.7 — Sphère. Soit $\mathbb{S}^{n-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n), \quad {x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 1\right\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ pour la métrique euclidienne. On considère les points $\mathrm{N} = (1, 0, \ldots, 0)$ et $\mathrm{S} = (-1, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{S}^{n-1}$ appelés respectivement pôle nord et pôle sud et les deux ouverts $\mathrm{U_N} = \mathbb{S}^{n-1} \smallsetminus \{\mathrm{N}\}$ et $\mathrm{U_S} = \mathbb{S}^{n-1} \smallsetminus \{\mathrm{S}\}$ de $\mathbb{S}^{n-1}$. On va montrer grâce aux projections stéréographiques que $\mathrm{U_N}$ et $\mathrm{U_S}$ sont homéomorphes à $\mathbb{R}^{n-1}$.

Soit p'_{N} la projection stéréographique de sommet N à $x \in \mathrm{U_N}$ on associe le point d'intersection de la droite $(\mathrm{N}x)$ avec l'hyperplan H d'équation $x_1 = 0$. L'application réciproque q'_{N} associe au point x appartenant à l'hyperplan H le deuxième point d'intersection de $\mathbb{S}^{n-1}$ avec la droite $\mathrm{N}x$. Déterminons des expressions analytiques pour p_{N} et q_{N}. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U_N}$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p'_{\mathrm{N}}(x) = (1, 0, \ldots, 0) + \lambda(1 - x_1, -x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{H}$. Comme N est le seul point de $\mathbb{S}^{n-1}$ tel que $x_1 = 1$ puisqu'alors ${x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2 = 0$, on obtient $\lambda = -(1 - x_1)^{-1}$ et donc

$$p'_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{1 - x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)\,.$$

Réciproquement, soit $x = (0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{H}$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$q'_{\mathrm{N}}(x) = (1, 0, \ldots, 0) + \lambda(1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \mathbb{S}^{n-1} \qquad \text{et} \qquad q'_{\mathrm{N}}(x) \neq \mathrm{N}\,.$$

On obtient
$$(1 + \lambda)^2 + \lambda^2({x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2) = 1\,,$$

c'est-à-dire
$$2\lambda + \lambda^2(1 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2) = 0.$$

La solution $\lambda = 0$ donne N que l'on exclut. On obtient donc $\lambda = -2(1 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{-1}$ et

$$q'_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{1 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}\left(\left({x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 - 1\right), 2x_2, \ldots, 2x_n\right).$$

Les expressions trouvées vont nous permettre de construire une structure de prévariété sur $\mathbb{S}^{n-1}$.

Pour cela, on considère les applications

$$p_{\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathrm{U_N} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto \dfrac{1}{1 - x_1}(x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

et
$$q_{\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathbb{R}^{n-1} & \longrightarrow \mathrm{U_N} \\ x = (x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto \dfrac{1}{{x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 + 1}\left({x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 - 1, 2x_2, \ldots, 2x_n\right) \end{cases}.$$

Comme N est le seul point de $\mathbb{S}^{n-1}$ tel que $x_1 = 1$ puisqu'alors ${x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2 = 0$, l'application p_{N} est bien définie et continue. Par ailleurs, q_{N} est bien à valeurs dans $\mathbb{S}^{n-1}$ puisque

$$({x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 - 1)^2 + 4{x_2}^2 + \cdots + 4{x_n}^2 = ({x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 + 1)^2.$$

De plus, $$\frac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2-1}{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2+1}\neq 1$$

donc q_{N} est à valeurs dans $\mathrm{U_N}$ et continue. Montrons à présent que p_{N} et q_{N} sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Si $(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{U_N}$ alors

$$q_{\mathrm{N}}\circ p_{\mathrm{N}}((x_1,\ldots,x_n))=\left(\frac{\dfrac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{(1-x_1)^2}-1}{\dfrac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{(1-x_1)^2}+1},\frac{\dfrac{2x_2}{1-x_1}}{\dfrac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{(1-x_1)^2}+1},\ldots,\frac{\dfrac{2x_n}{1-x_1}}{\dfrac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{(1-x_1)^2}+1}\right)$$

La relation ${x_1}^2+\cdots+{x_n}^2=1$ assure alors que $q_{\mathrm{N}}\circ p_{\mathrm{N}}((x_1,\ldots,x_n))=(x_1,\ldots,x_n)$. De plus, pour $(x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, on a

$$1-\frac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2-1}{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2+1}=\frac{2}{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2+1}\,,$$

d'où$$p_{\mathrm{N}}\circ q_{\mathrm{N}}((x_2,\ldots,x_n))=\left(\frac{\dfrac{2x_2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}}{\dfrac{2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}},\ldots,\frac{\dfrac{2x_2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}}{\dfrac{2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}}\right)=(x_2,\ldots,x_n)\,.$$

Ainsi p_{N} et q_{N} sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre.

On passe à présent au cas du pôle sud. De façon analogue, on définit les applications

$$p_{\mathrm{S}}\colon\begin{cases}\mathbb{S}^{n-1}\smallsetminus\{\mathrm{S}\} & \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}\\ x=(x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto \dfrac{1}{1+x_1}(x_2,\ldots,x_n)\end{cases}$$

et $$q_{\mathrm{S}}\colon\begin{cases}\mathbb{R}^{n-1} & \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}\smallsetminus\{\mathrm{S}\}\\ x=(x_2,\ldots,x_n) & \longmapsto \dfrac{1}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}\left(1-({x_2}^2+\cdots+{x_n}^2),2x_2,\ldots,2x_n\right)\end{cases}.$$

Comme S est le seul point de $\mathbb{S}^{n-1}$ tel que $x_1=-1$ puisqu'alors ${x_2}^2+\ldots+{x_n}^2=0$, l'application p_{S} est bien définie et continue. Par ailleurs, q_{S} est bien à valeurs dans $\mathbb{S}^{n-1}$ puisque

$$({x_2}^2+\cdots+{x_n}^2-1)^2+4{x_2}^2+\cdots+4{x_n}^2=({x_2}^2+\cdots+{x_n}^2+1)^2.$$

De plus, $$\frac{1-({x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)}{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2+1}\neq -1$$

donc q_{S} est à valeurs dans $\mathrm{U_S}$ et continue. Montrons à présent que p_{S} et q_{S} sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Si $(x_1,\ldots,x_n)\in \mathrm{U_S}$ alors

$$q_{\mathrm{S}}\circ p_{\mathrm{S}}((x_1,\ldots,x_n))=\left(\frac{1-\dfrac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{(1+x_1)^2}}{1+\dfrac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{(1+x_1)^2}},\frac{\dfrac{2x_2}{1+x_1}}{1+\dfrac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{(1+x_1)^2}},\ldots,\frac{\dfrac{2x_n}{1+x_1}}{1+\dfrac{{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{(1+x_1)^2}}\right)$$

La relation ${x_1}^2+\cdots+{x_n}^2=1$ assure alors que $q_{\mathrm{S}}\circ p_{\mathrm{S}}((x_1,\ldots,x_n))=(x_1,\ldots,x_n)$. On a aussi $p_{\mathrm{S}}\circ q_{\mathrm{S}}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}$. De plus, pour $(x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, on a

$$1+\frac{1-({x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}=\frac{2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}\,,$$

d'où$$p_{\mathrm{S}}\circ q_{\mathrm{S}}((x_2,\ldots,x_n))=\left(\frac{\dfrac{2x_2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}}{\dfrac{2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}},\ldots,\frac{\dfrac{2x_2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}}{\dfrac{2}{1+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}}\right)=(x_2,\ldots,x_n)\,.$$

Ainsi p_{S} et q_{S} sont donc des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Finalement $\mathcal{U}_{\mathrm{N}} = (\mathrm{U}_{\mathrm{N}}, \mathbb{R}^{n-1}, n-1, p_{\mathrm{N}})$ et $\mathcal{U}_{\mathrm{S}} = (\mathrm{U}_{\mathrm{S}}, \mathbb{R}^{n-1}, n-1, p_{\mathrm{S}})$ sont des pseudocartes topologiques. Comme $\mathrm{U}_{\mathrm{N}} \cup \mathrm{U}_{\mathrm{S}} = \mathbb{S}^{n-1}$, les domaines des pseudocartes recouvrent $\mathbb{S}^{n-1}$. Enfin, comme $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}) = 0$ et $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{S}) = 0$, on a $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}_{\mathrm{N}} \cap \mathrm{U}_{\mathrm{S}}) = \mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\}$ et $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{U}_{\mathrm{N}} \cap \mathrm{U}_{\mathrm{S}}) = \mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\}$ et les applications des changements de cartes sont données par

$$p_{\mathrm{N}} \circ {p_{\mathrm{S}}}^{-1} = p_{\mathrm{S}} \circ {p_{\mathrm{N}}}^{-1} \colon \begin{cases} \mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \smallsetminus \{0\} \\ (x_2, \ldots, x_n) \longmapsto \dfrac{1}{{x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}(x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Elles sont de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi $\{\mathcal{U}_{\mathrm{N}}, \mathcal{U}_{\mathrm{S}}\}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur $\mathbb{S}^{n-1}$. La remarque 3.2 montre que l'on peut munir $\mathbb{S}^{n-1}$ d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété.

Notation 3.8 — Application produit. Soient X,X′, Y, Y′ quatre espaces topologiques, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ deux applications continues. On note $f \times g : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{X}' \times \mathrm{Y}'$ l'application donnée par $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$. La propriété universelle du produit montre qu'elle est continue pour les topologies produits sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ et $\mathrm{X}' \times \mathrm{Y}'$.

Exemple 3.9 — Produit de prévariétés. Soient M et N deux espaces topologiques. On munit M (resp. N) d'un $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha),\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ (resp. $\mathscr{B} = \{(\mathrm{U}'_\alpha, \mathrm{V}'_\alpha, n'_\alpha, \varphi'_\alpha),\ \alpha \in \mathrm{B}\}$) et $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ de la topologie produit. On va munir l'ensemble $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété.

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, les applications $\varphi_\alpha \times \varphi'_\beta$ réalisent des homéomorphismes de $\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta$ sur $\mathrm{V}_\alpha \times \mathrm{V}'_\beta$ (voir notation 3.8). Or, par définition de la topologie produit, $\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta$ est un ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ et $\mathrm{V}_\alpha \times \mathrm{V}'_\beta$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n_\alpha + n'_\beta}$. Ainsi $(\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta, \mathrm{V}_\alpha \times \mathrm{V}'_\beta, n_\alpha + n'_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi'_\beta)$ est une pseudocarte topologique. De plus, les domaines de ces pseudocartes topologiques recouvrent $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ puisque

$$\bigcup_{(\alpha,\beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}} \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta = \bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta \right) = \bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} \left(\bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha \right) \times \mathrm{U}'_\beta = \bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} \mathrm{M} \times \mathrm{U}'_\beta = \mathrm{M} \times \mathrm{N}\,.$$

Enfin, considérons $\alpha, \alpha' \in \mathrm{A}$ et $\beta, \beta' \in \mathrm{B}$. On pose

$$\mathrm{W} = (\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta) \cap (\mathrm{U}'_\alpha \times \mathrm{U}'_{\beta'}) = (\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_\alpha) \times (\mathrm{U}'_\beta \cap \mathrm{U}'_{\beta'})\,.$$

L'application

$$\psi = (\varphi_\alpha \times \varphi'_\beta)_{|\mathrm{W}} \circ \left((\varphi_{\alpha'} \times \varphi'_{\beta'})_{|\mathrm{W}} \right)^{-1} : (\varphi_\alpha \times \varphi'_\beta)(\mathrm{W}) \longrightarrow (\varphi_{\alpha'} \times \varphi'_{\beta'})(\mathrm{W})$$

s'écrit aussi $\psi = \left(\varphi_\alpha{}_{|\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_{\alpha'}} \circ \left(\varphi_{\alpha'}{}_{|\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_{\alpha'}} \right)^{-1} \right) \times \left(\varphi_\alpha{}_{|\mathrm{U}'_\beta \cap \mathrm{U}'_{\beta'}} \circ \left(\varphi_{\alpha'}{}_{|\mathrm{U}'_\beta \cap \mathrm{U}'_{\beta'}} \right)^{-1} \right)$.

Comme une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^i$ dans $\mathbb{R}^j$ est de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si chacune de ses j composantes l'est, l'application ψ est de classe $\mathscr{C}^k$ (ses $n_{\alpha'}$ premières composantes sont celles de $\psi_{\alpha\alpha'}$ et les $n'_{\beta'}$ suivantes celles de $\psi_{\beta\beta'}$ (notation de la proposition 2.15)). Ainsi, l'ensemble

$$\Big\{ (\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta, \mathrm{V}_\alpha \times \mathrm{V}'_\beta, n_\alpha + n'_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi'_\beta), \quad (\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B} \Big\}$$

est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ appelé *atlas produit* et noté $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ (Attention, il ne s'agit pas de l'ensemble produit $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{B}$). La remarque 3.2 montre alors que l'on peut munir $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. Par ailleurs, on remarque que la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété obtenue ne dépend pas des atlas choisis dans les classes d'équivalence de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{B}$. En effet, la construction de l'atlas produit montre immédiatement que si $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{B}'$) est l'atlas maximal contenant $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$), on a $(\mathscr{A} \times \mathscr{B}) \subset (\mathscr{A}' \times \mathscr{B}')$ et donc $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ et $\mathscr{A}' \times \mathscr{B}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatible et définissent le même $\mathscr{C}^k$-atlas maximal sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$. Lorsqu'on évoquera une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur un produit de $\mathscr{C}^k$-prévariété, il s'agira de celle construite ici (sauf mention explicite du contraire).

Exemple 3.10 — Produit d'ouverts. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Montrons que la structure de prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ obtenue par produit des structures de U et de V coïncide avec celle obtenue comme ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$.

D'après l'exemple 3.4, le $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id}_\mathrm{U})\}$ (resp. $\mathscr{B} = \{(\mathrm{V}, \mathrm{V}, m, \mathrm{id}_\mathrm{V})\}$) définit la structure de prévariété sur U (resp. V). Le $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ (voir exemple 3.9) est alors donné par $\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{(\mathrm{U} \times \mathrm{V}, \mathrm{U} \times \mathrm{V}, n+m, \mathrm{id}_\mathrm{U} \times \mathrm{id}_\mathrm{V})\}$. Comme $\mathrm{id}_\mathrm{U} \times \mathrm{id}_\mathrm{V} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}\times\mathrm{V}}$, l'atlas $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ n'est autre que l'atlas définissant la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ comme ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$.

En particulier, la structure de prévariété de $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la structure de prévariété produit de $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Exemple 3.11 — Produit d'ouverts d'espace vectoriel normé. Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie respective m et n et U un ouvert de E, V un ouvert de F. Montrons que la structure de prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ obtenue par produit des structures de U et de V coïncide avec celle obtenue comme ouvert de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}^m$ (resp. $g : \mathrm{F} \to \mathbb{R}^n$) un isomorphisme linéaire. D'après la remarque 3.5, le $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{A} = \left\{(\mathrm{U}, f(\mathrm{U}), m, f_{|\mathrm{U}})\right\}$ (resp. $\mathscr{B} = \left\{(\mathrm{V}, g(\mathrm{V}), n, g_{|\mathrm{V}})\right\}$) définit la structure de prévariété sur U (resp. V). Le $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ (voir exemple 3.9) est alors donné par

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \left\{(\mathrm{U} \times \mathrm{V}, f(\mathrm{U}) \times g(\mathrm{V}), n+m, f_{|\mathrm{U}} \times g_{|\mathrm{V}}))\right\}.$$

Comme $f_{|\mathrm{U}} \times g_{|\mathrm{V}} = (f \times g)_{|\mathrm{U}\times\mathrm{V}}$ et que l'application $f \times g : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathbb{R}^{n+m}$ réalise un isomorphisme linéaire, l'atlas $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ n'est autre que l'atlas définissant la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ comme ouvert de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Exemple 3.12 — Ensembles et prévariétés discrètes. Soit M un ensemble. Pour $x \in \mathrm{M}$, on note φ_x l'unique application de $\{x\}$ dans $\{0\} = \mathbb{R}^0$. On considère la famille de pseudocartes $\mathscr{A} = \{(\{x\}, \{0\}, 0, \varphi_x), \quad x \in \mathrm{M}\}$. Comme les domaines des pseudocartes sont deux à deux disjoints, elles sont $\mathscr{C}^k$-compatibles (exemple 2.10). Enfin, comme $\mathrm{M} = \cup_{x\in\mathrm{M}} \{x\}$, on en déduit que $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. On peut donc munir M, grâce à $\mathscr{A}$, d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété (remarque 3.2) que l'on note $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$. La topologie associée à $\mathscr{A}$ est alors la topologie discrète puisque, pour tout $x \in \mathrm{M}$, les ensembles $\{x\}$ sont ouverts.

Exemple 3.13 — Autres structures de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\mathbb{R}$. Soit $k \geqslant 1$. Considérons l'application $\varphi : t \mapsto t^3$ (ou plus généralement, φ un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme). Alors $\{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1, \varphi)\}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur $\mathbb{R}$. En effet, $\mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$ et recouvre $\mathbb{R}$, φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur l'ouvert $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ et comme il n'y qu'une carte, la remarque 2.18 montre que $\{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1, \varphi)\}$ est bien un atlas. D'après la remarque 3.2, on peut alors munir $\mathbb{R}$ d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. Cette structure ne coïncide pas avec celle donnée dans l'exemple 3.4. En effet, les deux atlas $\{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1, \varphi)\}$ et $\{(\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1, \mathrm{id})\}$ ne sont pas compatibles puisque $\varphi = \varphi \circ \mathrm{id}^{-1}$ n'est pas un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Ils ne définissent donc pas le même atlas maximal et donc pas la même structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\mathbb{R}$. Cependant, les topologies associées à chacun de ces atlas sont les mêmes (la topologie standard de $\mathbb{R}$).

Exemple 3.14 — $\mathbb{R}_\pm$. On considère l'ensemble $\mathrm{M} = (\mathbb{R}^*) \coprod \{a_+, a_-\}$. L'objectif est de munir M d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété pour laquelle la topologie associée n'est pas séparée. On considère pour cela le recouvrement donné par $\mathrm{M} = \mathrm{U}_+ \cup \mathrm{U}_-$ avec $\mathrm{U}_+ = (\mathbb{R}^*) \cup \{a_+\}$ et $\mathrm{U}_- = (\mathbb{R}^*) \cup \{a_-\}$. Les applications

$$\varphi_+ : \begin{cases} \mathrm{U}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = a_+ \end{cases} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_- : \begin{cases} \mathrm{U}_- \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = a_- \end{cases} \end{cases}$$

sont des bijections. De plus, $\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_- = \mathbb{R}^*$ et $\varphi_+(\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_-) = \varphi_-(\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_-) = \mathbb{R}^*$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$. Enfin, les applications

$$\psi_\pm = \varphi_{+|\mathrm{U}_+\cap\mathrm{U}_-} \circ \left(\varphi_{-|\mathrm{U}_+\cap\mathrm{U}_-}\right)^{-1} : \varphi_-(\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_-) = \mathbb{R}^* \longrightarrow \varphi_+(\mathrm{U}_- \cap \mathrm{U}_+) = \mathbb{R}^*$$

et $$\psi_\mp = \varphi_{-|\mathrm{U}_+\cap\mathrm{U}_-} \circ \left(\varphi_{+|\mathrm{U}_+\cap\mathrm{U}_-}\right)^{-1} : \varphi_+(\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_-) = \mathbb{R}^* \longrightarrow \varphi_-(\mathrm{U}_- \cap \mathrm{U}_+) = \mathbb{R}^*$$

sont égales à $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^*}$ et donc des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes. Ainsi, $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}_+, \mathbb{R}, 1, \varphi_+), (\mathrm{U}_-, \mathbb{R}, 1, \varphi_-)\}$

est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. La remarque 3.2 montre que l'on peut munir M d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété.

La topologie induite sur M par l'atlas $\mathscr{A}$ n'est pas séparé. En effet, si V_+ (resp. V_-) est un voisinage de a_+ (resp. de a_-) alors comme φ_+ (resp. φ_-) est un homéomorphisme, $\varphi_+(\mathrm{V}_+)$ (resp. $\varphi_-(\mathrm{V}_-)$) contient un intervalle $]-\varepsilon_+\,,\varepsilon_+\,[$ (resp. $]-\varepsilon_-\,,\varepsilon_-\,[$) avec $\varepsilon_+ > 0$ (resp. $\varepsilon_- > 0$). Ainsi $]-\varepsilon_+\,,\varepsilon_+\,[\,\smallsetminus\{0\} \subset \mathrm{V}_+$ et $]-\varepsilon_-\,,\varepsilon_-\,[\,\smallsetminus\{0\} \subset \mathrm{V}_-$. Et donc en considérant $\varepsilon = \inf(\varepsilon_+, \varepsilon-) > 0$, on a $\varnothing \neq\,]-\varepsilon\,,\varepsilon\,[\,\smallsetminus\{0\} \subset \mathrm{V}_- \cap \mathrm{V}_+$ et donc tout voisinage de a_+ rencontre tout voisinage de a_- ce qui contredit la séparation.

Exemple 3.15 — Intervalle non ouvert. Soient $\mathrm{J} = \,]\,0\,,1\,[$ et $\mathrm{I} = [\,0\,,1\,[$. On va munir I d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété dont la topologie associée n'est pas connexe (en particulier, ce ne sera pas la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$). On note $\varphi_0 : \{0\} \subset \mathrm{I} \to \mathbb{R}^0$ l'unique application (qui est bijective) de $\{0\}$ dans $\mathbb{R}^0$. Le quadruplet $\mathcal{U}_0 = (\{0\}\,,\mathbb{R}^0, 0, \varphi_0)$ est alors une pseudocarte. Par ailleurs, $\mathcal{U}_\mathrm{J} = (\mathrm{J}, \mathrm{J}, 1, \mathrm{id}_\mathrm{J})$ est bien sûr une pseudocarte. Comme $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_\mathrm{J}$ sont disjointes, elles sont $\mathscr{C}^k$-compatibles (voir l'exemple 2.10). Comme $\mathrm{I} = \mathrm{J} \cup \{0\}$, l'ensemble $\mathscr{A} = \{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_\mathrm{J}\}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur I et munit I d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. De plus, $\{0\}$ et J sont des ouverts pour la topologie associée à $\mathscr{A}$. Comme ils recouvrent I et sont disjoints, I n'est pas connexe.

3.3 Les morphismes : applications de classe $\mathscr{C}^k$

Proposition-Définition 3.16 — Applications de classe $\mathscr{C}^k$ en un point. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application et $x \in \mathrm{M}$. On dit que l'application f est *de classe $\mathscr{C}^k$ en x* si les propositions équivalentes suivantes sont vérifiées.

(i) Il existe une carte en x notée $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et une carte en $f(x)$ notée $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ telles que $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ soit un voisinage de x dans M et
$$f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi' \circ f \circ \left(\varphi_{\big|\,\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')) \longrightarrow \varphi'(\mathrm{U}')$$
soit de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$.

(ii) Pour toute carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ en x et toute carte $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ en $f(x)$, $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x dans M et l'application
$$f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi' \circ f \circ \left(\varphi_{\big|\,\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')) \to \varphi'(\mathrm{U}')$$
est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$.

(iii) f est continue en x et il existe une carte en x notée $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et une carte en $f(x)$ notée $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ telles que
$$f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi' \circ f \circ \left(\varphi_{\big|\,\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')) \longrightarrow \varphi'(\mathrm{U}')$$
soit de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$.

(iv) f est continue en x et pour toute carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ en x et toute carte $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ en $f(x)$, l'application
$$f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi' \circ f \circ \left(\varphi_{\big|\,\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')) \to \varphi'(\mathrm{U}')$$
est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$.

On dit que l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est *l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$*.

Preuve. *Remarque.* Demander que $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ soit un voisinage de x assure que $\varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'))$ est un voisinage de $\varphi(x)$ puisque φ est un homéomorphisme. Ainsi, cela a bien un sens pour l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ d'être de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$. De même, si f est continue en x, $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte en x et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ est une carte en $f(x)$ alors $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x. Ainsi, cela a bien un sens pour l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ d'être de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Comme $\mathscr{A}$ est un atlas, il existe une carte en x. De même, il existe une carte en $f(x)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Par composition par φ'^{-1} et $\varphi_{\big|\,\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}$, l'hypothèse (i) assure que $f_{\big|\,\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}$ est continue en x. Comme $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x, on en déduit que f est continue en x.

Soient $(\mathrm{U}_1, \mathrm{V}_1, n_1, \varphi_1)$ une carte en x et $(\mathrm{U}'_1, \mathrm{V}'_1, n'_1, \varphi'_1)$ une carte en $f(x)$. Comme f est continue en x, $f^{-1}(\mathrm{U}'_1)$ est un voisinage de x dans M. Ainsi $\mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1)$ est un voisinage de x dans M. On considère les applications

$$f_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1} = \varphi'_1 \circ f \circ \left(\varphi_1\big|_{\mathrm{U}_1\cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1)}\right)^{-1} : \ \varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1)) \longrightarrow \varphi'_1(\mathrm{U}'_1)$$

$$\psi = \varphi\big|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{U}_1} \circ \left(\varphi_1\big|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{U}_1}\right)^{-1} : \ \varphi_1(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_1) \longrightarrow \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_1)$$

et

$$\psi' = \varphi'_1\big|_{\mathrm{U}'_1\cap\mathrm{U}'} \circ \left(\varphi'\big|_{\mathrm{U}'_1\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1} : \ \varphi'(\mathrm{U}'_1 \cap \mathrm{U}') \longrightarrow \varphi'_1(\mathrm{U}'_1 \cap \mathrm{U}')$$

L'ensemble $\mathrm{U}'' = \mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1) \cap \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x dans M. Ainsi $\varphi_1(\mathrm{U}'')$ est voisinage de $\varphi_1(x)$ dans $\varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1))$. De plus, on a

$$f_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}\big|_{\varphi_1(\mathrm{U}'')} = \psi' \circ f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} \circ \psi\big|_{\varphi_1(\mathrm{U}'')}. \qquad (*)$$

En effet, par définition de U'', on a $\varphi_1(\mathrm{U}'') \subset \varphi_1(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_1)$. On peut donc calculer

$$\psi(\varphi_1(\mathrm{U}'')) = \varphi(\mathrm{U}'') \subset \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1)).$$

On en déduit que $(f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} \circ \psi)(\varphi_1(\mathrm{U}'')) \subset \varphi'(\mathrm{U}'_1 \cap \mathrm{U}')$ et finalement $(\psi' \circ f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} \circ \psi)(\varphi_1(\mathrm{U}''))$ a bien un sens. L'égalité résultant alors simplement de l'associativité de la composition. Or ψ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi_1(x)$ et envoie $\varphi_1(x)$ sur $\varphi(x)$. Par hypothèse, $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$ et $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(\varphi(x)) = \varphi'(f(x))$. Enfin ψ' est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi'(f(x))$. Par composition, la restriction de $f_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}$ à $\varphi_1(\mathrm{U}'')$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi_1(x)$. Comme $\varphi_1(\mathrm{U}'')$ est un voisinage de $\varphi_1(x)$ dans $\varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1))$, l'application $f_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en x.

$(i) \Rightarrow (iii)$. On a vu dans la preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$.que (i) implique la continuité de f en x.

$(iii) \Rightarrow (i)$. La remarque montre que $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x.

$(iv) \Rightarrow (ii)$. La remarque montre que $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. On a vu que $(ii) \Rightarrow (i)$.et que (i) implique la continuité de f en x.

Remarque 3.17 – Continuité. Les hypothèses (i) et (ii) assure la continuité de f en x (sous-entendu pour les topologies de M et N associée aux atlas $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$).

Proposition-Définition 3.18 – Application de classe $\mathscr{C}^k$. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. On considère $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{B}'$) un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M (resp. sur N) contenu dans $\mathscr{A}$ (resp. dans $\mathscr{B}$). On dit que l'application f est *de classe* $\mathscr{C}^k$ si les propositions équivalentes suivantes sont vérifiées.

- (i) f est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout $x \in \mathrm{M}$.
- (ii) Pour tout $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$, l'ensemble $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un ouvert de M et l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est de classe $\mathscr{C}^k$.
- (iii) Pour tout $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}'$ et tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}'$, l'ensemble $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un ouvert de M et l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est de classe $\mathscr{C}^k$.
- (iv) f est continue et pour tout $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est de classe $\mathscr{C}^k$.
- (v) f est continue et pour tout $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}'$ et tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}'$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

On note $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^k$ de M dans N.

Preuve. $(ii) \Rightarrow (iii)$. et $(iv) \Rightarrow (v)$. sont évidentes puisque $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ et $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$.

$(iv) \Rightarrow (ii)$. et $(v) \Rightarrow (iii)$. résulte du fait que $f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un ouvert (puisque f est continue et U' ouvert) donc $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est ouvert.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. et $(iii) \Rightarrow (v)$. Par composition par φ'^{-1} et $\varphi\big|_{\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}$, on en déduit que $f\big|_{\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}$ est continue. Comme les $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ sont des ouverts de M qui recouvrent M (puisque $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{B}'$) sont des $\mathscr{C}^k$-atlas), on en déduit que f est continue sur M.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit $x \in \mathrm{M}$. Comme $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{B}'$) est un atlas sur M (resp. sur N), il existe une carte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ en x appartenant à $\mathscr{A}'$ (resp. une carte $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ en $f(x)$ appartenant à $\mathscr{B}'$). Par hypothèse, l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur l'ouvert $\varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'))$ qui contient $\varphi(x)$ et donc de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$. Ainsi, d'après la proposition-définition 3.16 (i), f est de classe $\mathscr{C}^k$ en x.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Comme f est continue en x pour tout x, f est continue. On en déduit que $f^{-1}(\mathrm{U}') \cap \mathrm{U}$ est ouvert. Il reste à montrer que $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$. Soit $x \in \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$. Comme $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une carte, le lemme 2.27 montre que

$$\mathscr{U} = (\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'), \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')), n, \varphi_{|_{\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')}})$$

est encore une carte. Ainsi $\mathscr{U}$ est une carte en x pour tout $x \in \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ et $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ est une carte en $f(x)$. La proposition-définition 3.16 (ii) montre que $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$.

3.4 Exemples d'applications $\mathscr{C}^k$

Exemple 3.19 – Application constante. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application constante. Montrons que $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. L'application f est continue et pour toute carte $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{V} \in \mathscr{B}$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est constante ou vide (si le domaine de $\mathcal{V}$ ne contient pas le singleton image de f) et donc de classe $\mathscr{C}^k$. La proposition-définition 3.18(iv) permet de conclure.

Exemple 3.20 – Ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Montrons qu'une application de classe $\mathscr{C}^k$ pour les structures de variétés sur U et V données par l'exemple 3.4 n'est rien d'autre qu'une application de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique.

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ est une application de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique alors f est continue et comme la structure de prévariété sur U (resp. sur V) est donnée par l'atlas construit à partir de la carte $(\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id}_\mathrm{U})$ (resp. $(\mathrm{V}, \mathrm{V}, m, \mathrm{id}_\mathrm{V})$), la proposition-définition 3.18(iii) assure que f est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens des prévariétés si

$$f = \mathrm{id}_\mathrm{V} \circ f \circ \left(\mathrm{id}_{|_{\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{V})}}\right)^{-1} : \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{U} \to \mathrm{V}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ (au sens classique) ce qui est le cas par hypothèse.

Réciproquement, si f est une application de classe $\mathscr{C}^k$ au sens des prévariétés alors d'après la proposition-définition 3.18(iii), on a

$$f = \mathrm{id}_\mathrm{V} \circ f \circ \left(\mathrm{id}_{|_{\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{V})}}\right)^{-1} : \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{U} \to \mathrm{V}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique.

Exemple 3.21 – Ouvert d'un espace vectoriel normé. Soient $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$, $(\mathrm{F}, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E, V un ouvert de F, f un isomorphisme linéaire de E sur $\mathbb{R}^n$ et g un isomorphisme linéaire de F sur $\mathbb{R}^m$. Montrons qu'une application de classe $\mathscr{C}^k$ pour les structures de variétés sur U et V données par l'exemple 3.5 n'est rien d'autre qu'une application de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique.

Soit $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ est une application de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique alors f est continue et comme la structure de prévariété sur U (resp. sur V) est donnée par l'atlas construit à partir de la carte $(\mathrm{U}, f(\mathrm{U}), n, f_{|_\mathrm{U}})$ (resp. $(\mathrm{V}, g(\mathrm{V}), m, g_{|_\mathrm{V}})$), la proposition-définition 3.18(iii) assure f est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens des prévariétés si

$$\psi = g_{|_\mathrm{V}} \circ \varphi \circ \left(f_{|_{\mathrm{U} \cap \varphi^{-1}(\mathrm{V})}}\right)^{-1} : \mathrm{U} \cap \varphi^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{U} \to \mathrm{V}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique. Or f et g sont isomorphismes linéaires et donc des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes. Ainsi $g_{|_\mathrm{V}}$ et $f^{-1}{}_{|_{f(\mathrm{U})}}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$. Par composition, ψ est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique (puisque φ l'est).

Réciproquement, si φ est une application de classe $\mathscr{C}^k$ au sens des prévariétés alors d'après la proposition-définition 3.18(iii), l'application

$$\psi = g_{|_\mathrm{V}} \circ \varphi \circ \left(f_{|_{\mathrm{U} \cap \varphi^{-1}(\mathrm{V})}}\right)^{-1} : \mathrm{U} \cap \varphi^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{U} \to \mathrm{V}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique. Par composition, l'application $\varphi = g^{-1}\big|_{g(\mathrm{V})} \circ \psi \circ f\big|_{\mathrm{U}}$ est alors de classe $\mathscr{C}^k$ puisque g^{-1} et f sont de classe $\mathscr{C}^k$ et que U et $g(\mathrm{V})$ sont des ouverts.

Application 3.22 — Calcul vectoriel et matriciel. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et A une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie (sur $\mathbb{R}$). Les résultats qui suivent s'appliquent en particulier lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application somme $s : (x, y) \in \mathrm{E}^2 \mapsto x + y \in \mathrm{E}$ (resp. l'application opp : $x \in \mathrm{E} \to -x \in \mathrm{E}$) est linéaire et donc de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^k$ au sens des prévariétés (exemple 3.21) entre la prévariété produit $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ (exemple 3.11) et la variété E (exemple 3.5). Autrement dit, $s \in \mathscr{C}^k(\mathrm{E} \times \mathrm{E}, \mathrm{E})$ (resp. $\mathrm{opp} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{E}, \mathrm{E})$).

L'application produit $p : (x, y) \in \mathrm{A}^2 \mapsto xy \in \mathrm{A}$ est bilinéaire et donc de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^k$ au sens des prévariétés (exemple 3.21) entre la prévariété produit $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ (exemple 3.11) et la variété A (exemple 3.5) c'est-à-dire $p \in \mathscr{C}^k(\mathrm{A} \times \mathrm{A}, \mathrm{A})$.

Par ailleurs, $p_{\mathrm{E}} : (x, y) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})^2 \mapsto xy \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et $p : (x, y) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto xy \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont les restrictions à des ouverts d'applications bilinéaires entre espaces vectoriels réels. On en déduit que $p_{\mathrm{E}} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{GL}(\mathrm{E}) \times \mathrm{GL}(\mathrm{E}), \mathrm{GL}(\mathrm{E}))$ et $p \in \mathscr{C}^k(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

Pour finir, les applications $x \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \mapsto x^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto x^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique et donc au sens des prévariétés.

Application 3.23 — Applications à valeurs dans un espace d'applications linéaires. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, F, G deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) f est de classe $\mathscr{C}^k$.
- (ii) L'application $(x, v) \mapsto f(x)(v)$ appartient à $\mathscr{C}^k(\mathrm{M} \times \mathrm{F}, \mathrm{G})$
- (iii) Pour tout $v \in \mathrm{F}$, l'application $(x \mapsto f(x)(v))$ appartient à $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{G})$.
- (iv) Pour toute base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_\ell)$ de F, les ℓ applications $(x \mapsto f(x)(v_i))$ appartiennent à $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{G})$.
- (v) Il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_\ell)$ de F telle que les ℓ applications $(x \mapsto f(x)(v_i))$ appartiennent à $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{G})$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. L'application $(x, v) \mapsto f(x)(v)$ est la composée de l'application $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$ (qui est $\mathscr{C}^k$) avec l'application bilinéaire (donc $\mathscr{C}^k$) $(\varphi, w) \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \mapsto \varphi(w) \in \mathrm{G}$, on obtient le résultat voulu.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. L'application $x \mapsto (x, v)$ appartient à $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M} \times \mathrm{F})$ puisque chacune de ses deux projections est $\mathscr{C}^k$ (la première projection est id_{M} et la deuxième projection est constante). Par composition, avec l'application $(x, v) \mapsto f(x)(v)$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le résultat voulu.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. et $(iv) \Rightarrow (v)$. sont évidentes (puisqu'il existe une base de F).
$(v) \Rightarrow (i)$. Commençons par remarquer que l'application

$$\mu : \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) & \longrightarrow \mathrm{G}^\ell \\ \qquad \varphi & \longmapsto (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_\ell)) \end{cases}$$

est un isomorphisme linéaire. Ainsi μ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

L'hypothèse (iv) et la propriété universelle du produit 3.30 assure que l'application $x \mapsto (f(x)(v_1), \ldots, f(x)(v_\ell))$ appartient à $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{G}^n)$. Par composition avec μ^{-1}, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^k$.

Exemple 3.24 — Carte. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$. L'application $\varphi^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. En effet, elle est continue (puisque φ est un homéomorphisme). Comme la structure de prévariété sur V est donnée par l'atlas construit à partir de la carte $(\mathrm{V}, \mathrm{V}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{V}})$, il suffit de montrer grâce à la proposition-définition 3.18(iii) que pour toute carte $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ de $\mathscr{A}$

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} \circ \left(\mathrm{id}\big|_{\mathrm{V} \cap (\varphi^{-1})^{-1}(\mathrm{U}')}\right)^{-1} : \mathrm{V} \cap (\varphi^{-1})^{-1}(\mathrm{U}') \to \varphi'(\mathrm{U}')$$

est de classe $\mathscr{C}^k$. Or $\mathrm{V} \cap (\varphi^{-1})^{-1}(\mathrm{U}') = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$, le fait que $\mathscr{A}$ soit un atlas donne le résultat.

Exemple 3.25 — id_{M}. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété. L'application id_{M} est de classe $\mathscr{C}^k$. En effet, id_{M} est continue et pour toutes cartes $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ de $\mathscr{A}$, l'application

$$\varphi' \circ \left(\varphi_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1} = \varphi' \circ \mathrm{id}_{\mathrm{M}} \circ \left(\varphi_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1} : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \varphi'(\mathrm{U}')$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ par définition d'un atlas. La proposition-définition (ii) montre alors que id_{M} est de classe $\mathscr{C}^k$.

Exemple 3.26 — Applications $\mathscr{C}^k$ et prévariété discrète. Soient M un ensemble, $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$ la $\mathscr{C}^k$-prévariété discrète associée (voir l'exemple 3.12), $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^k$.

Soit $x \in \mathrm{M}$. On considère la carte $\mathcal{U} = (\{x\}, \{0\}, 0, x \mapsto 0)$ de $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$ en x (voir l'exemple 3.12) et une carte et $\mathcal{V} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{B}$ en $f(x)$. L'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est alors donnée par $g : \mathbb{R}^0 \to \mathrm{U}$ qui est bien sûr de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique.

Ainsi lorsque l'on part d'une prévariété discrète, on est toujours de classe $\mathscr{C}^k$. Mais que se passe-t-il lorsque l'on arrive dans une prévariété discrète ?

Soient M un ensemble, $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$ la $\mathscr{C}^k$-prévariété discrète associée (voir l'exemple 3.12), $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $f : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ une application. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes

(i) f est de classe $\mathscr{C}^k$;
(ii) f est continue ;
(iii) f est localement constante.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. résulte du fait que la topologie sur M est discrète.
$(i) \Rightarrow (ii)$. résulte des définitions.
$(iii) \Rightarrow ((i))$. résulte du fait qu'être $\mathscr{C}^k$ est une propriété locale et du fait qu'une application constante est $\mathscr{C}^k$.

En fait, comme f est continue, il suffit de montrer que l'application f lue dans les cartes est de classe $\mathscr{C}^k$. On considère $x \in \mathrm{N}$. Il existe un ouvert U de N tel que la restriction de f à x est de classe $\mathscr{C}^k$. Quitte à considère l'intersection de U avec un ouvert qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{B}$ en x, on peut supposer que U (voir la remarque **??**) est le domaine d'une carte $\mathcal{U}$ de $\mathscr{B}$ en x. Si $\mathcal{V}$ est une carte de $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$ en $f(x)$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est constante donc de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique.

Deuxième démonstration. On considère la carte $\mathcal{V} = (f(x), \{0\}, 0, f(x) \mapsto 0)$ et $\mathcal{U}$ une carte de $\mathscr{B}$ en x. L'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est constante.

3.5 La catégorie des $\mathscr{C}^k$-prévariétés

Proposition 3.27 — Composition d'applications $\mathscr{C}^k$. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ et $g : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ deux applications de classe $\mathscr{C}^k$. L'application $g \circ f : \mathrm{M} \to \mathrm{P}$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

Preuve. Montrons que $g \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout $x \in \mathrm{M}$. Comme f et g sont continue (proposition-définition 3.18), l'application $g \circ f$ est continue et donc continue en x. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ une carte en x, $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$ une carte en $f(x)$ et $\mathcal{V} = (\mathrm{U}'', \mathrm{V}'', n'', \varphi'') \in \mathscr{C}$ une carte en $g(f(x))$. Le lemme 2.27 montre que

$$\mathrm{W} = \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \cap f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}''))$$

est le domaine de la carte $\mathcal{W} = \mathcal{U}_{|\mathrm{W}}$ de $\mathscr{A}$ contenant x. De plus, l'application

$$(g \circ f)_{\mathcal{W}\mathcal{V}} = \varphi'' \circ (g \circ f) \circ \psi^{-1} : \psi(\mathrm{W}) \to \varphi''(\mathrm{U}'')$$

se décompose alors en

$$(g \circ f)_{\mathcal{W}\mathcal{V}} = \left(\varphi'' \circ g \circ \left(\varphi'_{|g^{-1}(\mathrm{U}'')\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1}\right) \circ (\varphi' \circ f \circ \psi^{-1}) : \psi(\mathrm{W}) \to \varphi''(\mathrm{U}'').$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^k$, l'application $\varphi' \circ f \circ \psi^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\psi(x)$ et envoie $\psi(x)$ sur $\varphi'(f(x))$. De même, le caractère $\mathscr{C}^k$ de g assure que l'application $\varphi'' \circ g \circ ({\varphi'^{-1}}_{|g^{-1}(\mathrm{U}'')\cap \mathrm{U}'})$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi'(f(x))$. Ainsi par composition $(g \circ f)_{\mathcal{W}\mathcal{V}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\psi(x)$ ce qui, d'après la proposition-définition 3.16 (iii), montre que f est de classe $\mathscr{C}^k$ en x.

Corollaire 3.28 — La catégorie des $\mathscr{C}^k$-prévariétés. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés. La proposition 3.27 montre que la composition fournit une application

$$\circ \colon \begin{cases} \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathrm{N}) \times \mathscr{C}^k(\mathrm{N},\mathrm{P}) \longrightarrow \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathrm{P}) \\ \qquad (f,g) \qquad\qquad \longmapsto g \circ f \end{cases}$$

Comme, d'après l'exemple 3.25, $\mathrm{id}_\mathrm{M} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathrm{M})$, les $\mathscr{C}^k$-prévariétés forment une sous-catégorie de celle des espaces topologiques.

Exemple 3.29 — Applications projections. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés. On munit $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ de la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété produit (exemple 3.9). Montrons que les projections canoniques $p_\mathrm{M} : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ et $p_\mathrm{N} : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$. Elles sont continues (puisque la topologie sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ est la topologie produit). Soit $(x, y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$. Montrons que p_M est de classe $\mathscr{C}^k$ en (x, y). Il existe une carte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ de $\mathscr{A}$ en $x = p_\mathrm{M}((x, y))$ et une carte $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ de $\mathscr{B}$ en y. Par définition de la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$, le quadruplet

$$(\mathrm{U} \times \mathrm{U}', \mathrm{V} \times \mathrm{V}', n + n', \varphi \times \varphi')$$

est une carte pour $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ en (x, y). L'application

$$\varphi \circ p_\mathrm{M} \circ (\varphi \times \varphi')^{-1} \colon \begin{cases} (\varphi \times \varphi')((\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \cap {p_\mathrm{M}}^{-1}(\mathrm{U})) = \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \longrightarrow \mathrm{V} \\ \qquad (v, v') \qquad\qquad\qquad\qquad \longmapsto v \end{cases}$$

est alors de classe $\mathscr{C}^k$ comme restriction d'une application linéaire. La proposition-définition 3.16(i) montre que p_M est de classe $\mathscr{C}^k$ en (x, y). La proposition-définition 3.18(i) montre alors que p_M est de classe $\mathscr{C}^k$. De même, p_N est de classe $\mathscr{C}^k$.

Montrons à présent que $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ est un produit de M et N dans la catégorie des $\mathscr{C}^k$-prévariétés. Soient $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $f_\mathrm{M} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P}, \mathrm{M})$ et $f_\mathrm{N} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P}, \mathrm{N})$. Comme f_M et f_N sont continues et que $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ est muni de la topologie produit, la propriété universelle du produit (pour les espaces topologiques) montre qu'il existe une unique application continue $f : \mathrm{P} \to \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ telle que $p_\mathrm{M} \circ f = f_\mathrm{M}$ et $p_\mathrm{N} \circ f = f_\mathrm{N}$. L'application f est donnée par $f : p \mapsto (f_\mathrm{M}(p), f_\mathrm{N}(p))$. Montrons que f est de classe $\mathscr{C}^k$. Soient $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{C}$ et $(\mathrm{U}' \times \mathrm{U}'', \mathrm{V}' \times \mathrm{V}'', n' + n'', \varphi' \times \varphi'')$ une carte de l'atlas produit $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$. On a

$$\varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}' \times \mathrm{U}'')) = \varphi(\mathrm{U} \cap {f_\mathrm{M}}^{-1}(\mathrm{U}') \cap {f_\mathrm{N}}^{-1}(\mathrm{U}''))$$

L'application

$$(\varphi' \times \varphi'') \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \begin{cases} \varphi(\mathrm{U} \cap {f_\mathrm{M}}^{-1}(\mathrm{U}') \cap {f_\mathrm{N}}^{-1}(\mathrm{U}'')) \longrightarrow \mathrm{V}' \times \mathrm{V}'' \\ \qquad x \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \longmapsto (\varphi' \circ f_\mathrm{M} \circ \varphi^{-1}(x), \varphi'' \circ f_\mathrm{N} \circ \varphi^{-1}(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ puisque chacun des facteurs l'est. En effet, $\varphi' \circ f_\mathrm{M} \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\varphi(\mathrm{U} \cap {f_\mathrm{M}}^{-1}(\mathrm{U}'))$ puisque f_M est de classe $\mathscr{C}^k$ et $\varphi' \circ f_\mathrm{M} \circ \varphi^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\varphi(\mathrm{U} \cap {f_\mathrm{N}}^{-1}(\mathrm{U}''))$ puisque f_N est de classe $\mathscr{C}^k$. Finalement, on a bien $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P}, \mathrm{M} \times \mathrm{N})$. Pour finir, si $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P}, \mathrm{M} \times \mathrm{N})$ vérifie $p_\mathrm{M} \circ g = f_\mathrm{M}$ et $p_\mathrm{N} \circ g = f_\mathrm{N}$ alors comme g est continue, la propriété universelle du produit pour les espaces topologiques montre que $g = f$.

Ainsi $f : \mathrm{P} \to \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ est une application alors f est de classe $\mathscr{C}^k$ si et seulement si $p_\mathrm{M} \circ f$ et $p_\mathrm{N} \circ f$ sont de classe $\mathscr{C}^k$. En effet, il existe une unique application $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P}, \mathrm{M} \times \mathrm{N})$ telle que $p_\mathrm{M} \circ g = p_\mathrm{M} \circ f$ et $p_\mathrm{N} \circ g = p_\mathrm{N} \circ f$. D'après la propriété universelle du produit, l'ensemble des applications h qui vérifient $p_\mathrm{M} \circ h = p_\mathrm{M} \circ f$ et $p_\mathrm{N} \circ h = p_\mathrm{N} \circ f$ est réduit au singleton f. On en déduit que $f = g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P}, \mathrm{M} \times \mathrm{N})$.

Application 3.30 — Application produit. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{N}, \mathrm{N}'$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $f' : \mathrm{M}' \to \mathrm{N}'$ deux applications de classe $\mathscr{C}^k$. Montrons que l'application

$$f \times f' : (m, m') \in \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \to (f(m), f'(m)) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}'$$

est de classe $\mathscr{C}^k$. On note $p_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ la première projection. De même, on note $p_{\mathrm{M}'}$, p_{N} et $p_{\mathrm{N}'}$. Comme $p_{\mathrm{N}} \circ (f \times f') = f \circ p_{\mathrm{M}} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M} \times \mathrm{M}', \mathrm{N})$ et $p_{\mathrm{N}'} \circ (f \times f') = f' \circ p_{\mathrm{M}'} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M} \times \mathrm{M}', \mathrm{N}')$. On en déduit le résultat souhaité grâce à l'exemple 3.29.

