Vincent Beck

Groupe symétrique

Exercice 1 — Décomposition en cycle à support disjoint.

a) Déterminer la forme des éléments d'ordre p premier de $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$. On détaillera le cas où $|\mathrm{X}| < p$ et $|\mathrm{X}| = p$).

b) Montrer que $\mathfrak{S}_4$ ne contient pas d'élément d'ordre 6.

c) Montrer que $\mathfrak{S}_7$ ne contient pas d'élément d'ordre 15.

d) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le plus petit entier m tel que $\mathfrak{S}_m$ contient un élément d'ordre n.

Exercice 2 — Transpositions et engendrement.

a) Montrer de manière élémentaire (sans utiliser la décomposition en cycle à support disjoint) que $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ est engendré par les transpositions. De façon précise, on pourra montrer que tout élément de $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ est produit d'au plus $|\mathrm{X}| - 1$ transpositions.

b) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathrm{X})$ et m le nombre d'orbites sous X. On a vu que σ est produit de $|\mathrm{X}| - m$ transpositions. Montrer qu'on ne peut pas faire mieux (on pourra utiliser les relations $(\star)$ et $(\star\star)$ du cours).

c) Montrer qu'une partie formée de transpositions qui engendre $\mathfrak{S}(\mathrm{X})$ a au moins $|\mathrm{X}| - 1$ éléments. Donner des exemples de parties à $|\mathrm{X}| - 1$ éléments.

Exercice 3 — Classe de conjugaison.

a) Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{S}_5$ et leur type.

b) Pour $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathrm{X})$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition en cycles à support disjoint de σ. Montrer que σ et $\sigma' \in \mathfrak{S}(\mathrm{X})$ sont conjugués si et seulement si $c_k(\sigma) = c_k(\sigma')$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}(\mathrm{X})$.

d) Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathrm{X})$. Déterminer le cardinal de la classe de conjugaison de σ dans σ ainsi que celui du centralisateur $c(\sigma)$ de σ.

e) Montrer que

$$c(\sigma) = \prod_{k \in \mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})^{c_k(\sigma)} \rtimes \mathfrak{S}_{c_k(\sigma)}$$

Exercice 4 — Structure du groupe symétrique.

a) On suppose $|\mathrm{X}| \geqslant 3$ et on considère a, b, c trois éléments distincts de X. Calculer (rapidement)

$$(a,b)(a,c)(a,b)^{-1}(a,c)^{-1}.$$

En déduire que $\mathrm{D}(\mathfrak{S}(\mathrm{X}))$ contient le sous-groupe engendré par les 3-cycles.

b) Montrer que $\mathfrak{A}(\mathrm{X})$ est engendré par les 3-cycles.

c) Retrouver le fait que $\mathrm{D}(\mathfrak{S}(\mathrm{X})) = \mathfrak{A}(\mathrm{X})$.

d) Montrer que $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{A}(\{1, 2, \ldots, n\})$ est engendré par les $(1, i, j)$ pour $i \neq j$ et $i \neq 1$ et $j \neq 1$.

e) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les $(1, 2, i)$ pour $3 \leqslant i \leqslant n$.

f) Montrer que $\mathrm{Z}\mathfrak{A}_n = \{\mathrm{id}\}$ sauf si $n = 3$ auquel cas $\mathrm{Z}(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$. On pourra montrer que si $\sigma \in \mathrm{Z}(\mathfrak{A}_n)$ alors $\sigma(\{a, b, c\}) = \{a, b, c\}$ pour toute partie $\{a, b, c\}$ à trois éléments de X.

g) Montrer que $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ sauf si $n = 3$ ou $n = 4$. Calculer $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_3)$ et $\mathrm{D}(\mathfrak{A}_4)$.

h) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_n) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$ sauf si $n = 3$.

i) Montrer que $\mathfrak{A}_n$ est simple sauf si $n \in \{0, 1, 2, 4\}$.

j) En déduire que, si $n \neq 4$, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\mathrm{id}, \mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$.

k) Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par les ℓ-cycles. Généraliser à un type quelconque (on prendra garder au type $(2, 2)$ dans $\mathfrak{S}_4$).

Exercice 5 — Sous-groupes de petit indice.

a) Déterminer un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ (resp. de $\mathfrak{A}_n$)

b) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ alors $\mathrm{H} \overset{\text{gr.}}{\simeq} \mathfrak{S}_{n-1}$.

c) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ alors $\mathrm{H} \overset{\text{gr.}}{\simeq} \mathfrak{A}_{n-1}$.

d) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice $m < n$ de $\mathfrak{S}_n$ alors $\mathrm{H} = \mathfrak{S}_n$ ou $\mathrm{H} = \mathfrak{A}_n$.

e) Montrer que si H est un sous-groupe d'indice $m < n$ de $\mathfrak{A}_n$ alors $\mathrm{H} = \mathfrak{A}_{n-1}$ (sauf si $n = 4$).

f) Montrer qu'un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$ est un sous-groupe maximal de $\mathfrak{S}_n$.

g) Montrer qu'un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe maximal de $\mathfrak{A}_n$.