Application 3.31 – Algèbre des fonctions $\mathscr{C}^k$. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété de classe $\mathscr{C}^k$. Montrons que l'ensemble $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{C})$) est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre (resp. sous-$\mathbb{C}$-algèbre) de l'algèbre des fonctions de M dans $\mathbb{R}$.

D'après l'exemple 3.19, les fonctions constantes sont des classe $\mathscr{C}^k$. En particulier, l'application nulle et l'application unité appartiennent à $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{C})$). Pour $f, g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ (resp. $f, g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{C})$), on a $(f \times g) \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M} \times \mathrm{M}, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ d'après l'application 3.30. En composant avec $s : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to x + y \in \mathbb{R}$ (resp. $s : (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to x + y \in \mathbb{C}$) et $p : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to xy \in \mathbb{R}$ (resp. $p : (x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to xy \in \mathbb{C}$) qui sont de classe $\mathscr{C}^k$ d'après l'application 3.22, on obtient que $f + g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ et $fg \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ (resp $f + g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ et $fg \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{C})$).

Application 3.32 – Module des fonctions $\mathscr{C}^k$. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et F un espace vectoriel réel (resp. complexe) de dimension finie. Montrons que l'ensemble $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ est un $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module (resp. un $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module).

Pour $f, g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$, on a $(f \times g) \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M} \times \mathrm{M}, \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ d'après l'application 3.30. En composant avec $s : (x, y) \in \mathrm{F} \times \mathbb{R} \to x + y \in \mathrm{F}$ qui sont de classe $\mathscr{C}^k$ d'après l'application 3.22, on obtient que $f + g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$. Ainsi $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ est un sous-groupe de $\mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$.

Soit $\lambda \in \mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$. La loi $\cdot$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda(x) f(x)$ muni $\mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ est un $\mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module (resp. $\mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module). Il suffit alors de montrer que pour $\lambda \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$, on a $\lambda \cdot f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$. Or, d'après l'application 3.30, $(f \times \lambda) \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M} \times \mathrm{M}, \mathrm{F} \times \mathbb{R})$. En composant avec $(x, \mu) \in \mathrm{F} \times \mathbb{R} \to \mu x \in \mathrm{F}$ (resp. $(x, \mu) \in \mathrm{F} \times \mathbb{C} \to \mu x \in \mathrm{F}$) qui est de classe $\mathscr{C}^k$ puisque bilinéaire (voir l'exemple 3.21), on obtient que $\lambda \cdot f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$.

On considère $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_\ell)$ une $\mathbb{R}$-base de F et $\mathscr{B}^* = (\pi_1, \ldots, \pi_\ell)$ sa base duale. Les applications

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F}) \longrightarrow (\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R}))^\ell \\ f \longmapsto (\pi_1 \circ f, \ldots, \pi_\ell \circ f) \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{cases} (\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R}))^\ell \longrightarrow \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F}) \\ (f_1, \ldots, f_\ell) \longmapsto f_1 e_1 + \cdots + f_\ell e_\ell \end{cases}$$

sont des isomorphismes de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-modules réciproques l'un de l'autre.

En effet, comme π_i est $\mathbb{R}$-linéaire, π_i est de classe $\mathscr{C}^k$ (exemple 3.21). Par composition, $\pi_i \circ f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ et Φ est bien définie. On note u_i l'application constante sur M égale à e_i est de classe $\mathscr{C}^k$ (exemple 3.19). L'application $f_1 e_1 + \cdots + f_\ell e_\ell$ s'écrit aussi $f_1 \cdot u_1 + \cdots + f_\ell \cdot u_\ell$ et donc est de classe $\mathscr{C}^k$. Autrement dit, Ψ est bien définie.

Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$ sont des bases duales l'un de l'autre, Ψ et Φ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Enfin, comme les π_i sont $\mathbb{R}$-linéaires, on a, pour $f, g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ et $x \in \mathrm{M}$,
$\Phi(f + g)(x) = (\pi_1(f(x) + g(x)), \ldots, \pi_\ell(f(x) + g(x))) = (\pi_1(f(x)), \ldots, \pi_\ell(f(x))) + (\pi_1(g(x)), \ldots, \pi_\ell(g(x))) = \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x)$

Enfin, comme les π_i sont $\mathbb{R}$-linéaires, on a, pour $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ et $x \in \mathrm{M}$,
$\Phi(\lambda \cdot f)(x) = (\pi_1(\lambda(x) f(x)), \ldots, \pi_\ell(\lambda(x) f(x))) = \lambda(x)(\pi_1(f(x)), \ldots, \pi_\ell(f(x))) = \lambda(x)\Phi(f)(x) = (\lambda \cdot \Phi(f))(x)$

3.6 Difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 3.33 – Difféomorphisme. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. On dit que f est un *$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de* $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ *sur* $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ si $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ et s'il existe $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, on dit que $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ sont $\mathscr{C}^k$-difféomorphes s'il existe un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$.

Remarque 3.34 – Langage catégorique. Un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme n'est rien d'autre qu'un isomorphisme dans la catégorie des $\mathscr{C}^k$-prévariétés.

Remarque 3.35 – Difféomorphisme. On peut formuler la définition 3.33 de la façon suivante : un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme est une application bijective de classe $\mathscr{C}^k$ dont la bijection réciproque est de classe $\mathscr{C}^k$. On en déduit alors immédiatement que la bijection réciproque d'un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme est aussi un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. De même, comme la composée de deux applications de classe $\mathscr{C}^k$ est de classe $\mathscr{C}^k$, on en déduit que la composée de deux $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Enfin, grâce à l'exemple 3.25, id_{M} est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$. Finalement, on obtient que la relation « être difféomorphe » est une relation d'équivalence sur tout ensemble de $\mathscr{C}^k$-prévariété.

Attention, une bijection de classe $\mathscr{C}^k$ n'est pas nécessairement un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (voir les exemples 3.36, 3.37 et 3.38).

Exemple 3.36 – $t \mapsto t^3$. L'application $t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique donc de classe $\mathscr{C}^k$ entre les structures classiques de prévariété sur $\mathbb{R}$ (exemple 3.20). Comme la bijection réciproque n'est pas de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique, elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^k$ au sens des prévariétés.

Dans la suite de cet exemple, on va comparer la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\mathbb{R}$ obtenue dans l'exemple 3.13 et la structure classique de prévariété sur $\mathbb{R}$. Pour simplifier les notations, on note $\widetilde{\mathbb{R}}$ la structure de l'exemple 3.13 et $\widehat{\mathbb{R}}$ la structure classique.

L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \widehat{\mathbb{R}} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ mais n'est pas un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. En effet, dans le deux cas, la topologie sur $\mathbb{R}$ est la même donc $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est continue. De plus, d'après la proposition-définition 3.18(v), il suffit de vérifier $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ lue dans les cartes $\mathcal{U} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ et $\mathcal{V} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1, t \mapsto t^3)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (au sens classique). Or cette application n'est autre que $t \mapsto t^3$. Montrons que la bijection réciproque $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \widetilde{\mathbb{R}} \mapsto \widehat{\mathbb{R}}$ n'est pas de classe $\mathscr{C}^k$. Cela résulte de ce que l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ lue dans les cartes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ n'est autre que $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ qui n'est pas $\mathscr{C}^k$.

Par ailleurs, l'application $f : t \mapsto t^3$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\widetilde{\mathbb{R}}$ sur $\widehat{\mathbb{R}}$. En effet, dans le deux cas, la topologie sur $\mathbb{R}$ est la topologie classique donc f et f^{-1} sont continues. L'application f lue dans les cartes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ est alors $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$ (au sens classique) et l'application f^{-1} lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est aussi $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$.

Ainsi, sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on a construit deux structures de $\mathscr{C}^k$-prévariétés distinctes mais $\mathscr{C}^k$-difféomorphe.

Exemple 3.37 – $\mathbb{R}_{\mathbf{disc}}$. On considère les $\mathscr{C}^k$-prévariétés $\mathbb{R}_{\mathrm{disc}}$ (voir l'exemple 3.12) et $\widehat{\mathbb{R}}$ (notation de l'exemple 3.36). Montrons que l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}_{\mathrm{disc}} \to \widehat{\mathbb{R}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ mais n'est pas un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Elle est continue puisque la topologie sur $\mathbb{R}_{\mathrm{disc}}$ est la topologie discrète. D'après la proposition-définition 3.18, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ lue dans les cartes $\mathcal{U}_x = (\{x\}, \mathbb{R}^0, 0, \varphi_x)$ et $\mathcal{V} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (au sens classique). Or cette application est l'application $0 \in \mathbb{R}^0 \mapsto x \in \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$. De plus, la bijection réciproque de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ mais elle n'est pas continue car la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ n'est pas la topologie discrète. Ainsi $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ n'est pas un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

Exemple 3.38 – Cercle. On reprend les notations des exemples 3.15 et 3.7 On considère la $\mathscr{C}^k$-prévariété I de l'exemple 3.15. Montrons que la bijection de I dans $\mathbb{S}^1$ donné par

$$f : \begin{cases} \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t \longmapsto e^{2i\pi t} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$ mais n'est pas un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

Comme I n'est pas connexe (pour la topologie associée à sa structure de prévariété) et que $\mathbb{S}^1$ l'est, la bijection réciproque de f n'est pas continue et donc n'est pas de classe $\mathscr{C}^k$.

Montrons que à présent grâce à la proposition-définition 3.18(v) que l'application f est de classe $\mathscr{C}^k$. On commence par remarquer que les applications

$$f_{\big|\,]\,0\,,1\,[} \circ (\mathrm{id}_{]\,0\,,1\,[}{}^{-1}) \qquad \text{et} \qquad f_{\big|\,\{0\}} \circ (\varphi_0{}^{-1})$$

sont continues. En effet, la première est l'application $t \mapsto e^{2i\pi t}$ classique et la deuxième est issue d'un singleton. La proposition 2.15 assure alors que f est continue pour la topologie associée à la structure de prévariété sur I. Il s'agit à présent de vérifier que l'application f lue dans les cartes de $\{\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_{\mathrm{J}}\}$ et $\{\mathcal{U}_{\mathrm{N}}, \mathcal{U}_{\mathrm{S}}\}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. On remarque que $f^{-1}(\mathrm{U_N}) = \mathrm{J}$ et $f^{-1}(\mathrm{U_S}) = [\,0\,,1/2\,[\,\cup\,]\,1/2\,,1\,[$. Commençons par $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_{\mathrm{N}}$. Comme $f^{-1}(\mathrm{U_N}) \cap \{0\} = \varnothing$, l'application f lue

dans les cartes $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_\mathrm{N}$ est l'application vide et donc de classe $\mathscr{C}^k$. Passons à $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_\mathrm{S}$. Comme $f^{-1}(\mathrm{U_S}) \cap \{0\} = \{0\}$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}_0$ et $\mathcal{U}_\mathrm{S}$ est l'application $0 \in \mathbb{R}^0 \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$ (puisqu'issue de $\mathbb{R}^0$). Pour $\mathcal{U}_\mathrm{N}$ et $\mathcal{U}_\mathrm{J}$, on obtient $f^{-1}(\mathrm{U_N}) \cap \mathrm{J} = \mathrm{J}$ et l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}_\mathrm{J}$ et $\mathcal{U}_\mathrm{N}$ est l'application de classe $\mathscr{C}^k$

$$t \in \,]\,0\,,1\,[\, \mapsto \frac{\sin 2\pi t}{1-\cos 2\pi t}.$$

Enfin, pour $\mathcal{U}_\mathrm{S}$ et $\mathcal{U}_\mathrm{J}$, on a $f^{-1}(\mathrm{U_S}) \cap \mathrm{J} = \,]\,0\,,1/2\,[\, \cup \,]\,1/2\,,1\,[$ et l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}_\mathrm{J}$ et $\mathcal{U}_\mathrm{S}$ est l'application de classe $\mathscr{C}^k$

$$t \in \,]\,0\,,1/2\,[\, \cup \,]\,1/2\,,1\,[\, \mapsto \frac{\sin 2\pi t}{1+\cos 2\pi t}.$$

Finalement f est bien de classe $\mathscr{C}^k$.

La proposition-définition 3.46 et l'exemple 3.54 permettrons de donner une autre rédaction du fait que f est de classe $\mathscr{C}^k$. On vérifie que f est de classe $\mathscr{C}^k$ entre I et $\mathbb{C}$ (ce qui est moins long que ce qui précède puisqu'on peut choisir sur $\mathbb{C}$ un atlas qui n'a qu'une carte). Ensuite, f est à valeur dans la sous-prévariété $\mathbb{S}^1$ donc $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{I}, \mathbb{S}^1)$.

Exemple 3.39 – $\mathrm{id_M}$. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}, \mathscr{B})$ deux structures de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur M. Montrons que si l'application $\mathrm{id_M}$ est une $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme alors $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

On va montrer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont compatibles. D'après la remarque 2.22, il suffit de montrer que toute carte de $\mathscr{A}$ est $\mathscr{C}^k$-compatibles avec toute carte de $\mathscr{B}$. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$. Comme $\mathrm{id_M} \in \mathscr{C}^k((\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}, \mathscr{B}))$, l'application

$$\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi' \circ \mathrm{id_M} \circ \left(\varphi_{|\,\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1} : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \varphi'(\mathrm{U}')$$

est de classe $\mathscr{C}^k$. De même, comme $\mathrm{id_M} \in \mathscr{C}^k((\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}, \mathscr{B}))$, l'application $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi les fonctions de transitions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles. On en déduit que $\mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas. Par maximalité de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on obtient $\mathscr{B} = \mathscr{B}' = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}'$.

3.7 Sous-prévariétés

Notation 3.40 – Sous-espace vectoriel. Soient $m \geqslant n$ deux entiers naturels. On note

$$\mathbb{R}^m_n = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad x_{n+1} = \cdots = x_m = 0\}$$

le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ formé des vecteurs dont les $m-n$ dernières coordonnés sont nulles et π^m_n l'isomorphisme linéaire donné par

$$\pi^m_n : \begin{cases} \mathbb{R}^m_n & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0) & \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)\,. \end{cases}$$

Définition 3.41 – Bonne carte. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M, N un sous-ensemble de M et $x \in \mathrm{N}$. On dit que $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, m, \varphi) \in \mathscr{A}$ est une *bonne carte en x pour* N, s'il existe $n \leqslant m$ tel que $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{N})$ soit un ouvert de $\mathbb{R}^m_n$.

Remarque 3.42 – Restriction de bonne carte. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M, N un sous-ensemble de M et $x \in \mathrm{N}$. Si $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, m, \varphi)$ est une bonne carte en x alors, pour tout ouvert U′ contenu dans U, $\mathcal{U}_{|\,\mathrm{U}'}$ est une bonne carte en x pour N. En effet, on a $\varphi(\mathrm{U}' \cap \mathrm{N}) = \varphi(\mathrm{U}') \cap \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{N})$. Comme φ est un homéomorphisme $\varphi(\mathrm{U}')$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Ainsi $\varphi(\mathrm{U}' \cap \mathrm{N}) = (\varphi(\mathrm{U}') \cap \mathcal{O}) \cap \mathbb{R}^m_n$ (où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m$) est un ouvert de $\mathbb{R}^m_n$.

Lemme 3.43 – Carte associée. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M, N un sous-ensemble de M, $x \in \mathrm{N}$ et $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, m, \varphi) \in \mathscr{A}$ est une bonne carte en x pour N. On pose $\mathrm{U_N} = \mathrm{U} \cap \mathrm{N}$, $\varphi_\mathrm{N} = \varphi_{|\,\mathrm{U_N}}$ et $\mathrm{V_N} = \pi^m_n \circ \varphi_\mathrm{N}(\mathrm{U_N})$. Le quadruplet

$$\mathcal{U}_\mathrm{N} = (\mathrm{U_N}, \mathrm{V_N}, n, \pi^m_n \circ \varphi_\mathrm{N})$$

est une pseudocarte topologique sur N appelée *carte associée à $\mathcal{U}$*

Preuve. D'après le corollaire 2.16, $\mathscr{A}$ munit M d'une topologie. L'ensemble N est donc aussi un espace topologique grâce à la topologie induite. Par définition de la topologie induite, $\mathrm{U_N}$ est un ouvert de N. L'application π_n^m est un isomorphisme linéaire et donc un homéomorphisme. On en déduit que $\mathrm{V_N}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ puisque $\varphi_\mathrm{N}(\mathrm{U_N}) = \varphi(\mathrm{U_N})$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n^m$. Enfin, $\varphi_\mathrm{N} : \mathrm{N_N} \to \varphi_\mathrm{N}(\mathrm{U_N})$ est un homéomorphisme (puisque φ en est un) et par composition $\pi_n^m \circ \varphi_\mathrm{N} : \mathrm{U_N} \to \mathrm{V_N}$ est un homéomorphisme.

Lemme 3.44 — Calcul différentiel. On suppose $k \geqslant 1$. Soient W un ouvert de $\mathbb{R}^m$, W′ un ouvert de $\mathbb{R}^{m'}$ et $\psi : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. On considère $n \leqslant m$, $n' \leqslant m'$, $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{V}' \subset \mathrm{U}'$ tels que V soit un ouvert de $\mathbb{R}_n^m$, V′ un ouvert de $\mathbb{R}_{n'}^{m'}$ et $\psi(\mathrm{V}) = \mathrm{V}'$. On a $m = m'$, $n = n'$ et l'application

$$\pi_{n'}^{m'} \circ \psi \circ (\pi_n^m)^{-1} : \pi_n^m(\mathrm{V}) \to \pi_n^m(\mathrm{V}')$$

est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

Preuve. Comme ψ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, on a $m = m'$. Soit i_V (resp. $i_{\mathrm{V}'}$) l'inclusion de V (resp. V′) dans $\mathbb{R}^m$. L'application i_V (resp $i_{\mathrm{V}'}$) est de classe $\mathscr{C}^k$ puisque c'est la restriction à l'ouvert V (resp. V′) de $\mathbb{R}_n^m$ (resp. $\mathbb{R}_{n'}^m$) de l'application linéaire d'inclusion de $\mathbb{R}_n^m$ (resp. $\mathbb{R}_{n'}^m$) dans $\mathbb{R}^m$. Par composition, l'application $\psi \circ i_\mathrm{V}$ (resp. $\psi^{-1} \circ i_{\mathrm{V}'}$) est de classe $\mathscr{C}^k$ et envoie V sur V′ (resp. V′ sur V). De plus, $\psi \circ i_\mathrm{V}$ et $\psi^{-1} \circ i_{\mathrm{V}'}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Donc V et V′ sont $\mathscr{C}^k$-difféomorphes. En particulier, $n = n'$. De plus, comme $\pi_n^m = \pi_{n'}^{m'}$ est un isomorphisme linéaire, il réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme entre V et $\pi_n^m(\mathrm{V})$ et entre V′ et $\pi_{n'}^{m'}(\mathrm{V}')$. Le résultat s'obtient alors par composition.

Proposition 3.45 — Atlas associé. On suppose $k \geqslant 1$. Soient M, $\mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M, N un sous-ensemble de M. On suppose que, pour tout $x \in \mathrm{N}$, il existe une bonne carte de $\mathscr{A}$ en x pour N. L'ensemble

$$\mathscr{A}_\mathrm{N} = \{\mathcal{U}_\mathrm{N}, \quad \exists\, x \in \mathrm{N}, \quad \mathcal{U}_\mathrm{N} \text{ soit associée à une bonne carte de } \mathscr{A} \text{ en } x \text{ pour N}\}$$

est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur N.

Preuve. D'après le lemme 3.43, les éléments de $\mathscr{A}_\mathrm{N}$ sont des cartes topologiques. De plus, l'hypothèse montre que le domaine des pseudocartes de $\mathscr{A}_\mathrm{N}$ recouvrent N. Enfin, montrons la condition de compatibilité entre les éléments de $\mathscr{A}_\mathrm{N}$. Soient $\mathcal{U}_\mathrm{N}, \mathcal{U}'_\mathrm{N} \in \mathscr{A}_\mathrm{N}$, n (resp. n') la dimension de $\mathcal{U}_\mathrm{N}$ (resp. $\mathcal{U}'_\mathrm{N}$). On note $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, m, \varphi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', m', \varphi') \in \mathscr{A}$ deux bonnes cartes telles que $\mathcal{U}_\mathrm{N}$ (resp. $\mathcal{U}'_\mathrm{N}$) soit associée à $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$). Il s'agit de montrer que

$$\pi_{n'}^{m'} \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1}) \circ (\pi_n^m)^{-1} : \pi_n^m(\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{N})) \to \pi_{n'}^{m'}(\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{N}))\,.$$

On va pour cela appliquer le lemme 3.44 à $\mathrm{W} = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$, $\mathrm{W}' = \varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$, $\psi = \varphi' \circ \varphi^{-1}$, $\mathrm{V} = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{N})$, $\mathrm{V}' = \varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{N})$. Il s'agit donc de vérifier que V (resp. V′) est ouvert dans $\mathbb{R}_n^m$ (resp. $\mathbb{R}_{n'}^{m'}$). Or φ est bijective, donc $\mathrm{V} = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{N}) = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) \cap \varphi(\mathrm{U}')$. Comme $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{N})$ est ouvert dans $\mathbb{R}_n^m$ et $\varphi(\mathrm{U}')$ ouvert dans $\mathbb{R}^m$, on obtient le résultat voulu. On montre de même que V′ est ouvert dans $\mathbb{R}_{n'}^{m'}$.

Proposition-Définition 3.46 — Sous-prévariété. On suppose $k \geqslant 1$. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, N un sous-ensemble de M. On suppose que, pour tout $x \in \mathrm{N}$, il existe une bonne carte de $\mathscr{A}$ en x pour N. Il existe une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur N. On dit que N est une *sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété* de M.

L'inclusion $i : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ est un morphisme de $\mathscr{C}^k$-prévariétés. De plus, pour toute $\mathscr{C}^k$-prévariété $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ et tout $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P}, \mathrm{M})$ tel que $f(\mathrm{P}) \subset \mathrm{N}$ alors l'application $f_\mathrm{N} : \mathrm{P} \to \mathrm{N}$ déduite de f est de classe $\mathscr{C}^k$.

Preuve. En reprenant les notations de la proposition 3.45, $\mathscr{A}_\mathrm{N}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas. Donc, grâce à la remarque 3.2, N peut être muni d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété.

Par définition de la topologie induite, i est continue. Montrons que i est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout $x \in \mathrm{N}$. Soit $x \in \mathrm{N}$. On considère $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, m, \varphi) \in \mathscr{A}$ une carte qui est une bonne carte en x pour N, $\mathcal{U}_\mathrm{N} \in \mathscr{A}_\mathrm{N}$ la carte associée et n la dimension de $\mathcal{U}_\mathrm{N}$. L'application

$$\varphi \circ i \circ {\varphi_\mathrm{N}}^{-1} : x \in \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) \mapsto x \in \varphi(\mathrm{U})$$

est la restriction à l'ouvert $\varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{N})$ de $\mathbb{R}^n_m$ de l'application linéaire d'inclusion de $\mathbb{R}^m_n$ dans $\mathbb{R}^m$. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^k$. Finalement, d'après la proposition-définition 3.16(i), l'application i est bien de classe $\mathscr{C}^k$ en x. La proposition-définition 3.18(i) montre que $i \in \mathscr{C}^k(\mathrm{N},\mathrm{M})$.

Encore, par définition de la topologie induite, l'application f_N est continue. Montrons que f_N est de classe $\mathscr{C}^k$ en p pour tout $p \in \mathrm{P}$. Soit $p \in \mathrm{P}$. On considère $(\mathrm{U}',\mathrm{V}',n',\varphi') \in \mathscr{C}$ et $\mathcal{U} = (\mathrm{U},\mathrm{V},m,\varphi) \in \mathscr{A}$ une carte qui est une bonne carte en $f(p) = f_\mathrm{N}(p)$ pour N, $\mathcal{U}_\mathrm{N} \in \mathscr{A}_\mathrm{N}$ la carte associée et n la dimension de $\mathcal{U}_\mathrm{N}$. Comme f est à valeurs dans N, l'application

$$\psi_\mathrm{N} = \varphi_\mathrm{N} \circ f_\mathrm{N} \circ {\varphi'}^{-1} : \varphi'(\mathrm{U}' \cap {f_\mathrm{N}}^{-1}(\mathrm{U}_\mathrm{N})) \mapsto \varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{N})$$

ne diffère de l'application $\psi = \varphi \circ f_\mathrm{N} \circ {\varphi'}^{-1} : \varphi'(\mathrm{U}' \cap f^{-1}(\mathrm{U})) \mapsto \varphi(\mathrm{U})$ que par l'espace d'arrivée. Comme ψ est $\mathscr{C}^k$, on en déduit que f est aussi $\mathscr{C}^k$. Finalement, d'après la proposition-définition 3.16(i), l'application f_N est bien de classe $\mathscr{C}^k$ en p. La proposition-définition 3.18(i) montre que $f_\mathrm{N} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P},\mathrm{N})$.

Remarque 3.47 — Structure de sous-prévariété. On suppose $k \geqslant 1$. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, N un sous-ensemble de M et $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. On suppose que, pour tout $x \in \mathrm{N}$, il existe une bonne carte de $\mathscr{A}'$ en x pour N. On en déduit que, pour tout $x \in \mathrm{N}$, il existe une bonne carte de $\mathscr{A}$ en x pour N. On reprend les notations de la proposition 3.45. Les atlas $\mathscr{A}'_\mathrm{N}$ et $\mathscr{A}_\mathrm{N}$ sont $\mathscr{C}^k$ compatible puisque $\mathscr{A}'_\mathrm{N} \subset \mathscr{A}_\mathrm{N}$. Les structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur N induite par les atlas $\mathscr{A}'_\mathrm{N}$ et $\mathscr{A}_\mathrm{N}$ sont donc les mêmes.

Proposition 3.48 — Caractérisation de la structure d'une sous-prévariété. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, X un sous-ensemble de M, $\mathscr{B}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur X et $i : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ l'inclusion.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute prévariété $(\mathrm{N},\mathscr{A}')$ et toute $f \in \mathscr{C}^k((\mathrm{N},\mathscr{A}'),(\mathrm{X},\mathscr{B}))$, l'application $i \circ f$ appartient à $\mathscr{C}^k((\mathrm{N},\mathscr{A}'),(\mathrm{M},\mathscr{A}))$.

(i') Pour toute $\mathscr{C}^k$-prévariété $(\mathrm{N},\mathscr{A}')$ et toute application $f : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$
$$f \in \mathscr{C}^k((\mathrm{N},\mathscr{A}'),(\mathrm{X},\mathscr{B})) \qquad \Longrightarrow \qquad i \circ f \in \mathscr{C}^k((\mathrm{N},\mathscr{A}'),(\mathrm{M},\mathscr{A}))\,.$$

(i'') $i \in \mathscr{C}^k((\mathrm{X},\mathscr{B}),(\mathrm{M},\mathscr{A}))$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(ii) Pour toute prévariété $(\mathrm{N},\mathscr{A}')$ et toute application $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{N},\mathrm{M})$ telle que $f(\mathrm{N}) \subset \mathrm{X}$, l'application induite par f est de classe $\mathscr{C}^k$ entre $(\mathrm{N},\mathscr{A}')$ et $(\mathrm{X},\mathscr{B})$.

(ii') Pour toute $\mathscr{C}^k$-prévariété $(\mathrm{N},\mathscr{A}')$ et toute application $f : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$
$$i \circ f \in \mathscr{C}^k((\mathrm{N},\mathscr{A}'),(\mathrm{M},\mathscr{A})) \qquad \Longrightarrow \qquad f \in \mathscr{C}^k((\mathrm{N},\mathscr{A}'),(\mathrm{X},\mathscr{B}))\,.$$

On suppose que X est une sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de M et on note $\mathscr{B}'$ le $\mathscr{C}^k$-atlas maximal associée à cette structure $\mathscr{C}^k$-prévariété de X. L'atlas $\mathscr{B}'$ vérifie (i'') et (ii). De plus, si $\mathscr{B}$ vérifie (i) et (ii) alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ et la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété $(\mathrm{X},\mathscr{B})$ coïncide avec celle obtenue comme sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de M.

Preuve. (i'') $\Rightarrow$ (i'). s'obtient par composition grâce à la proposition 3.27.
(i') $\Rightarrow$ (i). est évidente.
(i) $\Rightarrow$ (i''). Comme $\mathrm{id}_\mathrm{X} \in \mathscr{C}^k((\mathrm{X},\mathscr{B}),(\mathrm{X},\mathscr{B}))$, ($i$) montre que $i \circ \mathrm{id}_\mathrm{X} = i \in \mathscr{C}^k((\mathrm{X},\mathscr{B}),(\mathrm{M},\mathscr{A}))$.
(ii) $\Rightarrow$ (ii'). Comme l'application induite par $i \circ f$ n'est autre que f, (ii) montre que f est de classe $\mathscr{C}^k$.
(ii') $\Rightarrow$ (ii). On note $g : \mathrm{N} \to \mathrm{X}$ l'application induite par f. Par construction, elle vérifie $f = i \circ g$. Comme, par hypothèse, f est de classe $\mathscr{C}^k$, (ii') montre que g est de classe $\mathscr{C}^k$.

D'après la proposition-définition 3.46, $\mathscr{B}'$ vérifie (i'') et (ii).

Comme i est de classe $\mathscr{C}^k$ entre $(\mathrm{X},\mathscr{B}')$ et $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ et à valeurs dans X et que $\mathscr{B}$ vérifie (ii), l'application id_X (qui est l'application induite par i) est de classe $\mathscr{C}^k$ entre $(\mathrm{X},\mathscr{B}')$ et $(\mathrm{X},\mathscr{B})$. Comme $i \in \mathscr{C}^k((\mathrm{X},\mathscr{B}),(\mathrm{M},\mathscr{A}))$ (puisque $\mathscr{B}$ vérifie (i)) La proposition-définition 3.46 montre que id_X (qui est l'application induite par i) est de classe $\mathscr{C}^k$ entre $(\mathrm{X},\mathscr{B})$ et $(\mathrm{X},\mathscr{B}')$. Ainsi id_X est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $(\mathrm{X},\mathscr{B})$ dans $(\mathrm{X},\mathscr{B}')$ et donc $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ (exemple 3.39).

3.8 Exemple de sous-prévariétés

Exemple 3.49 — Ouvert d'une prévariété. On suppose $k \geqslant 1$. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et U un sous-ensemble ouvert de M. Alors U est une sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de M et on a

$$\mathscr{A}_{\mathrm{U}} = \Big\{(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}', \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'), n, \varphi_{|\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'}), \quad (\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A} \text{ tel que } \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \neq \varnothing\Big\}.$$

En effet, si $(\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ est une bonne carte en x pour U alors $x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ et donc $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \neq \varnothing$. Réciproquement, si $(\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \neq \varnothing$, montrons que $(\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une bonne carte en $x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$. Comme U est ouvert dans M, $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ est un ouvert de U'. Comme φ est un homéomorphisme, on en déduit que $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_n$. Ainsi, $(\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une bonne carte en x pour U. Enfin, il reste à montrer que tout $x \in \mathrm{U}$ est contenu dans une bonne carte. Si $x \in \mathrm{U}$, il existe une carte $(\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi)$ de $\mathscr{A}$ en x. Comme $x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$, ce qui précède montre que $(\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une bonne carte en x pour U.

Application 3.50 — Carte. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ une carte de M. Montrons que φ réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme entre U et V.

Comme l'exemple 3.24 montre que φ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$, il suffit de montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme U recouvre U, la remarque 2.18 montre que $\{\mathcal{U}\}$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur U. De plus, comme $\mathrm{U} \cap \mathrm{U} = \mathrm{U}$, l'exemple 3.49 montre que $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. Ainsi l'atlas $\{\mathcal{U}\}$ et $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles et définissent la même structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur U. Comme la structure de prévariété sur V peut être définie par l'atlas $\mathcal{V} = (\mathrm{V}, \mathrm{V}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{V}})$ et que φ est continue, pour vérifier que f est de classe $\mathscr{C}^k$, il suffit de vérifier que l'application φ lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (proposition-définition 3.18(v)). Or cette application est id_{V} qui est bien $\mathscr{C}^k$.

En particulier, on en déduit par composition que les applications

$$\begin{cases} \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^k(\mathrm{V}, \mathbb{R}) \\ \quad f \quad \longmapsto f \circ \varphi^{-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathscr{C}^k(\mathrm{V}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R}) \\ \quad f \quad \longmapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Exemple 3.51 — Ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert de U. Montrons que la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété de V obtenue grâce à celle de sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de U (voir exemple 3.49) coïncide avec la structure usuelle.

On considère la carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{U}})$. Elle vérifie $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \mathrm{V}$. D'après ce que l'on a vu dans l'exemple 3.49, $\mathcal{U}$ est une bonne carte en x pour tout $x \in \mathrm{V}$. Comme $\mathbb{R}^n_n = \mathbb{R}^n$ et $\pi^n_n = \mathrm{id}$, la carte $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$ est donnée par $\mathcal{U}_{\mathrm{V}} = (\mathrm{V}, \mathrm{V}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{V}})$. Comme $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$ appartient à l'atlas maximal définissant la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété de V obtenue grâce à celle de sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de U et que l'atlas $\{\mathcal{U}_{\mathrm{V}}\}$ définit la structure classique, on en déduit que ces deux atlas sont compatibles et définissent donc la même structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur V.

Exemple 3.52 — Ouvert d'un espace vectoriel normé. Soient E un espace vectoriel de dimension finie n, $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}^n$ un isomorphisme linéaire et U un ouvert de E et V un ouvert de U. Montrons que la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété de V obtenue grâce à celle de sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de U (voir exemple 3.49) coïncide avec la structure usuelle.

On considère la carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, f(\mathrm{U}), n, f_{|\mathrm{U}})$. Elle vérifie $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \mathrm{V}$. D'après ce que l'on a vu dans l'exemple 3.49, $\mathcal{U}$ est une bonne carte en x pour tout $x \in \mathrm{V}$. Comme $\mathbb{R}^n_n = \mathbb{R}^n$ et $\pi^n_n = \mathrm{id}$, la carte $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$ est donnée par $\mathcal{U}_{\mathrm{V}} = (\mathrm{V}, f(\mathrm{V}), n, f_{|\mathrm{V}})$. Comme $\mathcal{U}_{\mathrm{V}}$ appartient à l'atlas maximal définissant la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété de V obtenue grâce à celle de sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de U et que l'atlas $\{\mathcal{U}_{\mathrm{V}}\}$ définit la structure classique, on en déduit que ces deux atlas sont compatibles et définissent donc la même structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur U.

Exemple 3.53 — Produit de sous-prévariétés. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés et N (resp. N') une sous-variété de M (resp. M'). Montrons que $\mathrm{N} \times \mathrm{N}'$ est une sous-variété de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$.

Soit $(n, n') \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}'$. Par hypothèse, il existe une bonne carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, m, \varphi)$ en n pour N et une bonne carte $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', m', \varphi')$ en n' pour N'. Montrons que la carte

$$\mathcal{V} = (\mathrm{U} \times \mathrm{U}', \mathrm{V} \times \mathrm{V}', m + m', \varphi \times \varphi')$$

est une bonne carte en (n, n') pour $\mathrm{N} \times \mathrm{N}'$ (à composition près du transfert par une application linéaire bijective). Comme $(\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \cap (\mathrm{N} \times \mathrm{N}') = (\mathrm{U}_\mathrm{N}) \times (\mathrm{U}'_{\mathrm{N}'})$, on a

$$(\varphi \times \varphi')((\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \cap (\mathrm{N} \times \mathrm{N}')) = \varphi((\mathrm{U}_\mathrm{N})) \times \varphi((\mathrm{U}'_{\mathrm{N}'})).$$

Or, par hypothèse, il existe $j, j' \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi((\mathrm{U}_\mathrm{N})) \times \varphi((\mathrm{U}'_{\mathrm{N}'}))$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m_j \times \mathbb{R}^{m'}_{j'}$. Comme $\mathbb{R}^m_j \times \mathbb{R}^{m'}_{j'}$ s'identifie (après permutation des variables) à un ouvert de $\mathbb{R}^{m+m'}_{j+j'}$. La proposition-définition 3.46 permet alors de conclure.

Exemple 3.54 — Sphère.

3.9 Applications des sous-prévariétés

Remarque 3.55 — Ouverts d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et U, V deux ouverts de M tels que $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$. Comme V est ouvert dans U et dans M, V hérite de deux structures de sous-$\mathscr{C}^k$-prévariétés (exemple 3.49) et donc de deux structures de $\mathscr{C}^k$-prévariétés (proposition-définition 3.46). Montrons que ces structures de $\mathscr{C}^k$-prévariété coïncident.

On note $i^\mathrm{U}_\mathrm{V} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ (resp. $i^\mathrm{M}_\mathrm{V} : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$, resp. $i^\mathrm{M}_\mathrm{U} : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$) l'inclusion, $\mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}$ (resp. $\mathscr{B}^\mathrm{M}_\mathrm{V}$, resp. $\mathscr{B}^\mathrm{M}_\mathrm{U}$)l'atlas sur V (resp. sur V, resp. sur U) donnée par la structure de sous-prévariété de V dans U (resp. de V dans M, resp. de U dans M). On va utiliser la proposition 3.48 avec $\mathrm{X} = \mathrm{V}$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}$ pour montrer que $\mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}$ coïncide avec l'atlas $\mathscr{B}' = \mathscr{B}^\mathrm{M}_\mathrm{V}$ associé à la structure de sous-prévariété de M de V.

La proposition 3.46 montre que $i^\mathrm{U}_\mathrm{V} \in \mathscr{C}^k((\mathrm{V}, \mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}), (\mathrm{U}, \mathscr{B}^\mathrm{M}_\mathrm{U}))$ et $i^\mathrm{M}_\mathrm{U} \in \mathscr{C}^k((\mathrm{V}, \mathscr{B}^\mathrm{M}_\mathrm{U}), (\mathrm{M}, \mathscr{A}))$. Par composition, on en déduit que $i^\mathrm{M}_\mathrm{V} = i^\mathrm{M}_\mathrm{U} \circ i^\mathrm{U}_\mathrm{V} \in \mathscr{C}^k((\mathrm{V}, \mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}), (\mathrm{M}, \mathscr{A}))$ et donc $\mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}$ vérifie le point (i'') de la proposition 3.48.

Soient $(\mathrm{N}, \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $f : \mathrm{N} \to \mathrm{V}$. On suppose que $i^\mathrm{M}_\mathrm{V} \circ f \in \mathscr{C}^k((\mathrm{N}, \mathscr{A}'), (\mathrm{M}, \mathscr{A}))$. Comme $i^\mathrm{M}_\mathrm{V} = i^\mathrm{M}_\mathrm{U} \circ i^\mathrm{U}_\mathrm{V}$ et que U est une sous-variété de M, on en déduit, grâce à la proposition 3.46, que $i^\mathrm{U}_\mathrm{V} \circ f \in \mathscr{C}^k((\mathrm{N}, \mathscr{A}'), (\mathrm{U}, \mathscr{B}^\mathrm{M}_\mathrm{U}))$. Comme $i^\mathrm{M}_\mathrm{V} = i^\mathrm{M}_\mathrm{U} \circ i^\mathrm{U}_\mathrm{V}$ et que V est une sous-variété de U, on en déduit, grâce à la proposition 3.46, que $f \in \mathscr{C}^k((\mathrm{N}, \mathscr{A}'), (\mathrm{U}, \mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}))$ et donc $\mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}$ vérifie le point (ii') de la proposition 3.48.

Ainsi $\mathscr{B}^\mathrm{U}_\mathrm{V}$ vérifie (i'') et (ii') de la proposition 3.48 et coïncide avec $\mathscr{B}^\mathrm{M}_\mathrm{V}$. La structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété de U reste donc la même si on considère U comme un ouvert de M ou comme un ouvert d'un ouvert U′ de M contenant U. Il est donc naturel de ne pas spécifier l'atlas dont il est question lorsqu'on évoque la structure de prévariété d'un ouvert d'une prévariété. Dans la suite, lorsqu'on considérera une structure de prévariété sur un ouvert d'une prévariété, il s'agit de celle obtenue comme sous-prévariété.

Proposition 3.56 — Restriction. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.
- (ii) Pour toute sous-variété P de M, $f_{|\mathrm{P}} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{P}, \mathrm{N})$.
- (iii) Pour tout recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de M, $f_{|\mathrm{U}_\alpha} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{N})$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.
- (iv) Il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de M tel que $f_{|\mathrm{U}_\alpha} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{N})$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.
- (v) f est continue et pour tout recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de N, $f_{|f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha), \mathrm{V}_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.
- (vi) L'application f est continue et il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de N tel que $f_{|f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha), \mathrm{V}_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.
- (vii) Pour tout recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de M et tout recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ de N, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{V}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ est un ouvert de M et l'application induite par $f : f^{-1}(\mathrm{V}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{V}_\beta$ est $\mathscr{C}^k$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$.
- $(viii)$ Il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de M et un recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ de N telle que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{V}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ est un ouvert de M et l'application induite par $f : f^{-1}(\mathrm{V}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{V}_\beta$ est $\mathscr{C}^k$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$. On note $i_{\mathrm{P}} : \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Par définition, on a $f_{|_{\mathrm{P}}} = f \circ i_{\mathrm{P}}$. La proposition 3.27 et la proposition-définition 3.46 donne le résultat.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Comme U_α est un ouvert, l'exemple 3.49 montre que U_α est une sous-variété de M. On obtient ainsi le résultat.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. L'ouvert M forme un recouvrement ouvert de M.
$(v) \Rightarrow (vi)$. Comme f est continue, $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ est un ouvert de M et peut donc être muni d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété (exemple 3.49). Ainsi $\mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha), \mathrm{V}_\alpha)$ a bien un sens. L'ouvert N forme un recouvrement ouvert de N.
$(vi) \Rightarrow (iv)$. Pour $\alpha \in \mathrm{A}$, on note $i_\alpha : \mathrm{V}_\alpha \to \mathrm{N}$. D'après la proposition-définition 3.46, $i_\alpha \in \mathscr{C}^k(\mathrm{V}_\alpha, \mathrm{N})$. Par composition, on en déduit que

$$i_\alpha \circ f_{|_{f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)}} = f_{|_{f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)}} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha), \mathrm{N}).$$

Comme les $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ recouvrent M, on obtient le résultat.
$(iv) \Rightarrow (i)$. Comme U_α est ouvert dans M et que $f_{|_{\mathrm{U}_\alpha}}$ est continue, on en déduit que f est continue sur M. Pour $x \in \mathrm{M}$, il existe une carte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ en x et $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\alpha$. D'après le lemme 2.27 et l'exemple 3.49, $\mathcal{U} = (\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha, \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha), n, \varphi_{|_{\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha}})$ est une carte de $\mathscr{A}$ et une carte de la sous-variété U_α. Soit $\mathcal{V}$ une carte en $f(x)$. Comme $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha \subset \mathrm{U}_\alpha$, les applications f et $f_{|_{\mathrm{U}_\alpha}}$ lues dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ coïncident. Or, par hypothèse, l'application $f_{|_{\mathrm{U}_\alpha}}$ lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en $\varphi(x)$. Il en est donc de même pour f. Ainsi (proposition-définition 3.16(iii)) f est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout $x \in \mathrm{M}$. Finalement $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ grâce à la proposition-définition 3.18(i).
$(i) \Rightarrow (vi)$. D'après la proposition-définition 3.18(iv), f est continue. On en déduit que $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ est un ouvert de M et donc une sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de M. D'après $(i) \Rightarrow (ii)$. , on en déduit que $f_{|_{f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)}} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha), \mathrm{N})$ et est à valeurs dans V_α. La proposition-définition 3.46 montre alors que $f_{|_{f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)}} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha), \mathrm{V}_\alpha)$.
$(i) \Rightarrow (vii)$. Comme f est continue, on a $f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ est ouvert dans M. Le point (iii) montre alors que la restriction de f à $f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^k$ De plus, $f(f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha) \subset f(f^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \subset \mathrm{U}_\beta$. Ainsi f induit une application de $f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ dans U_β qui est de classe $\mathscr{C}^k$ grâce à la proposition-définition 3.46.
$(vii) \Rightarrow (viii)$. résulte du fait qu'il existe des recouvrements ouverts de M et N (par exemple (M) et (N)).
$(viii) \Rightarrow (i)$. On fixe $\beta \in \mathrm{B}$. La famille $(f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est un recouvrement ouvert de $f^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$. Comme l'application $f : f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{U}_\beta$ est la restriction à $f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ de l'application $f : f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \to \mathrm{U}_\beta$, l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$. montre que $f : f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \to \mathrm{U}_\beta$ est de classe $\mathscr{C}^k$. L'implication $(vi) \Rightarrow (i)$. montre que f est de classe $\mathscr{C}^k$.

Application 3.57 — Restriction de $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, N une sous-variété de M et N′ une sous-variété de M′. Si $f(\mathrm{N}) = \mathrm{N}'$ alors la restriction f_{N} de f à N réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de N sur N′.

En effet, d'après la proposition 3.56, $f_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \to \mathrm{M}'$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme f_{N} est à valeurs dans N′, la proposition-définition 3.46 montre que $f_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \to \mathrm{N}'$ est de classe $\mathscr{C}^k$. En appliquant le même raisonnement à $f^{-1} : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ qui vérifie $f^{-1}(\mathrm{N}') = \mathrm{N}$, on obtient le résultat souhaité puisque la restriction de f à N et celle de f^{-1} à N′ sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Application 3.58 — Restriction de $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une bijection. $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $\mathfrak{U}' = (\mathrm{U}'_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$) un recouvrement ouvert de M (resp. M′).

On suppose que, tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application f induise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme f_α de U_α sur V_α. Montrons que l'application f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

Comme f est bijective, l'hypothèse assure que $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha$ et $f(\mathrm{U}_\alpha) = f^{-1^{-1}}(\mathrm{U}_\alpha) = \mathrm{V}_\alpha$. La proposition 3.56 (vi) appliquée à f et au recouvrement $\mathfrak{U}'$ (resp. f' et $\mathfrak{U}$) assure que f (resp. f^{-1}) sont de classe $\mathscr{C}^k$.

3.10 Construction de prévariétés par recollement

Proposition 3.59 – Recouvrement par des ouverts. Soient M un espace topologique et $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble U_α est muni d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. On note $\mathscr{A}_\alpha$ l'atlas maximal associé à cette structure. Pour $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$ et on note $\mathscr{A}_\alpha^\beta$ (resp. $\mathscr{A}_\beta^\alpha$) l'atlas maximal associé à la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété induite sur l'ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de U_α (resp de U_β) par celle de U_α (resp. celle de U_β).

Il existe une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur M telle que la structure induite par M sur U_α soit $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$ si et seulement si $\mathscr{A}_\alpha^\beta = \mathscr{A}_\beta^\alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$.

De plus, s'il existe une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur M telle que la structure induite par M sur U_α soit $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$ alors elle est unique.

Preuve. S'il existe une unique structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur M telle que la structure induite par M sur U_α soit $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$, la remarque 3.55 montre que $\mathscr{A}_\alpha^\beta = \mathscr{A}_\beta^\alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$.

Passons à la réciproque. Montrons que $\mathscr{B} = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathscr{A}_\alpha$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas topologique sur M. Soit $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}_\alpha$. Comme U est un ouvert de U_α, U est un ouvert de M et $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}_\alpha$ est donc une pseudocarte topologique de M.

Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}_\alpha$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}_\beta$. Montrons que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles. Le lemme 2.27 montre que $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}} \in \mathscr{A}_\alpha$. Comme le domaine de $\mathcal{V}$ est inclus dans $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on en déduit que $\mathcal{V} \in \mathscr{A}_\alpha^\beta$ (voir l'exemple 3.49). Par un argument identique, on obtient que $\mathcal{V}' = \mathcal{U}'_{|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}} \in \mathscr{A}_\beta$ puis $\mathcal{V}' \in \mathscr{A}_\beta^\alpha$. Ainsi $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles puisque $\mathscr{A}_\alpha^\beta = \mathscr{A}_\beta^\alpha$ et donc $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ aussi puisque $\psi_{\mathcal{V}\mathcal{V}'} = \psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{V}'\mathcal{V}} = \psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ (voir la définition 2.2 pour les notations).

De plus, les domaines des cartes de $\mathscr{A}_\alpha$ recouvrent U_α pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ et que les U_α recouvrent M, on en déduit que les domaines de pseudocartes de $\mathscr{B}$ recouvrent M. Ainsi $\mathscr{B}$ est bien un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M. On note $\mathscr{A}$ l'atlas maximal de M contenant $\mathscr{B}$. Comme $\mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ et que les domaines des cartes de $\mathscr{A}_\alpha$ sont contenus dans U_α, on en déduit (voir l'exemple 3.49) que $\mathscr{A}_\alpha$ est contenu dans l'atlas maximal associé à la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété de U_α induite par celle de M. Par maximalité de $\mathscr{A}_\alpha$, on en déduit qu'ils coïncident.

Passons à l'unicité. L'atlas $\mathscr{B}'$ associé à une telle structure contient $\mathscr{A}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ et donc $\mathscr{B}$. Ainsi $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ sont donc $\mathscr{C}^k$-compatibles. Par unicité de l'atlas maximal compatible avec $\mathscr{B}$. On obtient le résultat voulu.

Proposition 3.60 – Recollement de prévariété. Soit $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille de $\mathscr{C}^k$-prévariétés. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, il existe une famille d'applications $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ vérifiant

(i) φ_α est injective pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$;
(ii) $\mathrm{M} = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}}\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$;
(iii) $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))$ est un ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de M_α pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$;
(iv) $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

Il existe sur M une unique structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété telle que les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soient des ouverts de M et les $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes.

Preuve. Supposons qu'une telle structure existe sur M. Les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ forme un recouvrement ouvert de M. Comme les $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ sont des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes, la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est nécessairement celle obtenue par transfert de structure de celle de M_α via φ_α. La proposition 3.59 (dernière proposition) montre qu'une telle structure est unique.

D'après la proposition 1.4, il existe une unique topologie sur M telle que les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soient des ouverts de M et les φ_α soient des homéomorphismes. On considère alors sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété obtenue par transfert de structure de celle de M_α via φ_α.

D'après la proposition 3.59, il suffit de vérifier que les structures de $\mathscr{C}^k$-prévariété induite par $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ et $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ coïncident. Or, $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha\beta) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_\beta\alpha)$. Comme φ_α (resp. φ_β) induit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$) sur $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$ (resp. $\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$), voir la remarque 3.64 et l'application 3.57) la structure induite par $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ (resp. $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$) sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ n'est autre que celle obtenue par transfert de structure de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$) via φ_α (resp. φ_β).

Comme $\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1} : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes, les deux structures de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ coïncident. On a bien le résultat voulu.

Proposition 3.61 – Recollement de prévariétés. Soient $(\mathrm{M}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille de $\mathscr{C}^k$-prévariétés. On suppose que pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, il existe un ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de M_α, un ouvert $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ de M_β et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\varphi_{\beta\alpha} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\varphi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

(ii) Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{A}$, la restriction $\varphi^\gamma_{\beta\alpha}$ de $\varphi_{\beta\alpha}$ à $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}$ et $\varphi^\beta_{\gamma\alpha} = \varphi^\alpha_{\gamma\beta} \circ \varphi^\gamma_{\beta\alpha}$.

On considère M l'espace topologique obtenu par recollement des M_α le long des $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ au moyen des $\psi_{\beta\alpha}$. Il existe sur M une unique structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété telle que $\psi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \psi_\alpha \mathrm{M}_\alpha$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. On dit que M est la $\mathscr{C}^k$-prévariété *obtenu par recollement des* M_α *le long des* $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ *au moyen des* $\varphi_{\beta\alpha}$ et que les ψ_α sont les « $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes associés ».

Preuve. Commençons par une remarque. Appliquons la condition (i) et la condition (ii) avec $\alpha = \gamma$. On obtient alors $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\alpha} = \mathrm{U}_{\beta\alpha}$, $\varphi^\alpha_{\beta\alpha} = \varphi_{\beta\alpha}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = \varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha\beta}$. Ainsi $\varphi_{\alpha\beta}$ et $\varphi_{\beta\alpha}$ sont des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes réciproques l'un de l'autre.

D'après le lemme de transfert de structure 3.62, on peut munir, via ψ_α, l'ensemble $\psi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété telle que $\psi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \psi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Comme $\psi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \psi_\beta(\mathrm{M}_\beta) = \psi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \psi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$ (voir le point (iv) de la proposition 1.1), on en déduit que ψ_α induit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ sur $\psi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \psi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$. Ainsi la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\psi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \psi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ induite par celle de $\psi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ (resp. par celle de $\psi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$) coïncide avec celle obtenue par transfert de structure de celle de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ via ψ_α et celle de $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ via ψ_β. Comme $\psi_\alpha{}_{\big|\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = \psi_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$ et que $\varphi_{\beta\alpha}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, l'atlas obtenu par transfert de structure sont les mêmes.

Lemme 3.62 – Transfert de structure. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, N un ensemble et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une bijection. Il existe sur N une unique structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété telle que f soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. On note $f_*(\mathscr{A})$ l'atlas maximal sur N associé à cette structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. L'atlas maximal $f_*(\mathscr{A})$ est donné par

$$f_*(\mathscr{A}) = \left\{ (f(\mathrm{U}), \mathrm{V}, n, \varphi \circ f^{-1}{}_{\big|f(\mathrm{U})}), \quad (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A} \right\}$$

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $g : \mathrm{M}' \to \mathrm{N}$, $h : \mathrm{N} \to \mathrm{M}'$ deux applications. L'application g est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si $f^{-1} \circ g : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ l'est. L'application h est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si $h \circ f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ l'est.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, N un espace topologique et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un homéomorphisme. Il existe sur N une unique structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété telle que f soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. On note $f_*(\mathscr{A})$ l'atlas maximal sur N associé à cette structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété. L'atlas maximal $f_*(\mathscr{A})$ est donné par

$$f_*(\mathscr{A}) = \left\{ (f(\mathrm{U}), \mathrm{V}, n, \varphi \circ f^{-1}{}_{\big|f(\mathrm{U})}), \quad (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A} \right\}$$

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $g : \mathrm{M}' \to \mathrm{N}$, $h : \mathrm{N} \to \mathrm{M}'$ deux applications. L'application g est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si $f^{-1} \circ g : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ l'est. L'application h est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si $h \circ f^{-1} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ l'est.

Preuve. Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$. Montrons que $f_*(\mathcal{U}) = (f(\mathrm{U}), \mathrm{V}, n, \varphi \circ f^{-1}{}_{\big|f(\mathrm{U})})$ est une pseudocarte de N. Par composition, $\varphi \circ f^{-1}{}_{\big|f(\mathrm{U})}$ est bien une bijection de $f(\mathrm{U})$ sur l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}$. Montrons que $f_*(\mathcal{U})$ et $f_*(\mathcal{U}')$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles. L'ensemble $\varphi \circ f^{-1}{}_{\big|f(\mathrm{U})}(f(\mathrm{U}) \cap f(\mathrm{U}')) = \varphi \circ f^{-1}{}_{\big|f(\mathrm{U})}(f(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')) = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est ouvert dans V. De même, l'ensemble $\varphi' \circ f^{-1}{}_{\big|f(\mathrm{U})}(f(\mathrm{U}) \cap f(\mathrm{U}')) = \varphi' \circ f^{-1}{}_{\big|f(\mathrm{U})}(f(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')) = \varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est ouvert dans

V′. Enfin, comme $\psi_{f_*(\mathcal{U})f^*(\mathcal{U}')} = \psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{f_*(\mathcal{U}')f^*(\mathcal{U})} = \psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$, on en conclut que $f_*(\mathcal{U})$ et $f_*(\mathcal{U}')$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles.

Par ailleurs, comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent M et que f est bijective, les domaines des pseudocartes de $f_*(\mathscr{A})$ recouvrent N. Ainsi $f_*(\mathscr{A})$ est bien un $\mathscr{C}^k$-atlas sur N. On note alors $\mathscr{B}$ l'atlas maximal sur N contenant $f_*(\mathscr{A})$.

Pour $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$, on a ${f^{-1}}_*(f_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. On en déduit que ${f^{-1}}_*(\mathscr{B})$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas contenant $\mathscr{A}$. Ainsi, par maximalité de $\mathscr{A}$, on obtient ${f^{-1}}_*(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$. Comme $f_*({f^{-1}}_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{B}$, on en déduit que $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{A})$.

Montrons que l'application f est un homéomorphisme. La topologie sur N est l'unique topologie telle que $f(\mathrm{U})$ soit un ouvert et $\varphi \circ f^{-1}\big|_{f(\mathrm{U})}$ soit un homéomorphisme pour tout $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ (voir la proposition 2.15). Or φ est un homéomorphisme de U sur V, on en déduit que $f^{-1}\big|_{f(\mathrm{U})}$ est un homéomorphisme de $f(\mathrm{U})$ sur U pour tout U domaine d'une carte de $\mathscr{A}$. Comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ forment un recouvrement ouvert de M et que les $f(\mathrm{U})$ pour U domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ forment un recouvrement ouvert de N, on en déduit que f est un homéomorphisme.

De plus, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ et $f_*(\mathcal{U})$ n'est autre que id_V qui est de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi, comme f est continue en x, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout x appartenant au domaine de $\mathcal{U}$ (voir la proposition-définition 3.16). Comme les domaines de cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent M, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout x et donc f est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition-définition 3.18).

De plus, l'application f^{-1} lue dans les cartes $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U}) \in f_*(\mathscr{A})$ et $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})_* \in \mathscr{A}$ n'est autre que id_V qui est de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi, comme f^{-1} est continue en x, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout x appartenant au domaine de $\mathcal{V}$ (voir la proposition-définition 3.16). Comme les domaines de cartes de $f_*(\mathscr{A})$ recouvrent M, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout x et donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition-définition 3.18).

Si g est $\mathscr{C}^k$ alors par composition par l'application f^{-1} de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le résultat voulu. Si $f^{-1} \circ g$ est $\mathscr{C}^k$ alors par composition par l'application f de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le résultat voulu.

Si h est $\mathscr{C}^k$ alors par composition par l'application f de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le résultat voulu. Si $h \circ f$ est $\mathscr{C}^k$ alors par composition par l'application f^{-1} de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le résultat voulu.

Passons au cas topologique. Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$. Montrons que $f_*(\mathcal{U}) = (f(\mathrm{U}), \mathrm{V}, n, \varphi \circ f^{-1}\big|_{f(\mathrm{U})})$ est une pseudocarte topologique de N. Comme f est un homéomorphisme, on obtient que $f(\mathrm{U})$ est un ouvert de N et par composition, $\varphi \circ f^{-1}\big|_{f(\mathrm{U})}$ est homéomorphisme de $f(\mathrm{U})$ sur l'ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}$. Montrons que $f_*(\mathcal{U})$ et $f_*(\mathcal{U}')$ sont $\mathscr{C}^k$-compatibles. Cela résulte immédiatement des égalités $\psi_{f_*(\mathcal{U})f^*(\mathcal{U}')} = \psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{f_*(\mathcal{U}')f^*(\mathcal{U})} = \psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$.

Par ailleurs, comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent M et que f est bijective, les domaines des pseudocartes de $f_*(\mathscr{A})$ recouvrent N. Ainsi $f_*(\mathscr{A})$ est bien un $\mathscr{C}^k$-atlas sur N. On note alors $\mathscr{B}$ l'atlas maximal sur N contenant $f_*(\mathscr{A})$.

Pour $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$, on a ${f^{-1}}_*(f_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. On en déduit que ${f^{-1}}_*(\mathscr{B})$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas contenant $\mathscr{A}$. Ainsi, par maximalité de $\mathscr{A}$, on obtient ${f^{-1}}_*(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$. Comme $f_*({f^{-1}}_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{B}$, on en déduit que $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{A})$.

De plus, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ et $f_*(\mathcal{U})$ n'est autre que id_V qui est de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi, comme f est continue en x, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout x appartenant au domaine de $\mathcal{U}$ (voir la proposition-définition 3.16). Comme les domaines de cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent M, on en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout x et donc f est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition-définition 3.18).

De plus, l'application f^{-1} lue dans les cartes $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U}) \in f_*(\mathscr{A})$ et $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})_* \in \mathscr{A}$ n'est autre que id_V qui est de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi, comme f^{-1} est continue en x, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout x appartenant au domaine de $\mathcal{V}$ (voir la proposition-définition 3.16). Comme les domaines de cartes de $f_*(\mathscr{A})$ recouvrent M, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ en x pour tout x et donc f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition-définition 3.18).

Si g est $\mathscr{C}^k$ alors par composition par l'application f^{-1} de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le résultat voulu. Si $f^{-1} \circ g$ est $\mathscr{C}^k$ alors par composition par l'application f de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le

résultat voulu.

Si h est $\mathscr{C}^k$ alors par composition par l'application f de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le résultat voulu. Si $h \circ f$ est $\mathscr{C}^k$ alors par composition par l'application f^{-1} de classe $\mathscr{C}^k$, on obtient le résultat voulu.

Passons à la propriété d'unicité. Soit $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur N telle que $f : (\mathrm{M}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{N}, \mathscr{B})$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Alors, par composition $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ sur $(\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A}))$. L'exemple 3.39 montre alors que $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{A})$.

Remarque 3.63 — Transfert consécutif. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, N, P deux ensembles et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ et $g : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ deux bijections. On a alors $g_*(f_*(\mathscr{A})) = (g \circ f)_*(\mathscr{A})$.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, N, P deux espaces topologiques et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $g : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ deux homéomorphisme. On a alors $g_*(f_*(\mathscr{A})) = (g \circ f)_*(\mathscr{A})$.

En effet, $(g \circ f)_*(\mathscr{A})$ est l'unique atlas maximal $\mathscr{B}$ sur P tel que $g \circ f : (\mathrm{M}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{P}, \mathscr{B})$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Comme $f : (\mathrm{M}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A}))$ et $g : (\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A})) \to (\mathrm{P}, g_*(f_*(\mathscr{A})))$ sont des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes, on en déduit, par composition, que $g \circ f : (\mathrm{M}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{P}, g_*(f_*(\mathscr{A})))$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Ainsi $g_*(f_*(\mathscr{A})) = (g \circ f)_*(\mathscr{A})$.

Remarque 3.64 — Transfert. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une bijection. Montrons que f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ si et seulement si $f_*(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$ si et seulement si ${f^{-1}}_*(\mathscr{A}') = \mathscr{A}$.

On a $f_*(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$ si et seulement si ${f^{-1}}_*(\mathscr{A}') = \mathscr{A}$. Comme f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', f_*(\mathscr{A}))$, on en déduit que si $f_*(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$, alors f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$.

Si f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, alors par unicité, on obtient le résultat souhaité.

Lemme 3.65 — Produit par une prévariété discrète. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, F un ensemble et $\mathrm{F}_{\mathrm{disc}}$ la $\mathscr{C}^k$-prévariété discrète associée. On considère une application $\varphi : \mathrm{M} \times \mathrm{F} \to \mathrm{N}$. Pour $f \in \mathrm{F}$, on note $\varphi_f : \mathrm{M} \times \{f\} \to \mathrm{N}$ la restriction de φ à $\mathrm{M} \times \{f\}$ et $\varphi^f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ l'application $m \mapsto \varphi(f, m)$. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes

(i) φ est de classe $\mathscr{C}^k$;
(ii) φ_f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $f \in \mathrm{F}$;
(iii) φ^f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $f \in \mathrm{F}$.

Comme la topologie sur F est discrète, $\{f\}$ est un ouvert de F et donc $\mathrm{M} \times \{f\}$ est un ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{F}$. Il est donc muni d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Comme φ_f est la restriction d'une application $\mathscr{C}^k$ à une sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété, elle est $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition **??**).

$(ii) \Rightarrow (i)$. La famille $(\mathrm{M} \times \{f\})_{\{f \in \mathrm{F}\}}$ forme un recouvrement ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{F}$. Comme φ_f est la restriction de φ d'une application $\mathscr{C}^k$ à $\mathrm{M} \times \{f\}$, la proposition **??** montre que φ est $\mathscr{C}^k$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. L'application $p_f : \mathrm{M} \times \{f\} \to \mathrm{M}$ est la restriction à la sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété $\mathrm{M} \times \{f\}$ de l'application première projection. Elle est donc $\mathscr{C}^k$. L'application $i_f : m \in \mathrm{M} \mapsto (m, f) \in \mathrm{M} \times \mathrm{F}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ car chacune de ces deux composantes l'est et à valeurs dans $\mathrm{M} \times \{f\}$. Donc l'application $m \mapsto (m, f)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ en tant qu'application de M dans la sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété $\mathrm{M} \times \{f\}$. Comme $p_f \circ i_f = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ et $i_f \circ p_f = \mathrm{id}_{\mathrm{M} \times \{f\}}$, on en déduit que p_f et i_f sont des difféomorphismes réciproques l'un de l'autre. Or, $\varphi_f = \varphi^f \circ p_f$ et $\varphi_f \circ i_f = \varphi^f$. Ainsi φ_f est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si φ^f l'est.

Proposition 3.66 — Groupe discret et prégroupe de Lie. Soit G un groupe et $\mathrm{G}_{\mathrm{disc}}$ la $\mathscr{C}^k$-prévariété associée. Alors $\mathrm{G}_{\mathrm{disc}}$ est un prégroupe de Lie appelé *prégroupe de Lie associé à* G.

Preuve. $\mathrm{G}_{\mathrm{disc}} \times \mathrm{G}_{\mathrm{disc}}$ est muni de la topologie discrète. L'application $m : (x, y) \in \mathrm{G}_{\mathrm{disc}} \times \mathrm{G}_{\mathrm{disc}} \mapsto xy^{-1} \mathrm{G}_{\mathrm{disc}}$ est donc continue et ainsi de classe $\mathscr{C}^k$ (voir l'exemple **??**).

Proposition 3.67 — Action de groupe discret. Soient G un groupe, $\mathrm{G}_{\mathrm{disc}}$ le prégroupe de Lie associé à G et $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $\Phi : \mathrm{G} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ une action du groupe G sur l'ensemble M.

Les propositions suivantes sont équivalentes

(*i*) $\mathrm{G}_{\mathrm{disc}}$ agit de façon $\mathscr{C}^k$ sur M c'est-à-dire Φ est $\mathscr{C}^k$.

(*ii*) Pour tout $g \in \mathrm{G}$, l'application $\Phi^g : m \mapsto gm = \Phi(g, m)$ est $\mathscr{C}^k$.

(*iii*) G agit sur M par $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme c'est-à-dire pour tout $g \in \mathrm{G}$, l'application $\Phi^g : m \mapsto gm = \Phi(g, m)$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

Preuve. L'équivalence de (*i*) et (*ii*) résulte simplement du lemme 3.65. On a bien sûr (*iii*) implique (*ii*). Enfin, comme $\Phi^{g'}\Phi^g = \Phi^{g'g}$ et $\Phi^{1_{\mathrm{G}}} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ (puisque Φ est une action de G sur M), on en déduit que $\Phi^g\Phi^{g^{-1}} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}} = \Phi^{g^{-1}}\Phi^g$. Ainsi, Φ^g et $\Phi^{g^{-1}}$ sont des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes réciproque l'un de l'autre.

Proposition 3.68 — Quotient par un groupe fini. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété séparée et G un groupe fini de $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$. On suppose que l'action de G sur M est libre. On note $\pi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{G}$ la surjection canonique. Il existe sur M/G une unique structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété telle que π soit de classe $\mathscr{C}^k$.

3.11 Faisceau

Proposition 3.69 — Faisceau des fonctions $\mathscr{C}^k$. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété. On note Ouv(M) l'ensemble des ouverts de M. Pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})$, on pose $\mathrm{F}(\mathrm{U}) = \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R})$. Alors F muni de la restriction des applications est un faisceau en $\mathbb{R}$-algèbres sur M localement isomorphe au faisceau des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est le *faisceau des fonctions $\mathscr{C}^k$ de* M et on le note $\mathscr{C}^k(\mathrm{M})$.

Réciproquement, soient M un espace topologique et F un faisceau en $\mathbb{R}$-algèbre sur M localement isomorphe des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors, on peut munir M d'une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété dont le faisceau des fonctions $\mathscr{C}^k$ est M.

Preuve. Tout ouvert de M étant une $\mathscr{C}^k$-prévariété (exemple 3.49 et 3.55), $\mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ a bien un sens et est une $\mathbb{R}$-algèbre (application 3.31). Si $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ sont deux ouverts de M alors V est un ouvert de U et la proposition 3.56 montre que la restriction à V d'une fonction de $\mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathrm{M})$ appartient à $\mathscr{C}^k(\mathrm{V}, \mathrm{M})$. Comme la restriction est un morphisme d'algèbres, on en déduit que F est un préfaisceau en $\mathbb{R}$-algèbres.

Par ailleurs, soient $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})$ et $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert de U. Pour $i, j \in \mathrm{I}$, on note $\mathrm{U}_{ij} = \mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$. On considère une famille $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de fonctions telles que $f_i \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}_i, \mathbb{R})$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ et $f_i{}_{|\mathrm{U}_{ij}} = f_j{}_{|\mathrm{U}_{ij}}$ pour tout $i, j \in \mathrm{I}$. Comme les f_i coïncident deux à deux là où elles sont définies, il existe une unique application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ telle que $f_{|\mathrm{U}_i} = f_i$. En effet, pour $x \in \mathrm{U}_i$, on a nécessairement $f(x) = f_i(x)$ et comme les U_i recouvrent U, f est entièrement définie. De plus, si x appartient aussi à U_j, on a $f_j(x) = f_i(x)$ par hypothèse et la valeur de f ne dépend pas du choix de $i \in \mathrm{I}$. Enfin, comme $f_{|\mathrm{U}_i} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}_i, \mathbb{R})$, la proposition 3.56 montre que $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R})$. Ainsi F est bien un faisceau en $\mathbb{R}$-algèbres.

Pour finir, si $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une carte de M alors φ réalise un isomorphisme de faisceaux entre $\mathrm{F}_{|\mathrm{U}}$ et le faisceau des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur V (exemple 3.50).

Réciproquement, on note $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts U de M tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{F}_{|\mathrm{U}}$ soit isomorphe au faisceau des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ forme un recouvrement ouvert de M. Par hypothèse, les ouverts de $\mathcal{O}$ forment un recouvrement ouvert de M. De plus, si $\mathrm{U} \in \mathcal{O}$ (resp. $\mathrm{U}' \in \mathcal{O}$), il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ (V' de $\mathbb{R}^{n'}$) et un homéomorphisme $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ (resp. $\varphi' : \mathrm{U}' \to \mathrm{V}'$) tel que $\varphi_*\mathrm{F}_{|\mathrm{U}} = \mathscr{C}^k(\mathrm{V})$ (resp. $\varphi'_*\mathrm{F}_{|\mathrm{U}'} = \mathscr{C}^k(\mathrm{V}')$). En particulier, $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ (resp. $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$) est une pseudocarte topologique sur M. Pour simplifier les notations, on introduit $\psi = \varphi_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$ et $\psi' = \varphi'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$, $\mathrm{W} = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\mathrm{W}' = \varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$. On en déduit que

$$\psi'^{-1}\mathscr{C}^k(\mathrm{W}') = (\varphi'^{-1}\mathscr{C}^k(\mathrm{V}'))_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} = \mathrm{F}_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} = (\varphi^{-1}\mathscr{C}^k(\mathrm{V}))_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} = \psi^{-1}\mathscr{C}^k(\mathrm{W})$$

Ainsi $\psi \circ \psi'^{-1}$ et $\psi' \circ \psi^{-1}$ sont de classe $\mathscr{C}^k$ et les ouverts de $\mathcal{O}$ forment un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M auquel on peut attacher une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété (remarque 3.2).

Par ailleurs, $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une pseudocarte topologique pour la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété que l'on a construite sur M. Grâce à l'isomorphisme associé à φ, le faisceau $\mathrm{F}_{|\mathrm{U}}$ s'identifie à $\mathscr{C}^k(\mathrm{U})$

(voir l'application 3.50). Ainsi F et $\mathscr{C}^k(\mathrm{M})$ sont isomorphes.

Proposition 3.70 — Application de classe $\mathscr{C}^k$. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application continue. L'application f est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si pour tout ouvert U de N et tout $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R})$, on a

$$g \circ f_{\big|_{f^{-1}(\mathrm{U})}} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathbb{R}).$$

Preuve. (⇒) Comme f est continue, $f^{-1}(\mathrm{U})$ est ouvert dans M et peut donc être muni d'une structure $\mathscr{C}^k$-prévariété (exemple 3.49). Ainsi $\mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathbb{R})$ a bien un sens et d'après la proposition 3.56, $f_{\big|_{f^{-1}(\mathrm{U})}} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathrm{N})$. De plus, comme $f_{\big|_{f^{-1}(\mathrm{U})}}$ est à valeur dans la sous-prévariété de U de N, la proposition-définition 3.46 montre que $f_{\big|_{f^{-1}(\mathrm{U})}} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathrm{U})$. Par composition, on en déduit que $g \circ f_{\big|_{f^{-1}(\mathrm{U})}} \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathbb{R})$.

(⇐) Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$ et $\mathcal{V} = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ une carte de $\mathscr{B}$. On va montrer que l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est de classer $\mathscr{C}^k$. Comme f est continue, $f^{-1}(\mathrm{U}')$ est ouvert dans M et donc $\mathrm{W} = \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ aussi. On pose $\psi = \varphi_{\big|_{\mathrm{W}}} : \mathrm{W} \to \varphi(\mathrm{W})$. Le lemme 2.27 montre que $(\mathrm{W}, \varphi(\mathrm{W}), n, \psi)$ est une carte de $\mathscr{A}$. On en déduit, grâce à l'exemple 3.24, que ψ^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\varphi(\mathrm{W})$. Pour $i \in [\![1\,,\, n']\!]$, on note $\pi_i : \mathrm{V}' \to \mathbb{R}$ la restriction à V' de l'application i^{e} coordonnée. Comme π_i est de classe $\mathscr{C}^k$ et $\varphi \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}', \mathrm{V}')$ (application 3.50), on en déduit que $\pi_i \circ \varphi \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}', \mathbb{R})$. L'hypothèse montre alors que $f_i = \pi_i \circ \varphi \circ f \in \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{U}'), \mathbb{R})$. La proposition 3.56 assure que la restriction à W de f_i est de classe $\mathscr{C}^k$. Par composition, on obtient que $f_i \circ \psi^{-1} \in \mathscr{C}^k(\varphi(\mathrm{W}), \mathbb{R})$. L'exemple 3.20 montre que l'application $f_i \circ \psi^{-1}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ au sens classique. Or $f_i \circ \psi^{-1}$ n'est autre que la i^{e} coordonnée de l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Comme une application entre un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert de $\mathbb{R}^m$ est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si ses n' coordonnées le sont, on en déduit que l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est $\mathscr{C}^k$. La proposition-définition 3.18(iv) montre que $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.

4 Fibré vectoriel

Prolégomènes 4.1 Pour éviter d'alourdir les notations, lorsqu'on rencontrera la notation p_1 ou p_2, elle désignera toujours la première (resp. deuxième) projection d'un produit de deux ensembles sur le premier (resp. deuxième) facteur. Le cadre de travail indiquera sans ambiguïté les ensembles en question.

Par ailleurs, dans la suite, on rencontrera très souvent la situation suivante. Soient $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{F}$ trois ensembles, $p : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ et $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{U} \times \mathrm{F}$ deux applications tels que $p = p_1 \circ \varphi$.

Soit $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$. Montrons que $\varphi(p^{-1}(\mathrm{U}')) \subset \{\mathrm{U}'\} \times \mathrm{F} = {p_1}^{-1}(\mathrm{U}')$. Soit $y \in p^{-1}(\mathrm{U}')$. Comme $p_1(\varphi(y)) = p(y) = x$, on obtient l'inclusion souhaité. On en déduit que φ induit une application de $p^{-1}(\mathrm{U}')$ dans $\mathrm{U}' \times \mathrm{F}$ que l'on note $\varphi_{\mathrm{U}'} : p^{-1}(\mathrm{U}') \to \mathrm{U}' \times \mathrm{F}$. Lorsque que $\mathrm{U}' = \{x\}$, on note $\varphi_{\mathrm{U}'} = \varphi_x$.

Par ailleurs, comme

$$p^{-1}(\mathrm{U}') = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} p^{-1}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}' \times \mathrm{F} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}'} {p_1}^{-1}(x) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}'} (\{x\} \times \mathrm{F}),$$

on en déduit que

$$\varphi_{\mathrm{U}'} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}'} \varphi_x$$

En particulier, avec $\mathrm{U}' = \mathrm{U}$, on obtient

$$\mathrm{V} = p^{-1}(\mathrm{U}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} p^{-1}(x), \qquad \mathrm{U} \times \mathrm{F} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} (\{x\} \times \mathrm{F}) \qquad \text{et} \qquad \varphi = \varphi_{\mathrm{U}} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} \varphi_x \,.$$

De plus, on en déduit que φ (resp. $\varphi_{\mathrm{U}'}$) est bijective si et seulement si φ_x l'est pour tout $x \in \mathrm{U}$ (resp. $x \in \mathrm{U}'$). Dans ces conditions, φ (resp. $\varphi_{\mathrm{U}'}$) réalise une bijection de V (resp. $p^{-1}(\mathrm{U}')$) sur $\mathrm{U} \times \mathrm{F}$ (resp. $\mathrm{U}' \times \mathrm{F}$). Enfin, remarquons que, grâce au critère précédent, la bijectivité de φ implique celle de $\varphi_{\mathrm{U}'}$.

4.1 Définition

Définition 4.2 — Fibré vectoriel. Soient $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés. On dit qu'une application $p \in \mathscr{C}^k(\mathrm{E}, \mathrm{M})$ est un *$\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur* $\mathbb{K}$ si, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'ensemble $p^{-1}(x)$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel telle que, pour tout $x \in \mathrm{M}$, il existe un voisinage ouvert U de x, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension finie et un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : p^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times \mathrm{F}$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathrm{U}) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(\mathrm{U})}"'] & & \mathrm{U} \times \mathrm{F} \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{U} & \end{tikzcd}$$

et tels que, pour tout $y \in \mathrm{U}$, l'application $p_2 \circ \varphi_y : p^{-1}(y) \to \mathrm{F}$ soit $\mathbb{K}$-linéaire.

On dit que M est la *base du fibré vectoriel*, E est l'*espace total*, $\mathrm{E}_x = p^{-1}(x)$ est *la fibre de p au dessus de x*, U un *ouvert distingué* ou *ouvert trivialisant pour p*, φ une *trivialisation de p de fibre* F *au-dessus de* U et $(\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$ une *carte trivialisante pour p*. On dit que U est le *domaine* de la carte trivialisante $(\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), on dit que p est un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel réel (resp. complexe) plutôt qu'un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). Lorsqu'on souhaite souligner la base du fibré vectoriel, on dit que p est un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel au-dessus de M.

On note $\mathrm{Fib}_{k,\mathbb{K}}((\mathrm{E}, \mathscr{B}), (\mathrm{M}, \mathscr{A}))$ l'ensemble des $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de E dans M.

Remarque 4.3 — Abus de langage. Par abus de langage, on dit parfois que E est un fibré vectoriel au dessus de M. On sous-entend ainsi les atlas $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ et l'application p.

Remarque 4.4 — Linéarité. Comme φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, l'application φ_y est bijective (voir les prolégomènes 4.1). De plus, p_2 réalise une bijection entre $\{y\} \times \mathrm{F}$ et F, donc $p_2 \circ \varphi_y : p^{-1}(y) \to \mathrm{F}$ qui est linéaire par hypothèse, est un isomorphisme.

Par ailleurs, Comme p_2 réalise une bijection entre $\{y\} \times \mathrm{F}$ et F, on peut munir $\{y\} \times \mathrm{F}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie par transfert de structure via p_2. Autrement dit, pour $v, w \in \mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$(y, v) + (y, w) = (y, v + w) \qquad \text{et} \qquad \lambda(y, v) = (y, \lambda v).$$

Avec cette structure d'espace vectoriel sur $\{y\} \times \mathrm{F}$, s'assurer que $p_2 \circ \varphi_y$ est linéaire est équivalent à s'assurer que φ_y est linéaire.

En particulier, si U est un ouvert de M, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : p^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times \mathrm{F}$ une application, alors φ est une trivialisation de p au-dessus de U si et seulement si φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, $p = p_1 \circ \varphi$ et, pour tout $y \in \mathrm{U}'$, l'application φ_y est linéaire.

Remarque 4.5 — Dimension des fibres. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. On considère U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U de fibre F.

La remarque 4.4 montre que, pour tout $x \in \mathrm{U}$, l'application $p_2 \circ \varphi_x$ réalise un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de $p^{-1}(x)$ sur F. En particulier, l'application $x \mapsto \dim_{\mathbb{K}}(p^{-1}(x))$ est constante sur U égale à $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{F})$.

En considérant pour tout $x \in \mathrm{M}$, un ouvert U_x contenant x et trivialisant pour p, on en déduit que l'application $x \mapsto \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{K}(p^{-1}(x))$ est localement constante donc constante sur chaque composante connexe de M. En particulier, si M est connexe, toutes les fibres de p ont la même dimension.

Si toutes les fibres de p ont la même dimension r, on dit que p est un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ de *rang (sur* $\mathbb{K}$*)* r. On note alors $\mathrm{rg}_{\mathrm{K}} \mathrm{K}(p) = r$ pour le rang de p sur $\mathbb{K}$. En particulier, on peut toujours parler du rang d'un fibré vectoriel au-dessus d'une variété connexe.

Remarque 4.6 — Choix de la fibre d'une trivialisation. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. On considère U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U de fibre F. On va construire une trivialisation de p au-dessus de U dont la fibre est l'un des $\mathbb{K}^\ell$.

Soient G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel vérifiant $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{F} = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{G}$ et $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire. Montrons que l'application $\psi = (\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times f) \circ \varphi$ est une trivialisation de p au-dessus de U de fibre G.

Comme f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, on en déduit que $\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times f : \mathrm{U} \times \mathrm{F} \to \mathrm{U} \times \mathrm{G}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Ainsi, ψ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, $p_1 \circ \psi = p$ et

$$p_2 \circ \psi_x = p_2 \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times f) \circ \varphi_x = f \circ p_2 \circ \varphi_x$$

est linéaire.

En prenant $\mathrm{G} = \mathbb{K}^{\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{F}}$, on obtient le résultat voulu.

Remarque 4.7 — Ouvert trivialisant. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel réel sur $\mathbb{K}$. Soient U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U. Montrons que tout ouvert U' contenu dans U est un ouvert trivialisant pour p et que $\varphi_{\mathrm{U}'}$ est une trivialisation de p au-dessus de U' (la notation $\varphi_{\mathrm{U}'}$ est définie dans les prolégomènes 4.1).

Comme φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, que $p^{-1}(\mathrm{U}')$ (resp. $\mathrm{U}' \times \mathrm{F}$) est un ouvert de $p^{-1}(\mathrm{U})$ (resp. $\mathrm{U} \times \mathrm{F}$), l'application 3.57 montre que $\varphi_{\mathrm{U}'}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. De plus, par restriction, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(\mathrm{U}') \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(\mathrm{U}')}"'] & & \mathrm{U}' \times \mathrm{F} \arrow[dl, "p_1"] \\
& \mathrm{U}' &
\end{tikzcd}$$

est commutatif et $p_2 \circ \varphi_y : p^{-1}(y) \to \mathrm{F}$ est $\mathbb{K}$-linéaire pour tout $y \in \mathrm{U}'$.

Comme, pour tout $x \in \mathrm{M}$, il existe un ouvert trivialisant contenant x, on en déduit que les ouverts trivialisant contenant x forment une base de voisinage de x. De plus, en considérant l'in-

tersection d'un domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ en x et d'un ouvert trivialisant pour p, le lemme 2.27 et ce qui précède montre qu'on peut choisir un ouvert trivialisant contenant x qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ en x.

Remarque 4.8 — Trivialisation commune. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}_1, \mathscr{B}_1)$, $(\mathrm{E}_2, \mathscr{B}_2)$ des $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $p_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{M}$ et $p_2 : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Pour $j \in \{1, 2\}$ et pour $x \in \mathrm{M}$, il existe un ouvert trivialisant U_j pour p_j contenant x. La remarque 4.7 montre que $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$ est un ouvert trivialisant à la fois pour p_1 et p_2. En appliquant une nouvelle fois la remarque 4.7, on en déduit que les ouverts contenant x qui trivialisent simultanément p_1 et p_2 forment une base de voisinage de x.

De plus, en considérant $(\mathrm{U}_x)_{x \in \mathrm{M}}$ une famille d'ouverts qui trivialisent simultanément p_1 et p_2 tels que $x \in \mathrm{U}_x$ pour tout $x \in \mathrm{M}$, on obtient un recouvrement ouvert de M par des ouverts qui trivialisent simultanément p_1 et p_2.

Exemple 4.9 — Fibré trivial. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. La première projection $p_1 : \mathrm{M} \times \mathrm{F} \to \mathrm{M}$ de la $\mathscr{C}^k$-prévariété produit $\mathrm{M} \times \mathrm{F}$ dans M est un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ appelé *fibré vectoriel trivial sur* M *de fibre* F et noté $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$. En effet, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'ensemble ${p_1}^{-1}(x) = \{x\} \times \mathrm{F}$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (grâce à celle de F via p_2). De plus, pour tout $x \in \mathrm{M}$, M est un voisinage ouvert de x, le diagramme

$$\begin{tikzcd} {p_1}^{-1}(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \times \mathrm{F} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathrm{M} \times \mathrm{F}}"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \mathrm{M} \times \mathrm{F} \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{M} & \end{tikzcd}$$

est commutatif et $\mathrm{id}_{\mathrm{M} \times \mathbb{R}^n}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Enfin, $(\mathrm{id}_{\mathrm{M} \times \mathrm{F}})_x = \mathrm{id}_{\{x\} \times \mathrm{F}}$ est $\mathbb{K}$-linéaire.

Si $\mathrm{F} = \{0\}$ est l'espace vectoriel nul, on note $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^0$ le fibré trivial associé. On dit que $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^0$ est le fibré nul au-dessus de M.

Exemple 4.10 — Fibré produit. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}', \mathscr{A}'), (\mathrm{E}, \mathscr{B}), (\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$. L'application $p \times p' : \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \to \mathrm{M} \times \mathrm{M}'$ est un fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient $(x, x') \in \mathrm{M} \times \mathrm{M}'$. L'ensemble $(p \times p')^{-1}(x, x') = \mathrm{E}_x \times \mathrm{E}'_{x'}$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel (produit de celles de E_x et $\mathrm{E}'_{x'}$) de dimension finie. On considère U (resp. U′) un ouvert trivialisant pour p (resp. p') contenant x (resp. contenant x') et φ (resp. φ') une trivialisation de p (resp. p') au-dessus de U (resp. U′) de fibre F (resp. G). L'ensemble $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ est alors un ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$ contenant (x, x'). De plus, $(p \times p')^{-1}(\mathrm{U} \times \mathrm{U}') = p^{-1}(\mathrm{U}) \times p'^{-1}(\mathrm{U}')$ et $\varphi \times \varphi'$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $p^{-1}(\mathrm{U}) \times p'^{-1}(\mathrm{U}')$ dans $\mathrm{U} \times \mathrm{F} \times \mathrm{U}' \times \mathrm{G}$. On pose $\sigma : \mathrm{U} \times \mathrm{F} \times \mathrm{U}' \times \mathrm{G} \to (\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \times (\mathrm{F} \times \mathrm{G})$ le $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme obtenu par permutation des variables et $\psi = \sigma \circ (\varphi \times \varphi')$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (p \times p')^{-1}(\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "p \times p'"'] & & (\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \times (\mathrm{F} \times \mathrm{G}) \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{U} \times \mathrm{U}' & \end{tikzcd}$$

est alors commutatif et ψ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme comme composée de $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Enfin, l'application $\psi_{(x,x')} : \mathrm{E}_x \times \mathrm{E}'_{x'} \to \{(x, x')\} \times (\mathrm{F} \times \mathrm{G})$ est bien $\mathbb{R}$-linéaire. En effet, il s'agit de la composée de l'application linéaire produit de φ_x et $\varphi'_{x'}$

$$\varphi_x \times \varphi'_{x'} : \mathrm{E}_x \times \mathrm{E}'_{x'} \to (\{x\} \times \mathrm{F}) \times (\{x'\} \times \mathrm{G}).$$

et de la restriction de σ

$$\begin{cases} (\{x\} \times \mathrm{F}) \times (\{x'\} \times \mathrm{G}) \longrightarrow \{(x, x')\} \times (\mathrm{F} \times \mathrm{G}) \\ \qquad ((x, v), (x', w)) \qquad \longmapsto ((x, x'), (v, w)) \end{cases}$$

qui est évidemment linéaire.

Proposition 4.11 — Restriction. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$ un sous-variété de M. L'ensemble $p^{-1}(\mathrm{N})$ est une sous-variété de E et $p\big|_{p^{-1}(\mathrm{N})} : p^{-1}(\mathrm{N}) \to \mathrm{N}$ est un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ que l'on note p_{N}.

Preuve. Montrons que $p^{-1}(\mathrm{N})$ est une sous-variété de E.

Première démonstration. L'application p est une submersion et l'image réciproque par une submersion d'une sous-prévariété est une sous-prévariété.

Deuxième démonstration (à la main). On considère $e \in p^{-1}(\mathrm{N})$, $n = p(e) \in \mathrm{N}$. Les remarques 3.42 et 4.7 montrent qu'en considérant l'intersection d'un domaine d'une bonne carte en n pour N et d'un ouvert trivialisant pour p, on obtient un ouvert U trivialisant pour p qui est le domaine d'une bonne carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, m, \psi)$ en n pour N. On note $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{U} \times \mathbb{R}^n$ une trivialisation de p au-dessus de U (voir la remarque 4.6).

Montrons que $(p^{-1}(\mathrm{U}), \mathrm{V} \times \mathbb{R}^n, m+n, (\psi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ \varphi)$ est une bonne carte en e pour $p^{-1}(\mathrm{N})$. Comme p est continue, $p^{-1}(\mathrm{U})$ est ouvert. De plus, $p(e) = n \in \mathrm{U}$, donc $e \in p^{-1}(\mathrm{U})$. Comme V est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, l'ensemble $\mathrm{V} \times \mathbb{R}^n$ est bien ouvert de $\mathbb{R}^{m+n}$. Enfin, φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $p^{-1}(\mathrm{U})$ sur $\mathrm{U} \times \mathbb{R}^n$ et $\psi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ est un homéomorphisme de $\mathrm{U} \times \mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{V} \times \mathbb{R}^n$, donc par composition, $\delta = \psi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \circ \varphi$ est bien un homéomorphisme. Par ailleurs, grâce au prolégomènes 4.1, l'ensemble

$$\delta(p^{-1}(\mathrm{U}) \cap p^{-1}(\mathrm{N})) = \delta(p^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{N})) = (\psi \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})((\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) \times \mathbb{R}^n) = \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) \times \mathbb{R}^n.$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^{m+n}_{m'}$ puisque $\psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{N})$ est un ouvert de $\mathbb{R}^m_{m'}$.

Montrons à présent que p_{N} est un fibré vectoriel. La proposition-définition 3.46 montre que p_{N} est $\mathscr{C}^k$. Soit $n \in \mathrm{N}$. L'ensemble ${p_{\mathrm{N}}}^{-1}(n) = p^{-1}(n)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. Soient U est un ouvert trivialisant pour p contenant n et φ une trivialisation de p au-dessus de U. L'ensemble $\mathrm{N} \cap \mathrm{U}$ est un ouvert de N contenant n. De plus, ${p_{\mathrm{N}}}^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) = p^{-1}(\mathrm{U}) \cap p^{-1}(\mathrm{N}) = p^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{N})$ est une sous-variété de $p^{-1}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{U} \cap \mathrm{N}$ est un sous-variété de U. Ainsi l'application 3.57 montre que φ induit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme φ_{N} de $p^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{N})$ sur $(\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) \times \mathbb{R}^n$. Par restriction, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_{\mathrm{N}} = p"'] & & (\mathrm{U} \cap \mathrm{N}) \times \mathbb{R}^n \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& \mathrm{U} \cap \mathrm{N} &
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Enfin, l'application $p_2 \circ \varphi_{\mathrm{N}}\big|_{{p_{\mathrm{N}}}^{-1}(n)} = p_2 \circ \varphi\big|_{p^{-1}(n)}$ est linéaire.

Remarque 4.12 — Restriction à un ouvert. La proposition 4.11 s'applique en particulier aux ouverts de M.

4.2 Morphisme

Prolégomènes 4.13 — Application induite. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{E}$ et E' quatre ensembles et $u : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $u' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ et $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ quatre applications. On suppose que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{E}' \arrow[d, "u'"] \\
\mathrm{M} \arrow[r, "g"] & \mathrm{M}'
\end{tikzcd}$$

Montrons que $f(u^{-1}(x)) \subset {u'}^{-1}(g(x))$. Pour $e \in u^{-1}(x)$, on a $u'(f(e)) = g(u(e)) = g(x)$ c'est-à-dire $f(e) \in {u'}^{-1}(g(x))$. On en déduit que f induit une application de $u^{-1}(x)$ dans ${u'}^{-1}(g(x))$ que l'on note pour simplifier f_x.

En effet, en choisissant $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$ et $g = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$, on retrouve la situation des prolégomènes 4.1. La notation f_x introduite ici est donc une généralisation de la notation des prolégomènes 4.1.

Définition 4.14 — Morphisme de fibrés vectoriels. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$. On dit qu'un couple (f, g) formé d'une application $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ et d'une application $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ est un morphisme de $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{E}' \arrow[d, "p'"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "g"] & \mathrm{M}' \end{tikzcd} \tag{2}$$

et, pour tout $x \in \mathrm{M}$, $f_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_{g(x)}$ est $\mathbb{K}$-linéaire.

On note $\mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$ l'ensemble des morphismes de $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de p dans p'. On note $\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{K}}(p, p')$ l'ensemble des morphismes de $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ de p dans p' dont la deuxième composante est g.

Remarque 4.15 — Catégorie des fibrés vectoriels. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ et $(\mathrm{E}'', \mathscr{B}'')$ six $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ et $p'' : \mathrm{E}'' \to \mathrm{M}''$ trois $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$. On considère $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$ et $(f', g') \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p', p'')$. Montrons que $(f', g') \circ (f, g) := (f' \circ f, g' \circ g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p'')$. D'après la proposition 3.27, $f' \circ f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{E}, \mathrm{E}'')$ et $g' \circ g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}'')$. De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{E}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & \mathrm{E}'' \arrow[d, "p''"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "g"] & \mathrm{M}' \arrow[r, "g'"] & \mathrm{M}'' \end{tikzcd}$$

commute. Enfin, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $(f' \circ f)_x$ entre E_x et $\mathrm{E}''_{g'(g(x))}$ est la composée de $f_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_{g(x)}$ et de $f'_{g(x)} : \mathrm{E}'_{g(x)} \to \mathrm{E}''_{g'(g(x))}$. Elle est donc $\mathbb{K}$-linéaire.

Le couple $\mathrm{id}_p = (\mathrm{id}_\mathrm{E}, \mathrm{id}_\mathrm{M}) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p)$. En effet, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "\mathrm{id}_\mathrm{E}"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "\mathrm{id}_\mathrm{M}"] & \mathrm{M} \end{tikzcd}$$

commute et, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $f_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}_x$ est l'identité et donc $\mathbb{K}$-linéaire.

On a bien sûr $(f'', g'') \circ ((f', g') \circ (f, g)) = (f'' \circ f' \circ f, g'' \circ g' \circ g) = ((f'', g'') \circ (f', g')) \circ (f, g)$, $\mathrm{id}_{p'} \circ (f, g) = (f, g)$ et $(f', g') \circ \mathrm{id}_p = (f', g')$. Ainsi, les $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ forment une catégorie.

Exemple 4.16 — Morphisme nul. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés de classe $\mathscr{C}^k$, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels et $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. On considère l'application $f^0_g : e \in \mathrm{E}_{p(e)} \mapsto 0 \in \mathrm{E}'_{g(p(e))}$. Montrons que $(f^0_g, g) \in \mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p, p')$. On a bien sûr $p' \circ f^0_g(e) = g \circ p(e)$ pour tout $e \in \mathrm{E}$. De plus, pour $x \in \mathrm{M}$, l'application $f^0_{g\,x} = 0$ est linéaire. Il reste à montrer que f^0_g est de classe $\mathscr{C}^k$. Soient U' un ouvert trivialisant pour p' et φ une trivialisation de p au-dessus de U'. On note $\mathrm{W} = p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')) = f^{0\,-1}_g(p'^{-1}(\mathrm{U}'))$. Comme $p_2 \circ \varphi$ est linéaire, on a $p_2 \circ \varphi \circ f^0_g(e) = 0$ pour tout $e \in \mathrm{W}$. Ainsi $p_2 \circ \varphi \circ (f^0_g{}_{|\mathrm{W}})$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (puisque constante). De plus, on a $p_1 \circ \varphi \circ (f^0_g{}_{|\mathrm{W}}) = p' \circ (f^0_g{}_{|\mathrm{W}}) = g \circ p_{|\mathrm{W}}$. L'exemple 3.29 assure alors que $\varphi \circ (f^0_g{}_{|\mathrm{W}})$ de classe $\mathscr{C}^k$. Comme φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1} que $f^0_g{}_{|\mathrm{W}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme, on peut recouvrir M' par des ouverts trivialisants pour p', la proposition 3.56 montre que f^0_g est $\mathscr{C}^k$.

Exemple 4.17 — Morphisme entre fibrés triviaux. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{N}, \mathscr{A}')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, F, G deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\mathrm{Triv}^\mathrm{F}_\mathrm{M} : \mathrm{M} \times \mathrm{F} \to \mathrm{M}$, $\mathrm{Triv}^\mathrm{G}_\mathrm{N} : \mathrm{N} \times \mathrm{G} \to \mathrm{N}$ les $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels triviaux.

Montrons que l'application

$$\mathrm{Triv}\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}) \longrightarrow \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{F},\mathrm{G})) \times \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathrm{N}) \\ (f,g) \longmapsto ([x \mapsto (v \mapsto (p_2 \circ f)(x,v))], g) \end{cases}$$

est une bijection dont la bijection réciproque est

$$\mathrm{Triv}'\colon \begin{cases} \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{F},\mathrm{G})) \times \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}}) \\ (\varphi,g) \longmapsto ((x,v) \mapsto (g(x), \varphi(x)(v)), g) \end{cases}$$

Comme $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}})$, l'application $(v \mapsto (p_2 \circ f)(x,v))$ est $\mathbb{R}$-linéaire (comme composée de l'application $v \mapsto (x,v)$ qui est linéaire par définition de la structure d'espace vectoriel sur $x \times \mathrm{F}$ et de l'application linéaire $p_2 \circ f_x : \{x\} \times \mathrm{F} \to \mathrm{G}$). De plus, comme pour tout $v \in \mathrm{F}$, l'application $x \mapsto (p_2 \circ f)(x,v)$ est de classe $\mathscr{C}^k$, l'application 3.23 montre que $x \mapsto (v \mapsto (p_2 \circ f)(x,v))$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi Triv est bien définie.

L'application $f : (x,v) \mapsto (g(x), \varphi(x)(v))$ appartient à $\mathscr{C}^k(\mathrm{M} \times \mathrm{F}, \mathrm{N} \times \mathrm{G})$ puisque chacune de ses composantes est de classe $\mathscr{C}^k$ (la première est $g \circ \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$, la deuxième est la composée de $\varphi \times \mathrm{id}_{\mathrm{F}}$ avec l'application bilinéaire (donc $\mathscr{C}^k$) $(\alpha, v) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{F},\mathrm{G}) \mapsto \alpha(v) \in \mathrm{G}$). De plus, on a bien sûr, $\mathrm{Triv}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}} \circ f = g \circ \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ et l'application $f_x : \{x\} \times \mathrm{F} \to \{g(x)\} \times \mathrm{G}$ n'est autre que l'application $(x,v) \mapsto (g(x), \varphi(x)(v))$ qui, du fait que $\varphi(x)$ est linéaire et au vu des structures d'espace vectoriel de $\{x\} \times \mathrm{F}$ et de $\{g(x)\} \times \mathrm{G}$, est linéaire. Enfin, comme $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathrm{N})$, on en conclut $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}})$ et Triv' est donc bien définie.

Enfin, on a $\mathrm{Triv} \circ \mathrm{Triv}'(\varphi, g) = ((x \mapsto (v \mapsto \varphi(x)(v))), g) = (\varphi, g)$. Et, $\mathrm{Triv}' \circ \mathrm{Triv}(f,g) = ((x,v) \mapsto (g(x), (p_2 \circ f)(x,v)), g)$ Comme pour tout $(x,v) \in \mathrm{M} \times \mathrm{F}$, on a $g(x) = (g \circ \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}})(x,v) = (\mathrm{Triv}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}} \circ f)(x,v)$, on obtient $\mathrm{Triv}' \circ \mathrm{Triv}(f,g) = ((x,v) \mapsto ((\mathrm{Triv}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{G}} \circ f)(x,v), (p_2 \circ f)(x,v)), g) = (f,g)$.

Exemple 4.18 — Fibré produit. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}', \mathscr{A}'), (\mathrm{E}, \mathscr{B}), (\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$. On note $p_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ (resp. $p_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$) la première projection et $p_{\mathrm{M}'} : \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \to \mathrm{M}'$ (resp. $p_{\mathrm{E}'} : \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \to \mathrm{E}'$) la deuxième projection. Alors $p_1 = (p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{M}})$ (resp. $p_2 = (p_{\mathrm{E}'}, p_{\mathrm{M}'})$) est un morphisme de fibrés vectoriels de $p \times p'$ dans p (resp. de $p \times p'$ dans p').

En effet, p_{E} et p_{M} sont de classe $\mathscr{C}^k$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \arrow[r, "p_{\mathrm{E}}"] \arrow[d, "p \times p'"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \arrow[r, "p_{\mathrm{M}}"] & \mathrm{M} \end{tikzcd}$$

est commutatif et l'application induite par p_{E} entre $(\mathrm{E} \times \mathrm{E}')_{(x,x')} = \mathrm{E}_x \times \mathrm{E}'_{x'}$ et E_x est la première projection qui est bien linéaire puisque la structure d'espace vectoriel sur $\mathrm{E}_x \times \mathrm{E}'_{x'}$ est la structure produit. Un raisonnement analogue montre que p_2 est bien un morphisme de fibrés vectoriels.

On considère à présent $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}''), (\mathrm{E}'', \mathscr{B}'')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p'' : \mathrm{E}'' \to \mathrm{M}''$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel réel et $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p'', p)$ et $(f', g') \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p'', p')$. Montrons qu'il existe un unique morphisme F de fibrés vectoriels de p'' dans $p \times p'$ tel que $p_1 \circ \mathrm{F} = (f,g)$ et $p_2 \circ \mathrm{F} = (f', g')$.

Si un tel $\mathrm{F} = (u,v)$ existe alors, par définition de la composition des morphismes de fibrés vectoriels, on a $(p_{\mathrm{E}} \circ u, p_{\mathrm{M}} \circ v) = (f,g)$ et $(p_{\mathrm{E}'} \circ u, p_{\mathrm{M}'} \circ v) = (f', g')$. La propriété universelle du produit (d'ensembles) appliquée à $\mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ (resp. $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$) montre alors $u : \mathrm{E}'' \to \mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ (resp. $v : \mathrm{M}'' \to \mathrm{M} \times \mathrm{M}'$) est uniquement déterminée. Il s'agit de l'application $e'' \mapsto (f(e''), f'(e''))$ (resp. $m'' \mapsto (g(m''), g'(m''))$). On obtient ainsi l'unicité de F vérifiant $p_1 \circ \mathrm{F} = (f,g)$ et $p_2 \circ \mathrm{F} = (f', g')$.

Par ailleurs, comme f et f' (resp g et g') sont de classe $\mathscr{C}^k$, l'exemple 3.29 montre qu'il existe une (unique) application $u : \mathrm{E}'' \to \mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ (resp. $v : \mathrm{M}'' \to \mathrm{M} \times \mathrm{M}'$) de classe $\mathscr{C}^k$ vérifiant $p_{\mathrm{E}} \circ u = f$ et $p_{\mathrm{E}'} \circ u = f'$ (resp. $p_{\mathrm{M}} \circ v = g$ et $p_{\mathrm{M}'} \circ v = g'$). Montrons que $(u,v) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p'', p \times p')$.

Comme

$$p_{\mathrm{M}} \circ v \circ p'' = g \circ p'' = p \circ f = p \circ p_{\mathrm{E}} \circ u = p_{\mathrm{M}} \circ (p \times p') \circ u$$

et

$$p_{\mathrm{M}'} \circ v \circ p'' = g' \circ p'' = p \circ f' = p \circ p_{\mathrm{E}'} \circ u = p_{\mathrm{M}'} \circ (p \times p') \circ u,$$

on obtient, grâce à la propriété universelle du produit (d'ensembles), que $v \circ p'' = (p \times p') \circ u$, autrement dit, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}'' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p''"'] & \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \arrow[d, "p \times p'"] \\ \mathrm{M}'' \arrow[r, "v"] & \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \end{tikzcd}$$

commute.

Par ailleurs, pour $x'' \in \mathrm{M}''$, on a $v(x'') = (g(x''), g'(x''))$ et l'application $u_{x''} : \mathrm{E}''_{x''} \to (\mathrm{E} \times \mathrm{E}')_{v(x'')} = \mathrm{E}_{g(x'')} \times \mathrm{E}_{g'(x'')}$ qui est donnée par $u_{x''}(e'') = (f(e''), f'(e'')) = (f_{x''}(e''), f'_{x''}(e''))$ est linéaire (puisque $f_{x''}$ et $f'_{x''}$ le sont).

Ainsi $p \times p'$ est le produit de p et p' dans la catégorie des fibrés vectoriels.

Proposition 4.19 – Critère technique. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}', \mathscr{A}'), (\mathrm{E}, \mathscr{B}), (\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$. On considère $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ et $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ deux applications vérifiant $p' \circ f = g \circ p$, f_x est $\mathbb{K}$-linéaire pour tout $x \in \mathrm{M}$ et $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est $\mathscr{C}^k$;

(ii) $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$;

(iii) il existe une famille $\mathscr{F} = (\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $\mathscr{F}' = (\mathfrak{U}_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{F}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') vérifiant $\mathrm{M} = \cup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha$ (resp. $\mathrm{M}' = \cup_{\beta \in \mathrm{B}} \mathrm{U}_\beta$) et

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1} \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^k$.

(iv) Pour toute famille $\mathscr{F} = (\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $\mathscr{F}' = (\mathfrak{U}_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{F}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') vérifiant $\mathrm{M} = \cup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha$ (resp. $\mathrm{M}' = \cup_{\beta \in \mathrm{B}} \mathrm{U}_\beta$), l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1} \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^k$.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. résulte de la définition.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Les applications $p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}$, f_x et $(p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}$ sont $\mathbb{K}$-linéaires. Ainsi $(p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta)$

Comme $p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \subset p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) = f^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}_\beta))$, on en déduit que $f(p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta))) \subset p'^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$. Ainsi, la proposition 3.56 montre que f induit une application de classe $\mathscr{C}^k$ entre les ouverts $p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta))$ et $p'^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$.

Grâce aux prolégomènes 4.1 et à l'application 3.58, φ_α induit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme entre $p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \times \mathrm{F}_\alpha$ et $\mathrm{U}_\alpha \times p'^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$ et φ_β un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme entre $p'^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$ et $\mathrm{U}_\beta \times \mathrm{F}_\beta$. Par composition, on obtient que l'application

$$\psi = \varphi_\beta \circ f \circ {\varphi_\alpha}^{-1} : (\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \times \mathrm{F}_\alpha \longrightarrow \mathrm{U}_\beta \times \mathrm{F}_\beta.$$

est de classe $\mathscr{C}^k$.

Or, pour $(x, v) \in (\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \times \mathrm{F}_\alpha$, on a

$$\psi((x, v)) = (g(x), (p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}(v)).$$

En effet, on a ${\varphi_\alpha}^{-1}((x, v)) \in \mathrm{E}_x$ (puisque $p({\varphi_\alpha}^{-1}(x, v)) = p_1 \circ \varphi_\alpha({\varphi_\alpha}^{-1}) = x$). On en déduit que $f({\varphi_\alpha}^{-1}((x, v)) = f_x({\varphi_\alpha}^{-1}((x, v)) \in \mathrm{E}'_{g(x)}$ et $(p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})({\varphi_\alpha}^{-1}((x, v))) = v$. Comme $(p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})$ réalise une bijection de E_x sur F_α, on en déduit que ${\varphi_\alpha}^{-1}((x, v)) = (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}(v)$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \psi(x, v) = \varphi_\beta \circ f({\varphi_\alpha}^{-1}((x, v))) &= (p_1 \circ \varphi_\beta \circ f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}((x, v)), p_2 \circ \varphi_\beta \circ f_x \circ {\varphi_\alpha}^{-1}((x, v))) \\ &= (p' \circ f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}((x, v)), (p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}(v)) \\ &= (g(x), (p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}(v)). \end{aligned}$$

L'application $p_2 \circ \psi : (x,v) \mapsto (p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}(v)$ est donc de classe $\mathscr{C}^k$. Avec l'application 3.23, on obtient le résultat souhaité.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. Comme p et p' sont des $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$, il existe une famille $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}'$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') dont les domaines forment un recouvrement ouvert de M (resp. M').
$(iii) \Rightarrow (i)$. L'application 3.23 montre que $(x,v) \mapsto (p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}(v)$ est de $\mathscr{C}^k$. On en déduit que $(x,v) \mapsto (g(x), (p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}(v))$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (ses deux composantes le sont puisque la première est $g \circ p_1$). ψ est $\mathscr{C}^k$. Comme φ_β et φ_α sont des difféomorphismes, on en déduit que $f : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \to g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$ est $\mathscr{C}^k$. La proposition 3.56 montre que f l'est.

Exemple 4.20 – Restriction. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{A})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel et $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$ un sous-prévariété de M. On note $i : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ (resp. $j : p^{-1}(\mathrm{N}) \to \mathrm{E}$) l'inclusion et p_N le fibré obtenu par restriction à N (voir la proposition 4.11). Montrons que $(j,i) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p_\mathrm{N}, p)$.

La proposition-définition 3.46 montre que i et j sont continues (N et $p^{-1}(\mathrm{N})$ sont des sous-$\mathscr{C}^k$-prévariétés respectivement de M et E). De plus, on a bien sûr $p \circ j = i \circ p_\mathrm{N}$ et, pour $x \in \mathrm{N}$, l'application $j_x : p_\mathrm{N}^{-1}(x) \to \mathrm{E}_x = p^{-1}(x)$ n'est autre que l'identité qui est linéaire.

Montrons à présent que pour toute prévariété $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ et tout fibré vectoriel $p' : \mathrm{E}'' \to \mathrm{M}$ l'application

$$\Gamma : \begin{cases} \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(p', p_\mathrm{N}) & \longrightarrow \mathrm{Hom}^{i}_{k,\mathbb{R}}(p', p) \\ \qquad f & \longmapsto (j \circ f, i) \end{cases}$$

est une bijection.

Par hypothèse, on a $(f, \mathrm{id}_\mathrm{N}) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p', p_\mathrm{N})$. Par composition, on en déduit que $(j \circ f, i) \in \mathrm{Hom}^{i}_{k,\mathbb{R}}(p', p)$. Ainsi Γ est bien à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(i, p')p$. De plus, si $f' \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(p', p_\mathrm{N})$ vérifie $(j \circ f, i) = (j \circ f', i)$, on a $f = f'$ puisque j est injective. Ainsi Γ est injective. Enfin, si $(f', i) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(i, p')p$ alors $p \circ f' = i \circ p'$. On en déduit que f' est à valeurs dans $p^{-1}(\mathrm{N})$. Autrement dit, il existe $f'' : \mathrm{E}'' \to p^{-1}(\mathrm{N})$ telle que $j \circ f'' = f'$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition-définition 3.46) On a alors $i \circ p_\mathrm{N} \circ f'' = p \circ j \circ f'' = p \circ f'$ Comme $(f', i) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(i, p')p$, on en déduit que $i \circ p_\mathrm{N} \circ f'' = i \circ p$ et par injectivité de i, on obtient $p_\mathrm{N} \circ f'' = p$. De plus, pour $x \in \mathrm{N}$, l'application $f''_x : \mathrm{E}''_x \to {p_\mathrm{N}}^{-1}(x) = \mathrm{E}_x$ n'est autre que l'application f'_x qui est linéaire.

Proposition 4.21 – Structure de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels. Pour tout $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$, l'ensemble $\mathrm{Hom}^{g}_{k,\mathbb{R}}(p, p')$ peut être muni d'une structure de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module.

Preuve. Soient $(f,g), (f',g) \in \mathrm{Hom}^{g}_{k,\mathbb{R}}(p, p')$, $x \in \mathrm{M}$ et $e \in \mathrm{E}_x$. On a alors $f(e)$ et $f'(e)$ appartiennent à $\mathrm{E}'_{g(x)}$. La structure d'espace vectoriel de $\mathrm{E}'_{g(x)}$ donne alors un sens à $f(e) + f'(e)$. On définit alors l'application $(f+f') : e \in \mathrm{E} \mapsto f(e) + f'(e) \in \mathrm{E}'$. Montrons que $(f+f', g) \in \mathrm{Hom}^{g}_{k,\mathbb{R}}(p, p')$. Comme, pour $e \in \mathrm{E}_x$, on a $(f+f')(e) \in \mathrm{E}'_{g(x)}$. On en déduit que $(p' \circ (f+f'))(e) = g(x) = g(p(e))$. De plus, pour $x \in \mathrm{M}$, on a bien sûr, par définition, $(f+f')_x = f_x + {f'}_x$. D'où $(f+f')_x$ est linéaire. Il reste à montrer que $f + f'$ est de classe $\mathscr{C}^k$. On considère U' un ouvert trivialisant pour p' et φ' une trivialisation de p' de fibre F au-dessus de U'. On note $p_1 : \mathrm{U}' \times \mathrm{F} \to \mathrm{U}$ (resp. $p_2 : \mathrm{U}' \times \mathrm{F} \to \mathrm{F}$) la première (resp. deuxième) projection, $\mathrm{U} = g^{-1}(\mathrm{U}')$ et

$$\mathrm{W} = p^{-1}(\mathrm{U}) = (g \circ p)^{-1}(\mathrm{U}') = f^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}')) = f'^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}'))$$

Comme $p_2 \circ \varphi$ est linéaire, on en déduit que pour $e \in \mathrm{W}$, on a

$$(p_2 \circ \varphi)((f+f')_{|\mathrm{W}}(e)) = (p_2 \circ \varphi)(f(e) + f'(e)) = (p_2 \circ \varphi \circ f)(e) + (p_2 \circ \varphi \circ f')(e).$$

Ainsi,
$$p_2 \circ \varphi \circ ((f+f')_{|\mathrm{W}}) = (p_2 \circ \varphi \circ (f_{|\mathrm{W}})) + (p_2 \circ \varphi \circ (f'_{|\mathrm{W}})).$$

Comme p_2, φ, f et f' sont de classe $\mathscr{C}^k$, on en déduit que $p_2 \circ \varphi \circ ((f+f')_{|\mathrm{W}})$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir l'application 3.32 et les propositions 3.46 et 3.56). De plus, on a $p_1 \circ \varphi \circ ((f+f')_{|\mathrm{W}}) = p' \circ ((f+f')_{|\mathrm{W}}) = g \circ (p_{|\mathrm{W}})$. L'exemple 3.29 assure alors que $\varphi \circ ((f+f')_{|\mathrm{W}})$ de classe $\mathscr{C}^k$. Comme φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1} que $(f+f')_{|\mathrm{W}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme, on peut recouvrir M' par des ouverts trivialisants pour p', la proposition 3.56 montre

que $f+f'$ est $\mathscr{C}^k$. Ainsi, en posant $(f,g)+(f',g)=(f+f',g)$, on définit une loi de composition interne sur $\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$.

Soient $(f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$, $\lambda\in\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$, $x\in\mathrm{M}$ et $e\in\mathrm{E}_x$. On a alors $f(e)$ appartient à $\mathrm{E}'_{g(x)}$. La structure d'espace vectoriel de $\mathrm{E}'_{g(x)}$ donne un sens à $\lambda(x)f(e)$. On définit alors l'application $(\lambda\cdot f):e\in\mathrm{E}\mapsto\lambda(p(e))f(e)\in\mathrm{E}'$. Montrons que $(\lambda\cdot f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$. Comme, pour $e\in\mathrm{E}_x$, on a $(\lambda\cdot f)(e)\in\mathrm{E}'_{g(x)}$. On en déduit que $(p'\circ(\lambda\cdot f))(e)=g(x)=g(p(e))$. De plus, pour $x\in\mathrm{M}$, on a, par définition, $(\lambda\cdot f)_x=\lambda(x)f_x$. D'où $(\lambda\cdot f)_x$ est linéaire. Il reste à montrer que $\lambda\cdot f$ est de classe $\mathscr{C}^k$. On considère U' un ouvert trivialisant pour p' et φ' une trivialisation de p' de fibre F au-dessus de U'. On note $p_1:\mathrm{U}'\times\mathrm{F}\to\mathrm{U}$ (resp. $p_2:\mathrm{U}'\times\mathrm{F}\to\mathrm{F}$) la première (resp. deuxième) projection, $\mathrm{U}=g^{-1}(\mathrm{U}')$ et

$$\mathrm{W}=p^{-1}(\mathrm{U})=(g\circ p)^{-1}(\mathrm{U}')=f^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}'))$$

Comme $p_2\circ\varphi$ est linéaire, on en déduit que pour $e\in\mathrm{W}$, on a

$$(p_2\circ\varphi)((\lambda\cdot f)_{|\mathrm{W}}(e))=(p_2\circ\varphi)(\lambda(p(e))f(e))=\lambda(p(e))(p_2\circ\varphi\circ f)(e).$$

Ainsi,
$$p_2\circ\varphi\circ((\lambda\cdot f)_{|\mathrm{W}})=(\lambda\circ p)_{|\mathrm{W}}\cdot(p_2\circ\varphi\circ(f_{|\mathrm{W}})).$$

Comme p_2, φ, λ et p sont de classe $\mathscr{C}^k$, on en déduit que $p_2\circ\varphi\circ((\lambda\cdot f)_{|\mathrm{W}})$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir l'application 3.32 et les propositions 3.46 et 3.56). De plus, on a $p_1\circ\varphi\circ((\lambda\cdot f)_{|\mathrm{W}})=p'\circ((\lambda\cdot f)_{|\mathrm{W}})=g\circ(p_{|\mathrm{W}})$. L'exemple 3.29 assure alors que $\varphi\circ((\lambda\cdot f)_{|\mathrm{W}})$ de classe $\mathscr{C}^k$. Comme φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1} que $(\lambda\cdot f)_{|\mathrm{W}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme, on peut recouvrir M' par des ouverts trivialisants pour p', la proposition 3.56 montre que $\lambda\cdot f$ est $\mathscr{C}^k$. Ainsi, en posant $\lambda\cdot(f,g)=(\lambda\cdot f,g)$, on définit une action de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$.

La loi + est bien sûr associative puisque pour $(f,g),(f',g),(f'',g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $e\in\mathrm{E}$, on a

$$(f+(f'+f''))(e)=f(e)+(f'(e)+f''(e))=(f(e)+f'(e))+f''(e)=((f+f')+f'')(e)\,.$$

La loi + est bien sûr commutative puisque pour $(f,g),(f',g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $e\in\mathrm{E}$, on a

$$(f+f')(e)=f(e)+f'(e)=f'(e)+f(e)=(f'+f)(e)\,.$$

Le morphisme nul (f^0_g,g) est élément neutre pour + puisque pour $(f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $e\in\mathrm{E}$, on a

$$(f+f^0_g)(e)=f(e)+0=f(e)=0+f(e)=(f^0_g+f)(e)\,.$$

On considère $\lambda:\mathrm{M}\to\mathbb{R}$ l'application constante égale à -1 qui est de classe $\mathscr{C}^k$ (exemple 3.19). Pour $(f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $e\in\mathrm{E}$, on a $(\lambda\cdot f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et

$$(f+\lambda\cdot f)(e)=f(e)+(-f(e))=0=f^0_g(e)\,.$$

Ainsi $(\lambda f,g)$ est l'opposé de f pour la loi + et $(\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p'),+)$ est un groupe abélien.

Pour $\lambda\in\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$, $(f,g),(f',g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $e\in\mathrm{E}$, on a

$$(\lambda\cdot(f+f'))(e)=\lambda(p(e))(f(e)+f'(e))=\lambda(p(e))f(e)+\lambda(p(e))f'(e)=(\lambda\cdot f+\lambda\cdot f')(e)\,.$$

Pour $\lambda,\mu\in\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$, $(f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $e\in\mathrm{E}$, on a

$$((\lambda+\mu)\cdot f)(e)=(\lambda(p(e))+\mu(p(e)))f(e)=\lambda(p(e))f(e)+\mu(p(e))f(e)=(\lambda\cdot f+\mu\cdot f)(e)\,.$$

Pour $\lambda,\mu\in\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$, $(f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $e\in\mathrm{E}$, on a

$$((\lambda\mu)\cdot f)(e)=(\lambda(p(e))\mu(p(e)))f(e)=\lambda(p(e))(\mu(p(e))f(e))=(\lambda\cdot(\mu\cdot f))(e)\,.$$

On considère $\lambda:\mathrm{M}\to\mathbb{R}$ l'application constante égale à 1 qui est de classe $\mathscr{C}^k$ (exemple 3.19). Pour $(f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $e\in\mathrm{E}$, on a $(\lambda\cdot f,g)\in\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et

$$(\lambda\cdot f)(x)=f(x)\,.$$

Ainsi $\mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ est bien un $\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$-module.

Isomorphisme de fibrés

Définition 4.22 — Isomorphisme de fibrés vectoriels. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ au-dessus de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et p' un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ au-dessus de $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$. On dit que $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p, p')$ est un isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ s'il existe $(f', g') \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p', p)$ tels que $(f', g') \circ (f, g) = \mathrm{id}_p$ et $(f, g) \circ (f', g') = \mathrm{id}_{p'}$.

On dit que *p et p' sont $\mathscr{C}^k$-isomorphes* s'il existe un isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels de p dans p'.

Remarque 4.23 — Langage catégorique. Un isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel n'est rien d'autre qu'un isomorphisme dans la catégorie des $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels.

Remarque 4.24 — Difféomorphisme. On reprend les notation de la définition 3.33. On a immédiatement la caractérisation suivante. Soit $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p, p')$. Alors (f, g) est un isomorphisme si et seulement si f et g sont des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes.

On suppose que (f, g) est un isomorphisme. Par définition de la composition des morphismes de fibrés, on a $f \circ f' = \mathrm{id}_{\mathrm{E}'}$, $f' \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, $g \circ g' = \mathrm{id}_{\mathrm{M}'}$ et $g' \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ avec f' et g' de classe $\mathscr{C}^k$ puisque $(f', g') \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p', p)$. Comme f et g sont $\mathscr{C}^k$, on obtient f et g sont des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes.

On suppose f et g sont des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes. Comme $p \circ g = f \circ p'$, on obtient que $f^{-1} \circ p = p' \circ g^{-1}$ avec f^{-1} et g^{-1} de classe $\mathscr{C}^k$. De plus, pour $y \in \mathrm{M}'$, l'application ${f^{-1}}_y : \mathrm{E}'_y \to \mathrm{E}_{g^{-1}(y)}$ est l'inverse de $f_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_{g(x)}$ avec $x = g^{-1}(y)$ et est donc linéaire. Ainsi $(f^{-1}, g^{-1}) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p', p)$ et $(f, g) \circ (f^{-1}, g^{-1}) = \mathrm{id}_{p'}$ et $(f^{-1}, g^{-1}) \circ (f, g) = \mathrm{id}_p$

On dit que le morphisme (f^{-1}, g^{-1}) est l'inverse de (f, g). La définition montre que l'inverse d'un isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriels est un isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriels. La caractérisation ci-dessus et les remarques 3.35 et 4.15 montre que la composée de deux isomorphismes de $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels est un isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels. Enfin, grâce à l'exemple 3.25, id_p est isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel d'inverse id_p. Finalement, on obtient que la relation « être $\mathscr{C}^k$-isomorphe » est une relation d'équivalence sur tout ensemble de $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels.

Morphisme au-dessus d'une base

Exemple 4.25 — Ouvert trivialisant. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel, U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U de fibre F. Alors φ est un isomorphisme de fibré au dessus de U entre p_{U} et $p_1 : \mathrm{U} \times \mathrm{F} \to \mathrm{U}$.

En effet, φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. On a bien sûr, $p_1 \circ \varphi = p$ et pour $x \in \mathrm{U}$, φ_x est linéaire (remarque 4.4).

Remarque 4.26 — Morphisme de fibrés. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ telle que $p' \circ f = f'$ et f_x est linéaire pour tout $x \in \mathrm{M}$. Pour simplifier, on note $p_\alpha = p_{\mathrm{U}_\alpha}$ et $p'_\alpha = {p'}_{\mathrm{U}_\alpha}$.

Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes

(i) $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$;

(ii) f est $\mathscr{C}^k$;

(iii) $f_{\mathrm{U}_\alpha} \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p_\alpha, p'_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$;

(iv) f_{U_α} est $\mathscr{C}^k$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

La définition de $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$ montre que $(i) \iff (ii)$.

Par ailleurs, comme $p' \circ f = p$, les prolégomènes 4.1 donnent un sens à f_{U_α}. De plus, on a bien sûr $p'_\alpha \circ f_{\mathrm{U}_\alpha} = p_\alpha$, pour $x \in \mathrm{U}_\alpha$ et $f_{\mathrm{U}_\alpha x} = f_x$ est linéaire. Ainsi $(iii) \iff (iv)$.

Enfin, comme $f^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)) = p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ (puisque $p' \circ f = p$) et que les $(p'^{-1}(\mathrm{U}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ forment un recouvrement ouvert de E′, la proposition 3.56 (vi) montre que l'équivalence de (ii) et (iv).

Proposition 4.27 — Critère technique. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{E}, \mathscr{B}), (\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$. On considère $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ une application

vérifiant $p' \circ f = p$, f_x est $\mathbb{K}$-linéaire pour tout $x \in \mathrm{M}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est $\mathscr{C}^k$;

(ii) $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$;

(iii) il existe une famille $(\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}'_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha, \varphi'_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') vérifiant $\mathrm{M} = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathrm{U}_\alpha$ et

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \varphi'_{\alpha x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^k$.

(iv) Pour toute une famille $(\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}'_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha, \varphi'_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') vérifiant $\mathrm{M} = \cup_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathrm{U}_\alpha$, l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \varphi'_{\alpha x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^k$.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. résulte de la définition.

Remarque. Soit $(\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$ (resp. $(\mathrm{U}, \mathrm{F}', \varphi')$)une carte trivialisante pour p (resp. p'). Pour $x \in \mathrm{U}$, les applications $p_2 \circ \varphi'_x$, f_x et $(p_2 \circ \varphi_x)^{-1}$ sont $\mathbb{K}$-linéaires. Ainsi $(p_2 \circ \varphi'_x) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}, \mathrm{F}')$ En reprenant les notations des prolégomènes 4.1, l'application f fournit une application $f_{\mathrm{U}} \in p^{-1}(\mathrm{U}) \to p'^{-1}(\mathrm{U})$. On a alors, pour $(x, v) \in \mathrm{U} \times \mathrm{F}$

$$\psi = \varphi' \circ f_{\mathrm{U}} \circ \varphi^{-1}(x, v) = (x, (p_2 \circ \varphi'_x) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1}(v))$$

En effet, on a $\varphi^{-1}((x, v)) \in \mathrm{E}_x$ (puisque $p(\varphi^{-1}(x, v)) = p_1 \circ \varphi(\varphi^{-1}(x, v)) = x$). On en déduit que $f(\varphi^{-1}((x, v)) = f_x(\varphi^{-1}((x, v)) \in \mathrm{E}'_x$ et $(p_2 \circ \varphi_x)(\varphi^{-1}((x, v))) = v$. Comme $(p_2 \circ \varphi_x)$ réalise une bijection de E_x sur F, on en déduit que $\varphi^{-1}((x, v)) = (p_2 \circ \varphi_x)^{-1}(v)$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \psi(x, v) = \varphi' \circ f(\varphi^{-1}((x, v))) &= (p_1 \circ \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}((x, v)), p_2 \circ \varphi' \circ f_x \circ \varphi^{-1}((x, v))\,) \\ &= (p' \circ f \circ \varphi^{-1}((x, v)), (p_2 \circ \varphi'_x) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1}(v)) \\ &= (x, (p_2 \circ \varphi'_x) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1}(v))\,. \end{aligned}$$

Comme $p_1 \circ \psi = \mathrm{id} \circ p_1$ est $\mathscr{C}^k$, on en déduit que l'application ψ est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si $(x, v) \mapsto (p_2 \circ \varphi'_x) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1}$ est $\mathscr{C}^k$. Avec l'application 3.23, on obtient que ψ est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si $x \mapsto (p_2 \circ \varphi'_x) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}, \mathrm{F}')$ est $\mathscr{C}^k$.

Comme φ et φ' sont des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes, on en déduit que ψ est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si f_{U} l'est. Ainsi f_{U} est $\mathscr{C}^k$ si et seulement si $x \mapsto (p_2 \circ \varphi'_x) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}, \mathrm{F}')$ l'est.

$(i) \Rightarrow (iv)$. Comme f est $\mathscr{C}^k$, la remarque montre que f_{U_α} l'est pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. On obtient ainsi le résultat souhaité grâce à la remarque qui précède.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. La remarque 4.8 montre que de telles familles existent.

$(iii) \Rightarrow (i)$. La remarque ci-dessus montre que f_{U_α} est $\mathscr{C}^k$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. La remarque montre alors que f est $\mathscr{C}^k$.

Proposition 4.28 – Caractère local des morphismes de fibrés. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M. Pour simplifier, on note $p_\alpha = p_{\mathrm{U}_\alpha}$ et $p'_\alpha = p'_{\mathrm{U}_\alpha}$.

L'application

$$\mathrm{R}_{\mathfrak{U}} : \begin{cases} \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p, p') \longrightarrow \prod_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p_\alpha, p'_\alpha) \\ f \longmapsto (f_{\mathrm{U}_\alpha})_{\alpha\in\mathrm{A}} \end{cases}$$

est un morphisme injectif de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{K})$-modules dont l'image est

$$\mathrm{F}_{\mathfrak{U}} = \left\{ (f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \prod_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p_\alpha, p'_\alpha), \qquad \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2, \quad (f_\alpha)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = (f_\beta)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} \right\}.$$

Preuve. D'après la remarque 4.2, $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est bien défini. Montrons que $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est un morphisme de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$-module. Soit $f, f' \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p,p')$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, $e \in p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ on a

$$(f+f')_{\mathrm{U}_\alpha}(e) = f(e) + f'(e) = f_{\mathrm{U}_\alpha}(e) + {f'}_{\mathrm{U}_\alpha}(e)\,.$$

Ainsi $(f+f')_{\mathrm{U}_\alpha} = f_{\mathrm{U}_\alpha} + {f'}_{\mathrm{U}_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Soit $\lambda \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \mathrm{A}$ et $e \in p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$. On note $x = p(e)$. On a alors

$$(\lambda \cdot f)_{\mathrm{U}_\alpha}(e) = \lambda(x) f(e) = (\lambda_{|\mathrm{U}_\alpha} \cdot f_{\mathrm{U}_\alpha})(e) = (\lambda \cdot f_{\mathrm{U}_\alpha})(e)$$

Ainsi $(\lambda \cdot f)_{\mathrm{U}_\alpha} = \lambda \cdot f_{\mathrm{U}_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Finalement $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est $\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$-linéaire.

Montrons que $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est bien à valeurs dans $\mathrm{F}_{\mathfrak{U}}$. Comme, pour $\alpha \in \mathrm{A}$, on a

$$f_{\mathrm{U}_\alpha} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}_\alpha} f_x\,.$$

Ainsi pour $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2$, on a

$$(f_{\mathrm{U}_\alpha})_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = (f_{\mathrm{U}_\beta})_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = f_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}} f_x$$

et donc $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est bien à valeurs dans $\mathrm{F}_{\mathfrak{U}}$.

Soit $f, f' \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p,p')$ tel que $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}(f) = \mathrm{R}_{\mathfrak{U}}(f')$. Pour $e \in \mathrm{E}$, on pose $x = p(e)$. Il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\alpha$. On a alors

$$f(e) = f_{\mathrm{U}_\alpha}(e) = {f'}_{\mathrm{U}_\alpha}(e) = f'(e)$$

Ainsi $f = f'$ et $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est injective.

Soient $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathrm{F}_{\mathfrak{U}}$ et $x \in \mathrm{M}$. Il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\alpha$. On pose alors $f_x = f_{\alpha x} : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_x$. L'application f_x ne dépend pas du choix de $\beta \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\beta$ puisque $(f_\alpha)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = (f_\beta)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$ et donc

$$(f_\alpha)_x = ((f_\alpha)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}})_x = ((f_\beta)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}})_x = (f_\beta)_x\,.$$

On pose alors
$$f = \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} f_x : \mathrm{E} = \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}' = \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{E}'_x\,.$$

On a bien sûr $p' \circ f = p$, l'application induite par f de $\mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_x$ est f_x qui est $\mathbb{K}$-linéaire. Enfin, $f_{\mathrm{U}_\alpha} = f_\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^k$ donc f est $\mathscr{C}^k$. On en conclut que $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p,p')$ et $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}(f) = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$.

Fibré image réciproque

Proposition-Définition 4.29 – Fibré image réciproque. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$, $(\mathrm{N},\mathscr{B})$, $(\mathrm{E},\mathscr{C})$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{N}$ un fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathrm{N})$. L'ensemble

$$\mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E}' = \{(x,e) \in \mathrm{M}\times\mathrm{E}, \quad g(x) = p(e)\}$$

est une sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de $\mathrm{M}\times\mathrm{E}$. On note $p_1 : \mathrm{M}\times\mathrm{E} \to \mathrm{M}$ (resp. $p_2 : \mathrm{M}\times\mathrm{E} \to \mathrm{E}$) la première (resp. deuxième) projection et $g^*(p)$ (resp. f_p) la restriction de p_1 (resp. p_2) à $\mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E}$. L'application $g^*(p)$ est un fibré vectoriel et $(f_p, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(g^*(p),p)$.

Fonctorialité. Soient $(\mathrm{M}',\mathscr{A}')$, $(\mathrm{N}',\mathscr{B}')$, $(\mathrm{E}',\mathscr{C}')$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{N}'$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $g' \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}',\mathrm{N}')$. On considère $(h,u) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p,p')$ et $v \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathrm{M}')$ tels que $u \circ g = g' \circ v$. On définit

$$\mathrm{R}_{v,u,h} : \begin{cases} \mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{M}'\,{}_{g'}\!\times_{p'} \mathrm{E}' \\ (x,e) \longmapsto (v(x), h(e))\,. \end{cases}$$

Alors $(\mathrm{R}_{v,u,h}, v) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(g^*(p), {g'}^*(p'))$.

Soient $(\mathrm{M}'',\mathscr{A}'')$, $(\mathrm{N}'',\mathscr{B}'')$, $(\mathrm{E}'',\mathscr{C}'')$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p'' : \mathrm{E}'' \to \mathrm{N}''$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $g'' \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}'',\mathrm{N}'')$. On considère $(h',u') \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p',p'')$ et $v' \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}',\mathrm{M}'')$ tels que $u' \circ g' = g'' \circ v'$. On a $(\mathrm{R}_{v',u',h'}, v') \circ (\mathrm{R}_{v,u,h}, v) = (\mathrm{R}_{v'\circ v, u'\circ u, h'\circ h}, v' \circ v)$ et $(\mathrm{R}_{\mathrm{id}_\mathrm{M},\mathrm{id}_\mathrm{N},\mathrm{id}_\mathrm{E}}, \mathrm{id}_\mathrm{N}) = \mathrm{id}_{g^*(p)}$.

Propriété universelle. On a la propriété universelle suivante : pour toutes $\mathscr{C}^k$-prévariétés $(\mathrm{P},\mathscr{A})$ et $(\mathrm{F},\mathscr{C})$ et tout $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel $q : \mathrm{F} \to \mathrm{P}$ sur $\mathbb{K}$, l'application

$$\Gamma\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}^{w}_{k,\mathbb{K}}(q, g^*(p)) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{g\circ w}_{k,\mathbb{K}}(q,p) \\ \qquad (f,v) \qquad\qquad \longmapsto (f_p \circ f, g\circ w) \end{cases}$$

est une bijection.

Remarque 4.30 – Reformulation. La propriété universelle de la proposition-définition 4.29 peut se résumer ainsi se donner un élément de $\mathrm{Hom}^{g}_{k,\mathbb{R}}(q,p')$ revient à se donner un élément $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(q, g^*(p'))$.

Preuve. Soit $(x,e') \in \mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}'$. On considère une carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi)$ en x de M et une carte $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \psi')$ en $y = p'(e')$ telle que U′ soit un ouvert trivialisant pour p' au-dessus de U′ (voir la remarque 4.7). On note φ une trivialisation de p' au-dessus de U′ de fibre $\mathbb{R}^m$. Montrons que

$$\mathcal{V} = (\mathrm{U} \times p^{-1}(\mathrm{U}'), \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \times \mathbb{R}^m, n+n'+m, (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \times \psi' \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ (\psi \times \varphi))$$

est une presque bonne carte en (x,e') pour $\mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}'$. Comme p est continue, $\mathrm{U} \times p^{-1}(\mathrm{U}')$ est bien sûr un ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{E}'$ (pour la topologie produit). Par ailleurs, $\mathrm{V} \times \mathrm{V}' \times \mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+n'+m}$. Enfin, l'application $\psi \times \varphi$ est un homéomorphisme de $\mathrm{U} \times p^{-1}(\mathrm{U})$ sur $\mathrm{V} \times \mathrm{U}' \times \mathbb{R}^n$ et l'application $\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \times \psi' \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ est un homéomorphisme $\mathrm{V} \times \mathrm{U}' \times \mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{V} \times \mathrm{V}' \times \mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^{n+n'+m}$. Par composition, on en conclut que $\mathcal{V}$ est une carte en (x,e') de la prévariété produit $\mathrm{M} \times \mathrm{E}'$. On pose $\Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{V}} \times \psi' \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ (\psi \times \varphi)$ De plus, on a $\Psi((\mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}') \cap \mathrm{U} \times p^{-1}(\mathrm{U}')) = \Gamma_{\psi' \circ g \circ \psi^{-1}} \times \mathbb{R}^m$ où $\Gamma_{\psi' \circ g \circ \psi^{-1}}$ est le graphe de l'application $\psi' \circ g \circ \psi^{-1}$. En effet,

$$\Psi(x,e') = (\psi(x), \psi' \circ p_1 \circ \varphi(e'), p_2 \circ \varphi(e')) = (\psi(x), \psi' \circ p(e'), p_2 \circ \varphi(e')) = (\psi(x), \psi' \circ g(x), p_2 \circ \varphi(e')) \in \Gamma_{\psi' \circ g \circ \psi^{-1}} \times \mathbb{R}^m\,.$$

Et si $(y, \psi' \circ g \circ \psi^{-1}(y), v) \in \Gamma_{\psi' \circ g \circ \psi^{-1}} \times \mathbb{R}^m$. Par surjectivité de ψ, il existe $x \in \mathrm{U}$ tel que $y = \psi(x)$. Comme $\psi' \circ g \circ \psi^{-1}(\psi(x)) = \psi'(g(x)) \in \mathrm{V}$, on en déduit que $g(x) \in \mathrm{U}'$. Par surjectivité de $p_2 \circ \varphi$, on en déduit qu'il existe $e' \in \mathrm{E}'_{g(x)}$ tel que et $p_2 \circ \varphi(e') = v$. On a alors $(x,e') \in (\mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}') \cap \mathrm{U} \times p^{-1}(\mathrm{U}')$. En effet, on a $p(e') = g(x)$ (puisque $e' \in \mathrm{E}'_{g(x)}$), $x \in \mathrm{U}$ et $e' \in p^{-1}(\mathrm{U}')$ (puisque $p(e') = g(x) \in \mathrm{U}'$).

Montrons que p est un fibré vectoriel. L'application est de classe $\mathscr{C}^k$ puisque c'est la restriction à une sous-prévariété de l'application première projection (voir la proposition 3.56 et l'exemple 3.29). Pour $x \in \mathrm{M}$, on a,

$$p^{-1}(x) = \{(x,e') \in \mathrm{M} \times \mathrm{E}', \quad p'(e') = g(x)\} = \{x\} \times \mathrm{E}'_{g(x)}$$

par définition de p. La seconde projection réalise une bijection de $\{x\} \times \mathrm{E}'_{g(x)}$ sur $\mathrm{E}'_{g(x)}$. Par transfert de structure, on obtient donc une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $p^{-1}(x)$.

Soient $x \in \mathrm{M}$, U′ un ouvert trivialisant pour p' contenant $g(x)$ et φ une trivialisation de p (de fibre $\mathbb{R}^m$) au-dessus de U′. L'ensemble $g^{-1}(\mathrm{U}')$ est un ouvert de M contenant x. De plus, $\mathrm{W} = p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')) = \{(x,e') \in \mathrm{M} \times \mathrm{E}', \quad p'(e') = g(x) = (g \circ p)(x,e') \in \mathrm{U}'\}$. L'application

$$\mathrm{A} : (x,e') \in p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')) \mapsto (x, p_2 \circ \varphi(e')) \in g^{-1}(\mathrm{U}') \times \mathbb{R}^m.$$

est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme dont le difféomorphisme réciproque est $\mathrm{B} : (x,v) \mapsto (x, \varphi^{-1}((g(x), v))$. L'application A est bien à valeurs dans $g^{-1}(\mathrm{U}') \times \mathbb{R}^m$ puisque $g(x) = g(p(x,e')) \in \mathrm{U}'$. L'application B est bien à valeurs dans $p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}'))$ puisque $p'(\varphi^{-1}(g(x),v)) = p_1(g(x),v) = g(x) \in \mathrm{U}'$ et $g(p_1(\mathrm{B}(x,v))) = g(x) \in \mathrm{U}'$. Par ailleurs, A est de classe $\mathscr{C}^k$ puisque ses deux composantes le sont. De plus, $p_2 \circ \mathrm{B}$ est la composée de $g \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ et de φ^{-1}. Ainsi B est de classe $\mathscr{C}^k$. Pour finir, pour $(x,e') \in \mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}'$, on a

$$(\mathrm{B} \circ \mathrm{A})(x,e') = (x, \varphi^{-1}(g(x), p_2(\varphi(e'))))$$

Or $g(x) = p'(e') = p_1(\varphi(e'))$, donc

$$(\mathrm{B} \circ \mathrm{A})(x,e') = (x, \varphi^{-1}(p_1(\varphi(e')), p_2(\varphi(e')))) = (x, \varphi^{-1}(\varphi(e'))) = (x,e')\,.$$

Et, pour $(x,v) \in g^{-1}(\mathrm{U}') \times \mathbb{R}^m$, on a

$$(\mathrm{A} \circ \mathrm{B})(x,v) = (x, (p_2 \circ \varphi)(\varphi^{-1}(g(x),v))) = (x, p_2(g(x),v)) = (x,v)\,.$$

On a bien sûr $p(x,e') = x = p_1 \circ \mathrm{A}(x,e')$ pour tout $(x,e') \in p^{-1}g^{-1}(\mathrm{U}')$ c'est-à-dire que le diagramme suivante commute

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & g^{-1}(\mathrm{U}') \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & g^{-1}(\mathrm{U}') & \end{tikzcd}$$

Enfin, la restriction à $p^{-1}(x) = \{x\} \times \mathrm{E}'_{g(x)}$ de l'application $p_2 \circ \mathrm{A}$ est donnée par $(x, e') \mapsto p_2 \circ \varphi(e')$. Comme la structure d'espace vectoriel sur $\{x\} \times \mathrm{E}'_{g(x)}$ est obtenue par transfert de structure et que $p_2 \circ \varphi_{\big|\mathrm{E}'_{g(x)}}$ est linéaire, on en conclut que $(p_2 \circ \mathrm{A})_{\big|p^{-1}(x)}$ est linéaire.

Montrons que $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p, p')$. Les applications f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition 3.56 et l'exemple 3.29 pour f). Pour $(x, e') \in \mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}'$, on a $(g \circ p)(x, e') = g(x) = p'(e') = (p' \circ f)(x, e')$, autrement dit le diagramme suivante commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{E}' \arrow[d, "p'"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "g"] & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

et l'application $f_x : p^{-1}(x) = \{x\} \times \mathrm{E}'_{g(x)} \to \mathrm{E}'_{g(x)}$ est bien sûr linéaire par construction de la structure d'espace vectoriel sur $p^{-1}(x)$.

Passons à la fonctorialité. Montrons que l'application $\mathrm{R}_{v,u,h}$ est bien définie. On remarque que pour $(x, e) \in \mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E}$ alors $(v(x), h(e)) \in \mathrm{M}'\,{}_{g'}\!\times_{p'} \mathrm{E}'$. En effet,

$$p'(h(e)) = u(p(e)) = u(g(x)) = g'(v(x))\,.$$

Ainsi, l'application $\mathrm{R}_{v,u,h}$ est bien définie. Comme elle coïncide avec l'application $v \times h : \mathrm{M} \times \mathrm{E}' \to \mathrm{M} \times \mathrm{E}''$ qui est $\mathscr{C}^k$ et envoie la sous-variété $\mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E}$ dans la sous-variété $\mathrm{M}'\,{}_{g'}\!\times_{p'} \mathrm{E}'$, l'application $\mathrm{R}_{v,u,h}$ est $\mathscr{C}^k$. Par construction de $g^*(p)$ et $g'^*(p')$, on a bien sûr, pour $(x, e) \in \mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E}$,

$$g'^*(p') \circ \mathrm{R}_{v,u,h}((x, e)) = g'^*(p')((v(x), h(e))) = v(x) = v \circ g^*(p)((x, e)).$$

D'où $g'^*(p') \circ \mathrm{R}_{v,u,h} = v \circ g^*(p)$. De plus, pour $x \in \mathrm{M}$, on a,

$$g^*(p)^{-1}(x) = \{x\} \times p^{-1}(g(x)) \qquad \text{et} \qquad g'^*(p')^{-1}(v(x)) = \{v(x)\} \times p'^{-1}(g'(v(x))) = \{v(x)\} \times p'^{-1}(u(g(x)))$$

d'où
$$(\mathrm{R}_{v,u,h})_x : (x, e) \longmapsto (v(x), h_{g(x)}(e))\,.$$

Les structures de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels construites sur $g^*(p)^{-1}(x)$ et $g'^*(p')^{-1}(g'(v(x)))$ assurent que $(\mathrm{R}_{v,u,h})_x$ est $\mathbb{K}$-linéaire. Ainsi $(\mathrm{R}_{v,u,h}, v) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(g^*(p), g^*(p'))$.

Par composition, on a $(h' \circ h, v' \circ v) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p'')$ et $g'' \circ v' \circ v = u' \circ u \circ g$. Ainsi, $\mathrm{R}_{v' \circ v, u' \circ u, h' \circ h}$ est bien définie. De même, on a $(\mathrm{id}_\mathrm{E}, \mathrm{id}_\mathrm{N}) = \mathrm{id}_p \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p)$ et $\mathrm{id}_\mathrm{N} \circ g = g \circ \mathrm{id}_\mathrm{M}$.

Pour $(x, e) \in \mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}$, on a bien sûr

$$\mathrm{R}_{v',u',h'} \circ \mathrm{R}_{v,u,h}((x, e)) = \mathrm{R}_{v',u',h'}(v(x), h(e)) = (v'(v(x)), h'(h(e))) = \mathrm{R}_{v' \circ v, u' \circ u, h' \circ h}((x, e))$$

et
$$\mathrm{R}_{\mathrm{id}_\mathrm{M}, \mathrm{id}_\mathrm{N}, \mathrm{id}_\mathrm{E}}((x, e)) = ((x, e)) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E}}((x, e))\,.$$

Vérifions à présent la propriété universelle. On a $(f, w) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(q, g^*(p))$ et $(f_p, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(g^*(p), p)$. Par composition, on en déduit que $(f_p \circ f, g \circ w) \in \mathrm{Hom}^{g \circ w}_{k,\mathbb{K}}(q, p)$. Soit $(f_1, w) \in \mathrm{Hom}^{w}_{k,\mathbb{R}}(q, g^*(p))$ tel que $(f_p \circ f, g \circ w) = (f_p \circ f_1, g \circ w)$. Comme

$$f_p \circ f = f_p \circ f_1 \qquad \text{et} \qquad g^*(p) \circ f = w \circ q = g^*(p) \circ f_1,$$

la propriété universelle du produit fibré (d'ensembles) montre que $f = f_1$. L'application Γ est injective.

Par ailleurs, si $(f, g \circ w) \in \mathrm{Hom}^{g \circ w}_{k,\mathbb{R}}(q, p)$. On a $p \circ f = g \circ w \circ q$. La propriété universelle du produit fibré (d'espaces topologiques) montre qu'il existe une (unique) application continue $h : \mathrm{F} \to \mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E}$ vérifiant $f = f_p \circ h$ et $w \circ q = g^*(p) \circ h$. Elle est donnée par

$$e \mapsto h(e) = (w \circ q(e), f(e))\,.$$

Si $i : \mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E} \to \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ désigne l'inclusion, alors par définition de $g^*(p)$ et f_p, on a $p_1 \circ (i \circ h) = g^*(p) \circ h = w \circ q$ et $p_2 \circ (i \circ h) = f_p \circ h = f$. Ainsi $i \circ h$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (exemple 3.29). On en déduit que h est de classe $\mathscr{C}^k$ (proposition-définition 3.46).

Par ailleurs, on a $g^*(p) \circ h = w \circ q$ et, pour $x \in \mathrm{M}'$, l'application h_x est donnée par

$$h_x : e \mapsto (w \circ q(e), f(e)) = (w(x), f(e)) = (w(x), f_{w(x)}(e)) \in \{w(x)\} \times \mathrm{E}_{g \circ w(x)} = g^*(p)^{-1}(w(x)).$$

Comme $p_2 \circ h_x = f_x$ est linéaire (puisque $(f, g \circ w) \in \mathrm{Hom}^q_{k,\mathbb{K}}(p,)$), on en déduit, par transfert de structure, que h_x est linéaire et donc $(h, w) \in \mathrm{Hom}^w_{k,\mathbb{K}}(q, g^*(p))$.

Démonstration de la fonctorialité grâce à la propriété universelle. On remarque que la démonstration de la propriété universelle n'a pas utilisé la fonctorialité. On note $f_p : \mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ (resp. $f_{p'} : \mathrm{M}\,{}_{g'}\!\times_{p'} \mathrm{E}' \to \mathrm{E}'$) la restriction de la première projection. On a $(f_p, g) \in \mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{K}}(g^*(p), p)$ et $(h, u) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$. Par composition, $(h \circ f_p, u \circ g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(g^*(p), p')$. Comme $u \circ g = g' \circ v$, on a $(h \circ f_p, u \circ g) \in \mathrm{Hom}^{g' \circ v}_{k,\mathbb{K}}(g^*(p), p')$ Par la propriété universelle (appliquée à p'), il existe un unique élément $\widetilde{h} \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(v, g^*(p))g^*(p')$ tel que $f_{p'} \circ \widetilde{h} = h \circ f_p$. La démonstration de la propriété universelle donne l'expression de $\widetilde{h}$. Pour $(x, e) \in \mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E}$, on a

$$\widetilde{h}((x, e)) = (v \circ g^*(p)((x, e)), h \circ f_p((x, e))) = (v(x), h(e)) .$$

On retrouve bien la même expression que précédemment.

Application 4.31 — Cas particuliers. On utilise souvent la fonctorialité dans la situation suivante plus simple. $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$, $\mathrm{N}' = \mathrm{N}$, $g' = g$ et $u = \mathrm{id}_\mathrm{N}$ et $v = \mathrm{id}_\mathrm{M}$. Pour $h \in \mathrm{Hom}^\mathrm{N}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$, on a $(h, \mathrm{id}_\mathrm{N}) \in \mathrm{Hom}^u_{k,\mathbb{K}}(p, p')$ et $g \circ \mathrm{id}_\mathrm{M} = \mathrm{id}_\mathrm{N} \circ g$. On a alors $(\mathrm{R}_{v,u,h}, \mathrm{id}_\mathrm{M}) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(g^*(p), g^*(p'))$. Autrement dit, $\mathrm{R}_{v,u,h} \in \mathrm{Hom}^\mathrm{M}_{k,\mathbb{K}}(g^*(p), g^*(p'))$. Dans ces conditions, on note $g^*(h)$ plutôt que $\mathrm{R}_{v,u,h}$. L'application $g^*(h)$ est alors donnée par

$$g^*(h) \colon \begin{cases} \mathrm{M}\,{}_g\!\times_p \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{M}\,{}_g\!\times_{p'} \mathrm{E}' \\ (x, e) \quad \longmapsto (x, h(e)) \end{cases}$$

La propriété universelle s'applique aussi souvent dans une situation plus simple. Avec $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$ et $w = \mathrm{id}_\mathrm{M}$. On obtient ainsi la bijection

$$\Gamma \colon \begin{cases} \mathrm{Hom}^\mathrm{M}_{k,\mathbb{K}}(q, g^*(p)) \longrightarrow \mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{K}}(q, p) \\ \qquad f \qquad\qquad \longmapsto (f_p \circ f, g) \end{cases}$$

dont la bijection réciproque est donnée par

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}^g_{k,\mathbb{K}}(q, p) \longrightarrow \mathrm{Hom}^\mathrm{M}_{k,\mathbb{K}}(q, g^*(p)) \\ \quad (h, g) \qquad \longmapsto \big(e \mapsto (q(e), h(e))\big) . \end{cases}$$

Exemple 4.32 — Isomorphisme. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et N une sous-$\mathscr{C}^k$-prévariété de M. On note $i : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ l'inclusion qui est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition-définition 3.46). On considère une $\mathscr{C}^k$-prévariété $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et un fibré vectoriel $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$. Montrons que les fibrés vectoriels p_N et $i^*(p)$ sont isomorphes (voir la proposition 4.11). On note $j : p^{-1}(\mathrm{N}) \to \mathrm{E}$ l'inclusion qui est de classe $\mathscr{C}^k$ et $f : \mathrm{N}\,{}_i\!\times_p \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ la restriction de la deuxième projection.

Comme $p_\mathrm{N} : p^{-1}(\mathrm{N}) \to \mathrm{N}$ est un fibré vectoriel et que $(j, i) \in \mathrm{Hom}^i_{k,\mathbb{R}}(p_\mathrm{N}, p)$, (voir la proposition 4.11 et l'exemple 4.20), la proposition-définition 4.29 assure qu'il existe une unique morphisme de fibré vectoriel au-dessus de N (noté f') vérifiant $f \circ f' = j$.

Comme $i^*(p)$ est un fibré vectoriel et que $(f, i) \in \mathrm{Hom}^i_{k,\mathbb{R}}(i^*(p), p)$, l'exemple 4.20 montre qu'il existe un unique morphisme de de fibré vectoriel au-dessus de N (noté f'') vérifiant $j \circ f'' = f$.

On a alors $j \circ f'' \circ f' = f \circ f' = j$ et, par injectivité de j (ou par la propriété universelle de l'exemple 4.20), on obtient $f'' \circ f' = \mathrm{id}_{p^{-1}(\mathrm{N})}$. De plus, par composition, $f' \circ f'' \in \mathrm{Hom}^\mathrm{M}_{k,\mathbb{R}}(i^*(p), i^*(p))$ et vérifie $f \circ f' \circ f'' = j \circ f'' = f = f \circ i^*(p)$. L'injectivité de Γ_2 assure que $f' \circ f'' = \mathrm{id}_{i^*(p)}$.

Ainsi f' et f'' sont des isomorphismes de fibré vectoriel au-dessus de N réciproque l'un de l'autre. Ils sont données par

$$f' : e \to (p_\mathrm{N}(e), j(e)) = (p(e), e) \qquad \text{et} \qquad f'' : (n, e) \to e$$

4.3 Section

Définition 4.33 — Section d'un fibré vectoriel. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel et U un ouvert de M. On dit qu'une application $s : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ est *une $\mathscr{C}^k$-section de p au-dessus de* U si $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$.

On dit qu'une application $s : \mathrm{M} \to \mathrm{E}$ de classe $\mathscr{C}^k$ est *une $\mathscr{C}^k$-section de p* si s est $\mathscr{C}^k$-section de p au-dessus de M.

On note $\Gamma_k(p, \mathrm{U})$ l'ensemble des $\mathscr{C}^k$-sections de p au-dessus de U.

Remarque 4.34 — Section. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel et U un ouvert de M. Une $\mathscr{C}^k$-section de p au-dessus de U n'est rien d'autre qu'une $\mathscr{C}^k$-section de p_{U}.

En effet, si s est une $\mathscr{C}^k$-section de p au-dessus de U alors $p \circ s(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{U}$ et donc $s(x) \in p^{-1}(\mathrm{U})$. L'application $s : \mathrm{U} \to p^{-1}(\mathrm{U})$ est donc de classe $\mathscr{C}^k$ (remarque 3.46) et $p_{\mathrm{U}} \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$.

Si s est une $\mathscr{C}^k$-section de p_{U} alors $s : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ est $\mathscr{C}^k$ (comme composée de $s : \mathrm{U} \to p^{-1}(\mathrm{U})$ et de $i : p^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{E}$) et $p_{\mathrm{U}} \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$ donc $s(x) \in p^{-1}(\mathrm{U})$. L'application $s : \mathrm{U} \to p^{-1}(\mathrm{U})$ est donc de classe $\mathscr{C}^k$ (remarque 3.46) et $p_{\mathrm{U}} \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$.

Exemple 4.35 — Section nulle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel. On définit l'application $s_0 : x \in \mathrm{M} \mapsto 0 \in \mathrm{E}_{p^{-1}(x)}$. Montrons que c'est une $\mathscr{C}^k$-section de p. On a bien sûr $p \circ s_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$. Il reste à montrer que s_0 est de classe $\mathscr{C}^k$. Soient $x \in \mathrm{M}$ et U_x un ouvert contenant x et trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U_x. Pour tout $y \in \mathrm{U}_x$, on a $s_0(y) = \varphi^{-1}(y, 0)$. Or, d'après l'exemple 3.29, l'application $y \in \mathrm{U}_x \mapsto (y, 0)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur U_x puisque les deux composantes sont de classe $\mathscr{C}^k$ (il s'agit de $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_x}$ et d'une application constante). Ainsi, par composition, la restriction de s_0 à U_x est de classe $\mathscr{C}^k$. De la proposition 3.56, on déduit que s_0 est de classe $\mathscr{C}^k$.

Proposition 4.36 — Structure de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel. Pour $f, g \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $\lambda \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$, on pose

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda \cdot f : x \mapsto \lambda(x) f(x)$$

Alors $f + g$ et λf appartiennent à $\Gamma_k(p, \mathrm{M})$.

Le triplet $(\Gamma_k(p, \mathrm{M}), +, \cdot)$ est alors un $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module.

Preuve. Soit $x \in \mathrm{M}$. Comme f et g appartiennent à $\Gamma_k(p, \mathrm{M})$, $f(x)$ et $g(x)$ appartiennent à E_x. la structure d'espace vectoriel de E_x alors donne un sens à $f(x) + g(x)$. En particulier, on a $(f + g)(x) \in \mathrm{E}_x$ et donc $(p \circ (f + g))(x) = x$. De même, $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ donc $\lambda(x) f(x)$ a bien un sens et $p \cdot (\lambda \cdot f)(x) = x$.

Il reste à montrer que $f + g$ et $\lambda \cdot f$ sont de classe $\mathscr{C}^k$. On considère U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p de fibre F au-dessus de U. On note $p_1 : \mathrm{U} \times \mathrm{F} \to \mathrm{U}$ (resp. $p_2 : \mathrm{U} \times \mathrm{F} \to \mathrm{F}$)la première (resp. deuxième) projection.

Commençons par $f + g$. Comme $p_2 \circ \varphi : \mathrm{E}_x \to \mathrm{F}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, on en déduit que pour $x \in \mathrm{U}$, on a

$$(p_2 \circ \varphi)((f + g)_{|\mathrm{U}}(x)) = (p_2 \circ \varphi)(f(x) + g(x)) = (p_2 \circ \varphi \circ f)(x) + (p_2 \circ \varphi \circ g)(x).$$

Ainsi,
$$p_2 \circ \varphi \circ ((f + g)_{|\mathrm{U}}) = (p_2 \circ \varphi \circ (f_{|\mathrm{U}})) + (p_2 \circ \varphi \circ (g_{|\mathrm{U}})).$$

Comme p_2, φ, f et g sont de classe $\mathscr{C}^k$, on en déduit que $p_2 \circ \varphi \circ ((f + g)_{|\mathrm{U}})$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir l'application 3.32, les propositions 3.46 et 3.56). De plus, on a $p_1 \circ \varphi \circ ((f + g)_{|\mathrm{U}}) = p \circ ((f + g)_{|\mathrm{U}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. L'exemple 3.29 assure alors que $\varphi \circ ((f + g)_{|\mathrm{U}})$ de classe $\mathscr{C}^k$. Comme φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1} que $(f + g)_{|\mathrm{U}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme, on peut recouvrir M par des ouverts trivialisants pour p, la proposition 3.56 montre que $f + g$ est $\mathscr{C}^k$.

Passons à $\lambda \cdot f$. Comme $p_2 \circ \varphi : \mathrm{E}_x \to \mathrm{F}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, on en déduit que pour $x \in \mathrm{U}$, on a

$$(p_2 \circ \varphi)((\lambda \cdot f)_{|\mathrm{U}}(x)) = (p_2 \circ \varphi)(\lambda(x) f(x)) = \lambda(x)(p_2 \circ \varphi \circ f)(x).$$

Ainsi,
$$p_2 \circ \varphi \circ ((\lambda \cdot f)_{|\mathrm{U}}) = \lambda \cdot (p_2 \circ \varphi \circ (f_{|\mathrm{U}})).$$

Comme p_2, φ, f et λ sont de classe $\mathscr{C}^k$, on en déduit que $p_2 \circ \varphi \circ ((\lambda \cdot f)_{|\mathrm{U}})$ est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir l'application 3.32, les propositions 3.46 et 3.56). De plus, on a $p_1 \circ \varphi \circ ((\lambda \cdot f)_{|\mathrm{U}}) = p \circ ((\lambda \cdot f)_{|\mathrm{U}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. L'exemple 3.29 assure alors que $\varphi \circ ((\lambda \cdot f)_{|\mathrm{U}})$ de classe $\mathscr{C}^k$. Comme φ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1} que $(\lambda \cdot f)_{|\mathrm{U}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme, on peut recouvrir M par des ouverts trivialisants pour p, la proposition 3.56 montre que $\lambda \cdot f$ est $\mathscr{C}^k$.

La loi + est bien sûr associative puisque pour $f, g, h \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$(f + (g + h))(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f(x) + g(x)) + h(x) = ((f + g) + h)(x)\,.$$

La loi + est bien sûr commutative puisque pour $f, g \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)\,.$$

La section nulle s_0 est élément neutre neutre pour + puisque pour $f \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$(f + s_0)(x) = f(x) + 0 = f(x) = 0 + f(x) = (s_0 + f)(x)\,.$$

On considère $\lambda : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ l'application constante égale à -1 qui est de classe $\mathscr{C}^k$ (exemple 3.19). Pour $f \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a $\lambda \cdot f \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et

$$(f + \lambda \cdot f)(x) = f(x) + (-f(x)) = 0 = s_0(x)\,.$$

Ainsi λf est l'opposé de f pour la loi + et $(\Gamma_k(p, \mathrm{M}), +)$ est un groupe abélien.

Pour $\lambda \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$, $f, g \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$(\lambda \cdot (f + g))(x) = \lambda(x)(f(x) + g(x)) = \lambda(x)f(x) + \lambda(x)g(x) = (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x)\,.$$

Pour $\lambda, \mu \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$, $f \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$((\lambda + \mu) \cdot f)(x) = (\lambda(x) + \mu(x))f(x) = \lambda(x)f(x) + \mu(x)f(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(x)\,.$$

Pour $\lambda, \mu \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$, $f \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$((\lambda\mu) \cdot f)(x) = (\lambda(x)\mu(x))f(x) = \lambda(x)(\mu(x)f(x)) = (\lambda \cdot (\mu \cdot f))(x)\,.$$

On considère $\lambda : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ l'application constante égale à 1 qui est de classe $\mathscr{C}^k$ (exemple 3.19). Pour $f \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a $\lambda \cdot f \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et

$$(\lambda \cdot f)(x) = f(x)\,.$$

Ainsi $(\Gamma_k(p, \mathrm{M}), +)$ est bien un $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module.

Exemple 4.37 — Section du fibré trivial de fibre F. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$ prévariété, F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $p : \mathrm{M} \times \mathrm{F} \to \mathrm{M}$ le fibré vectoriel trivial de fibré F. On note $p_2 : \mathrm{M} \times \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ la deuxième projection qui est de classe $\mathscr{C}^k$. Montrons que les applications

$$\Delta : \begin{cases} \Gamma_k(p, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F}) \\ \quad s \quad \longmapsto p_2 \circ s \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Delta' : \begin{cases} \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F}) \longrightarrow \Gamma_k(p, \mathrm{M}) \\ \quad f \quad \longmapsto (\, x \mapsto (x, f(x))\,) \end{cases}$$

sont des isomorphisme de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-modules réciproque l'un de l'autre.

Soit $s \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$, par composition, on a bien $p_2 \circ s \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$. Ainsi Δ est bien définie. Soit $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$, comme $p \circ \Delta'(f) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ et $p_2 \circ \Delta'(f) = f$, l'exemple 3.29 montre que $\Delta'(f)$ est bien de classe $\mathscr{C}^k$. De plus, comme $p \circ \Delta'(f) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$, on a $\Delta'(f) \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$ et Δ' est bien définie.

Par ailleurs, on a bien sûr, $\Delta \circ \Delta'(f) = f$ pour tout $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$. Pour $s \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})$, on a $\Delta' \circ \Delta(s) = (x \mapsto (x, p_2(s(x))))$. Comme $p_2 \circ (\Delta' \circ \Delta(s)) = p_2 \circ s$ et $p \circ (\Delta' \circ \Delta(s)) = \mathrm{id}_{\mathrm{M}} = p \circ s$, on en déduit grâce à la propriété universelle du produit (d'ensembles) que $(\Delta' \circ \Delta)(s) = s$.

Il reste à montrer, par exemple, que Δ' est $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-linéaire. Soit $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$. On a $\Delta'(\lambda \cdot f) = (x \mapsto (x, \lambda(x)f(x)))$. Au vu de la structure d'espace vectoriel sur la fibre $\{x\} \times \mathrm{F}$, on a $\Delta'(\lambda \cdot f) = (x \mapsto \lambda(x) \cdot (x, f(x)))$. Au vu de la structure de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module sur $\Gamma_k(p, \mathrm{M})$, on obtient $\Delta'(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \Delta'(f)$.

Soit $f, g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{F})$. On a $\Delta'(g + f) = (x \mapsto (x, g(x) + f(x)))$. Au vu de la structure d'espace vectoriel sur la fibre $\{x\} \times \mathrm{F}$, on a $\Delta'(g + f) = (x \mapsto (x, f(x)) + (x, g(x)))$. Au vu de la structure de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$-module sur $\Gamma_k(p, \mathrm{M})$, on obtient $\Delta'(g + f) = \Delta'(g) + \Delta'(f)$.

Lemme 4.38 — Faisceau localement libre. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel et $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ deux ouverts de M. L'application

$$\rho_{\mathrm{U,V}}(p)\colon \begin{cases} \Gamma_k(\mathrm{U},p)=\Gamma_k(\mathrm{U},p_{\mathrm{U}}) \longrightarrow \Gamma_k(\mathrm{V},p)=\Gamma_k(\mathrm{V},p_{\mathrm{V}}) \\ \qquad s \qquad\qquad\qquad \longmapsto s_{|\mathrm{V}} \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathscr{C}^k(\mathrm{U},\mathbb{R})$-modules.

Ainsi $\mathrm{U}\mapsto\Gamma_k(\mathrm{U},p)$ muni des applications $\rho_{\mathrm{U,V}}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$-module localement libre noté $\Gamma_k(p)$.

Soient $(\mathrm{E}',\mathscr{B}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $p'\colon\mathrm{E}'\to\mathrm{M}$ un fibré vectoriel et $f\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(\mathrm{E},\mathrm{E}')$. Alors f induit un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$-module de $\Gamma_k(p)$ dans $\Gamma_k(p')$ noté $(f\circ)$.

Soient $(\mathrm{E}'',\mathscr{B}'')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $p''\colon\mathrm{E}''\to\mathrm{M}$ un fibré vectoriel et $f'\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(\mathrm{E}',\mathrm{E}'')$. Alors $((f'\circ f)\circ)=(f'\circ)\circ(f\circ)$. De plus, on a $(\mathrm{id}_p\circ)=\mathrm{id}_{\Gamma_k(p)}$. Enfin, l'application

$$\Gamma_k\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(p,p') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{M}}}(\Gamma_k(p),\Gamma_k(p')) \\ \qquad f \qquad\qquad \longmapsto (f\circ) \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$-modules.

Preuve. D'après la proposition 3.56, $s_{|\mathrm{V}}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. De plus, $p\circ(s_{|\mathrm{V}})=(p\circ s)_{|\mathrm{V}}=\mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. Ainsi $s_{|\mathrm{V}}\in\Gamma(\mathrm{V},p)$ et $\rho_{\mathrm{U,V}}(p)$ est bien définie.

De plus, pour $s,s'\in\Gamma_k(\mathrm{U},p)$ et $x\in\mathrm{V}$, on a

$$(s+s')_{|\mathrm{V}}(x)=(s+s')(x)=s(x)+s'(x)=(s_{|\mathrm{V}})(x)+(s'_{|\mathrm{V}})(x)\,,$$

et pour $s\in\Gamma_k(\mathrm{U},p)$, $\lambda\in\mathscr{C}^k(\mathrm{U},\mathbb{R})$ et $x\in\mathrm{V}$, on a

$$(\lambda\cdot s)_{|\mathrm{V}}(x)=(\lambda\cdot s)(x)=\lambda(x)s(x)=\lambda_{|\mathrm{V}}(x)s_{|\mathrm{V}}(x)=(\lambda_{|\mathrm{V}}\cdot s_{|\mathrm{V}})(x)=(\lambda\cdot(s_{|\mathrm{V}}))(x)\,.$$

Montrons que $\Gamma_k(p)$ est un faisceau. Soient $\mathrm{W}\subset\mathrm{V}\subset\mathrm{U}$ trois ouverts, on a bien sûr, $(\rho_{\mathrm{V,W}}(p)\circ\rho_{\mathrm{U,V}}(p))(s)=s_{|\mathrm{W}}=\rho_{\mathrm{U,W}}(p)(s)$. Ainsi $\Gamma_k(p)$ est un préfaisceau. Soient U un ouvert de M et $\mathrm{U}_{i\,i\in\mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert de U. Pour $i,j\in\mathrm{I}$, on note $\mathrm{U}_{ij}=\mathrm{U}_i\cap\mathrm{U}_j$. On considère une famille $(s_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de fonctions telles que $s_i\in\Gamma_k(\mathrm{U}_i,p)$ pour tout $i\in\mathrm{I}$ et $s_{i|\mathrm{U}_{ij}}=s_{j|\mathrm{U}_{ij}}$ pour tout $i,j\in\mathrm{I}$. Comme les s_i coïncident deux à deux là où elles sont définies, il existe une unique application $s:\mathrm{U}\to\mathrm{E}$ telle que $s_{|\mathrm{U}_i}=s_i$. En effet, pour $s\in\mathrm{U}_i$, on a nécessairement $s(x)=s_i(x)$ et comme les U_i recouvrent U, s est entièrement définie. De plus, si x appartient aussi à U_j, on a $s_j(x)=s_i(x)$ par hypothèse et la valeur de s ne dépend pas du choix de $i\in\mathrm{I}$. Enfin, comme $s_{|\mathrm{U}_i}\in\mathscr{C}^k(\mathrm{U}_i,\mathrm{E})$, la proposition 3.56 montre que $s\in\mathscr{C}^k(\mathrm{U},\mathrm{E})$. Enfin, pour $x\in\mathrm{U}$, il existe $i\in\mathrm{I}$ tel que $x\in\mathrm{U}_i$, d'où $p\circ s(x)=p\circ s_i(x)=x$ et $p\circ s=\mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. On a donc bien $s\in\Gamma_k(\mathrm{U},p)$ et $\Gamma_k(p)$ est bien un faisceau. La première partie de la proposition montre que $\Gamma_k(p)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$-module.

Soient U un ouvert trivialisant pour p et φ un trivialisation de p au-dessus de U de fibre $\mathbb{R}^n$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_k(\mathrm{V},p) \arrow[r, "\varphi\circ"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{V,W}}(p)"'] & \Gamma_k(\mathrm{V},p_1) \arrow[r, "p_2\circ"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{W,V}}(p_1)"] & \mathscr{C}^k(\mathrm{V},\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "|_{\mathrm{W}}"] & (\mathscr{C}^k(\mathrm{V},\mathbb{R}))^n \arrow[d, "|_{\mathrm{W}}"] \\
\Gamma_k(\mathrm{W},p) \arrow[r, "\varphi\circ"] & \Gamma_k(\mathrm{W},p_1) \arrow[r, "p_2\circ"] & \mathscr{C}^k(\mathrm{W},\mathbb{R}^n) \arrow[r, "\Phi"] & (\mathscr{C}^k(\mathrm{W},\mathbb{R}))^n
\end{tikzcd}$$

Sur la première (resp. deuxième) ligne, tous les morphismes sont des isomorphismes de $\mathscr{C}^k(\mathrm{V},\mathbb{R})$-modules (resp. $\mathscr{C}^k(\mathrm{W},\mathbb{R})$-modules). Sur les colonnes, les morphismes sont des morphismes de $\mathscr{C}^k(\mathrm{V},\mathbb{R})$-modules. Ainsi $\Phi\circ(p_2\circ)\circ(\varphi\circ)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$-modules de $\Gamma_k(p)_{|\mathrm{U}}$ sur $(\mathcal{O}_{\mathrm{U}})^n$.

Soient U un ouvert de M et $s\in\Gamma_k(p,\mathrm{U})$. L'application $f\circ s:\mathrm{U}\to\mathrm{E}'$ est de classe $\mathscr{C}^k$ puisque f et s le sont. De plus, comme $f\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(p,p')$, on a $p\circ f\circ s=p\circ s=\mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. Ainsi, la composition par f envoie $\Gamma_k(p,\mathrm{U})$ dans $\Gamma_k(p',\mathrm{U})$. Soit $g\in\mathscr{C}^k(\mathrm{U},\mathbb{R})$. Pour $x\in\mathrm{U}$ et par linéarité de f_x, on a

$$f\circ(g\cdot s)(x)=f(g(x)s(x))=f_x(g(x)s(x))=g(x)f_x(s(x))=g(x)f(s(x)))=(g\cdot(f\circ s))(x)\,.$$

Soient $\mathrm{V}\subset\mathrm{U}$ deux ouverts de M et $s\in\Gamma_k(p,\mathrm{U})$. On a

$$\rho_{\mathrm{U,V}}(p')(f\circ s)=(f\circ s)_{|\mathrm{V}}=f\circ(s_{|\mathrm{V}})=f\circ(\rho_{\mathrm{U,V}}(p)(s)).$$

Ainsi f induit par composition un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}$-modules de $\Gamma_k(p)$ dans $\Gamma_k(p')$.

Soient U un ouvert de M et $s\in\Gamma_k(p,\mathrm{U})$. On a $(f'\circ f)\circ s=f'\circ(f\circ s)$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\circ s=s$.

Soient $f, f' \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(p,p')$, U un ouvert de M, $s \in \Gamma_k(p,\mathrm{U})$ et $x \in \mathrm{U}$. Par définition de la somme sur $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(p,p')$, on a

$$\Gamma_k(f+f')(s)(x) = ((f+f')\circ s)(x) = f_x(s(x)) + {f'}_x(s(x)) = (f\circ s)(x) + (f'\circ s)(x) = \Gamma_k(f)(s)(x) + \Gamma_k(f')(s)(x)\,.$$

Soient $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(p,p')$, $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$, U un ouvert de M, $s \in \Gamma_k(p,\mathrm{U})$ et $x \in \mathrm{U}$. Par définition de l'action de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M},\mathbb{R})$ sur $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{R}}(p,p')$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{M}}}(\Gamma_k(p),\Gamma_k(p'))$, on a

$$\Gamma_k(g\cdot f)(s)(x) = ((g\cdot f)\circ s)(x) = g(x)f(s(x)) = (g_{|\mathrm{U}}\cdot(f\circ s))(x) = (g\cdot\Gamma_k(f))(s)(x)\,.$$

Lemme 4.39 — Section et morphisme de fibré. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$, $(\mathrm{E},\mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et U un ouvert de M. Les applications

$$\delta^{\mathrm{U}}:\begin{cases}\Gamma_k(p,\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(\mathrm{Triv}^{\mathbb{K}}_{\mathrm{U}},p) = \Gamma_k(\underline{\mathrm{Hom}}((,\mathrm{Triv}^{\mathrm{M}}_{)}\mathbb{K},p),\mathrm{U})\\ \quad s \qquad\longmapsto ((x,\lambda)\mapsto \lambda s(x))\end{cases}$$

et

$$\eta^{\mathrm{U}}:\begin{cases}\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(\mathrm{Triv}^{\mathbb{K}}_{\mathrm{U}},p) = \Gamma_k(\underline{\mathrm{Hom}}((,\mathrm{Triv}^{\mathrm{M}}_{)}\mathbb{K},p),\mathrm{U}) \longrightarrow \Gamma_k(p,\mathrm{U})\\ \qquad\qquad f \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\longmapsto (x\mapsto f(x,1))\end{cases}$$

sont des isomorphismes de $\mathscr{C}^k(\mathrm{U},\mathbb{K})$-modules réciproque l'un de l'autre.

Les familles $\delta = (\delta^{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}(\mathrm{M})}$ et $\eta = (\eta^{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}(\mathrm{M})}$ sont des isomorphismes de $\mathcal{O}^{\mathbb{K}}_{\mathrm{M}}$-modules réciproque l'un de l'autre.

4.4 Construction de fibrés vectoriels

Recollement de fibrés vectoriels

Proposition 4.40 — Recollement de trivialisation. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, E un ensemble, $p:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$ une application telle que $p^{-1}(x)$ soit muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, pour tout $x\in\mathrm{M}$ et $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M.

Pour tout $\alpha\in\mathrm{A}$, on suppose qu'il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F_α de dimension finie, une application $\psi_\alpha : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)\to\mathrm{U}_\alpha\times\mathrm{F}_\alpha$ vérifiant $p = p_1\circ\psi_\alpha$ et $\psi_{\alpha x} : p^{-1}(x)\to\{x\}\times\mathrm{F}_\alpha$ est une bijection $\mathbb{K}$-linéaire, pour tout $x\in\mathrm{U}_\alpha$. On suppose, de plus, que, pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2$, l'application

$$\begin{cases}\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}_\beta \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha,\mathrm{F}_\beta)\\ \qquad x \qquad\longmapsto (p_2\circ\psi_{\beta x})\circ(p_2\circ\psi_{\alpha x})^{-1}\end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$.

Il existe sur E une unique structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété telle que p soit un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $(\mathrm{U}_\alpha,\mathrm{F}_\alpha,\psi_\alpha)$ une carte trivialisante pour p pour tout $\alpha\in\mathrm{A}$.

Preuve. Soit $x\in\mathrm{U}_\alpha$. Comme $p_1\circ\psi_\alpha = p$, les prolégomènes 4.1 donnent un sens à l'application $\psi_{\alpha x}$. Comme p_2 réalise un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire entre $\{x\}\times\mathrm{F}_\alpha$ et F_α, l'application $(p_2\circ\psi_{\alpha x})^{-1} : \mathrm{F}_\alpha\to p^{-1}(x)$ a bien un sens et est linéaire. On en déduit que, pour $x\in\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on a $(p_2\circ\psi_{\beta x})\circ(p_2\circ\psi_{\alpha x})^{-1}\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha,\mathrm{F}_\beta)$. Enfin comme $\psi_{\alpha x}$ est bijective, pour tout $x\in\mathrm{U}_\alpha$, les prolégomènes 4.1 montrent que ψ_α est bijective.

Pour $\alpha\in\mathrm{A}$, on considère les prévariétés produits $\mathrm{M}_\alpha = \mathrm{U}_\alpha\times\mathrm{F}_\alpha$ et les applications injectives $\varphi_\alpha = {\psi_\alpha}^{-1} : \mathrm{M}_\alpha\to\mathrm{E}$. Montrons que l'on peut appliquer la proposition 3.60. Comme les U_α recouvrent M, on a

$$\mathrm{E} = p^{-1}(\mathrm{M}) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}}\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)\,.$$

Par ailleurs, pour $\alpha,\beta\in\mathrm{A}$, l'ensemble

$${\varphi_\alpha}^{-1}\circ\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) = {\varphi_\alpha}^{-1}(p^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) = (p\circ\varphi_\alpha)^{-1}(\mathrm{U}_\beta) = {p_1}^{-1}(\mathrm{U}_\beta) = \mathrm{U}_{\alpha\beta}\times\mathrm{F}_\alpha$$

est bien un ouvert de M_α. Enfin, l'application $\psi_{\beta\alpha} = {\varphi_\beta}^{-1}\circ\varphi_\alpha : \mathrm{U}_{\alpha\beta}\times\mathrm{F}_\alpha\to\mathrm{U}_{\beta\alpha}\times\mathrm{F}_\beta$ est donnée par $(x,v)\mapsto(x,(\psi_{\beta x}\circ(\psi_{\alpha x})^{-1})(v))$. Sa première composante est $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\beta\alpha}}$ et donc de classe $\mathscr{C}^k$. Sa deuxième composante est de classe $\mathscr{C}^k$ grâce à l'application 3.23. On en déduit que $\psi_{\beta\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^k$.

La proposition 3.60 montre qu'il existe un unique $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{B}$ sur E telle que $p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ soit un ouvert de E et $\psi_\alpha : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \to \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha$ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme.

On en déduit alors que l'application $p : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \to \mathrm{U}_\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^k$ comme composée de ψ_α et p_1 qui sont $\mathscr{C}^k$. Comme $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est un recouvrement de M, la proposition 3.56 (vi) montre que p est $\mathscr{C}^k$. Comme ψ_α est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, que $p \circ \psi_\alpha = p_1$ et que $p_2 \circ \psi_{\alpha_x}$ est linéaire (puisque $p_2 : \{x\} \times \mathrm{F}_\alpha \to \mathrm{F}_\alpha$ l'est), on en déduit que p est un fibré vectoriel et $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \psi_\alpha)$ une carte trivialisante pour p.

Si $\mathscr{B}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur E telle que $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ soit un $\mathscr{C}^k$-vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \psi_\alpha)$ une carte trivialisante pour p. Alors, par continuité de p, l'ensemble $p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de E. De plus, comme ψ_α est $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, la proposition 3.60 assure que $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.

Définition 4.41 — Cocycle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M et $r \in \mathbb{N}$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$ et pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \cap \mathrm{U}_\gamma$. On considère, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, une application $g_{\alpha\beta} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ de classe $\mathscr{C}^k$.

On dit que la famille $(g_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2}$ est un cocycle de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(i) $g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^r}$ pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha$ et tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

(ii) $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^r} = g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) g_{\gamma\alpha}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma}$ et tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$.

Exemple 4.42 — Exemple fondateur. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. On considère un recouvrement $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de M par des ouverts trivialisants pour p et, pour $\alpha \in \mathrm{A}$, une trivialisation φ_α de p au-dessus de U_α de fibre $\mathbb{K}^{r_\alpha}$ (voir la remarque 4.6). Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$ et pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \cap \mathrm{U}_\gamma$.

Soient $\beta \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{U}_\beta$. La remarque 4.4 montre que l'application $(p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})$ est un isomorphisme linéaire. On peut donc définir, pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$,

$$g_{\alpha\beta} : \begin{cases} \mathrm{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{r_\beta}, \mathbb{K}^{r_\alpha}) \\ x \quad \longmapsto (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x}) \circ (p_2 \circ \varphi_{\beta_x})^{-1} \end{cases}$$

Par définition des $g_{\alpha\beta}$, on a bien sûr, pour $\alpha \in \mathrm{A}$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$

$$\forall\, x \in \mathrm{U}_\alpha, \quad g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{r_\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma}, \quad g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) g_{\gamma\alpha}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{r_\alpha}}\,.$$

Montrons que $g_{\alpha\beta}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$. L'application $(x, v) \in \mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{K}^{r_\beta} \mapsto g_{\alpha\beta}(x)(v)$ n'est autre que l'application $p_2 \circ \varphi_\beta \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ qui est $\mathscr{C}^k$. Le critère (ii) de l'application 3.23 montre que $g_{\alpha\beta}$ est $\mathscr{C}^k$.

On suppose, de plus, qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\dim_{\mathbb{K}} p^{-1}(x) = r$ pour tout $x \in \mathrm{M}$, autrement dit que toutes les fibres ont la même dimension. Comme r_α est la dimension de la fibre de p en $x \in \mathrm{U}_\alpha$ (voir la remarque 4.6), on en déduit que $r_\alpha = r$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Ainsi $g_{\alpha\beta}$ est à valeurs dans $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^r)$. Comme $p_2 \circ \varphi_{\alpha_x}$ et $p_2 \circ \varphi_{\beta_x}$ sont bijectives, on en déduit que $g_{\alpha\beta}(x)$ est inversible. Ainsi $g_{\alpha\beta}$ est à valeurs dans l'ouvert $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^r)$. L'application $g_{\alpha\beta} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ est donc de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la proposition 3.46).

Remarque 4.43 — Conséquences de la structure de cocycle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M, $r \in \mathbb{N}$ et $(g_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2}$ un cocycle de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

En appliquant le point (ii) de la définition 4.41 au triplet $(\alpha, \beta, \alpha) \in \mathrm{A}^3$, on obtient

$$\forall\, x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}, \qquad g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x) g_{\alpha\alpha}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^r}.$$

Finalement, le point (i) montre que $g_{\alpha\beta}(x)$ est l'inverse de $g_{\beta\alpha}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$.

On en déduit que $g_{\alpha\beta}(x) g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$ pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$ et $x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma}$.

Proposition 4.44 — Construction de fibré vectoriel. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M, $r \in \mathbb{N}$ et $(g_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2}$ un cocycle de $\mathfrak{U}$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$. Pour $\alpha \in \mathrm{A}$, on considère la $\mathscr{C}^k$-prévariété produit $\mathrm{E}_\alpha = \mathrm{U}_\alpha \times \mathbb{K}^r$, on pose $\mathrm{V}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_{\alpha\beta} \times \mathbb{K}^r$ et on note $p_1^\alpha : \mathrm{U}_\alpha \times \mathbb{K}^r \to \mathrm{U}_\alpha$ la première projection. L'application

$$\varphi_{\beta\alpha}\colon \begin{cases} \mathrm{V}_{\alpha\beta} & \longrightarrow \mathrm{V}_{\beta\alpha} \\ (x,v) & \longmapsto (x, g_{\beta\alpha}(x)(v)) \end{cases}$$

est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. On note $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ la $\mathscr{C}^k$-prévariété obtenue par recollement des E_α le long des $\mathrm{V}_{\alpha\beta}$ au moyen des $\varphi_{\beta\alpha}$ et ψ_α les $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes associés.

Il existe une unique application $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ telle que $p \circ \psi_\alpha = p_1^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. L'application p est un fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Preuve. Montrons que la $\mathscr{C}^k$-prévariété obtenue par recollement des E_α le long des $\mathrm{V}_{\alpha\beta}$ au moyen des $\varphi_{\beta\alpha}$ est bien définie.

Comme $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un ouvert de U_α, $\mathrm{V}_{\alpha\beta}$ est un ouvert de E_α. La première composante de $\varphi_{\beta\alpha}$ est $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\beta\alpha}}$ et donc $\mathscr{C}^k$. D'après l'application 3.23 (ii), la deuxième composante de $\varphi_{\beta\alpha}$ est $\mathscr{C}^k$. On en déduit que $\varphi_{\beta\alpha}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. De plus, d'après la remarque 4.43, on a $\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}_\beta}$ et $\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}_\alpha}$. Ainsi $\varphi_{\alpha\beta}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de $\mathrm{V}_{\alpha\beta}$ sur $\mathrm{V}_{\beta\alpha}$.

De plus, le point (i) de la définition 4.41 montre que $\mathrm{V}_{\alpha\alpha} = \mathrm{E}_\alpha$ et $\varphi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}_\alpha}$. Enfin, pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$, on a, grâce à la remarque 4.43,

$$\mathrm{V}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{V}_{\alpha\gamma} = \mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{K}^r \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{V}_{\beta\gamma} = \mathrm{U}_{\alpha\beta\gamma} \times \mathbb{K}^r$$

et
$$(\varphi_{\gamma\beta}^\alpha \circ \varphi_{\beta\alpha}^\gamma)(x,v) = (x, g_{\gamma\beta}(x) g_{\beta\alpha}(x)(v)) = (x, g_{\gamma\alpha}(x)(v)) = \varphi_{\gamma\alpha}^\beta(x,v)\,.$$

On peut donc bien considérer la $\mathscr{C}^k$-prévariété obtenue par recollement des E_α le long des $\mathrm{V}_{\alpha\beta}$ au moyen des $\varphi_{\beta\alpha}$.

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$ et tout $(x,v) \in \mathrm{V}_{\alpha\beta}$, on a $p_1^\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}(x,v) = p_1^\beta((x, g_{\alpha\beta})(v)) = x = p_1(x,v)$. La proposition 1.1 montre qu'il existe une unique application $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ telle que $p \circ \psi_\alpha = p_1^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Comme ψ_α est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme et que p_1 est de classe $\mathscr{C}^k$, on en déduit, par composition par ${\psi_\alpha}^{-1}$, que $p_{|\psi_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Comme les $\psi_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$ forme un recouvrement ouvert de E, la proposition 3.56 montre que p est de classe $\mathscr{C}^k$.

Soient $x \in \mathrm{M}$ et $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\alpha$. On a alors $p^{-1}(x) \subset \psi_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$. En effet, si $y \in p^{-1}(x)$, il existe $\beta \in \mathrm{A}$ tel que $y \in \psi_\beta(\mathrm{E}_\beta)$. On peut écrire $y = \psi_\beta(x', v)$ avec $x' \in \mathrm{U}_\beta$ et $v \in \mathbb{K}^r$. On a alors $x = p(y) = p(\psi_\beta(x', v)) = p_1^\beta(x', v) = x' \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$. Ainsi $y = \psi_\beta(x,v)$ avec $x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$. En particulier, on obtient, $y = \psi_\beta(x,v)$ avec $(x,v) \in \mathrm{V}_{\beta\alpha}$ c'est-à-dire $y \in \psi_\beta(\mathrm{V}_{\beta\alpha})$. Le point (iv) de la proposition 1.1 montre que $y \in \psi_\alpha(\mathrm{V}_{\alpha\beta}) \subset \psi_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$.

Montrons que ψ_α induit une bijection entre $\{x\} \times \mathbb{K}^r$ et $p^{-1}(x)$. Pour tout $v \in \mathbb{K}^r$, on a $p(\psi_\alpha((x,v))) = p_1((x,v)) = x$ d'où $\psi_\alpha(\{x\} \times \mathbb{K}^r) \subset p^{-1}(x)$. Pour $y \in p^{-1}(x) \subset \psi_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$, on écrit $y = \psi_\alpha(x', v)$ avec $x' \in \mathrm{U}_\alpha$ et $v \in \mathbb{K}^r$. Comme $x = p(y) = p(\psi_\alpha(x', v)) = p_1(x', v) = x'$, on en déduit que $y \in \psi_\alpha(\{x\} \times \mathbb{K}^r)$.

On peut alors, par transfert de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\{x\} \times \mathbb{K}^r$ via ψ_α, munir $p^{-1}(x)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrons que cette structure ne dépend pas de l'élément $\beta \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\beta$. En effet, pour $\beta \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\beta$, l'application ${\psi_\beta}^{-1} \circ \psi_\alpha : \{x\} \times \mathbb{K}^r \to \{x\} \times \mathbb{K}^r$ n'est autre que l'isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathrm{id}_x \times g_{\alpha\beta}(x)$. Les deux structures (celle induite par ψ_α et celle induite par ψ_β) coïncident donc.

Pour $x \in \mathrm{U}_\alpha$, on a $p^{-1}(x) = \psi_\alpha(\{x\} \times \mathbb{K}^r)$, d'où $p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) = \psi_\alpha(\mathrm{E}_\alpha)$. De plus, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \arrow[rr, "{\psi_\alpha}^{-1}"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{U}_\alpha \times \mathbb{K}^r \arrow[dl, "p_1^\alpha"] \\ & \mathrm{U}_\alpha & \end{tikzcd}$$

où ${\psi_\alpha}^{-1}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Enfin, comme la structure d'espace vectoriel de $p^{-1}(x)$ est obtenue par transfert de structure de celle de $\{x\} \times \mathbb{K}^r$ via ψ_α, on en déduit que $({\psi_\alpha}^{-1})_x$ est linéaire. Ainsi, grâce à la remarque 4.4, et comme les U_α recouvrent M, l'application p est un fibré vectoriel.

4.5 Fibrés et foncteurs

Proposition 4.45 – Fibré et foncteur. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, T un foncteur covariant de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension fini dans la catégorie des $\mathbb{K}'$-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que l'application

$$\mathrm{T}\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(\mathrm{V}_1), \mathrm{T}(\mathrm{V}_2)) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto \mathrm{T}(f) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$. On considère l'ensemble

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} (\mathrm{T}(\mathrm{E}_x))$$

et l'application

$$\mathrm{T}(p)\colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{E}) \quad\quad \longrightarrow \mathrm{M} \\ y \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \longmapsto x\,. \end{cases}$$

Soit $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$ une carte trivialisante pour p, on définit l'application

$$\mathrm{T}(\varphi)\colon \begin{cases} \mathrm{T}(p)^{-1}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{U} \times \mathrm{T}(\mathrm{F}) \\ e \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \longmapsto (x, (\mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_x))(e)) \end{cases}$$

et on note $\mathrm{T}(\mathfrak{U}) = (\mathrm{U}, \mathrm{T}(\mathrm{F}), \mathrm{T}(\varphi))$.

Soit $\mathscr{F} = (\mathfrak{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ une famille de carte trivialisante pour p. On note U_α le domaine de $\mathfrak{U}_\alpha$. Si $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est un recouvrement (ouvert) de M, il existe sur T(E) un unique $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ tel que $\mathrm{T}(p)$ soit un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}'$ et pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ soit une carte trivialisante pour $\mathrm{T}(p)$.

Soit $\mathscr{F}' = (\mathfrak{U}_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ une famille de carte trivialisante pour p. On note U_β le domaine de $\mathfrak{U}_\beta$. Si $(\mathrm{U}_\beta)_{\alpha \in \mathrm{B}}$ est un recouvrement (ouvert) de M, alors $\mathscr{B}_{\mathscr{F}'} = \mathscr{B}_{\mathscr{F}}$.

Enfin, pour tout carte trivialisante $\mathfrak{U}$ pour p, la carte $\mathrm{T}(\mathfrak{U})$ est trivialisante pour $\mathrm{T}(p)$.

Preuve. On commence par montrer que $\mathrm{T}(p)$ est bien définie. Pour $x \in \mathrm{M}$, on considère l'application $p_x : \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \to \mathrm{M}$ constante égale à x. L'application $\mathrm{T}(p)$ n'est autre que l'application obtenue par la propriété universelle de la réunion disjointe d'ensemble.

Soit $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$ une carte trivialisante pour p. Montrons que $\mathrm{T}(\varphi)$ est bien définie. Pour $x \in \mathrm{U}_\alpha$, on considère l'application linéaire

$$\mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_x) : \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \to \mathrm{T}(\mathrm{F})\,.$$

La structure naturelle d'espace vectoriel sur $\{x\} \times \mathrm{T}(\mathrm{F})$ donne une bijection linéaire

$$\psi_x\colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \longrightarrow \{x\} \times \mathrm{T}(\mathrm{F}) \\ \quad y \quad\quad \longmapsto (x, \mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_x)(y)) = (\mathrm{T}(p)(y), \mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_x)(y))\,. \end{cases}$$

Comme $\quad (\mathrm{T}(p))^{-1}(\mathrm{U}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} (\mathrm{T}(\mathrm{E}_x)) \quad$ et $\quad \mathrm{U} \times \mathrm{T}(\mathrm{F}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} (\{x\} \times \mathrm{T}(\mathrm{F}))\,,$

on en déduit que

$$\mathrm{T}(\varphi) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} \psi_x$$

que $p_1 \circ \mathrm{T}(\varphi) = \mathrm{T}(p)_{|\mathrm{T}(p)^{-1}(\mathrm{U})}$ et que l'application induite par $\mathrm{T}(\varphi)$ entre $\mathrm{T}(\mathrm{E}_x)$ et $\{x\} \times \mathrm{T}(\mathrm{F})$ n'est autre $\mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_x)$ qui est une bijection $\mathbb{K}'$-linéaire (puisque $p_2 \circ \varphi_x$ est une bijection $\mathbb{K}$-linéaire).

Montrons que les conditions de la proposition 4.40 sont vérifiées.

Pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'ensemble $\mathrm{T}(p)^{-1}(x) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_x)$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}'$-espace vectoriel. D'après ce qui précède, on a $p_1 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha) = \mathrm{T}(p)_{|\mathrm{T}(p)^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)}$, $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x$ est bijective et $\mathbb{K}'$-linéaire pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha$.

Il reste à montrer que l'application

$$\delta_{\beta\alpha}\colon \begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^\ell(\mathbb{K}^{r_\alpha}), \Lambda^\ell(\mathbb{K}^{r_\beta})) \\ \quad x \quad\quad \longmapsto (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_x) \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$. Par définition de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}(\varphi_\beta)$, on a

$$\delta_{\beta\alpha}(x) = \mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_{\beta_x}) \circ \mathrm{T}((p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}) = \mathrm{T}((p_2 \circ \varphi_{\beta_x}) \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1}),$$

L'application $\delta_{\beta\alpha}$ est la composée de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta & \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta) \\ x & \longmapsto (p_2 \circ \varphi_{\beta_x}) \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha_x})^{-1} \end{cases}$$

de classe $\mathscr{C}^k$ (voir l'exemple 4.42) avec l'application

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta) & \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}_\alpha), \mathrm{T}(\mathrm{F}_\beta)) \\ f & \longmapsto \mathrm{T}(f) \end{cases}$$

qui est $\mathscr{C}^k$ par hypothèse.

La proposition 4.40 permet alors de conclure.

Si $\mathscr{F}'$ est une autre famille, en considérant la famille $\mathscr{G} = \mathscr{F} \cup \mathscr{F}'$, on obtient un $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$ tel que $\mathrm{T}(p)$ soit un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}'$, $\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\alpha)$ une carte trivialisante de $\mathrm{T}(p)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ et $\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\beta)$ une carte trivialisante de $\mathrm{T}(p)$ pour tout $\beta \in \mathrm{B}$. Par unicité, on obtient $\mathscr{B}_{\mathscr{F}} = \mathscr{B}_{\mathscr{G}} = \mathscr{B}_{\mathscr{F}'}$.

Enfin, si $\mathfrak{U}$ est une carte trivialisante, on peut, quitte à rajouter $\mathfrak{U}$ à la famille $\mathscr{F}$, considérer que $\mathfrak{U} \in \mathscr{F}$. Ainsi $\mathrm{T}(\mathfrak{U})$ est un bien carte trivialisante pour $\mathrm{T}(p)$.

Proposition 4.46 — Fibré et foncteur 2. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, T un foncteur covariant de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension fini dans la catégorie des $\mathbb{K}'$-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que l'application

$$\mathrm{T}\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) & \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(\mathrm{V}_1), \mathrm{T}(\mathrm{V}_2)) \\ f & \longmapsto \mathrm{T}(f) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$.

Soient $(\mathrm{M}_1, \mathscr{A}_1)$, $(\mathrm{M}_2, \mathscr{A}_2)$, $(\mathrm{E}_1, \mathscr{B}_1)$ et $(\mathrm{E}_2, \mathscr{B}_2)$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $q_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{M}_1$ et $q_2 : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{M}_2$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(q_1, q_2)$.

On considère l'application

$$\mathrm{T}(f)\colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{E}_1) & \longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{E}_2) \\ y \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x & \longmapsto \mathrm{T}(f_x)(y) \end{cases}$$

et on pose $\mathrm{T}((f, g)) = (\mathrm{T}(f), g)$. On a $\mathrm{T}((f, g)) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_2))$.

Soient $(\mathrm{M}_3, \mathscr{A}_3)$, $(\mathrm{E}_3, \mathscr{B}_3)$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $q_3 : \mathrm{E}_3 \to \mathrm{M}_3$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $(f', g') \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(q_2, q_3)$. On a $\mathrm{T}((f', g')) \circ \mathrm{T}((f, g)) = \mathrm{T}((f \circ f', g \circ g'))$ et $\mathrm{T}(\mathrm{id}_{q_1}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}$

Preuve. Montrons que $\mathrm{T}(f)$ est bien définie. Pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $f_x : \mathrm{E}_{1x} \to \mathrm{E}_{2g(x)}$ est $\mathbb{K}$-linéaire. Par fonctorialité, on a une application $\mathrm{T}(f_x) : \mathrm{T}(\mathrm{E}_{1x}) \to \mathrm{T}(\mathrm{E}_{2g(x)})$. Or, par construction de $\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ et $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)$, on a $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{1x}) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x$ et $\mathrm{T}(\mathrm{E}_{2g(x)}) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_{g(x)}$. Comme

$$\bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x = \mathrm{T}(\mathrm{E}_1) \qquad \text{et} \qquad \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_{g(x)} \subset \mathrm{T}(\mathrm{E}_2),$$

l'application
$$\bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}(f_x) : \mathrm{T}(\mathrm{E}_1) \longrightarrow \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_{g(x)}$$

définit une application de $\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ dans $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)$ qui n'est autre que $\mathrm{T}(f)$ (qui est bien définie). De plus, par définition, on a bien sûr $\mathrm{T}(q_2) \circ \mathrm{T}(f) = g \circ \mathrm{T}(q_1)$ et l'application $\mathrm{T}(f)_x$ n'est autre que $\mathrm{T}(f_x)$ qui est $\mathbb{K}'$-linéaire.

Montrons que $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^k$. On utilise pour cela la proposition 4.19. On considère une famille $(\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{F}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) de cartes trivialisantes pour q_1 (resp. q_2) vérifiant $\mathrm{M}_1 = \cup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha$ (resp. $\mathrm{M}_2 = \cup_{\beta \in \mathrm{B}} \mathrm{U}_\beta$). Comme, pour une carte trivialisante le domaine de $\mathrm{T}(\mathfrak{U})$ est celui de $\mathfrak{U}$ coïncide, la proposition 4.45 montre que $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) est une famille de cartes trivialisantes pour $\mathrm{T}(q_1)$ (resp. $\mathrm{T}(q_2)$) dont les domaines recouvrent M (resp. M′).

Pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$, on a, par définition de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}(\varphi_\beta)$

$$p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x = \mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_{\alpha_x}) \qquad \text{et} \qquad p_2 \circ p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_{g(x)} = \mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_{\beta_{g(x)}})$$

On en déduit que

$$(p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_{g(x)}) \circ \mathrm{T}(f_x) \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} = \mathrm{T}((p_2 \circ \varphi_{\beta\, g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha\, x}))$$

Ainsi, l'application $x \mapsto (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_{g(x)}) \circ \mathrm{T}(f_x) \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1}$ est la composée de l'application $x \mapsto (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_{g(x)}) \circ \mathrm{T}(f_x) \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1}$ qui est $\mathscr{C}^k$ puisque $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(q_1, q_2)$ (voir la proposition 4.19) avec l'application $\mathrm{T} : f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta) \mapsto \mathrm{T}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{F}'_\alpha, \mathrm{F}'_\beta)$ qui est $\mathscr{C}^k$ par hypothèse. La proposition 4.19 montre alors que $(\mathrm{T}(f), g) = \mathrm{T}(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_2))$.

Soit $e \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$. On pose $x = \mathrm{T}(q_1)(e)$. On a alors $\mathrm{T}(f)(e) = \mathrm{T}(f)_x(e) = \mathrm{T}(f_x)(e) \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_{g(x)}$, d'où

$$\mathrm{T}(f')(\mathrm{T}(f)(e)) = \mathrm{T}(f')_{g(x)}\mathrm{T}(f_x)(e) = \mathrm{T}(f'_{g(x)}) \circ \mathrm{T}(f_x)(e) = \mathrm{T}(f'_{g(x)} \circ f_x)(e) = \mathrm{T}((f' \circ f)_x)(e) = \mathrm{T}(f' \circ f)(e)\,.$$

On obtient ainsi $\mathrm{T}(f') \circ \mathrm{T}(f) = \mathrm{T}(f' \circ f)$ et donc $\mathrm{T}((f', g')) \circ \mathrm{T}((f, g)) = \mathrm{T}(f' \circ f, g' \circ g)$. De plus, on a $\mathrm{T}(\mathrm{id})(e) = \mathrm{T}(\mathrm{id})_x(e) = \mathrm{T}(\mathrm{id}_x)(e) = \mathrm{id}(e) = e$ et donc $\mathrm{T}(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. D'où $\mathrm{T}(\mathrm{id}_{q_1}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}$.

Proposition 4.47 – Fibré et foncteur 3. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, T et T′ deux foncteurs covariants de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie des $\mathbb{K}'$-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que les applications

$$\mathrm{T}\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(\mathrm{V}_1), \mathrm{T}(\mathrm{V}_2)) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto \mathrm{T}(f) \end{cases}$$

et

$$\mathrm{T}'\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{T}'(\mathrm{V}_1), \mathrm{T}'(\mathrm{V}_2)) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto \mathrm{T}'(f) \end{cases}$$

sont de classe $\mathscr{C}^k$. On considère une transformation naturelle $\tau : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$.

Soient $(\mathrm{M}_1, \mathscr{A}_1)$, $(\mathrm{E}_1, \mathscr{B}_1)$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $q_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{M}_1$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. On considère l'application

$$\tau'_{q_1}\colon \begin{cases} \qquad \mathrm{T}(\mathrm{E}_1) \qquad\qquad \longrightarrow \mathrm{T}'(\mathrm{E}_1) \\ y \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x = \mathrm{T}(\mathrm{E}_{1x}) \longmapsto \tau_{\mathrm{E}_{1x}}(y) \in \mathrm{T}(\mathrm{E}'_{1x}) \end{cases}$$

On a $\tau'_{q_1} \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_2))$. On définit alors $\tau_{q_1} = (\tau'_{q_1}, \mathrm{id}_{\mathrm{M}}) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_2))$.

Soient $(\mathrm{M}_2, \mathscr{A}_2)$, $(\mathrm{E}_2, \mathscr{B}_2)$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $q_2 : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{M}_2$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $(f, g) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(q_1, q_2)$. On a $\mathrm{T}'((f, g)) \circ \tau_{q_1} = \tau_{q_2} \circ \mathrm{T}((f, g))$.

On considère un foncteur covariant T″ de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie des $\mathbb{K}'$-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que l'application

$$\mathrm{T}''\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{T}''(\mathrm{V}_1), \mathrm{T}''(\mathrm{V}_2)) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto \mathrm{T}''(f) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$. On considère une transformation naturelle $\beta : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}''$. On a alors $\beta_{q_1} \circ \tau_{q_1} = (\beta \circ \tau)_{q_1}$. Si $\mathrm{T} = \mathrm{T}'$ et $\tau = \mathrm{id}_{\mathrm{T}}$ alors $\tau_{q_1} = \mathrm{id}_{q_1}$.

Preuve. Montrons que τ'_{q_1} est bien définie. Comme

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}_1) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_{1x}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}'(\mathrm{E}_1) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}'(\mathrm{E}_{1x})\,,$$

l'application τ'_{q_1} n'est autre que l'application

$$\tau'_{q_1} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \tau_{\mathrm{E}_{1x}}\,.$$

De plus, par construction, on a $\mathrm{T}'(q_1) \circ \tau_{q_1} = \mathrm{T}(q_1)$ et $\tau'_{q_1\, x} = \tau_{\mathrm{E}_{1x}}$ est $\mathbb{K}$-linéaire. Montrons que τ_{q_1} est de classe $\mathscr{C}^k$. On utilise la proposition 4.19 (avec $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$, $g = \mathrm{id}$). On considère une famille $(\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de cartes trivialisantes pour q_1 vérifiant $\mathrm{M}_1 = \cup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha$. Comme, pour une carte trivialisante le domaine de $\mathrm{T}(\mathfrak{U})$ est celui de $\mathfrak{U}$ coïncide, la proposition 4.45 montre que $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est une famille de cartes trivialisantes pour $\mathrm{T}(q_1)$ dont les domaines recouvrent M.

Pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha$, on a, par définition de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)$

$$p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x = \mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_{\alpha x}) \qquad \text{et} \qquad p_2 \circ \mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x = \mathrm{T}'(p_2 \circ \varphi_{\alpha x})$$

On en déduit que

$$(p_2 \circ \mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x) \circ \tau_{\mathrm{E}_{1x}} \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} = \mathrm{T}'(p_2 \circ \varphi_{\alpha x}) \circ \tau_{\mathrm{E}_{1x}} \circ \mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_{\alpha x}) = \tau_{\mathrm{F}_\alpha}$$

Ainsi, l'application $x \mapsto (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_{g(x)}) \circ \mathrm{T}(f_x) \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1}$ est constante donc $\mathscr{C}^k$. La proposition 4.19 montre alors que $\tau'_{q_1} \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}'}(\mathrm{M}, \mathrm{T}(q_1))\mathrm{T}'(q_1)$.

On a $\mathrm{T}'((f,g)) \circ \tau_{q_1} = (\mathrm{T}'(f) \circ \tau'_{q_1}, g)$ et $\tau_{q_2} \circ \mathrm{T}((f,g)) = (\tau'_{q_2} \circ \mathrm{T}(f), g)$. Il s'agit donc de montrer que $\mathrm{T}'(f) \circ \tau'_{q_1} = \tau'_{q_2} \circ \mathrm{T}(f)$. Soit $e \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$. On pose $x = \mathrm{T}(q_1)(e)$. Comme $\mathrm{T}(f_x)(e) \in \mathrm{E}_{2g(x)}$ et $\tau_{\mathrm{E}_{2g(x)}} \circ \mathrm{T}(f_x) = \mathrm{T}'(f_x) \circ \tau_{\mathrm{E}_{1x}}$, on obtient

$$\tau'_{q_2} \circ \mathrm{T}(f)(e) = \tau'_{q_2} \circ \mathrm{T}(f)_x(e) = \tau'_{q_2} \circ \mathrm{T}(f_x)(e) = \tau_{\mathrm{E}_{2g(x)}} \circ \mathrm{T}(f_x)(e) = \mathrm{T}'(f_x) \circ \tau_{\mathrm{E}_{1x}}(e) = \mathrm{T}'(f) \circ \tau'_{q_1}(e)\,.$$

Soit $e \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$. On pose $x = \mathrm{T}(q_1)(e)$. On obtient

$$\beta'_{q_1} \circ \tau'_{q_1}(e) = \beta'_{q_1} \circ \tau'_{\mathrm{E}_{1x}}(e) = \beta'_{\mathrm{E}_{1x}} \circ \tau'_{\mathrm{E}_{1x}}(e) = (\beta \circ \tau)'_{\mathrm{E}_{1x}}(e) = (\beta \circ \tau)'_{q_1}(e)$$

Comme $\mathrm{id}_\mathrm{M} \circ \mathrm{id}_\mathrm{M} = \mathrm{id}_\mathrm{M}$, on obtient $\beta_{q_1} \circ \tau_{q_1} = (\beta \circ \tau)_{q_1}$.

Soit $e \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$. On pose $x = \mathrm{T}(q_1)(e)$. Comme $\tau_{\mathrm{E}_{1x}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}_{1x}}$, on obtient

$$\tau'_{q_1}(e) = \tau_{\mathrm{E}_{1x}}(e) = e = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}(e)\,.$$

Comme $\mathrm{id}_\mathrm{M} = \mathrm{id}_\mathrm{M}$, on en déduit que $\tau_{q_1} = \mathrm{id}_{q_1}$.

Proposition 4.48 — Action de groupe et fibré vectoriel. Soient G un groupe discret, $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. On suppose que

(*i*) G agit proprement, librement et de façon $\mathscr{C}^k$ sur M ;

(*ii*) G agit proprement et librement sur E ;

(*iii*) Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(g,g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p)$;

On note $\pi_\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}/\mathrm{G}$ et $\pi_\mathrm{M} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{G}$ les surjections canoniques. L'application $\widetilde{p} : \mathrm{E}/\mathrm{G} \to \mathrm{M}/\mathrm{G}$ induite par passage au quotient est un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel et $(\pi_\mathrm{E}, \pi_\mathrm{M}) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, \widetilde{p})$.

Preuve. Soit $g \in \mathrm{G}$. Comme $(g,g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p)$, on a $p \circ g = g \circ p$. Ainsi p est G-équivariante. Comme p est G-équivariante, elle induit une application $\widetilde{p} : \mathrm{E}/\mathrm{G} \to \mathrm{M}/\mathrm{G}$ qui est obtenu par passage au quotient de l'application $\pi_\mathrm{E} \circ p$ de classe $\mathscr{C}^k$. Ainsi $\widetilde{p}$ est $\mathscr{C}^k$. Soit $y = \pi_\mathrm{M}(x) \in \mathrm{M}/\mathrm{G}$ et il existe un voisinage U de x tel que π_M réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U sur l'ouvert $\pi_\mathrm{M}(\mathrm{U})$ de M/G (quitte à considérer l'intersection de U avec un ouvert de M contenant x trivialisant pour p, on suppose que U est trivialisant). On note alors φ une trivialisation de p au-dessus de U de fibre $\mathbb{K}^n$.

Soit $z \in \mathrm{M}/\mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{M}$ tel que $\pi_\mathrm{M}(x) = z$. Montrons que l'application π_E réalise une bijection de $p^{-1}(x)$ sur $\widetilde{p}^{-1}(z)$. On a

$$\widetilde{p}(\pi_\mathrm{E}(p^{-1}(x))) = \pi_\mathrm{M}(p(p^{-1}(x))) \subset \pi_\mathrm{M}(\{x\}) = \{z\}$$

Ainsi, $\pi_\mathrm{E}(p^{-1}(x)) \subset \widetilde{p}^{-1}(z)$.

Soient $u, v \in p^{-1}(x)$ tels que $\pi_\mathrm{E}(u) = \pi_\mathrm{E}(v)$. Il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $u = gv$. Comme p est G-équivariante, on en déduit que

$$x = p(u) = p(gv) = gp(v) = gx\,.$$

Comme l'action de G sur M est libre, on obtient que $g = 1$ et donc $x = y$. Ainsi π_E est injective.

Soit $u \in \widetilde{p}^{-1}(z)$. Il existe $e \in \mathrm{E}$ tel que $u = \pi_\mathrm{E}(e)$. On a alors

$$\pi_\mathrm{M}(x) = z = \widetilde{p}(\pi_\mathrm{E}(e)) = \pi_\mathrm{M}(p(e))$$

D'où $x = gp(e)$ et, comme p est G-équivariante, $x = p(ge)$. Ainsi $ge \in p^{-1}(x)$ et $\pi_\mathrm{E}(ge) = \pi_\mathrm{E}(e) = u$, d'où $u \in \pi_\mathrm{E}(p^{-1}(x))$.

Par transfert de structure (via π_E), on peut ainsi munir $\widetilde{p}^{-1}(z)$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrons que cette structure ne dépend pas du choix de $x \in \mathrm{M}$ tel que $\pi_\mathrm{M}(x) = z$. Soient $x, y \in \mathrm{M}$ tel que $p_\mathrm{M}(x) = p_\mathrm{M}(y) = z$. Il suffit de montrer que l'application $\delta = {\pi_\mathrm{E}}^{-1} \circ \pi_\mathrm{E} : p^{-1}(x) \to p^{-1}(y)$ est $\mathbb{K}$-linéaire. Soit $e \in p^{-1}(x)$. Calculons $\delta(e)$. Il existe (un unique) $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = gx$. Montrons que $\delta(e) = ge$. Comme $\pi_\mathrm{E}(ge) = \pi_\mathrm{E}(e) \in \widetilde{p}^{-1}(z)$ et $p(ge) = gp(e) = gx = y$, on

obtient $ge \in p^{-1}(y)$. Ainsi ge est l'antécédent (dans $p^{-1}(y)$) de $\pi_{\mathrm{E}}(e)$, autrement dit, $\delta(e) = ge$. Comme g est un automorphisme du fibré vectoriel p, on en déduit que la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\widetilde{p}^{-1}(z)$ ne dépend pas du choix de $x \in \mathrm{M}$ tel que $\pi_{\mathrm{M}}(x) = z$.

Montrons que l'application π_{E} réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme entre $p^{-1}(\mathrm{U})$ et $\widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}))$. On a

$$\widetilde{p}(\pi_{\mathrm{E}}(p^{-1}(\mathrm{U}))) = \pi_{\mathrm{M}}(p(p^{-1}(\mathrm{U}))) \subset \pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$$

d'où
$$\pi_{\mathrm{E}}(p^{-1}(\mathrm{U})) \subset \widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}))$$

Ainsi π_{E} définit bien une application $\mathscr{C}^k$ de $p^{-1}(\mathrm{U})$ de $\widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}))$ qui est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme local puisque π_{E} en est un et que $p^{-1}(\mathrm{U})$ et $\widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}))$ sont ouverts. Il suffit à présent de montrer que π_{E} est bijective.

Soient $x, y \in p^{-1}(\mathrm{U})$ tels que $\pi_{\mathrm{E}}(x) = \pi_{\mathrm{E}}(y)$. Il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $y = gx$. Comme p est G-équivariante, on en déduit que

$$\pi_{\mathrm{M}}(p(y)) = \pi_{\mathrm{M}}(p(gx)) = \pi_{\mathrm{M}}(gp(x)) = \pi_{\mathrm{M}}(p(x))\,.$$

Or $p(x), p(y) \in \mathrm{U}$. Comme π_{M} réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U sur l'ouvert $\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$ de M/G, on en déduit que $p(x) = p(y) = p(gx) = gp(x)$. Comme l'action de G sur M est libre, on obtient que $g = 1$ et donc $x = y$. Ainsi π_{E} est injective.

Soit $z \in \widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}))$. Il existe $t \in \mathrm{U}$ et $e \in \mathrm{E}$ tels que $\widetilde{p}(z) = \pi_{\mathrm{M}}(t)$ et $z = \pi_{\mathrm{E}}(e)$. On a alors

$$\pi_{\mathrm{M}}(t) = \widetilde{p}(z) = \widetilde{p}(\pi_{\mathrm{E}}(e)) = \pi_{\mathrm{M}}(p(e))$$

D'où $t = gp(e)$ et, comme p est G-équivariante, $t = p(ge)$. Ainsi $ge \in p^{-1}(\mathrm{U})$ et $\pi_{\mathrm{E}}(ge) = \pi_{\mathrm{E}}(e) = z$, d'où $z \in \pi_{\mathrm{E}}(p^{-1}(\mathrm{U}))$.

Montrons que l'application

$$\psi = (\pi_{\mathrm{M}} \times \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \circ \varphi \circ {\pi_{\mathrm{E}}}^{-1} : \widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})) \to \pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}) \times \mathbb{K}^n$$

est une trivialisation de $\widetilde{p}$ au-dessus de $\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$ de fibre $\mathbb{K}^n$. En effet, ψ est la composée de trois $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes et donc un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. De plus, on a

$$p_1 \circ \psi = \pi_{\mathrm{M}} \circ p_1 \circ \varphi \circ {\pi_{\mathrm{E}}}^{-1} = \pi_{\mathrm{M}} \circ p \circ {\pi_{\mathrm{E}}}^{-1} = \widetilde{p} \circ \pi_{\mathrm{E}} \circ {\pi_{\mathrm{E}}}^{-1} = \widetilde{p}\,.$$

Enfin, pour $z \in \pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$, il existe un unique $x \in \mathrm{U}$ tel que $\pi_{\mathrm{M}}(x) = z$. Par construction de la structure d'espace vectoriel sur $\widetilde{p}^{-1}(z)$, π_{E} réalise une bijection $\mathbb{K}$-linéaire de $\widetilde{p}^{-1}(z)$ sur $p^{-1}(x) \subset p^{-1}(\mathrm{U})$. Comme φ est une trivialisation de p au-dessus de U, φ réalise une bijection $\mathbb{K}$-linéaire de $p^{-1}(x)$ sur $\{x\} \times \mathbb{K}^n$. Enfin, $\pi_{\mathrm{M}} \times \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ réalise une bijection $\mathbb{K}$-linéaire de $\{x\} \times \mathbb{K}^n$ sur $\{z\} \times \mathbb{K}^n$. Ainsi l'application ψ réalise une bijection $\mathbb{K}$-linéaire de $\widetilde{p}^{-1}(z)$ sur $\{z\} \times \mathbb{K}^n$ et ψ est bien une trivialisation au-dessus de $\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$.

Ainsi $\widetilde{p}$ est un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Par construction π_{E} et π_{M} sont $\mathscr{C}^k$. Par définition de $\widetilde{p}$, on a $\pi_{\mathrm{E}} \circ p = \widetilde{p} \circ \pi_{\mathrm{M}}$. Enfin, pour $x \in \mathrm{M}$, par construction de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\widetilde{p}^{-1}(p(x))$, l'application induite par π_{E} de $p^{-1}(x)$ dans $\widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(x))$ est $\mathbb{K}$-linéaire.

Proposition 4.49 — Action de groupe, fibré vectoriel et fonctorialité. Soient G un groupe discret, $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $(f, h) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p, p')$. On suppose que

(i) G agit proprement, librement et de façon $\mathscr{C}^k$ sur M et M' ;
(ii) G agit proprement et librement sur E et E' ;
(iii) Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(g, g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p)$ et $(g, g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p')$;
(iv) f et h sont G-équivariantes.

On note $\widetilde{f} : \mathrm{E}/\mathrm{G} \to \mathrm{E}'/\mathrm{G}$, $\widetilde{h} : \mathrm{M}/\mathrm{G} \to \mathrm{M}'/\mathrm{G}$, $\widetilde{p} : \mathrm{E}/\mathrm{G} \to \mathrm{M}/\mathrm{G}$ et $\widetilde{p'} : \mathrm{E}'/\mathrm{G} \to \mathrm{M}'/\mathrm{G}$ les applications induite par passage au quotient. On a alors $(\widetilde{f}, \widetilde{h}) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(\widetilde{p}, \widetilde{p'})$.

Soient $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$ et $(\mathrm{E}'', \mathscr{B}'')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p'' : \mathrm{E}'' \to \mathrm{M}''$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $(f', h') \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p', p'')$. On suppose que

(i) G agit proprement, librement et de façon $\mathscr{C}^k$ sur M'' ;

(*ii*) G agit proprement et librement sur E'' ;
(*iii*) Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(g,g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p'')$;
(*iv*) f' et h' sont G-équivariantes.

On note $\widetilde{f'} : \mathrm{E}'/\mathrm{G} \to \mathrm{E}''/\mathrm{G}$, $\widetilde{h'} : \mathrm{M}'/\mathrm{G} \to \mathrm{M}''/\mathrm{G}$, $\widetilde{p''} : \mathrm{E}''/\mathrm{G} \to \mathrm{M}''/\mathrm{G}$ les applications induite par passage au quotient. On a alors $(\widetilde{f'}, \widetilde{h'}) \circ (\widetilde{f}, \widetilde{h}) = (\widetilde{f' \circ f}, \widetilde{h' \circ h})$ et $(\widetilde{\mathrm{id}_\mathrm{E}}, \widetilde{\mathrm{id}_\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\widetilde{p}}$.

Preuve. En effet, $\widetilde{p}$ et $\widetilde{p'}$ sont des $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$ d'après la proposition 4.48. On note $\pi_\mathrm{M} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{G}$, $\pi_{\mathrm{M}'} : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}'/\mathrm{G}$, $\pi_\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}/\mathrm{G}$ et $\pi_{\mathrm{E}'} : \mathrm{E}' \to \mathrm{E}'/\mathrm{G}$ les surjections canoniques. Par ailleurs, $\widetilde{f}$ (resp. $\widetilde{h}$) est $\mathscr{C}^k$ puisqu'elle est obtenue par passage au quotient de l'application $\pi_{\mathrm{E}'} \circ f$ qui $\mathscr{C}^k$.

De plus, comme $p' \circ f = h \circ p$, on a, par fonctorialité, $\widetilde{p'} \circ \widetilde{f} = \widetilde{h} \circ \widetilde{p}$.

Enfin, soit $z \in \mathrm{M}/\mathrm{G}$. Montrons que l'application $\widetilde{f_z} : \widetilde{p}^{-1}(z) \to \widetilde{p'}^{-1}(\widetilde{h}(z))$ est $\mathbb{K}$-linéaire. Soit $x \in \mathrm{M}$ tel que $\pi_\mathrm{M}(x) = z$. Par définition de $\widetilde{f}$, on a $\pi_{\mathrm{E}'} \circ f = \widetilde{f} \circ \pi_\mathrm{E}$. Comme π_E réalise une bijection entre $p^{-1}(x)$ et $\widetilde{p}^{-1}(z)$ (voir la démonstration de la proposition 4.48), on obtient que $\widetilde{f_z} = \pi_{\mathrm{E}'} \circ f_x \circ {\pi_\mathrm{E}}^{-1}$. Or π_E est une application $\mathbb{K}$-linéaire entre $p^{-1}(x)$ et $\widetilde{p}^{-1}(z)$ (voir la démonstration de la proposition 4.48), f_x est une application $\mathbb{K}$-linéaire de $p^{-1}(x)$ dans ${p'}^{-1}(h(x))$ et $\pi_{\mathrm{E}'}$ est une application $\mathbb{K}$-linéaire de ${p'}^{-1}(h(x))$ dans $\widetilde{p'}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}'}(h(x))) = \widetilde{p'}^{-1}(\widetilde{h}(z))$ (voir la démonstration de la proposition 4.48). Par composition, on obtient que $\widetilde{f_z}$ est $\mathbb{K}$-linéaire ce qui donne le résultat.

En effet, par fonctorialité, on a $\widetilde{f' \circ f} = \widetilde{f'} \circ \widetilde{f}$, $\widetilde{h' \circ h} = \widetilde{h'} \circ \widetilde{h}$, $\widetilde{\mathrm{id}_\mathrm{E}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}/\mathrm{G}}$ et $\widetilde{\mathrm{id}_\mathrm{M}} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}/\mathrm{G}}$.

Proposition 4.50 — Action de groupe et fibré vectoriel et image réciproque. Soient G un groupe discret, $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. On suppose que

(*i*) G agit proprement, librement et de façon $\mathscr{C}^k$ sur M ;
(*ii*) G agit proprement et librement sur E ;
(*iii*) Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(g,g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p)$.

On note $\pi_\mathrm{M} : \mathrm{M} \to \mathrm{M}/\mathrm{G}$ (resp. $\pi_\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}/\mathrm{G}$) la surjection canonique et $\widetilde{p} : \mathrm{E}/\mathrm{G} \to \mathrm{M}/\mathrm{G}$ l'application induite par passage au quotient. L'application

$$\alpha_p : \begin{cases} p \longrightarrow {\pi_\mathrm{M}}^*(\widetilde{p}) \\ e \longmapsto (p(e), \pi_\mathrm{E}(e)) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel au-dessus de M.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $(f,h) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p,p')$. On suppose que

(*i*) G agit proprement, librement et de façon $\mathscr{C}^k$ sur M' ;
(*ii*) G agit proprement et librement sur E' ;
(*iii*) Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(g,g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p')$;
(*iv*) f et h sont G-équivariantes.

On note $\widetilde{f} : \mathrm{E}/\mathrm{G} \to \mathrm{E}'/\mathrm{G}$ et $\widetilde{h} : \mathrm{M}/\mathrm{G} \to \mathrm{M}'/\mathrm{G}$ les applications induite par passage au quotient. On a $\mathrm{R}_{h,\widetilde{h},\widetilde{f}} \circ \alpha_p = \alpha_{p'} \circ f$.

Preuve. On reprend la notation de la proposition-définition 4.29. D'après la proposition 4.48, on a $(\pi_\mathrm{E}, \pi_\mathrm{M}) \in \mathrm{Hom}^{\pi_\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p, \widetilde{p'})$. Ainsi $\Gamma^{-1}(\pi_\mathrm{E}, \pi_\mathrm{M}) \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p, {\pi_\mathrm{M}}^*(\widetilde{p}))$. Montrons que $\Gamma^{-1}(\pi_\mathrm{E}, \pi_\mathrm{M})$ est un isomorphisme. Par construction (voir la démonstration de la proposition-définition 4.29), on a pour $e \in \mathrm{E}$,

$$\Gamma^{-1}(\pi_\mathrm{E}, \pi_\mathrm{M})(e) = (p(e), \pi_\mathrm{E}(e)) = \alpha_p(e)\,.$$

Ainsi $\alpha_p = \Gamma^{-1}(\pi_\mathrm{E}, \pi_\mathrm{M}) \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}_{k,\mathbb{K}}(p, {\pi_\mathrm{M}}^*(\widetilde{p}))$.

On va construire la bijection réciproque de α_p. Pour $(x,y) \in \mathrm{M} \,{}_{\pi_\mathrm{M}}\!\times_{\widetilde{p}} \mathrm{E}/\mathrm{G}$, on a $y \in \widetilde{p}^{-1}(\pi_\mathrm{M}(x))$. D'après la preuve de la proposition 4.48, π_E réalise une bijection $\pi_{\mathrm{E},x}$ de $p^{-1}(x)$ dans $\widetilde{p}^{-1}(\pi_\mathrm{M}(x))$. On pose alors $h((x,y)) = {\pi_{\mathrm{E},x}}^{-1}(y) \in p^{-1}(x)$. On définit ainsi une application $h : \mathrm{M} \,{}_{\pi_\mathrm{M}}\!\times_{\widetilde{p}} \mathrm{E}/\mathrm{G} \to \mathrm{E}$. Par construction, on a ${\pi_{\mathrm{E},x}}^{-1}(y) \in p^{-1}(x)$. On en déduit que, pour $(x,y) \in \mathrm{M} \,{}_{\pi_\mathrm{M}}\!\times_{\widetilde{p}} \mathrm{E}/\mathrm{G}$, on a

$$\alpha_p \circ h((x,y)) = (p({\pi_{\mathrm{E},x}}^{-1}(y)), \pi_{\mathrm{E}}({\pi_{\mathrm{E},x}}^{-1})(y)) = (x,y)$$

Pour $e \in \mathrm{E}$, on a $e \in p^{-1}(p(e))$. De plus, la bijection $\pi_{\mathrm{E},p(e)}$ induite par π_{E} de $p^{-1}(p(e))$ dans $\widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(p(e))) = \widetilde{p}^{-1}(\widetilde{p}(\pi_{\mathrm{E}}(e)))$ envoie e sur $\pi_{\mathrm{E}}(e)$. $h \circ \alpha_p(e) = h(p(e), \pi_{\mathrm{E}}(e)) = {\pi_{\mathrm{E},p(e)}}^{-1}(\pi_{\mathrm{E}}(e)) = e$.

On en déduit que h est la bijection réciproque de α_p. Il suffit à présent de montrer que h est de classe $\mathscr{C}^k$ (voir la remarque 4.24).

On considère $(x,y) \in \mathrm{M}\,{}_{\pi_{\mathrm{M}}}\!\times_{\widetilde{p}}\mathrm{E/G}$. D'après le calcul effectué ci-dessus, on a $\pi_{\mathrm{E}} \circ g = p_2 \circ \alpha_p \circ g = p_2$. Il existe un ouvert U de M contenant x tel que $\pi_{\mathrm{M}} : \mathrm{U} \to \pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U sur l'ouvert $\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$ de M/G. L'ensemble

$$\mathrm{W} = (\mathrm{U} \times \widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}))) \cap \mathrm{M}\,{}_{\pi_{\mathrm{M}}}\!\times_{\widetilde{p}}\mathrm{E/G}$$

est alors un ouvert de $\mathrm{M}\,{}_{\pi_{\mathrm{M}}}\!\times_{\widetilde{p}}\mathrm{E/G}$ contenant (x,y) (puisque $x \in \mathrm{U}$ et $\widetilde{p}(y) = \pi_{\mathrm{M}}(x) \in \pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$). De plus, par construction de g, on a $g(\mathrm{W}) \subset p^{-1}(\mathrm{U})$.

Or la preuve de la proposition 4.48 montre que π_{E} réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\pi_{\mathrm{E,W}}$ de $p^{-1}(\mathrm{U})$ sur l'ouvert $\widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}))$ de E/G. On en déduit que

$$g_{|\mathrm{W}} = {\pi_{\mathrm{E}}}^{-1} \circ p_2$$

Ainsi g est de classe $\mathscr{C}^k$.

Par définition de $\widetilde{f}$, on a $\pi_{\mathrm{E}'} \circ f = \widetilde{f} \circ \pi_{\mathrm{E}}$. De plus, $(f,h) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(p,p')$ donc $h \circ p = f \circ p'$. Pour $e \in \mathrm{E}$, on a donc

$$\mathrm{R}_{h,\widetilde{h},\widetilde{f}} \circ \alpha_p(e) = \mathrm{R}_{h,\widetilde{h},\widetilde{f}}(p(e), \pi_{\mathrm{E}}(e)) = (h(p(e)), \widetilde{f}(\pi_{\mathrm{E}}(e))) = (f \circ p'(e), \pi_{\mathrm{E}'}(f(e))) = \alpha_{p'} \circ f(e)\,.$$

Proposition 4.51 — Action de groupe et fibré vectoriel et foncteur. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, T un foncteur covariant de la catégorie des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie dans la catégorie des $\mathbb{K}'$-espaces vectoriels de dimension finie. On suppose que l'application

$$\mathrm{T}\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(\mathrm{V}_1), \mathrm{T}(\mathrm{V}_2)) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto \mathrm{T}(f) \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^k$.

Soient G un groupe discret, $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. On suppose que

(i) G agit proprement, librement et de façon $\mathscr{C}^k$ sur M ;
(ii) G agit proprement et librement sur E ;
(iii) Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(g,g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p)$.

Alors G agit proprement sur T(E) pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(g,g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(p))$.

On note $\widetilde{\mathrm{T}(p)} : (\mathrm{TE})/\mathrm{G} \to \mathrm{M/G}$ l'application induite par l'application G-équivariante $\mathrm{T}(p) : \mathrm{TE} \to \mathrm{M}$. On suppose que l'action de G sur T(E) est libre. On note $\pi_{\mathrm{TE}} : \mathrm{TE} \to (\mathrm{TE})/\mathrm{G}$ la surjection canonique.

L'application

$$\begin{cases} (\mathrm{TE})/\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{E/G}) \\ \pi_{\mathrm{TE}}(v) \longmapsto \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}'$ au-dessus de M/G de $\mathrm{T}(\widetilde{p})$ dans $\widetilde{\mathrm{T}(p)}$.

Preuve. Par fonctorialité (proposition 4.46), pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(\mathrm{T}(g), g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(p))$. En particulier, $\mathrm{T}(g)$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de T(E) et $g \mapsto \mathrm{T}(g)$ est un morphisme de groupes. On en déduit une action de G sur T(E) qui est de classe $\mathscr{C}^k$ puisque G est discret.

D'après la proposition 4.48, on peut considérer la $\mathscr{C}^k$-prévariété $(\mathrm{TE})/\mathrm{G}$ et le $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel $\widetilde{\mathrm{T}(p)} : (\mathrm{TE})/\mathrm{G} \to \mathrm{M/G}$ sur $\mathbb{K}'$. De plus, $(\pi_{\mathrm{TE}}, \pi_{\mathrm{M}}) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}'}(\mathrm{T}(p), \widetilde{\mathrm{T}(p)})$.

Par définition de π_{E}, on a $\pi_{\mathrm{E}} \circ g = \pi_{\mathrm{E}}$. Ainsi, par fonctorialité, on a $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}}) \circ \mathrm{T}(g) = \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})$. Ainsi $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})$ passe au quotient et définit une application de classe $\mathscr{C}^k$ donnée par

$$\begin{cases} (\mathrm{TE})/\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{E}/\mathrm{G}) \\ \pi_{\mathrm{TE}}(v) \longmapsto \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v) \end{cases}$$

Montrons que cette application est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Comme π_{E} est un difféomorphisme local, $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})$ en est aussi un. Ainsi, par passage au quotient, on en déduit que l'application étudiée est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme local. Il suffit de montrer qu'elle est bijective.

Soient $v, v' \in \mathrm{TE}$ tel que $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v) = \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v')$. On note $\mathrm{T}(p)(v) = x$ et $\mathrm{T}(p)(v') = x'$. On a alors $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v) \in \mathrm{T}(\mathrm{E}/\mathrm{G})_{\pi_{\mathrm{M}}(x)}$ et $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v') \in \mathrm{T}(\mathrm{E}/\mathrm{G})_{\pi_{\mathrm{M}}(x')}$. On en déduit que $\pi_{\mathrm{M}}(x) = \pi_{\mathrm{M}}(x')$. Ainsi, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $gx = x'$. On a alors $v'' = \mathrm{T}(g)(v) \in \mathrm{T}(\mathrm{E})_{x'}$. Comme $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}}) \circ \mathrm{T}(g) = \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})$, on en déduit que

$$\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}x'})(v'') = \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v'') = \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v') = \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}x'})(v').$$

Comme $\pi_{\mathrm{E}x}$ est bijective, $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}x})$ l'est aussi et donc $v' = v''$. On en déduit que $v' = \mathrm{T}(g)(v)$ et donc $\pi_{\mathrm{TE}}(\mathrm{T}(g)(v)) = \pi_{\mathrm{TE}}(v')$. Ainsi l'application étudiée est injective.

Soit $w \in \mathrm{T}(\mathrm{E}/\mathrm{G})$. Comme $\pi_{\mathrm{E}x}$ est bijective, $\mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}x})$ l'est aussi. Il existe $v \in \mathrm{TE}_x$ tel que $w = \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}x})(v) = \mathrm{T}(\pi_{\mathrm{E}})(v)$. Ainsi, l'application étudiée est surjective.

Proposition 4.52 – Action de groupe et fibré vectoriel et section. Soient G un groupe discret, $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. On suppose que

(i) G agit proprement, librement et de façon $\mathscr{C}^k$ sur M ;

(ii) G agit proprement et librement sur E ;

(iii) Pour $g \in \mathrm{G}$, on a $(g, g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p)$.

Soit $s : \mathrm{M} \to \mathrm{E}$ une section G-équivariante de p. On note $\widetilde{s} : \mathrm{M}/\mathrm{G} \to \mathrm{E}/\mathrm{G}$ l'application induite par s et $\Gamma_k(p, \mathrm{M})^{\mathrm{G}}$ l'ensemble des sections de p qui sont G-équivariantes. L'application

$$\begin{cases} \Gamma_k(p, \mathrm{M})^{\mathrm{G}} \longrightarrow \Gamma_k(\widetilde{p}, \mathrm{M}/\mathrm{G}) \\ \quad s \qquad \longmapsto \widetilde{s} \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{C}^k(\mathrm{M}/\mathrm{G}, \mathbb{R})$-modules.

Preuve. Comme s est G-équivariante, l'application $\pi_{\mathrm{E}} \circ s$ de classe $\mathscr{C}^k$ passe au quotient par l'action de G. On obtient ainsi une application $\widetilde{s} : \mathrm{M}/\mathrm{G} \to \mathrm{E}/\mathrm{G}$ de classe $\mathscr{C}^k$. De plus, on a, par fonctorialité, $\widetilde{p} \circ \widetilde{s} = \widetilde{p \circ s} = \widetilde{\mathrm{id}_{\mathrm{M}}} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}/\mathrm{G}}$. Ainsi $\widetilde{s} \in \Gamma_k(\widetilde{p}, \mathrm{M}/\mathrm{G})$.

Soient $s, s' \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})^{\mathrm{G}}$. Comme $(g, g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p)$, on a, pour $x \in \mathrm{M}$,

$$(s + s')(gx) = s(gx) + s'(gx) = gs(x) + gs'(x) = g(s(x) + s'(x)) = g((s + s')(x))$$

Ainsi $s + s' \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})^{\mathrm{G}}$.

De plus, soit $y \in \mathrm{M}/\mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{M}$ tel que $\pi_{\mathrm{M}}(x) = y$. Comme π_{E} induit une application $\mathbb{K}$-linéaire de $p^{-1}(x)$ sur $\widetilde{p}^{-1}(y)$, on en déduit que,

$$\widetilde{s} + \widetilde{s'}(y) = \widetilde{s}(y) + \widetilde{s'}(y) = \pi_{\mathrm{E}} \circ s(x) + \pi_{\mathrm{E}} \circ s'(x) = \pi_{\mathrm{E}} \circ (s + s')(x)) = \widetilde{s + s'}(y))$$

Ainsi $\widetilde{s + s'} = \widetilde{s} + \widetilde{s'}$.

Soient $s \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})^{\mathrm{G}}$ et $\lambda \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}/\mathrm{G}, \mathbb{R})$. Comme $(g, g) \in \mathrm{End}_{k,\mathbb{K}}(p)$, on a, pour $x \in \mathrm{M}$,

$$(\lambda \cdot s)(gx) = \lambda(\pi(gx))s(gx) = \lambda(\pi(x))gs(x) = g(\lambda(\pi(x))s(x)) = g((\lambda \cdot s)(x))$$

Ainsi $\lambda \cdot s \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})^{\mathrm{G}}$.

De plus, soit $y \in \mathrm{M}/\mathrm{G}$ et $x \in \mathrm{M}$ tel que $\pi_{\mathrm{M}}(x) = y$. Comme π_{E} induit une application $\mathbb{K}$-linéaire de $p^{-1}(x)$ sur $\widetilde{p}^{-1}(y)$, on en déduit que,

$$(\lambda \cdot \widetilde{s})(y) = \lambda(y)\widetilde{s}(y) = \lambda(\pi(x))\pi_{\mathrm{E}} \circ s(x) = \pi_{\mathrm{E}}(\lambda(\pi(x))s(x)) = \pi_{\mathrm{E}} \circ (\lambda \cdot s)(x) = \widetilde{\lambda \cdot s}(y)$$

Ainsi $\lambda \cdot \widetilde{s} = \widetilde{\lambda \cdot s}$.

Il reste à montrer que l'application est bijective. Soit $s \in \Gamma_k(\widetilde{p}, \mathrm{M}/\mathrm{G})$. Pour $x \in \mathrm{M}$, on a $s \circ \pi_{\mathrm{M}}(x) \in \widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(x))$. Or π_{E} réalise une bijection $\pi_{\mathrm{E},x}$ de $p^{-1}(x)$ sur $\widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(x))$. Ainsi ${\pi_{\mathrm{E},x}}^{-1} \circ s \circ \pi_{\mathrm{M}}(x) \in p^{-1}(x)$. Pour $x \in \mathrm{M}$, en posant $\widehat{s}(x) = {\pi_{\mathrm{E},x}}^{-1} \circ s \circ \pi_{\mathrm{M}}(x)$, on définit alors une application $\widehat{s} : \mathrm{M} \to \mathrm{E}$. Par construction, on a $p \circ \widehat{s} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$. Montrons que $\widehat{s}$ est G-équivariante. D'après un calcul de la preuve de la proposition 4.48, on a ${\pi_{\mathrm{E},gx}}^{-1} \circ \pi_{\mathrm{E},x}(z) = gz$ pour tout $z \in p^{-1}(x)$, d'où

$$\widehat{s}(gx) = {\pi_{\mathrm{E},gx}}^{-1} \circ s \circ \pi_{\mathrm{M}}(gx) = {\pi_{\mathrm{E},gx}}^{-1} \circ \pi_{\mathrm{E},x}(\pi_{\mathrm{E},x}^{-1} \circ s \circ \pi_{\mathrm{M}})(x) = {\pi_{\mathrm{E},gx}}^{-1} \circ \pi_{\mathrm{E},x}(\widehat{s}(x)) = g\widehat{s}(x)\,.$$

Il reste à montrer que $\widehat{s}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. Par construction, on a $\pi_{\mathrm{E}} \circ \widehat{s} = s \circ \pi_{\mathrm{M}}$. On considère $x \in \mathrm{U}$. Il existe un ouvert U de M contenant x tel que $\pi_{\mathrm{M}} : \mathrm{U} \to \pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$ soit un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme de U sur l'ouvert $\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U})$ de M/G. On a $s(\mathrm{U}) \subset p^{-1}(\mathrm{U})$. Or la preuve de la proposition 4.48 montre que π_{E} réalise un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme $\pi_{\mathrm{E,U}}$ de $p^{-1}(\mathrm{U})$ sur l'ouvert $\widetilde{p}^{-1}(\pi_{\mathrm{M}}(\mathrm{U}))$ de E/G. On en déduit que

$$\widehat{s}_{|\mathrm{U}} = {\pi_{\mathrm{E}}}^{-1} \circ s \circ \pi_{\mathrm{M}}$$

Ainsi $\widehat{s}$ est de classe $\mathscr{C}^k$. On en déduit que $\widehat{s} \in \Gamma_k(p, \mathrm{M})^{\mathrm{G}}$ et $\widetilde{\widehat{s}} = s$. De plus, comme $\widetilde{s} \circ \pi_{\mathrm{M}} = \pi_{\mathrm{E}} \circ s$, on a

$$\widehat{\widetilde{s}}(x) = {\pi_{\mathrm{E},x}}^{-1} \circ \widetilde{s} \circ \pi_{\mathrm{M}}(x) = {\pi_{\mathrm{E},x}}^{-1} \circ \pi_{\mathrm{E}}(s(x)) = s(x)\,.$$

Ainsi $\widehat{\widetilde{s}} = s$.

Section du fibré trivial G-équivariante si et seulement si la fonction qui lui correspond est G-équivariante.

Relation ensembliste

$\mathrm{X} \subset f^{-1}(f(\mathrm{X}))$ avec égalité si f est injective. Soit $x \in \mathrm{X}$. On a $f(x) \in f(\mathrm{X})$ donc $x \in f^{-1}(f(\mathrm{X}))$. On suppose f injective. Soit $z \in f^{-1}(f(\mathrm{X}))$. On a $f(z) = f(x)$ avec $x \in \mathrm{X}$. Par injectivité, on a $z = x \in \mathrm{X}$. Si $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$ pour tout $x \in \mathrm{A}$ alors f est injective : car si $f(x) = f(y)$, on a $y \in f^{-1}(f(x))$ donc $y = x$.

$f(f^{-1}(\mathrm{Y})) \subset \mathrm{Y}$ avec égalité si f est surjective. Soit $z \in f(f^{-1}(\mathrm{Y}))$. On a $z = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(\mathrm{Y})$ donc $f(x) \in \mathrm{Y}$ et donc $z \in \mathrm{Y}$. On suppose f surjective. Soit $y \in \mathrm{Y}$. On a $y = f(x)$ avec $x \in \mathrm{A}$. Comme $f(x) \in \mathrm{Y}$, on a $x \in f^{-1}(\mathrm{Y})$ et donc $y \in f(f^{-1}(\mathrm{Y}))$. Si $f(f^{-1}(\mathrm{B})) = \mathrm{B}$ alors f surjective car $f^{-1}(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$.

$f(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Y} \iff \mathrm{X} \subset f^{-1}(\mathrm{Y})$. **(⇒)** $f(\mathrm{X}) \subset \mathrm{Y} \implies \mathrm{X} \subset f^{-1}(f(\mathrm{X})) \subset f^{-1}(\mathrm{Y})$. **(⇐)** $\mathrm{X} \subset f^{-1}(\mathrm{Y}) \implies f(\mathrm{X}) \subset f(f^{-1}(\mathrm{Y})) \subset \mathrm{Y}$.

$f(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{T})) = f(\mathrm{U}) \cap \mathrm{T}$. $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{T}) \subset \mathrm{U}$ d'où $f(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{T})) \subset f(\mathrm{U})$ $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{T}) \subset f^{-1}(\mathrm{T})$ d'où $f(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{T})) \subset f(f^{-1}(\mathrm{T})) \subset \mathrm{T}$. Ainsi $f(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{T})) \subset f(\mathrm{U}) \cap \mathrm{T}$. Soit $z \in f(\mathrm{U}) \cap \mathrm{T}$. On a $z = f(u)$ avec $u \in \mathrm{U}$. Comme $z \in \mathrm{T}$, on a $u \in f^{-1}(\mathrm{T})$. Ainsi $u \in f^{-1}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{U}$ et $z \in f(f^{-1}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{U})$.

$f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}' \cap f^{-1}(\mathrm{Y})) = f(\mathrm{X}' \cap f^{-1}(\mathrm{Y}))$. $f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}' \cap f^{-1}(\mathrm{Y})) = \big\{y \in \mathrm{Y}, \quad \exists\, x \in \mathrm{X}' \cap f^{-1}(\mathrm{Y}), y = f(x)\big\}$. $\big\{y \in \mathrm{B}, \quad \exists\, x \in \mathrm{X}' \cap f^{-1}(\mathrm{Y}), y = f(x)\big\} = f(\mathrm{X}' \cap f^{-1}(\mathrm{Y}))$. On a alors $y \in \mathrm{Y}$, d'où l'égalité.

X quasicompact si et seulement si $p_2 : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ fermé pour tout espace topologique Y. On suppose X quasicompact. On note P un espace topologique réduit à un point, $f_{\mathrm{P}} : \mathrm{X} \to \mathrm{P}$ l'unique application qui est continue et $\varphi_{\mathrm{Y}} : \mathrm{P} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ l'homéomorphisme canonique. On a alors $p_2 = \varphi_{\mathrm{Y}} \circ (f_{\mathrm{P}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{Y}})$. Ainsi X quasicompact est équivalent à f_{P} propre est équivalent à pour tout Y, $(f_{\mathrm{P}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{Y}})$ est fermé est équivalent à pour tout Y, p_2 est fermé.

Soient V ouvert et F un sous-ensemble, on a $\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{F}} \subset \overline{\mathrm{V} \cap \mathrm{F}}$. Soit $x \in \mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{F}}$ et W un voisinage de x alors $\mathrm{W} \cap \mathrm{V}$ est un voisinage de x donc $\mathrm{W} \cap \mathrm{V}$ rencontre F. Ainsi W rencontre $\mathrm{V} \cap \mathrm{F}$ et $x \in \overline{\mathrm{V} \cap \mathrm{F}}$.

Soit $\mathscr{F}$ une famille localement finie de partie d'un espace topologique X. On note $\mathrm{G} = \cup_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \mathrm{F}$. On a alors $\overline{\mathrm{G}} = \cup_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \overline{\mathrm{F}}$. En effet, on a $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$ donc $\overline{\mathrm{F}} \subset \overline{\mathrm{G}}$ d'où $\cup_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \overline{\mathrm{F}} \subset \overline{\mathrm{G}}$. Réciproquement, soit $x \in {}^{\mathrm{c}}\cup_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \overline{\mathrm{F}} = \cap_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} {}^{\mathrm{c}}\overline{\mathrm{F}}$. Il existe un voisinage ouvert V de x tel que $\Delta = \{\mathrm{F} \in \mathscr{F}, \mathrm{V} \cap \mathrm{F} \neq \varnothing\}$ est fini. Comme $x \cap_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} {}^{\mathrm{c}}\overline{\mathrm{F}}$, on en déduit que pour tout $\mathrm{F} \in \Delta$, ${}^{\mathrm{c}}\overline{\mathrm{F}}$ est un voisinage ouvert de x. L'ensemble $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \cap \cap_{\mathrm{F} \in \Delta} {}^{\mathrm{c}}\overline{\mathrm{F}}$ est donc un voisinage de x (intersection d'un nombre fini de voisinage de x). De plus, pour $\mathrm{F} \in \mathscr{F} \smallsetminus \Delta$, on a $\mathrm{V} \cap \mathrm{F} = \varnothing$. Ainsi $\mathrm{V}' \cap \mathrm{F} = \varnothing$. Pour $\mathrm{F} \in \Delta$, on a bien sûr $\mathrm{V}' \cap \mathrm{F} \subset \mathrm{V}' \subset \overline{\mathrm{F}} = \varnothing$. Ainsi $\mathrm{V}' \cap \mathrm{G} = \mathrm{V}' \cap \cup_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \mathrm{F} = \cup_{\mathrm{F} \in \mathscr{F}} \mathrm{V}' \cap \mathrm{F} = \varnothing$. Ainsi V' est un voisinage de x qui ne rencontre pas G. D'où $x \notin \overline{\mathrm{G}}$ et on a l'égalité souhaité.

5 Fibré tangent

Dans cette sous-section, on transfert le calcul différentiel classique sur les $\mathscr{C}^k$-prévariétés. On introduit la notion de vecteurs tangents, d'espace tangent à une prévariété, de différentielle d'une application... Contrairement au cas des ouverts de $\mathbb{R}^n$, l'espace tangent n'est pas l'espace vectoriel (ou un sous-espace) ambiant (puisqu'il n'y a pas forcément d'espace vectoriel ambiant). En fait, à chaque point $x \in \mathrm{M}$, on va associer un ensemble de vecteurs tangents qui forme l'espace vectoriel tangent en x à M. Lorsque l'on regroupe tous ces espaces, on obtient le fibré vectoriel tangent à M.

Dans la suite, on propose trois constructions de l'espace tangent. On montrera que les fibré sont isomorphes.

Version algébrique I

Proposition-Définition 5.1 – Germes de fonctions. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $x \in \mathrm{M}$. On note

$$\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M}) = \mathcal{O}^k_{\mathrm{M},x} = \varinjlim_{x \in \mathrm{U}} \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R})\,.$$

la $\mathbb{R}$-*algèbre des germes des fonctions de classe* $\mathscr{C}^k$ et

$$\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x : \mathscr{C}^k_x(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

le *morphisme d'évaluation en* x. L'algèbre $\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre locale de corps résiduel $\mathbb{R}$ et on a la somme directe de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}1 \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x)$

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. On pose $f(x) = y \in \mathrm{M}'$. La composition par f induit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres locales $f^*_x : \mathscr{C}^k_y(\mathrm{M}') \to \mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$ qui vérifient $\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x \circ f^*_x = \mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_y$.

De plus, on a $\mathrm{id}^*_x = \mathrm{id}_{\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})}$. Pour $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}', \mathrm{M}'')$. On a $(g \circ f)^*_x = f^*_x \circ g^*_y$

Preuve.

$$\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M}) = \big\{(\mathrm{U}, f), \quad \mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M}),\ f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})\big\} / \mathscr{R}$$

où $\mathscr{R}$ est la relation d'équivalence donnée par

$$(\mathrm{U}, f)\,\mathscr{R}\,(\mathrm{V}, g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\, \mathrm{W} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M}), \quad \mathrm{W} \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{V}, \quad f_{|\mathrm{W}} = g_{|\mathrm{W}}$$

Pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$, on définit le morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres

$$\mathrm{ev}_{x,\mathrm{U}} : \begin{cases} \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad f \qquad \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Pour $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ avec $\mathrm{V} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$, on a $\mathrm{ev}_{x,\mathrm{U}} = \mathrm{ev}_{x,\mathrm{V}} \circ \rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}$. Ainsi elle définit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\varinjlim_{x \in \mathrm{U}} \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que l'on note $\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x$. Pour $\overline{(\mathrm{U}, f)} \in \mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$, on a $\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x\big(\overline{(\mathrm{U}, f)}\big) = f(x)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, si f est l'application constante sur M égale à λ, on a $\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x\big(\overline{(\mathrm{U}, f)}\big) = \lambda)$. Ainsi $\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x$ est surjective. Son noyau $\mathfrak{m}$ est donc un idéal maximal de $\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$. De plus, si $\gamma \notin \mathfrak{m}$, il existe (U, f) tel que $\overline{(\mathrm{U}, f)} = \gamma$ et $f(x) \neq 0$. Il existe alors $\mathrm{V} \in \mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}}(x)$ tel que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathrm{V}$. Ainsi $g = f_{|\mathrm{V}} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{V}, \mathbb{R}^*)$ (voir la proposition-définition 3.46). Par composition avec l'application $x \mapsto x^{-1}$ (voir l'exemple 3.22), on obtient que $g^{-1} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{V}, \mathbb{R}^*)$ et donc $g^{-1} \in \mathscr{C}^k(\mathrm{V}, \mathbb{R})$ (voir la proposition-définition 3.46). On a alors

$$\overline{(\mathrm{U}, f)(\mathrm{V}, g^{-1})} = 1_{\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})}$$

et γ est inversible dans f. Ainsi ${}^{\mathrm{c}}\mathfrak{m} \subset \mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})^\times$ et donc $\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de $\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$ et $\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})/\mathfrak{m} \overset{\mathbb{R}\text{-alg.}}{\simeq} \mathbb{R}$. En particulier, on en déduit que $\mathfrak{m}$ est un hyperplan de $\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$. Comme $1 \notin \mathfrak{m}$, on obtient la décomposition souhaitée.

Pour $\mathrm{U}' \in \mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}'}(x)$, l'application

$$\mathrm{Comp}(f, \mathrm{U}') : \begin{cases} \mathscr{C}^k(\mathrm{U}', \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^k(f^{-1}(\mathrm{U}'), \mathbb{R}) \\ \quad g \qquad \longmapsto g \circ f_{|f^{-1}(\mathrm{U}')} \end{cases}$$

est bien définie (voir la proposition 3.70). Soit $\mathrm{V}' \in \mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}'}(x)$ avec $\mathrm{V}' \subset \mathrm{M}'$

$$\mathrm{Comp}(f, \mathrm{V}') \circ \rho_{\mathrm{U}',\mathrm{V}'} = \rho_{f^{-1}(\mathrm{U}'),f^{-1}(\mathrm{V}')}\mathrm{Comp}(f, \mathrm{U}').$$

Ainsi, comme

$$\rho_{f^{-1}(\mathrm{V}'),x} \circ \rho_{f^{-1}(\mathrm{U}'),f^{-1}(\mathrm{V}')} = \rho_{f^{-1}(\mathrm{U}'),x}$$

les morphismes $\mathrm{Comp}_{\mathrm{U}',x} = \rho_{f^{-1}(\mathrm{U}'),x} \circ \mathrm{Comp}(f, \mathrm{U}')$ vérifient

$$\mathrm{Comp}_{\mathrm{V}',x} \circ \rho_{\mathrm{U}',\mathrm{V}'} = \mathrm{Comp}_{\mathrm{U}',x}$$

La propriété universelle de la limite inductive de $\mathbb{R}$-algèbre fournit alors un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $f_x^* : \mathscr{C}_y^k(\mathrm{M}') \to \mathscr{C}_x^k(\mathrm{M})$. Il est donnée par

$$f_x^*(\overline{(\mathrm{U}', g)}) = \overline{(f^{-1}(\mathrm{U}'), g \circ f_{|f^{-1}(\mathrm{U}')})}. \qquad (*)$$

On a alors, par définition de $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}$

$$\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}(f_x^*(\overline{(\mathrm{U}', g)})) = g(f(x)) = g(y) = \mathrm{ev}_y\mathrm{M}'(\overline{(\mathrm{U}', g)})$$

En particulier, si $\mathfrak{m}_y$ (resp. $\mathfrak{m}_x$) désigne l'idéal maximal de $\mathscr{C}_y^k(\mathrm{M}')$ ($\mathscr{C}_x^k(\mathrm{M})$), on a $f_x^*(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$ et $\mathrm{Comp}(f)_x$ est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbre locale.

L'égalité $(*)$ montre que

$$\mathrm{id}_x^*(\overline{(\mathrm{U}', g)}) = \overline{(\mathrm{U}', g)}.$$

et pour $(\mathrm{U}', h) \in$

$$\begin{aligned} g \circ f_x^*(\overline{(\mathrm{U}', h)}) &= \overline{((g \circ f)^{-1}(\mathrm{U}'), h \circ (g \circ f)_{|(g\circ f)^{-1}(\mathrm{U}')})} \\ &= \overline{(f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')), h \circ g_{|g^{-1}(\mathrm{U}')} \circ f_{|f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}'))})} \\ &= f_x^*\big(\overline{(g^{-1}(\mathrm{U}'), h \circ g_{|g^{-1}(\mathrm{U}')})}\big) \\ &= f_x^* \circ g_y^*\big(\overline{(\mathrm{U}', h)}\big) \end{aligned}.$$

Le morphisme $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}$ munit $\mathbb{R}$ d'une structure de $\mathscr{C}_x^k(\mathrm{M})$-module (que l'on note $\mathbb{R}_{x,\mathrm{M}}$).

Remarque 5.2 — Restriction. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, U un ouvert de M et $x \in \mathrm{U}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion qui est de classe $\mathscr{C}^k$. Montrons que l'application i_x^* réalise un isomorphisme entre $\mathscr{C}_x^k(\mathrm{M})$ et $\mathscr{C}_x^k(\mathrm{U})$.

En effet, pour $(\mathrm{V}, g) \in$, V est un ouvert de U donc de M et $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{V}, \mathbb{R})$. Ainsi $(\mathrm{V}, g) \in$ et comme $i^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{V} \cap \mathrm{U} = \mathrm{V}$, on obtient

$$i_x^*\Big(\overline{(\mathrm{V}, g)}^{\mathrm{M}}\Big) = \overline{(i^{-1}(\mathrm{V}), g \circ i_{|i^{-1}(\mathrm{V})})}^{\mathrm{U}} = \overline{(\mathrm{V}, g)}^{\mathrm{U}}.$$

$(*)$ Ainsi i_x^* est surjective.

Soit $(\mathrm{V}, g) \in$ tel que $i_x^*(\overline{(\mathrm{V}, g)}) = 0$. On a donc

$$\overline{(\mathrm{U}, 0)} = i_x^*(\overline{(\mathrm{V}, g)}) = (\mathrm{V} \cap \mathrm{U}, g_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{V}})$$

Par définition de $\mathscr{R}_{\mathrm{U}}$, il existe $\mathrm{W} \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ avec W ouvert de U (et donc de M) tel que $g_{|\mathrm{W}} = 0$. On a alors par définition de $\mathscr{R}_{\mathrm{M}}$ (ou comme $\rho_{\mathrm{W},x} = \rho_{\mathrm{V},x} \circ \rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}}$),

$$\overline{(\mathrm{V}, g)} = \overline{\mathrm{W}, g_{|\mathrm{W}}} = 0\,.$$

Ainsi i_x^* est injective.

De plus, l'égalité $(*)$ montre que, pour $(g, \mathrm{V}) \in$ ..., l'élément $\overline{(g, \mathrm{V})}^{\mathrm{M}}$ est un antécédent pour i_x^* de $\overline{(g, \mathrm{V})}^{\mathrm{U}}$. On en déduit que la bijection réciproque de i_x^* est donnée par

$$(i_x^*)^{-1} : \begin{cases} \mathscr{C}_x^k(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathscr{C}_x^k(\mathrm{M}) \\ \overline{(g, \mathrm{V})}^{\mathrm{U}} \longmapsto \overline{(g, \mathrm{V})}^{\mathrm{M}} \end{cases}.$$

Proposition-Définition 5.3 — Espace tangent 1. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $x \in \mathrm{M}$. On pose

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{M}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M}), \mathbb{R}_{x,\mathrm{M}})$$

le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des dérivations $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$ dans $\mathbb{R}_{x,\mathrm{M}}$. On dit que $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est *l'espace tangent à* M *en* x.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{R})$ et $y = f(x) \in \mathrm{M}'$. On pose

$$\mathrm{T}_x(f) \colon \begin{cases} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{T}_y(\mathrm{N}) \\ \quad \mathrm{D} \quad \longmapsto \mathrm{D} \circ f_x^* \end{cases}$$

On dit que $\mathrm{T}_x(f)$ est *la différentielle de* f *en* x.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ et $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ et $g : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}''$ deux applications de classe $\mathscr{C}^k$ et $x \in \mathrm{M}$. On a alors

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(\mathrm{M})} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_{f(x)}(g) \circ \mathrm{T}_x(f) = \mathrm{T}_x(g \circ f). \tag{1}$$

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. Alors $\mathrm{T}_x(f)$ est inversible et

$$\mathrm{T}_x(f)^{-1} = \mathrm{T}_{f(x)}(f^{-1}). \tag{2}$$

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ un $\mathscr{C}^k$-prévariété, U un ouvert de M et $x \in \mathrm{U}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion canonique. Alors $\mathrm{T}_x(i) : \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) \to \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est un isomorphisme.

Preuve. L'application $\mathrm{T}_x(f)$ est bien définie. Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$. Comme f_x^* est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathrm{D} \circ f_x^*$ est une $\mathbb{R}$-dérivation de $\mathscr{C}^k_y(\mathrm{N})$ dans le $\mathscr{C}^k_y(\mathrm{N})$-module obtenu par restriction des scalaires de $\mathbb{R}_{x,\mathrm{M}}$ à $\mathscr{C}^k_y(\mathrm{N})$. Comme $\mathrm{ev}_y^{\mathrm{M}'} = \mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}} \circ f_x^*$, le $\mathscr{C}^k_y(\mathrm{N})$-module obtenu par restriction des scalaires de $\mathbb{R}_{x,\mathrm{M}}$ à $\mathscr{C}^k_y(\mathrm{N})$ via f_x^* n'est autre que $\mathbb{R}_{y,\mathrm{N}}$ ce qui donne le résultat voulu.

Les égalités résultent de la proposition-définition 5.1 et précisément du fait que

$$\mathrm{id}_{\mathrm{M}}{}_x^* = \mathrm{id}_{\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})} \qquad \text{et} \qquad (g \circ f)_x^* = f_x^* \circ g_{f(x)}^* \,.$$

On a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}'}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$. Comme $f^{-1}(f(x)) = x$, on obtient, avec (**1**),

$$\mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_{f(x)}(f^{-1}) = \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}'}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M}')} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_{f(x)}(f^{-1}) \circ \mathrm{T}_x(f) = \mathrm{T}_x(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(\mathrm{M})}$$

La remarque 5.2 montre que $\mathrm{T}_x(i)$ est un isomorphisme.

Remarque 5.4 — Application induite. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux $\mathscr{C}^k$-prévariétés, $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$, U un ouvert de M et V un ouvert de M' vérifiant $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$. On note $i_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ et $i_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{M}'$ les inclusions

D'après la proposition 3.56 et la proposition 3.46, f induit une application $f_{\mathrm{UV}} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ de classe $\mathscr{C}^k$. Par définition $f \circ i_{\mathrm{U}} = i_{\mathrm{V}} \circ f_{\mathrm{UV}}$. La proposition-définition 5.3 montre alors que

$$\mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i_{\mathrm{U}}) = \mathrm{T}_{(f(x))}(i_{\mathrm{V}}) \circ \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UV}}) \,. \tag{3}$$

Exemple 5.5 — Ouverts de $\mathbb{R}^n$. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure de $\mathscr{C}^\infty$-prévariété naturelle et $x \in \mathrm{U}$. Pour $i \in [\![1 \,,\, n]\!]$, on note $p_i : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ la restriction de l'application i^{e} coordonnée et α_i l'image de $(\mathrm{U}, p_i - p_i(x)1) \in$ dans $\mathscr{C}^\infty_x(\mathrm{U})$.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. On va construire, à l'aide de la propriété universelle de la limite inductive une dérivation sur $\mathscr{C}^\infty_x(\mathrm{U})$ correspondant à la dérivation selon v. Pour V ouvert de U, on considère l'application linéaire

$$\partial^{\mathrm{V}}_{v,x} \colon \begin{cases} \mathscr{C}^\infty(\mathrm{V}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad f \qquad \longmapsto \partial_v(f)(x) \,. \end{cases}$$

Pour $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ avec $\mathrm{W} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{U})$, on a $\partial^{\mathrm{W}}_{v,x} \circ \rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}} = \partial^{\mathrm{V}}_{v,x}$. Ainsi, grâce à la propriété universelle de la limite inductive (d'espaces vectoriels), on obtient une application $\mathbb{R}$-linéaire $\partial_{v,x} : \mathscr{C}^\infty_x(\mathrm{U}) \to \mathbb{R}$. Montrer que $\partial_{v,x}$ est une dérivation.

Soit $\gamma, \gamma' \in \mathscr{C}^\infty_x(\mathrm{U})$. On peut alors écrire $\gamma = \overline{(\mathrm{V}, f)}$ et $\gamma' = \overline{(\mathrm{V}', f')}$ avec $(\mathrm{V}, f), (\mathrm{V}', f') \in$. On a alors, par définition de $\mathscr{R}$,

$$\gamma = \overline{(\mathrm{V}\cap\mathrm{V}', f_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'})}, \qquad \gamma' = \overline{(\mathrm{V}\cap\mathrm{V}', f'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'})} \qquad \text{et} \qquad \gamma\gamma' = \overline{(\mathrm{V}\cap\mathrm{V}', ff'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'})}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\partial_{v,x}(\gamma\gamma') &= \partial_{v,x}^{\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}(f_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}\ f'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}) \\ &= f_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}(x)\partial_{v,x}^{\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}(f'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}) + f'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}(x)\partial_{v,x}^{\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}(f_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}) \\ &= \mathrm{ev}_x^{\mathrm{U}}(\gamma)\partial_{v,x}(\gamma') + \mathrm{ev}_x^{\mathrm{U}}(\gamma')\partial_{v,x}(\gamma)\,.\end{aligned}$$

Montrons que les applications

$$\Delta_x^{\mathrm{U}} : \begin{cases} \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathrm{D} \longmapsto (\mathrm{D}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{D}(\alpha_n)) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Theta_x^{\mathrm{U}} : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) \\ v \longmapsto \partial_{v,x} \end{cases}$$

sont des isomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires réciproques l'un de l'autre.

La structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$ montre que Δ_x^{U} est $\mathbb{R}$-linéaire. Par ailleurs, pour tout $\mathrm{V} \in \mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}}(x)$, l'application $v \mapsto \partial_{v,x}^{\mathrm{V}}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. L'application $v \mapsto (\partial_{v,x}^{\mathrm{V}})_{\mathrm{V}\in\mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}}(x)}$ est donc $\mathbb{R}$-linéaire. La propriété universelle de la limite inductive assure alors que $v \mapsto \partial_{v,x}$ est linéaire.

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathscr{B}$. On note alors $\partial_{i,x}$ plutôt que $\partial_{e_i,x}$. On remarque que

$$\partial_{i,x}(\alpha_j) = \partial_{i,x}(\rho_{\mathrm{U},x}(p_j - p_j(x)1)) = \partial_{i,x}^{\mathrm{U}}(p_j - p_j(x)1) = \delta_{i,j}\,. \tag{$*$}$$

Soit $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors

$$\Delta_x^{\mathrm{U}} \circ \Theta_x^{\mathrm{U}}(v) = (\partial_{v,x}(\alpha_1), \ldots, \partial_{v,x}(\alpha_n))$$

Par linéarité de Θ_x^{U} et grâce à la remarque $(*)$, on obtient

$$\partial_{v,x}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n v_j \partial_{j,x}(\alpha_i) = v_i\,.$$

Ainsi $\Delta_x^{\mathrm{U}} \circ \Theta_x^{\mathrm{U}}(v) = v$.

Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$. Calculons $\Theta_x^{\mathrm{U}} \circ \Delta_x^{\mathrm{U}}$. On pose $v = (\mathrm{D}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{D}(\alpha_n))$. On a alors $\Theta_x^{\mathrm{U}} \circ \Delta_x^{\mathrm{U}}(\mathrm{D}) = \partial_{v,x}$. Montrons que $\mathrm{D} = \partial_{v,x}$. Soit $\gamma \in \mathscr{C}_x^\infty(\mathrm{U})$. Comme les boules ouvertes de centre x de rayon assez petit forment une base de voisinage de x, on peut écrire $\gamma = \overline{(\mathrm{V}, f)}$ où V est une boule ouverte de centre x contenu dans U. D'après le lemme d'Hadamard, on peut écrire

$$f = f(x)1 + \sum_{i=1}^n (p_i - p_i(x)1)_{|\mathrm{V}}\, g_i \qquad \text{avec} \quad g_i \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{V}, \mathbb{R})$$

Pour $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, on note $\gamma_i = \overline{(\mathrm{V}, g_i)}$. De plus, on a $\overline{(\mathrm{V}, (p_i - p_i(x)1)_{|\mathrm{V}})} = \alpha_i$. Comme D et $\partial_{v,x}$ sont des dérivations et que $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}(\alpha_i) = 0$, on obtient

$$\mathrm{D}(\gamma) = f(x)\mathrm{D}(1) + \sum_{i=1}^n \big(g_i(x)\mathrm{D}(\alpha_i) + \mathrm{ev}_x^{\mathrm{U}}(\alpha_i)\mathrm{D}(g_i)\big) = \sum_{i=1}^n g_i(x)\mathrm{D}(\alpha_i)$$

et

$$\partial_{v,x}(\gamma) = \sum_{i=1}^n g_i(x)\partial_{v,x}(\alpha_i)\,.$$

Comme $v = (\mathrm{D}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{D}(\alpha_n))$, on en déduit par linéarité de Θ_x^{U} et grâce à l'égalité $(*)$

$$\partial_{v,x}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n \mathrm{D}(\alpha_j)\partial_{j,x}(\alpha_i, .) = \mathrm{D}(\alpha_i)$$

et donc

$$\partial_{v,x}(\gamma) = \sum_{i=1}^n g_i(x)\mathrm{D}(\alpha_i) = \mathrm{D}(\gamma)\,.$$

Ainsi $\Theta_x^{\mathrm{U}} \circ \Delta_x^{\mathrm{U}}(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$.

On considère à présent un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ (muni de sa structure naturelle de $\mathscr{C}^\infty$-prévariété) et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrons que, pour tout $x \in \mathrm{U}$, on a

$$\Delta_{f(x)}^{\mathrm{V}} \circ \mathrm{T}(f)_x \circ (\Delta_x^{\mathrm{U}})^{-1} = \mathrm{d}f_x\,. \tag{4}$$

On note $q_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ l'application i^{e} coordonnée ainsi que sa restriction à V et β_i l'image de $(\mathrm{V}, q_i - q_i(f(x))1) \in$ dans $\mathscr{C}^\infty_{f(x)}(\mathrm{V})$.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Par définition, on a

$$(\Delta^{\mathrm{V}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}(f)_x \circ (\Delta^{\mathrm{U}}_x)^{-1})(v) = (\partial_{x,v} \circ f^*_x(\beta_i))_{i \in [\![1\,,\, n']\!]}$$

Pour $i \in [\![1\,,\, n']\!]$, on a $\beta_i = \overline{(\mathrm{V}, (q_i - q_i \circ f(x))1_{|\psi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')})}^{\mathrm{V}}$. Ainsi

$$(f)^*_x(\beta_i) = \overline{(\mathrm{U}, (q_i \circ f - q_i \circ f(x)1))}^{\mathrm{U}}$$

Finalement, par construction de $\partial_{x,v}$, on a

$$\begin{aligned} \partial_{x,v} \circ (f)^*_x(\beta_i) &= \mathrm{d}_x(q_i \circ f - q_i \circ f(x)1)(v) \\ &= q_i \circ \mathrm{d}_x(f)(v) \end{aligned}$$

Les i^{e} composantes de $(\Delta^{\mathrm{V}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}(f)_x \circ (\Delta^{\mathrm{U}}_x)^{-1})$ et $\mathrm{d}_x(f)(v)$ sont donc égales, pour tout $i \in [\![1\,,\, n']\!]$ ce qui donne l'égalité voulue.

En particulier, si V est un ouvert de U et $f = i : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ est l'inclusion, on obtient l'égalité

$$\Delta^{\mathrm{U}}_x \circ \mathrm{T}(i)_x = \Delta^{\mathrm{V}}_x \tag{5}$$

On suppose ici $k = \infty$.

Proposition 5.6 — Dimension finie. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^\infty$-prévariété et $x \in \mathrm{M}$. L'espace vectoriel $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est de dimension finie égale à $\dim_x(\mathrm{M})$.

Preuve. D'après le lemme 3.3, il existe un ouvert $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}}(x)$ qui est le domaine d'une carte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$. D'après la proposition-définition 5.3 et l'application 3.50, $\mathrm{T}_x(\varphi)$ et $\mathrm{T}_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Comme $\mathrm{T}_x(i)$ réalise un isomorphisme, on en déduit que $\mathrm{T}_{\varphi(x)}(\mathrm{V})$ et $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ sont isomorphes. Grâce à l'exemple 5.5, on en déduit que est $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est de dimension $n = \dim_x(\mathrm{M})$.

Proposition-Définition 5.7 — Fibré tangent. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^\infty$-prévariété. On considère l'ensemble

$$\mathrm{T}(\mathrm{M}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$$

et l'application

$$p_{\mathrm{M}} \colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{M} \\ \mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longmapsto x\,. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi)$ une carte de $\mathscr{A}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. On définit l'application

$$\mathrm{T}(\psi) \colon \begin{cases} {p_{\mathrm{M}}}^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times \mathbb{R}^n \\ \mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longmapsto (x, \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1}) \end{cases}$$

et on note $\mathrm{T}(\mathcal{U}) = (\mathrm{U}, \mathbb{R}^n, \mathrm{T}(\psi))$.

Soit $\mathscr{A}' = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M contenu dans $\mathscr{A}$. Il existe sur $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ un unique $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$ tel que p_{M} soit un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel réel et pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, $(\mathrm{T}(\mathcal{U}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ soit une carte trivialisante pour p_{M}. De plus, on a $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$. En particulier, $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ est une carte trivialisante pour p_{M}, pour tout $\mathfrak{U} \in \mathscr{A}$.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^\infty$-prévariété et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. On considère l'application

$$\mathrm{T}(f) \colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{M}') \\ y \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longmapsto \mathrm{T}_x(f)(y) \in \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M}')\,. \end{cases}$$

Alors $(\mathrm{T}(f), f)$ est un morphisme de $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel réel.

Soient $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $f' \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}', \mathrm{M}'')$. On a $(\mathrm{T}(f'), f') \circ (\mathrm{T}(f), f) = (\mathrm{T}(f' \circ f), f' \circ f)$ et $(\mathrm{T}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}), \mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{p_{\mathrm{M}}}$.

Preuve. On commence par montrer que p_{M} est bien définie. Pour $x \in \mathrm{M}$, on considère l'application $p_x : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ constante égale à x. L'application p_{M} n'est autre que l'application obtenue par la propriété universelle de la réunion disjointe d'ensembles.

Montrons que $\mathrm{T}(\psi)$ est bien définie. On reprend les notations de l'exemple 5.5. Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi) \in \mathscr{A}$. Pour $x \in \mathrm{U}$, on considère alors l'isomorphisme linéaire

$$\delta_{\mathcal{U}x} = \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1} : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathbb{R}^n .$$

Avec la structure naturelle d'espace vectoriel sur $\{x\} \times \mathbb{R}^n$, on en déduit une bijection $\mathbb{R}$-linéaire

$$\varphi_{\mathcal{U}x} : \begin{cases} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \\ \quad \mathrm{D} \quad \longmapsto (x, \delta_{\mathcal{U}x}(\mathrm{D})) . \end{cases}$$

On définit alors la bijection

$$\varphi_{\mathcal{U}} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} \varphi_{\mathcal{U}x} : \begin{cases} \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \longrightarrow \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} (\{x\} \times \mathbb{R}^n) \\ \mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \longmapsto (x, \delta_{\mathcal{U}x}(\mathrm{D})) = (p_{\mathrm{M}}(\mathrm{D}), \delta_{\mathcal{U}x}(\mathrm{D})) . \end{cases}$$

Comme $\qquad {p_{\mathrm{M}}}^{-1}(\mathrm{U}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \qquad$ et $\qquad \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} (\{x\} \times \mathbb{R}^n) = \mathrm{U} \times \mathbb{R}^n ,$

l'application $\varphi_{\mathcal{U}}$ n'est autre que $\mathrm{T}(\psi)$. Ainsi $\mathrm{T}(\psi)$ est bien définie, vérifie $p_1 \circ \mathrm{T}(\psi) = p_{\mathrm{M}}$. L'application induite par $\mathrm{T}(\psi)$ entre ${p_{\mathrm{M}}}^{-1}(x) = \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ et $\{x\} \times \mathbb{R}^n$ n'est autre que $\delta_{\mathcal{U}x}$ qui est une bijection $\mathbb{R}$-linéaire.

Montrons que les conditions de la proposition 4.40 sont vérifiées. D'après la proposition 5.6, l'ensemble ${p_{\mathrm{M}}}^{-1}(x) = \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Comme $\mathscr{A}'$ est un $\mathscr{C}^k$-atlas sur M, les domaines des cartes de $\mathscr{A}'$ recouvrent M.

Il suffit donc de montrer que, pour $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}'$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \psi') \in \mathscr{A}'$, l'application

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} : \begin{cases} \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n'}) \\ \quad x \quad \longmapsto (p_2 \circ \mathrm{T}(\psi')_x)^{-1} \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\psi)_x)^{-1} \end{cases}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$. On va montrer que, pour $x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$, on a

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(x) = \mathrm{d}_{\psi(x)}(\psi' \circ \psi^{-1}) .$$

Pour cela, on note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$, $i' : \mathrm{U}' \to \mathrm{M}$, $i_1 : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$, $i_2 : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \mathrm{U}'$, $j_1 : \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \to \mathrm{V}$ et $j_2 : \psi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \to \mathrm{V}'$ les inclusions. Par définition, on a

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(x) = \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi'(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi') \circ \mathrm{T}_x(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ {\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)}}^{-1}$$

Grâce à (**2**) et (**5**), on en déduit que

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(x) = \Delta^{\psi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')}_{\psi'(x)} \circ \mathrm{T}_{\psi'(x)}(j_2)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(\psi') \circ \mathrm{T}_x(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) \circ (\Delta^{\psi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')}_{\psi(x)})^{-1}$$

On note $\psi_{\mathrm{UU}'} : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\psi'_{\mathrm{UU}'} : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \psi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ les applications induites respectivement par ψ et ψ' et $\Psi = \psi_{\mathrm{UU}'} \circ \psi^{-1}_{\mathrm{UU}'}$. On va montrer que

$$(\mathrm{T}_{\psi'(x)}(j_2))^{-1} \circ \mathrm{T}_x(\psi') \circ \mathrm{T}_x(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) = \mathrm{T}(\Psi)_{\psi(x)}$$

L'égalité (**3**) appliquée à $\psi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$ et $\psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \subset \mathrm{V}$ donne

$$\mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) = \mathrm{T}_x(i_1) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1}$$

De même, pour ψ', on obtient

$$\mathrm{T}_{\psi'(x)}(j_2)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(\psi') = \mathrm{T}_x(\psi'_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(i_2)^{-1}$$

On pose $j : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \mathrm{M}$, l'inclusion. Comme $j = i \circ i_1 = i' \circ i_2$, on obtient grâce à (**1**)

$$\mathrm{T}_x(i_1)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1} = \mathrm{T}_x(j)^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(i_1) = \mathrm{T}_x(j)$$

Ainsi, on obtient

$$(\mathrm{T}_{\psi'(x)}(j_1))^{-1} \circ \mathrm{T}_x(\psi') \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i') \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi^{-1}) \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_2) = \mathrm{T}_x(\psi'_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1}$$

D'après (**2**) et (**1**), on a

$$\mathrm{T}_x(\psi'_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1} = \mathrm{T}_x(\psi'_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}({\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}) = \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi'_{\mathrm{UU}'} \circ {\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}) = \mathrm{T}_{\psi(x)}(\Psi)$$

Finalement, on obtient grâce à (**4**)

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(x) = \Delta_{\psi'(x)}^{\psi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(\Psi) \circ (\Delta_{\psi(x)}^{\psi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')})^{-1} = \mathrm{d}_{\psi(x)}\Psi = \mathrm{d}_{\psi(x)}(\psi' \circ \psi^{-1})$$

Comme $\mathscr{A}$ est un $\mathscr{C}^\infty$-atlas, on en déduit que $\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Il existe une unique structure de $\mathscr{C}^\infty$-prévariété sur $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ telle que p_{M} soit un $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel sur M et $(\mathrm{U}, \mathbb{R}^n, \varphi_{\mathcal{U}})$ une carte trivialisante pour p_{M}.

Comme $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ et que l'atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{A}}$ est telle que p_{M} soit un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel réel, $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ une carte trivialisante de p_{M} pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ Par unicité, on obtient $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$. En particulier, la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ ne dépend pas du choix du sous-atlas de $\mathscr{A}$. Ainsi, pour $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ est une carte trivialisante, on obtient que $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ est un carte trivialisante pour p_{M}.

Montrons que $\mathrm{T}(f)$ est bien définie. Pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $\mathrm{T}_x(f) : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathrm{T}_{g(x)}(\mathrm{M}')$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Comme

$$\bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) = \mathrm{T}(\mathrm{M}) \qquad \text{et} \qquad \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{T}_{g(x)}(\mathrm{M}') \subset \mathrm{T}(\mathrm{M}'),$$

l'application
$$\bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{T}_x(f) : \mathrm{T}(\mathrm{M}) \longrightarrow \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{T}_{g(x)}(\mathrm{M}')$$

définit une application de $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ dans $\mathrm{T}(\mathrm{M}')$ qui n'est autre que $\mathrm{T}(f)$ qui est donc bien définie. De plus, par définition, on a bien sûr $p_{\mathrm{M}'} \circ \mathrm{T}(f) = f \circ p_{\mathrm{M}}$ et l'application $\mathrm{T}(f)_x$ n'est autre que $\mathrm{T}_x(f)$ qui est $\mathbb{R}$-linéaire.

Montrons que $\mathrm{T}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^k$. On utilise pour cela la proposition 4.19. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \psi') \in \mathscr{A}'$.

On note $\mathrm{W} = \psi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'))$ et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$, $i_1 : \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \to \mathrm{U}$, $i' : \mathrm{U}' \to \mathrm{M}'$ et $j_1 : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ les inclusions.

Pour tout $x \in \mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')$, on a, par définition de $\mathrm{T}(\psi')$ et $\mathrm{T}(\psi)$

$$p_2 \circ \mathrm{T}(\psi)_x = \Delta_{\psi(x)}^{\mathrm{V}} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1} \qquad \text{et} \qquad p_2 \circ \mathrm{T}(\psi')_{f(x)} = \Delta_{\psi'(f(x))}^{\mathrm{V}'} \circ \mathrm{T}_{(f(x))}(\psi') \circ \mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1}$$

Il s'agit donc de montrer que l'application

$$\delta : x \mapsto \Delta_{\psi'(f(x))}^{\mathrm{V}'} \circ \mathrm{T}_{(f(x))}(\psi') \circ \mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ {\Delta_{\psi(x)}^{\mathrm{V}}}^{-1}$$

est $\mathscr{C}^\infty$. Grâce à (**5**), on en déduit que

$$\delta(x) = \Delta_{\psi'(f(x))}^{\mathrm{V}'} \circ \mathrm{T}_{(f(x))}(\psi') \circ \mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) \circ (\Delta_{\psi(x)}^{\mathrm{W}})^{-1}$$

On note $f_{\mathrm{UU}'} : \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \to \mathrm{U}'$ et $\psi_{\mathrm{UU}'} : \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \to \mathrm{W}$ les applications induites par f et ψ. L'égalité (**3**) appliquée à $\psi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, $\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}') \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ donne

$$\mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) = \mathrm{T}_x(i_1) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1}$$

De même, pour f, on obtient

$$\mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(f) = \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(i_1)^{-1}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \Delta_{\psi'(f(x))}^{\mathrm{V}'} \circ \mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) \circ (\Delta_{\psi(x)}^{\mathrm{W}})^{-1} \\
&= \Delta_{\psi'(f(x))}^{\mathrm{V}'} \circ \mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(i_1)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i_1) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1} \circ (\Delta_{\psi(x)}^{\mathrm{W}})^{-1} \\
&= \Delta_{\psi'(f(x))}^{\mathrm{V}'} \circ \mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1} \circ (\Delta_{\psi(x)}^{\mathrm{W}})^{-1}.
\end{aligned}$$

Comme l'application $\widetilde{f} = \psi' \circ f_{\mathrm{UU}'} \circ {\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}$ qui est l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ par hypothèse, on obtient, grâce à deux (**2**) et (**1**),

$$\mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1} = \mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}({\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}) = \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi' \circ f \circ {\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1})$$

Finalement, on obtient grâce à (**4**)

$$\delta(x) = \Delta_{\psi'(f(x))}^{\mathrm{V}'} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi' \circ f \circ {\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}) \circ (\Delta_{\psi(x)}^{\mathrm{W}})^{-1} = \mathrm{d}_{\psi(x)}(\psi' \circ f \circ \psi^{-1})$$

L'application δ est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Comme la famille $(\mathrm{T}(\mathcal{U}))_{\mathcal{U}\in\mathscr{A}}$ (resp. $(\mathrm{T}(\mathcal{U}'))_{\mathcal{U}'\in\mathscr{A}'}$) forme une famille de cartes trivialisantes pour p_{M} (resp. p'_{M}) dont les domaines recouvrent M (resp. M′), la proposition 4.19 montre alors que $(\mathrm{T}(f), f) \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{R}}(p_{\mathrm{M}}, p_{\mathrm{M}'})$.

Soit $e \in \mathrm{T}(\mathrm{M})$. On pose $x = p_{\mathrm{M}}(e)$. On a alors $\mathrm{T}(f)(e) = \mathrm{T}_x(e) \in \mathrm{T}_{g(x)}(\mathrm{M}')$, d'où, avec (**1**), on obtient

$$\mathrm{T}(f')(\mathrm{T}(f)(e)) = \mathrm{T}_{g(x)}(f') \circ \mathrm{T}_x(f)(e) = \mathrm{T}_x(f' \circ f)(e) = \mathrm{T}(f' \circ f)(e)\,.$$

On obtient ainsi $\mathrm{T}(f') \circ \mathrm{T}(f) = \mathrm{T}(f' \circ f)$ et donc $(\mathrm{T}(f'), g') \circ (\mathrm{T}(f), g) = (\mathrm{T}(f' \circ f), g' \circ g)$. De plus, avec (**1**), on a

$$\mathrm{T}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}})(e) = \mathrm{T}_x(\mathrm{id}_{\mathrm{M}})(e) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(\mathrm{M})}(e) = e = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(\mathrm{M})}(e)$$

et donc $\mathrm{T}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(\mathrm{M})}$. Ainsi $(\mathrm{T}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}), \mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{p_{\mathrm{M}}}$

Exemple 5.8 — Le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qu'on munit de sa structure canonique de $\mathscr{C}^\infty$-prévariété. Comme le domaine de la carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id})$ recouvre U, on obtient en reprenant les notations de la démonstration de la proposition-définition 5.7 (puisque $i = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$ et $\psi = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$) que l'application

$$\varphi_{\mathcal{U}} : \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times \mathbb{R}^n \\ \mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longmapsto (x, \Delta_x^{\mathrm{U}}(\mathrm{D})) \end{cases}$$

est un isomorphisme de fibré vectoriel.

Exemple 5.9 — Le cas d'un ouvert de M. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^\infty$-prévariété, U un ouvert de M qu'on munit de sa structure canonique de $\mathscr{C}^\infty$-prévariété et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Montrons que l'application $\mathrm{T}(i)$ induit un isomorphisme de $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel réel au-dessus de U entre $\mathrm{T}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{T}(\mathrm{M})_{\mathrm{U}}$.

Par construction, $\mathrm{T}(i)$ réalise une bijection de $\mathrm{T}(\mathrm{U})$ dans $\mathrm{T}(\mathrm{M})_{\mathrm{U}}$ et $p_{\mathrm{U}} = p_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{T}(i) = p_{\mathrm{M}_{\mathrm{U}}} \circ \mathrm{T}(i)$ et $\mathrm{T}(i)_x = \mathrm{T}_x(i)$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

On va utiliser la proposition 4.27. On considère $\mathscr{A}'$ l'ensemble des cartes de $\mathscr{A}$ de la forme $(\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \psi)$ où $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$. D'après l'exemple 3.49, les cartes de $\mathscr{A}'$ forment un $\mathscr{C}^\infty$-atlas pour U. L'exemple 4.20 et la proposition-définition 5.3 montre que la famille $(\mathrm{T}(\mathcal{U}))_{\mathcal{U}\in\mathscr{A}'}$ forme une famille de carte trivialisante pour p_{U} et $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$.

D'après les calculs de la démonstration de la proposition-définition 5.3 et ceux de la proposition 4.27, on a

$$\mathrm{T}(\psi) \circ \mathrm{T}(i) \circ \mathrm{T}(\psi)^{-1} : (x, v) \mapsto (x, \mathrm{d}_{\psi(x)}(\psi \circ i \circ \psi^{-1})(v)) = (x, v)$$

est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme. On en déduit que $\mathrm{T}(i)$ en est un.

Version algébrique II

Proposition-Définition 5.10 — Espace tangent 2. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $x \in \mathrm{M}$. On note $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathscr{C}_x^\infty(\mathrm{M})$.

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{M}) = (\mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x)^2)^*$$

On dit que $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est *l'espace tangent à* M *en* x.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ et $y = f(x) \in \mathrm{M}'$. L'application f_x^* induit une application $\mathrm{T}_x(f) : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathrm{T}_y(\mathrm{M}')$. On dit que $\mathrm{T}_x(f)$ est *la différentielle de* f *en* x.

Preuve. On note $\mathfrak{m}_y$ l'idéal maximal de $\mathscr{C}_y^\infty(\mathrm{M}')$. Comme $f_x^*(\mathfrak{m}_y) \subset \mathfrak{m}_x$ (voir la proposition-définition 5.1), on a $f_x^*((\mathfrak{m}_y)^2) \subset (\mathfrak{m}_x)^2$. Par passage au quotient, on obtient une application $\overline{f_x^*} : \mathfrak{m}_y/(\mathfrak{m}_y)^2 \to \mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x)^2$. On pose alors $\mathrm{T}_x(f) = {}^t\overline{f_x^*}$.

Proposition 5.11 — Isomorphisme. Pour $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $x \in \mathrm{M}$, on note $\mathrm{T}_x^1(\mathrm{M})$ (resp. $\mathrm{T}_x^2(\mathrm{M})$) l'espace tangent en x à M de la proposition-définition 5.3 (resp. proposition-définition 5.10). Il existe un isomorphisme $\varphi_x^{\mathrm{M}} : \mathrm{T}_x^1(\mathrm{M}) \to \mathrm{T}_x^2(\mathrm{M})$.

De plus, pour $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$, on note $\mathrm{T}^1_x(f)$ (resp. $\mathrm{T}^2_x(f)$) la différentielle de f en x à M de la proposition-définition 5.3 (resp. proposition-définition 5.10). Le diagramme suivant est alors commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}^1_x(\mathrm{M}) \arrow[r, "\mathrm{T}^1_x(f)"] \arrow[d, "\varphi^{\mathrm{M}}_x"'] & \mathrm{T}^1_x(\mathrm{M}') \arrow[d, "\varphi^{\mathrm{M}'}_{f(x)}"] \\ \mathrm{T}^2_x(\mathrm{M}) \arrow[r, "\mathrm{T}^2_x(f)"] & \mathrm{T}^2_x(\mathrm{M}') \end{tikzcd}$$

Preuve. Construisons φ^{M}_x. On note $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$. Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{T}^1_x$. Pour $\gamma, \gamma' \in \mathfrak{m}_x$, on a $\mathrm{D}(\gamma\gamma') = \mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x(\gamma)\mathrm{D}(\gamma') + \mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x(\gamma')\mathrm{D}(\gamma) = 0$. On en déduit que $\mathrm{D}((\mathfrak{m}_x)^2) = 0$. Ainsi la restriction de D à $\mathfrak{m}_x$ passe au quotient et définit une application linéaire $\overline{\mathrm{D}} : \mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x)^2 \to \mathbb{R}$ c'est-à-dire $\overline{\mathrm{D}} \in \mathrm{T}^2_x(\mathrm{M})$. On pose alors $\varphi^{\mathrm{M}}_x(\mathrm{D}) = \overline{\mathrm{D}}$ (les propriétés de la restriction et du passage au quotient montre que φ^{M}_x est $\mathbb{R}$-linéaire).

Construisons ψ^{M}_x l'isomorphisme réciproque de φ^{M}_x. On note $\pi : \mathfrak{m}_x \to \mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x)^2$ la surjection canonique. Soit $\upsilon \in \mathrm{T}^2_x(\mathrm{M})$. D'après la proposition-définition 5.1, on peut considérer l'application première projection $p : \mathscr{C}^k_x(\mathrm{M}) = \mathbb{R}1 \oplus \mathfrak{m}_x \to \mathfrak{m}_x$. On définit alors $\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon) = \upsilon \circ \pi \circ p$. Montrons que $\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon) \in \mathrm{T}^1_x(\mathrm{M})$. Pour $\gamma, \gamma' \in \mathscr{C}^k_x(\mathrm{M})$, on pose

$$\gamma = \lambda 1 + \gamma_1 \quad \text{et} \quad \gamma' = \lambda' 1 + \gamma'_1 \qquad \text{avec} \qquad \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \gamma_1, \gamma'_1 \in \mathfrak{m}_x\,.$$

On a alors

$$\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon)(\gamma\gamma') = \psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon)(\lambda\lambda' 1 + (\lambda\gamma'_1 + \lambda'\gamma_1 + \gamma_1\gamma'_1)) \qquad \text{avec} \qquad \lambda\gamma'_1 + \lambda'\gamma_1 + \gamma_1\gamma'_1 \in \mathfrak{m}_x\,.$$

On obtient ainsi $\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon)(\gamma\gamma') = \upsilon \circ \pi(\lambda\gamma'_1 + \lambda'\gamma_1 + \gamma_1\gamma'_1)$. Comme $\gamma_1\gamma'_1 \in (\mathfrak{m}_x)^2$, on en déduit que

$$\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon)(\gamma\gamma') = \upsilon \circ \pi(\lambda\gamma'_1 + \lambda'\gamma_1) = \lambda\upsilon \circ \pi(\gamma'_1) + \lambda'\upsilon \circ \pi(\gamma_1) = \lambda\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon)(\gamma') + \lambda'\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon)(\gamma)\,.$$

Comme $\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x(\gamma) = \lambda$ et $\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x(\gamma') = \lambda'$ (puisque $\mathfrak{m}_x$ est le noyau de $\mathrm{ev}^{\mathrm{M}}_x$), on obtient le fait que $\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon) \in \mathrm{T}^1_x(\mathrm{M})$.

Soit $\upsilon \in \mathrm{T}^2_x(\mathrm{M})$. La restriction à $\mathfrak{m}_x$ de ψ^{M}_x est $\upsilon \circ \pi$. Par unicité de l'application obtenue par passage au quotient, on en déduit que $\upsilon = \varphi^{\mathrm{M}}_x(\psi^{\mathrm{M}}_x(\upsilon))$.

Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{T}^1_x(\mathrm{M})$. On a $(\overline{\mathrm{D}} \circ \pi \circ p)_{|\mathfrak{m}_x} = \overline{\mathrm{D}} \circ \pi = \mathrm{D}_{|\mathfrak{m}_x}$. Comme D est une $\mathbb{R}$-dérivation, on a $\mathrm{D}(\mathbb{R}1) = 0$. Comme $\overline{\mathrm{D}} \circ \pi \circ p(\mathbb{R}1) = 0$, on en déduit, grâce à la décomposition de la proposition-définition 5.1 $\psi^{\mathrm{M}}_x(\overline{(\mathrm{D})}) = \overline{\mathrm{D}} \circ \pi \circ p = \mathrm{D}$.

Montrons à présent que le diagramme est commutatif. Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{T}^1_x(\mathrm{M})$. On note $\pi_{f(x)} : \mathfrak{m}_x \to \mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x)^2$ la surjection canonique. Par définition, $\varphi^{\mathrm{M}'}_{f(x)}(\mathrm{T}^{\mathrm{M}}_1(\mathrm{D}))$ est l'unique application g telle que $g \circ \pi_{f(x)} = \mathrm{D} \circ f^*_{x|\mathfrak{m}_y}$.

Or $\mathrm{T}^{\mathrm{M}}_2(\varphi^{\mathrm{M}'}_x(\mathrm{D})) = \mathrm{T}^{\mathrm{M}}_2(\overline{\mathrm{D}}) = \overline{\mathrm{D}} \circ \overline{f^*_x}$. Par définition de $\overline{f^*_x}$, on a $\overline{f^*_x} \circ \pi_{f(x)} = \pi \circ f^*_{x|\mathfrak{m}_y}$. Par définition de $\overline{\mathrm{D}}$, on a $\overline{\mathrm{D}} \circ \pi = \mathrm{D}_{|\mathfrak{m}_x}$. Ainsi

$$\overline{\mathrm{D}} \circ \overline{f^*_x} \circ \pi_{f(x)} = \mathrm{D}_{|\mathfrak{m}_x} \circ f^*_{x|\mathfrak{m}_y} = (\mathrm{D} \circ f^*_x)_{|\mathfrak{m}_y}\,.$$

Version Géométrique

Proposition-Définition 5.12 – Espace tangent 3. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété. On note

$$\Delta_{\mathrm{M}} = \left\{ (\mathcal{U}, x, v) \in \mathscr{A} \times \mathrm{M} \times \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n, \qquad \mathcal{U} \text{ carte de } \mathscr{A} \text{ en } x, \quad v \in \mathbb{R}^{\dim \mathcal{U}} \right\}$$

On considère sur Δ_{M} la relation $\mathscr{R}_{\mathrm{M}}$ définie par

$$(\mathcal{U}, x, v)\mathscr{R}_{\mathrm{M}}(\mathcal{U}', x', v') \iff x = x', \quad v' = \mathrm{d}_{\varphi(x)}(\varphi' \circ \varphi^{-1})(v)$$

où φ (resp. φ') désigne le transfert de $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$). Alors $\mathscr{R}_{\mathrm{M}}$ est un relation d'équivalence.

On dit que $\mathrm{T}(\mathrm{M}) = \Delta_{\mathrm{M}}/\mathscr{R}_{\mathrm{M}}$ est le *fibré tangent de* M. L'application $(\mathcal{U}, x, v) \in \Delta_{\mathrm{M}} \to x \in \mathrm{M}$ passe au quotient par $\mathscr{R}_{\mathrm{M}}$ et défini une application $p_{\mathrm{M}} : \mathrm{T}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$. On dit que ${p_{\mathrm{M}}}^{-1}(x) = \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est *l'espace tangent à* M *en* x.

Il existe sur $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ une structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété telle que p_{M} soit un $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel réel.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. L'application f induit une application $\mathrm{T}(f) : \mathrm{T}(\mathrm{M}) \to \mathrm{T}(\mathrm{M}')$ telle que $(\mathrm{T}(f), f)$ soit un morphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel réel. Pour $x \in \mathrm{M}$, on note $\mathrm{T}_x(f) : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M})$ l'application induite par $\mathrm{T}(f)$. On dit que $\mathrm{T}_x(f)$ est *la différentielle de f en x*.

Soient $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}', \mathrm{M}'')$. On a alors

$$(\mathrm{T}(g \circ f), g \circ f) = (\mathrm{T}(g), g) \circ (\mathrm{T}(f), f) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{T}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}), \mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{p_{\mathrm{M}}}\,.$$

Remarque 5.13 $\mathrm{T}_x(\mathrm{M}) = ...$

Version Dynamique

5.1 Fibre cotangent

Proposition-Définition 5.14 – Fibré cotangent. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^\infty$-prévariété. On considère l'ensemble

$$\mathrm{T}^*(\mathrm{M}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^*$$

et l'application
$$p_{\mathrm{M}}^* \colon \begin{cases} \mathrm{T}^*(\mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{M} \\ y \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^* & \longmapsto x\,. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi)$ une carte de $\mathscr{A}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. On définit l'application

$$\mathrm{T}^*(\psi) \colon \begin{cases} {p_{\mathrm{M}}^*}^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times \mathbb{R}^{n*} \\ y \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^* & \longmapsto (x, {}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1})^{-1}) \end{cases}$$

et on note $\mathrm{T}^*(\mathcal{U}) = (\mathrm{U}, \mathbb{R}^n, \mathrm{T}^*(\psi))$.

Soit $\mathscr{A}' = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ un $\mathscr{C}^\infty$-atlas sur M contenu dans $\mathscr{A}$. Il existe sur $\mathrm{T}^*(\mathrm{M})$ un unique $\mathscr{C}^\infty$-atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$ tel que p_{M}^* soit un $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel réel et pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, $(\mathrm{T}^*(\mathcal{U}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ soit une carte trivialisante pour p_{M}^*. De plus, on a $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$. En particulier, $\mathrm{T}^*(\mathcal{U})$ est une carte trivialisante pour p_{M}^*, pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$.

Preuve. Il s'agit de l'application de la proposition **??** au fibré $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ et au foncteur contravariant « dual ».

5.2 Différentielle

Proposition-Définition 5.15 – Différentielle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété et $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^k$. On note $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathrm{T}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'isomorphisme de $\mathscr{C}^k$-fibré vectoriel de l'exemple 5.8 appliqué à $\mathrm{U} = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathrm{M}$, on considère l'application linéaire

$$p_2 \circ \varphi_{\mathcal{U}} \circ \mathrm{T}_x(f) = \Delta^{\mathbb{R}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f) : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathbb{R}.$$

que l'on note $\mathrm{d}f(x)$. On dit que $\mathrm{d}f(x)$ est *la différentielle de f en x*.

Pour tout $x \in \mathrm{M}$, $\mathrm{d}f(x) \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^*$. De plus, pour $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$, on a $\mathrm{d}f(x)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\widetilde{f})$ où $\widetilde{f}$ désigne l'image de f dans $\mathscr{C}^\infty_x(\mathrm{M})$. L'application $\mathrm{d}f : x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ appartient à $\Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^*, \mathrm{M})$. On dit que $\mathrm{d}f$ est la différentielle de f.

Preuve. Par définition, $\mathrm{T}_x(f)$ et $\Delta^{\mathbb{R}}_{f(x)}$ sont linéaires. Ainsi $\mathrm{d}f(x)$ l'est. Par pour $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$, on a

$$\mathrm{d}f(x)(\mathrm{D}) = \Delta^{\mathbb{R}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(f_x^*(\alpha))$$

où α désigne l'image de id_{V} dans $\mathscr{C}^\infty_{f(x)}(\mathbb{R})$. Par définition de f_x^*, on obtient que $f_x^*(\alpha)$ est l'image de $\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \circ f = f$ dans $\mathscr{C}^\infty_x(\mathrm{U})$. Ainsi, $\mathrm{d}f(x)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\widetilde{f})$.

Comme $\mathrm{d}f(x) \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^*$, on a $p_{\mathrm{M}}^* \circ \mathrm{d}f = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{d}f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

On considère pour cela une carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Par construction de la structure de $\mathscr{C}^k$-prévariété sur $\mathrm{T}(\mathrm{M})^*$ (voir l'exemple **??** et la proposition-définition 5.7), on dispose de la trivialisation

$$\mathrm{T}^*(\psi) \colon \begin{cases} (p_{\mathrm{M}}^*)^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times (\mathbb{R}^n)^* \\ \omega \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M})^*) & \longmapsto (x, \omega \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}) \end{cases}$$

Par définition de $\mathrm{d}f_x$, on obtient, pour $x \in \mathrm{U}$,

$$(\mathrm{T}^*(\psi) \circ \mathrm{d}f)(x) = \mathrm{T}^*(\psi)(\mathrm{d}f_x) = (x, \Delta^{\mathbb{R}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}) \,.$$

Le calcul de la preuve de la proposition-définition 5.3 appliqué à la carte $\mathcal{U}$ de $\mathscr{A}$ et à la carte $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, 1, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ de $\mathbb{R}$ montre que

$$(\mathrm{T}^*(\psi) \circ \mathrm{d}f)(x) = \mathrm{d}_{\psi(x)}(f \circ \psi^{-1}) \,.$$

Ainsi, comme $f \circ \psi^{-1}$ et ψ sont $\mathscr{C}^\infty$, on en déduit que $\mathrm{T}^*(\psi) \circ (\mathrm{d}f)_{|\mathrm{U}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Or $\psi_{\mathcal{U}}$ est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme, on déduit que $(\mathrm{d}f)_{|\mathrm{U}}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Ainsi la restriction de $\mathrm{d}f$ à tout ouvert U qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. La proposition 3.56 montre que $\mathrm{d}f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple 5.16 — Si U est un ouvert de M. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, $f : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^k$, U un ouvert de M et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Montrons que, pour $x \in \mathrm{U}$,

$$(\mathrm{d}f)_{|\mathrm{U}} = \mathrm{T}^*(i) \circ \mathrm{d}(f_{|\mathrm{U}}) \tag{6}$$

Comme $f_{|\mathrm{U}} = f \circ i$, on a, pour $x \in \mathrm{U}$,

$$\mathrm{d}(f_{|\mathrm{U}})(x) = \Delta^{\mathbb{R}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f_{|\mathrm{U}}) = \Delta^{\mathbb{R}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) = \mathrm{d}f(x) \circ \mathrm{T}_x(i) = {}^t\mathrm{T}_x(i)(\mathrm{d}f(x)) \,,$$

ce qui donne le résultat souhaité.

Exemple 5.17 — Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On considère la structure naturelle de $\mathscr{C}^\infty$-prévariété sur U donnée par la carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id})$. L'application

$$\mathrm{T}^*(\mathrm{id}) \colon \begin{cases} \mathrm{T}^*(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times (\mathbb{R}^n)^* \\ y \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) & \longmapsto (x, \omega \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\mathrm{id})^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{V}}_x)^{-1}) \end{cases}$$

réalise un isomorphisme de $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel réel. Montrons que, pour $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R})$, on a $p_2 \circ \mathrm{T}^*(\mathrm{id}) \circ \mathrm{d}f = \mathrm{D}f$. Le calcul de la preuve de la proposition-définition 5.15 appliqué à la carte $\mathcal{U}$ montre que $\mathrm{T}^*(\mathrm{id}) \circ \mathrm{d}f(x) = (x, \mathrm{D}_x(f))$ ce qui donne le résultat.

Lemme 5.18 — Écriture d'une forme différentielle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^\infty$-prévariété et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi) \in \mathscr{A}$ et $\ell \in \mathbb{N}$. Pour $i \in [\![1 \,,\, n]\!]$, on note $p_i : \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ l'application i^{e} coordonnée et $\psi_i = p_i \circ \psi$. On note $\mathscr{P}_\ell([\![1 \,,\, n]\!])$ l'ensemble des parties à ℓ éléments de $[\![1 \,,\, n]\!]$ et pour $\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 \,,\, n]\!])$, $\psi_{\mathrm{I}} = \mathrm{d}\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi_{i_\ell}$ où $\mathrm{I} = \{i_1, \ldots, i_\ell\}$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$.

L'application

$$\begin{cases} (\mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R}))^{\mathscr{P}_\ell([\![1 \,,\, n]\!])} & \longrightarrow \Omega^\ell(\mathrm{U}) \\ (f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 \,,\, n]\!])} & \longmapsto \displaystyle\sum_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 \,,\, n]\!])} f_{\mathrm{I}} \, \mathrm{d}\psi_{\mathrm{I}} \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R})$-module.

Preuve. Le cas $\ell = 1$. Montrons que $p_i \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) = \Delta^{\mathbb{R}}_{\psi_i(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi_i) = \mathrm{d}\psi_i(x)$ pour tout $x \in \mathrm{U}$. Pour $i \in [\![1 \,,\, n]\!]$, on note α_i (resp. β_i) l'image de $p_i \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{V}, \mathbb{R})$ (resp. $\psi_i \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R})$) dans $\mathscr{C}^\infty_{\psi(x)}(\mathrm{V})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{U}}(\mathbb{R})$).

Par définition, on a, pour $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$,

$$p_i \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\psi_x^*(\alpha_i))$$

Or, par définition de ψ_x^*, l'élément $\psi_x^*(\alpha_i)$ n'est autre que l'image de $p_i \circ \psi \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U}, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}_x^\infty(\mathrm{U})$. Comme $p_i \circ \psi = \psi_i$, on obtient, grâce à la proposition-définition 5.15

$$p_i \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\beta_i) = \mathrm{d}\psi_i(x)(\mathrm{D}).$$

Proposition-Définition 5.19 — Différentielle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^\infty$-prévariété. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe un unique morphisme de faisceaux abéliens $\mathrm{d}_\ell : \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^\ell) \to \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^{\ell+1})$ vérifiant les propriétés suivantes

(i) d_0 est la différentielle ;

(ii) Pour tout $\alpha \in \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^\ell, \mathrm{U})$ et $\beta \in \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^m, \mathrm{U})$, on a

$$\mathrm{d}_{\ell+m}(\alpha \wedge_{\mathrm{U}} \beta) = \mathrm{d}_\ell(\alpha) \wedge_{\mathrm{U}} \beta + (-1)^\ell \alpha \wedge_{\mathrm{U}} \mathrm{d}_m(\beta) \ ;$$

(iii) $d_1 \circ d_0 = 0$;

Preuve. Explicitons la signification du point (i). On utilise l'identification de l'exemple 4.37 pour définir d_0. Pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})$, on note $i_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Pour $f \in \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^{*,0}, \mathrm{U}) = \Gamma_\infty(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathbb{R}}, \mathrm{U})$, on pose

$$\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(f) = \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ \mathrm{d}(p_2 \circ f).$$

D'après la proposition-définition 5.15, $\mathrm{d}(p_2 \circ f) \in \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^{*,1}, \mathrm{U})$. Par composition, $\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(f) \in \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^{*,1}, \mathrm{U})$ (voir le lemme 4.38). Soient $f, g \in \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^{*,0}, \mathrm{U})$ et $x \in \mathrm{U}$. Par définition de la somme de deux sections, on a $p_2 \circ (f+g) = p_2 \circ f + p_2 \circ g$. De plus, comme d est additive et $\mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}})$ est un morphisme de $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel réel, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(f+g) = \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ \mathrm{d}(p_2 \circ (f+g)) &= \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ (\mathrm{d}(p_2 \circ f + p_2 \circ g) \\
&= \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ (\mathrm{d}(p_2 \circ f) + \mathrm{d}(p_2 \circ g)) \\
&= \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ \mathrm{d}(p_2 \circ f) + \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ \mathrm{d}(p_2 \circ g)
\end{aligned}$$

Soit $\mathrm{V} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})$ vérifiant $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$. On note $i_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ l'inclusion. On a alors

$$\mathrm{d}_0^{\mathrm{V}}(f_{|\mathrm{V}}) = \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{V}}) \circ \mathrm{d}(p_2 \circ (f_{|\mathrm{V}})) = \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{V}}) \circ \mathrm{d}((p_2 \circ f)_{|\mathrm{V}}) \, .$$

Comme $i_{\mathrm{U}} \circ i_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} = i_{\mathrm{V}}$, on a $\mathrm{T}^*(i_{\mathrm{V}}) = \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}})$. L'égalité (**6**) montre alors

$$\mathrm{d}_0^{\mathrm{V}}(f_{|\mathrm{V}}) = \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}) \circ \mathrm{d}((p_2 \circ f)_{|\mathrm{V}}) = \mathrm{T}^*(i_{\mathrm{U}}) \circ (\mathrm{d}(p_2 \circ f))_{|\mathrm{V}} = \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(f)_{|\mathrm{V}} \, .$$

Ainsi d_0 est bien morphisme de faisceaux abéliens.

Supposons qu'une telle famille d'application existe et montrons qu'elle est unique.

Soit U le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ et $\alpha \in \Gamma_\infty(p_{\mathrm{M}}^\ell, \mathrm{U})$, on peut écrire α comme une somme de terme de la forme $f \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}} g_\ell$. On peut alors écrire grâce à (ii)

$$d_\ell^{\mathrm{U}}(\alpha) = \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}} f \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}} g_\ell + f \wedge d_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}} g_\ell)$$

Montrons que $d_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}} g_\ell) = 0$. On va montrer par récurrence sur i que

$$d_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}} g_\ell = (-1)^i \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_i) \wedge \mathrm{d}_{\ell-i}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell))$$

Pour $i = 0$ le résultat est trivial. Le point (ii) montre alors que

$$\mathrm{d}_{\ell-i}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) = \mathrm{d}_1^{\mathrm{U}} \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+2}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell) - \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \mathrm{d}_{\ell-i-1}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+2}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) \, .$$

Comme $d_1^{\mathrm{U}} \circ d_0^{\mathrm{U}} = 0$, on obtient le résultat voulu. En particulier, avec $i = \ell - 1$, on obtient $d_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}} g_\ell = (-1)^{\ell-1} \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_1^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) = 0$. Ainsi $d_\ell^{\mathrm{U}}(\alpha) = \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(f) \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)$. Ainsi, on obtient que $\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}$ est uniquement déterminé pour tout ouvert U qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$. Comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent M, on en déduit que d_ℓ est unique.

On définit ensuite au-dessus d'une carte et on vérifie que c'est compatible puis on utilise le critère de recollement...

6 Connexion sur un fibré vectoriel

Définition 6.1 — Connexion. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^\infty$-prévariétés et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une *connexion* $\nabla = (\nabla_{\mathrm{U}})_{\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})}$ sur le fibré vectoriel p est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens de $\Gamma_k(p) \to \Gamma_k(p \otimes p_{\mathrm{M}}^*)$ vérifiant pour tout U ouvert de M, toute section de $s \in \Gamma_k(p, \mathrm{U})$ et toute $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{K})$

$$\nabla_{\mathrm{U}}(fs) = s \otimes \mathrm{d}f + f\nabla_{\mathrm{U}}(s)\,. \tag{1}$$

Remarque 6.2 — Linéarité. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, en appliquant l'égalité (**1**) à la fonction constante $f = \lambda$, on obtient que ∇_{U} est $\mathbb{K}$-linéaire pour tout U ouvert de M. Ainsi ∇ est un morphisme de faisceau de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Exemple 6.3 — Fibré trivial. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ le fibré trivial de fibre F. Le faisceau des sections de $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ s'identifie au faisceau des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans F et $p \otimes p_{\mathrm{M}}^*$ s'identifie au faisceau des formes différentielles à valeurs dans F.

Soient U un ouvert de M, $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathrm{F})$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r)$ une $\mathbb{K}$-base de F et $\mathscr{B}^*$ sa base duale. Pour $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathrm{F})$, on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^{r} g_i e_i$$

avec $g_i = {e_i}^* \circ f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{K})$. On définit alors $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}f_i e_i$.

Pour toute décomposition $f = \sum_{i=1}^{n} u_i f_i$ avec $f_i \in \mathrm{F}$ et $u_i \in \mathscr{C}^k(\mathrm{M}, \mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}u_i f_i\,.$$

En effet, en posant $f_i = \sum_{j=1}^{r} \gamma_{ij} e_j$ avec $\gamma_{ij} \in \mathrm{K}$, on obtient,

$$f = \sum_{j=1}^{r} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} u_i \right\} e_j$$

d'où, grâce à la $\mathbb{K}$-linéarité de d, on obtient

$$\mathrm{d}f = \sum_{j=1}^{r} \mathrm{d} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} u_i \right\} e_j = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \mathrm{d}u_i e_j == \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}u_i f_i\,.$$

Pour $g \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathrm{F})$, on a $\mathrm{d}g \cdot f = g \cdot \mathrm{d}f + f\mathrm{d}g$. En effet, pour $f = \sum_{i=1}^{r} f_i e_i$, on a $g \cdot f = \sum_{i=1}^{r} g f_i e_i$. Ainsi

$$\mathrm{d}(g \cdot f) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{d}(g f_i) e_i = \sum_{i=1}^{r} (\mathrm{d}g f_i e_i + g \mathrm{d}f_i e_i) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f\,.$$

Ainsi d définit bien une connexion.

Proposition 6.4 — Différence de connexions. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^\infty$-prévariétés et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$. Deux connexions ∇ et ∇_1 sur p alors $\nabla - \nabla_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Gamma_k(p), \Gamma_k(p \times p_{\mathrm{M}}^*)) = \Gamma_k(p_{\mathrm{M}}^* \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{K},k}(p))$.

Réciproquement, si ∇ est une connexion sur p et $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Gamma_k(p), \Gamma_k(p \times p_{\mathrm{M}}^*))$. Alors $\nabla + \omega$ est une connexion sur p.

Preuve. Bien sûr, $\nabla - \nabla_1$ est un morphisme de faisceaux abéliens. Soient U un ouvert de M, $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{K})$ et $s \in \Gamma_k(p, \mathrm{U})$, on a

$$(\nabla^{\mathrm{U}} - \nabla^{\mathrm{U}})(f \cdot s) = s \otimes \mathrm{d}f + f\nabla^{\mathrm{U}}(s) - s \otimes \mathrm{d}f - f{\nabla_1}^{\mathrm{U}}(s) = f(\nabla^{\mathrm{U}} - {\nabla^{\mathrm{U}}}_1)(s).$$

On a $\nabla + \omega$ qui est un morphisme de faisceau abélien. Par ailleurs, Soient U un ouvert de M, $f \in \mathscr{C}^k(\mathrm{U}, \mathbb{K})$ et $s \in \Gamma_k(p, \mathrm{U})$, on a

$$(\nabla^{\mathrm{U}} + \omega)(f \cdot s) = s \otimes \mathrm{d}f + f\nabla^{\mathrm{U}}(s) + f\omega^{\mathrm{U}}(s) = s \otimes \mathrm{d}f + f(\nabla^{\mathrm{U}} + \omega^{\mathrm{U}})(s).$$

Exemple 6.5 — Connexion sur un fibré trivial. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ le fibré trivial de fibre F. Toute connexion sur $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ est de la forme $\mathrm{d} + \omega$ où d est la différentielle (6.3) et $\omega \in \Gamma_k(p_{\mathrm{M}}^* \otimes \mathrm{End}_{\mathbb{K},k}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}))$. Or $\mathrm{End}_{\mathbb{K},k}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}) = \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F})}$. Ainsi toute connexion sur $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ est de la forme

$$\nabla = \mathrm{d} + \sum_{i \in \mathrm{I}} f_i \omega_i \qquad \text{avec} \quad f_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{F}), \omega_i \in \Omega^1(\mathrm{M}), \mathrm{I} \text{fini}$$

$$\nabla(s)(x) = (\mathrm{d}s)(x) + \sum_{i \in \mathrm{I}} f_i(s(x))\omega_i(x)$$

On suppose $k = +\infty$. Une connexion s'étend en une famille de morphismes de faisceau de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\nabla^q : \Omega_{\mathrm{M}}^q \otimes \Gamma_k(p) \longrightarrow \Omega_{\mathrm{M}}^{q+1} \otimes \Gamma_k(p).$$

En effet, au-dessus du domaine U d'une carte de $\mathscr{A}$ qui est un ouvert trivialisant pour p, on a $\Omega_{\mathrm{M}}^q \otimes \Gamma_k(p)(\mathrm{U}) = \Omega_{\mathrm{M}}^q(\mathrm{U}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(\mathrm{U})} \Gamma_k(^p, \mathrm{U})$. On peut définir $\nabla^{q,\mathrm{U}}$ par

$$\nabla^{q,\mathrm{U}}(\alpha \otimes s) = \mathrm{d}^q\alpha \otimes s + (-1)^p \alpha \wedge \nabla(s)$$

En effet, l'application $\mathrm{B} : (\alpha, s) \mapsto \mathrm{d}^q\alpha \otimes s + (-1)^p\alpha \wedge \nabla(s)$ est $\mathbb{C}$-bilinéaire et vérifie

$$\mathrm{B}(f\alpha, s) = d(f\alpha) \otimes s + (-1)^p f\alpha \wedge \nabla(s) = \mathrm{d}\alpha \wedge fs + \mathrm{d}f \wedge \alpha \otimes s + (-1)^p f\alpha \wedge \nabla(s) = \mathrm{d}\alpha \wedge fs + (-1)^p\alpha \wedge \mathrm{d}f \otimes s + (-1)^p\alpha \wedge f\nabla(s) = \mathrm{d}\alpha \wedge fs + (-1)^p\alpha \wedge \nabla(fs) = \mathrm{B}(\alpha, fs)$$

elle passe au produit tensoriel et définit une application $\mathbb{C}$-linéaire. De plus, si $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, alors V est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ qui est un ouvert trivialisant pour p, $\Omega_{\mathrm{M}}^q \otimes \Gamma_k(p)(\mathrm{V}) = \Omega_{\mathrm{M}}^q(\mathrm{V}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}(\mathrm{V})} \Gamma_k(p, \mathrm{V})$ et le morphisme de restriction est donné par $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}} \otimes \rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}$. Ainsi, comme d^q est un morphisme de faisceaux et ∇, on obtient,

$$\nabla^{q,\mathrm{U}}(\alpha \otimes s)_{|\mathrm{V}} = (\mathrm{d}^q\alpha)_{|\mathrm{V}} \otimes s_{|\mathrm{V}} + (-1)^p\alpha_{|\mathrm{V}} \wedge \nabla(s)_{|\mathrm{V}} = \mathrm{d}^q(\alpha_{|\mathrm{V}}) \otimes s_{|\mathrm{V}} + (-1)^p\alpha_{|\mathrm{V}} \wedge \nabla(s_{|\mathrm{V}}) = \nabla^{q,\mathrm{V}}((\alpha \otimes s)_{|\mathrm{V}})$$

On obtient ainsi le résultat souhaité.

Définition 6.6 — Courbure. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^\infty$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et ∇ une connexion sur p. La courbure de la connexion ∇ est le morphisme de faisceau de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathrm{R} = \nabla^1 \circ \nabla : \Gamma_k(p) \to \Omega^2 \otimes \Gamma_k(p)$.

On dit que ∇ est plate ou sans courbure si $\mathrm{R} = 0$.

Proposition 6.7 Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux $\mathscr{C}^\infty$-prévariétés, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un $\mathscr{C}^\infty$-fibré vectoriel sur $\mathbb{K}$ et ∇ une connexion sur p.

$$\nabla^{q+1}\nabla^q(\alpha \otimes s) = \nabla^{q+1}(\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s + (-1)^q\alpha \wedge \nabla(s)) = \mathrm{d}^{q+1}\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s + (-1)^{q+1}\mathrm{d}^q(\alpha) \wedge \nabla(s) + (-1)^q\alpha \wedge \nabla(s).$$

Exemple 6.8 — Fibré trivial et connexion plate. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une $\mathscr{C}^k$-prévariété, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ le fibré trivial de fibre F et $\nabla = \mathrm{d} + \omega$ une connexion sur $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ (voir l'exemple 6.5).

La connexion ∇ est plate si et seulement si $\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega = 0$.

En effet, si ∇ est plate alors en posant $\omega = \sum_{i \in \mathrm{I}} f_i\omega_i$, on obtient

$$\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega = \sum_{i \in \mathrm{I}} f_i \mathrm{d}(\omega_i) + \sum_{i \in \mathrm{I}} f_i f_j \omega_i \wedge \omega_j$$

Or, pour $s \in \mathcal{O}^{\mathrm{F}}(\mathrm{U})$, on pose $s(x) = \sum_{j \in \mathrm{J}} s_j(x)e_j$ avec $s_j \in \mathcal{O}^{\mathbb{K}}(\mathrm{U})$

$$\nabla(s)(x) = \mathrm{d}s(x) + \sum_{i \in \mathrm{I}} f_i(s(x))\omega_i(x) = \sum_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{d}s_j(x)e_j + \sum_{i \in \mathrm{I}} f_i(e_j)s_j(x)\omega_i(x)$$

et donc $\nabla\nabla(s)(x) = \sum_{j\in \mathrm{J}} \nabla(x \mapsto \mathrm{d}s_j(x)e_j)(x) + \sum_{i\in \mathrm{I}} \nabla(x \mapsto f_i(e_j)s_j(x)\omega_i(x))(x) =$
$\sum_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{d}^2 s_j(x)e_j - \mathrm{d}(s_j)(x) \wedge \nabla(x \mapsto e_j) + \sum_{i\in \mathrm{I}} f_i(e_j)\mathrm{d}(s_j(x)\omega_i(x)) - s_j(x)\omega_i(x) \wedge \nabla(x \mapsto f_i(e_j)) =$
$\sum_{j\in \mathrm{J}} - \mathrm{d}(s_j)(x) \wedge \sum_{i\in \mathrm{I}} f_i(e_j)\omega_i(x) + \sum_{i\in \mathrm{I}} f_i(e_j)(\mathrm{d}(s_j)(x) \wedge \omega_i(x) + s_j(x)\mathrm{d}(\omega_i)(x)) - s_j(x)\omega_i(x) \wedge \nabla(x \mapsto f_i(e_j)) =$
$\sum_{j\in \mathrm{J}} (\sum_{i\in \mathrm{I}} f_i(e_j)s_j(x)\mathrm{d}(\omega_i)(x) - s_j(x)\omega_i(x) \wedge \sum_{i'\in \mathrm{I}} f_{i'}(f_i(e_j))\omega_{i'}(x)) =$
$\sum_{i\in \mathrm{I}} f_i(s(x))\mathrm{d}(\omega_i)(x) + \sum_{(i,i')\in \mathrm{I}^2} f_{i'} f_i(s(x))\omega_{i'}(x) \wedge \omega_i(x).$

car $\nabla(x \mapsto f)(x) = \mathrm{d}(x \mapsto f) + \sum_{i\in \mathrm{I}} f_i(f)\omega_i(x) = \sum_{i\in \mathrm{I}} f_i(f)\omega_i(x)$ et $\mathrm{d}(x \mapsto s(x)\omega(x))(x) = \mathrm{d}s(x)\omega(x) + s(x)\mathrm{d}(\omega)(x)$.

D'où le résultat. Réciproquement, en appliquant avec $s(x) = y$ constante, on obtient la réciproque.

On note v la fonction constante égale à 1. On a pour $\nabla\nabla f = \nabla(\mathrm{d}f + f\omega) = \mathrm{d}^2 f - \mathrm{d}f \wedge \nabla v + f \wedge \mathrm{d}\omega - \omega \wedge \nabla f = \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}v - \mathrm{d}f \wedge \omega + f\mathrm{d}\omega - \omega \wedge \mathrm{d}f - \omega \wedge \omega f = f(\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega)$.

Connexion, connexion plate et somme directe

Proposition 6.9 – Somme directe. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}_1, \mathscr{B}_1)$ et $(\mathrm{E}_2, \mathscr{B}_2)$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $q_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{M}$, $q_2 : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{M}$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, les fibrés vectoriels $\Omega^p \otimes (q_1 \oplus q_2)$ et $(\Omega^p \otimes q_1) \oplus (\Omega^p \otimes q_2)$ sont canoniquement isomorphes (voir l'exemple **??**). Ainsi, Pour $j \in \{1, 2\}$, on note $i_j^p \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(\Omega^p \otimes q_j, \Omega^p \otimes (q_1 \oplus q_2))$ (resp. $r_j^p \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(\Omega^p \otimes (q_1 \oplus q_2), \Omega^p \otimes q_j)$) les homomorphismes canoniques (voir l'exemple **??**) obtenus par composition avec l'isomorphisme entre $\Omega^p \otimes (q_1 \oplus q_2)$ et $(\Omega^p \otimes q_1) \oplus (\Omega^p \otimes q_2)$.

Soit ∇_1 (resp. ∇_2) une connexion sur q_1 (resp. q_2). Alors $\nabla = i_1^1\nabla_1 r_1^0 + i_2^2\nabla_2 r_2^0$ est une connexion sur $q_1 \oplus q_2$. De plus, pour $j \in \{1, 2\}$, on a

$$r_j^1\nabla = \nabla_j r_j^0 = r_j^1\nabla i_j^0 r_j^0, \qquad \nabla i_1^0 = i_j^1\nabla_j = i_j^1 r_j^1\nabla i_j^0 \qquad \text{et} \qquad \nabla_j = r_j^1\nabla i_j^0 .$$

Réciproquement, si ∇ une connexion sur $q_1 \oplus q_2$ alors, pour $j \in \{1, 2\}$, le morphisme $\nabla_j = r_j^1\nabla i_j^0$ est une connexion sur q_j.

Preuve. Montrons que ∇ est une connexion. Par composition et somme (voir la proposition **??**), ∇ est un morphisme de faisceaux abéliens. De plus, comme r_j^p et i_j^p sont $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-linéaires pour $j \in \{1, 2\}$ et $p \in \{0, 1\}$, on a, pour un ouvert U de M, $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U})$ et une section s de $q_1 \oplus q_2$ au-dessus de U

$$\nabla(fs) = i_1^1\nabla_1(fr_1^0(s)) + i_2^2\nabla_2(fr_2^0(s)) =$$
$i_1^1(\mathrm{d}f \otimes r_1^0(s)) + i_1^1(f\nabla_1(r_1^0(s))) + i_2^1(\mathrm{d}f \otimes r_2^0(s)) + i_2^1(f\nabla_2(r_2^0(s))) =$
$i_1^1(\mathrm{d}f \otimes r_1^0(s)) + i_2^1(\mathrm{d}f \otimes r_2^0(s)) + f(i_1^1\nabla_1 r_1^0(s) + i_2^1\nabla_1 r_2^0(s)) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla(s)$

Comme, $r_1^1 i_2^1 = 0$, $r_2^0 i_1^0 = 0$ et pour $j \in \{1, 2\}$ et $p \in \{0, 1\}$, on a $r_j^p i_j^p = \mathrm{id}$, on en déduit que

$$r_1^1\nabla i_1^0 = r_1^1 i_1^1\nabla_1 r_1^0 i_1^0 + r_1^1 i_2^1\nabla_2 r_2^0 i_1^0 = \nabla_1$$

et
$$r_1^1\nabla = r_1^1 i_1^1\nabla_1 r_1^0 + r_1^1 i_2^1\nabla_2 r_2^0 = \nabla_1 r_1^0$$

et
$$\nabla i_1^0 = i_1^1\nabla_1 r_1^0 i_1^0 + i_2^1\nabla_2 r_2^0 i_1^0 = i_1^1\nabla_1$$

puis que
$$i_1^1 r_1^1\nabla i_1^0 = i_1^1\nabla_1 = \nabla i_1^0 \qquad \text{et} \qquad r_1^1\nabla i_1^0 r_1^0 = \nabla_1 r_1^0 = r_1^1\nabla .$$

De même,

$$r_2^1\nabla i_2^0 = \nabla_2, \qquad r_2^1\nabla = \nabla_2 r_2^0, \qquad \nabla i_1^0 = i_1^1\nabla_1, \qquad i_2^1 r_2^1\nabla i_2^0 = \nabla i_2^0 \qquad \text{et} \qquad r_2^1\nabla i_2^0 r_2^0 = r_2^1\nabla .$$

Réciproquement, si ∇ est une connexion sur $q_1 \oplus q_2$ alors, comme r_j^p et i_j^p sont $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$-linéaires pour $j \in \{1, 2\}$ et $p \in \{0, 1\}$, on a, pour un ouvert U de M, $f \in \mathcal{O}_{\mathrm{K}}(\mathrm{U})$ et une section s de q_j au-dessus de U

$$\nabla_j(fs) = r_j^1\nabla(fi_j^0(s)) = r_j^1(\mathrm{d}f \otimes i_j^0(s)) + r_j^1(f\nabla(i_j^0(s))) =$$
$r_j^1(\mathrm{d}f \otimes i_j^0(s)) + f(r_j^1\nabla i_j^0(s) = \mathrm{d}f \otimes s + f\nabla_j(s)$.

Remarque 6.10 – . Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}_1, \mathscr{B}_1)$ et $(\mathrm{E}_2, \mathscr{B}_2)$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $q_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{M}$, $q_2 : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{M}$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$.

La proposition 6.9 permet de construire à partir d'une connexion sur q_1 et sur q_2 une connexion sur $q_1 \oplus q_2$ et, à partir d'une connexion sur $q_1 \oplus q_2$, une connexion sur q_1 et sur q_2.

Si ∇_1 (resp. ∇_2) est une connexion sur q_1 (resp. q_2) alors la connexion sur q_1 (resp. q_2) construite à partir de la connexion sur $q_1 \oplus q_2$ donnée par ∇_1 et ∇_2 n'est autre que ∇_1 (resp. ∇_2).

Réciproquement, si ∇ est une connexion sur $q_1 \oplus q_2$ qui vérifie $r_j^1 \nabla i_j^0 r_j^0 = r_j^1 \nabla$ pour $j \in \{1, 2\}$ ou $i_j^1 r_j^1 \nabla i_j^0 = \nabla i_j^0$ pour $j \in \{1, 2\}$ alors la connexion sur $q_1 \oplus q_2$ construite à partir des connexions sur q_1 et q_2 données par ∇ n'est autre que ∇.

En effet, on a

$$\widetilde{\nabla} = i_1^1 \nabla_1 r_1^0 + i_2^2 \nabla_2 r_2^0 = i_1^1 r_1^1 \nabla i_1^0 r_1^0 + i_2^1 r_2^1 \nabla_2 i_2^0 r_2^0 = \nabla i_1^0 r_1^0 + \nabla_2 i_2^0 r_2^0 = \nabla(i_1^0 r_1^0 + i_2^0 r_2^0) = \nabla$$

ou $\widetilde{\nabla} = i_1^1 \nabla_1 r_1^0 + i_2^2 \nabla_2 r_2^0 = i_1^1 r_1^1 \nabla i_1^0 r_1^0 + i_2^1 r_2^1 \nabla_2 i_2^0 r_2^0 = i_1^1 r_1^1 \nabla + i_2^1 r_2^1 \nabla_2 = (i_1^1 r_1^1 + i_2^1 r_2^1)\nabla = \nabla$

Les hypothèses effectuées sur ∇ assurent que $\nabla(s_1, 0)$ est de la forme $(t_1, 0)$ et $\nabla(0, s_2)$ de la forme $(0, t_2)$.

Proposition 6.11 – Somme directe et connexion plate. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}_1, \mathscr{B}_1)$ et $(\mathrm{E}_2, \mathscr{B}_2)$ trois $\mathscr{C}^k$-prévariétés et $q_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{M}$, $q_2 : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{M}$ deux $\mathscr{C}^k$-fibrés vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, les fibrés vectoriels $\Omega^p \otimes (q_1 \oplus q_2)$ et $(\Omega^p \otimes q_1) \oplus (\Omega^p \otimes q_2)$ sont canoniquement isomorphes (voir l'exemple **??**). Ainsi, Pour $j \in \{1, 2\}$, on note $i_j^p \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(\Omega^p \otimes q_j, \Omega^p \otimes (q_1 \oplus q_2))$ (resp. $r_j^p \in \mathrm{Hom}_{k,\mathbb{K}}(\Omega^p \otimes (q_1 \oplus q_2), \Omega^p \otimes q_j)$) les homomorphismes canoniques (voir l'exemple **??**) obtenus par composition avec l'isomorphisme entre $\Omega^p \otimes (q_1 \oplus q_2)$ et $(\Omega^p \otimes q_1) \oplus (\Omega^p \otimes q_2)$.

Soient ∇ une connexion sur $q_1 \oplus q_2$ et ∇_1 et ∇_2 les connexions sur q_1 et q_2 construite à partir de ∇. On suppose que ∇ vérifie $r_j^1 \nabla i_j^0 r_j^0 = r_j^1 \nabla$ pour $j \in \{1, 2\}$ ou $i_j^1 r_j^1 \nabla i_j^0 = \nabla i_j^0$ pour $j \in \{1, 2\}$. Alors ∇ est plate si et seulement si ∇_1 et ∇_2 le sont.

Soient ∇_1 (resp. ∇_2) une connexion sur q_1 (resp. q_2) et ∇ la connexion sur $q_1 \oplus q_2$ obtenue à partir de ∇_1 et ∇_2. Alors ∇ est sans torsion si et seulement si ∇_1 et ∇_2 le sont.

Preuve. Soient ∇_1 (resp. ∇_2) une connexion sur q_1 (resp. q_2) et ∇ la connexion sur $q_1 \oplus q_2$ obtenue à partir de ∇_1 et ∇_2. Montrons que ∇ est sans torsion.

On va montrer que $\nabla^q = i_1^{q+1} \nabla_1^q r_1^q + i_2^{q+1} \nabla_2^q r_2^q$. Au-dessus d'un ouvert de M qui trivialise q_1 et q_2 et qui est une carte de $\mathscr{A}$, on a $\Gamma(\Omega^p \otimes q_j, \mathrm{U}) = \Omega^p(\mathrm{U}) \otimes \Gamma_k(p, \mathrm{U})$ d'où

$\nabla^q(\alpha \otimes (s_1, s_2)) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s_1, s_2) + (-1)^q \alpha \wedge \nabla(s_1, s_2)$. $i_1^q \nabla_1^q r_1^q + i_2^q \nabla_2^q r_2^q(\alpha \otimes (s_1, s_2)) =$
$i_1^q \nabla_1^q r_1^q(\alpha \otimes (s_1, s_2)) + i_2^q \nabla_2^q r_2^q(\alpha \otimes (s_1, s_2)) =$
$i_1^q \nabla_1^q(\alpha \otimes s_1) + i_2^q \nabla_2^q(\alpha \otimes s_2) =$
$i_1^q(\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s_1 + (-1)^q \alpha \wedge \nabla_1(s_1)) + i_2^q(\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s_2 + (-1)^q \alpha \wedge \nabla_2(s_2)) =$
$(\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s_1, s_2) + (-1)^q \alpha \wedge (i_1^1 \nabla_1(s_1) + i_2^1 \nabla_2(s_2)) =$
$(\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s_1, s_2) + (-1)^q \alpha \wedge (i_1^1 \nabla_1 r_1^0(s_1, s_2) + i_2^1 \nabla_2 r_2^0(s_1, s_2)) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s_1, s_2) + (-1)^q \alpha \wedge \nabla(s_1, s_2)$.

Ainsi, on a $\nabla^1 \nabla = (i_1^2 \nabla_1^1 r_1^1 + i_2^2 \nabla_2^1 r_2^1)(i_1^1 \nabla_1 r_1^0 + i_2^1 \nabla_2 r_2^0)$. Comme $r_j^1 i_{j'}^1 = \delta_{jj'} \mathrm{id}$, on obtient,

$$\nabla^1 \nabla = i_1^2 \nabla_1^1 \nabla_1 r_1^0 + i_2^2 \nabla_2^1 \nabla_2 r_2^0 = 0$$

puisque ∇_1 et ∇_2 sont plates.

Montrons que $\nabla_j^q = r_j^{q+1} \nabla^q i_j^q$. En effet, on a

$$\nabla_j^q(\alpha \otimes s) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s + (-1)^q \alpha \wedge \nabla_j(s)$$

et $r_j^{q+1} \nabla^q i_j^q(\alpha \otimes s) = r_j^{q+1} \nabla^q(\alpha \otimes (s, 0)) = r_j^{q+1}(\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s, 0) + (-1)^q \alpha \wedge \nabla(s, 0)) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s + (-1)^q \alpha \wedge r_1^1 \nabla i_1^0(s) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s + (-1)^q \alpha \wedge \nabla_1(s)$.

Si ∇ vérifie les hypothèses alors ∇^q aussi. En effet, $i_j^{q+1} r_j^{q+1} \nabla^q i_j^q(\alpha \otimes s) = i_j^{q+1} r_j^{q+1} \nabla^q \alpha \otimes (s, 0) = i_j^{q+1} r_j^{q+1}(\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s, 0) + (-1)^q \alpha \wedge \nabla(s, 0)) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s, 0) + (-1)^q \alpha \wedge i_j^1 r_j^1 \nabla i_j^0(s) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s, 0) + (-1)^q \alpha \wedge \nabla i_j^0(s)$.

$\nabla^q i_j^q(\alpha \otimes s) = \nabla^q \alpha \otimes (s, 0) = (\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s, 0) + (-1)^q \alpha \wedge \nabla(s, 0) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s, 0) + (-1)^q \alpha \wedge \nabla i_j^0(s)$.

$r_j^{q+1} \nabla^q i_j^q r_j^q(\alpha \otimes (s_1, s_2) = r_j^{q+1} \nabla^q(\alpha \otimes (s_j, 0)) = r_j^{q+1}(\mathrm{d}^q(\alpha) \otimes (s_1, 0) + (-1)^q \alpha \wedge \nabla(s_1, 0)) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s_1 + (-1)^q \alpha \wedge r_j^1 \nabla(s_1, 0) == \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s_1 + (-1)^q \alpha \wedge r_j^1 \nabla i_j^0 r_j^0(s_1, s_2) = \mathrm{d}^q(\alpha) \otimes s_1 + (-1)^q \alpha \wedge r_j^1 \nabla(s_1, s_2)$.

$r_1^{q+1}\nabla^q(\alpha\otimes(s_1,s_2) == r_1^{q+1}(\mathrm{d}^q(\alpha)\otimes(s_1,s_2)+(-1)^q\alpha\wedge\nabla(s_1,s_2)) = \mathrm{d}^q(\alpha)\otimes(s_1,0)+(-1)^q\alpha\wedge r_1^1\nabla(s_1,s_2)$.

Réciproquement, si ∇ est sans torsion et vérifie les hypothèses, on a $\nabla_1^1\nabla_1 = r_1^2\nabla^1 i_1^1 r_1^1\nabla i_1^0 = r_1^2\nabla^1\nabla i_1^0 = 0$. De même avec ∇_2.