Chapitre 1

Rappel sur les variétés holomorphes

1.1 Rappel d'algèbres

1.1.1 Dérivations

Proposition-Définition 1.1 – Dérivation. Soient k un anneau commutatif unitaire, A une k-algèbre associative unitaire commutative, M un A-module et $\mathrm{D} : \mathrm{A} \to \mathrm{M}$ une application. On dit que D est une k-dérivation de A à valeurs dans M si D est k-linéaire et pour tous $a, b \in \mathrm{A}$, on a

$$\mathrm{D}(ab) = a\mathrm{D}(b) + b\mathrm{D}(a)\,.$$

L'ensemble $\mathrm{Der}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M})$ des k-dérivations de A à valeurs dans M est un sous-k-module de $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M})$.

Preuve. Soient $\lambda, \mu \in k$ et $\mathrm{D}, \mathrm{D}' \in \mathrm{Der}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M})$, on a $\lambda\mathrm{D} + \mu\mathrm{D}'$ est k-linéaire et, pour tous $a, b \in \mathrm{A}$,

$$(\lambda\mathrm{D}+\mu\mathrm{D}')(ab) = \lambda\mathrm{D}(ab)+\mu\mathrm{D}'(ab) = \lambda(a\mathrm{D}(b)+b\mathrm{D}(a))+\mu(a\mathrm{D}'(b)+b\mathrm{D}'(a)) = a(\lambda\mathrm{D}+\mu\mathrm{D}')(b)+b(\lambda\mathrm{D}+\mu\mathrm{D}')(a)\,.$$

Ainsi $\lambda\mathrm{D} + \mu\mathrm{D}'$ est une k-dérivation de A à valeurs dans M. ∎

Proposition 1.2 – Dérivations. Soient k un anneau commutatif unitaire, A, B deux k-algèbres associatives unitaires, $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme de k-algèbres unitaires et M un B-module. On note M_A le A-module M obtenu par restriction des scalaires de B à A via φ. On a alors l'application k-linéaire

$$\lambda_\varphi : \begin{cases} \mathrm{Der}_k(\mathrm{B}, \mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{Der}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}_\mathrm{A}) \\ \mathrm{D} & \longmapsto \mathrm{D} \circ \varphi\,. \end{cases}$$

De plus, si φ est un isomorphisme de k-algèbres associatives unitaires alors λ_φ est un k-isomorphisme.

Preuve. Comme φ est un morphisme de k-algèbres, la structure de k-module sur M induite par restriction des scalaires de la structure de B-module coïncide avec la structure de k-module sur M induite par restriction des scalaires de la structure de A-module M_A. Par ailleurs, comme φ est k-linéaire, on a l'application k-linéaire

$$\lambda_\varphi : \begin{cases} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{B}, \mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \\ f & \longmapsto f \circ \varphi\,. \end{cases}$$

Il suffit donc de montrer que si $\mathrm{D} \in \mathrm{Der}_k(\mathrm{B}, \mathrm{M})$ alors $\mathrm{D} \circ \varphi \in \mathrm{Der}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}_\mathrm{A})$. Or

$$\forall\, a, b \in \mathrm{A}, \mathrm{D} \circ \varphi(ab) = \mathrm{D}(\varphi(a)\varphi(b)) = \varphi(b)(\mathrm{D} \circ \varphi)(a) + \varphi(a)(\mathrm{D} \circ \varphi)(b) = b \cdot (\mathrm{D} \circ \varphi)(a) + a \cdot (\mathrm{D} \circ \varphi)(b)\,.$$

Ainsi $\mathrm{D} \circ \varphi \in \mathrm{Der}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}_\mathrm{A})$.

On note M_B le B-module obtenue à partir de M_A par restriction des scalaires via φ^{-1}. Comme M_A est obtenu par restriction des scalaires via φ, la structure de B-module sur M donnée par M_B et la structure initiale coïncide. Ainsi l'application

$$\lambda_{\varphi^{-1}} : \begin{cases} \mathrm{Der}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}_\mathrm{A}) & \longrightarrow \mathrm{Der}_k(\mathrm{B}, \mathrm{M}_\mathrm{B}) \\ f & \longmapsto f \circ \varphi^{-1}\,. \end{cases}$$

est en fait à valeurs dans $\mathrm{Der}_k(\mathrm{B}, \mathrm{M})$. Comme $\lambda_\varphi \circ \lambda_\varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Der}_k(\mathrm{A},\mathrm{M}_\mathrm{A})}$ et $\lambda_\varphi \circ \lambda_\varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{Der}_k(\mathrm{B},\mathrm{M})}$, on obtient le résultat voulu. ∎

1.1.2 Applications multilinéaires

Notation 1.3 Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ deux entiers. On note

$$\mathrm{I}_{\ell,n} = \{f \in \mathscr{F}([\![1\,,\,\ell]\!],[\![1\,,\,n]\!]), \qquad \forall\, i \neq j, \quad f(i) \neq f(j)\}\,,$$

l'ensemble des applications injectives de $[\![1\,,\,\ell]\!]$ dans $[\![1\,,\,n]\!]$.

On note $\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\,n]\!])$ l'ensemble des parties à ℓ élément de $[\![1\,,\,n]\!]$.

Définition 1.4 — Signature et applications injectives. Pour $f \in \mathrm{I}_{\ell,n}$, on pose

$$\mathrm{Inv}(f) = \mathrm{Card}\,\{(i,j) \in [\![1\,,\,\ell]\!], \quad i < j, \quad f(i) > f(j)\}\,,$$

le nombre d'inversion de f et on définit la signature de f par $\varepsilon(f) = (-1)^{\mathrm{Inv}(f)}$.

Remarque 1.5 — Lorsque $\ell = n$. La définition de la signature d'une permutation à partir du nombre d'inversions assure que, lorsque $\ell = n$, la signature d'une application injective de $[\![1\,,\,\ell]\!]$ dans $[\![1\,,\,n]\!]$ n'est autre que la signature de cette bijection au sens usuel. ■

Lemme 1.6 — Application injective. Pour $\mathrm{J} = \{j_1, \ldots, j_\ell\} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,,\,n]\!])$ avec $j_1 < \cdots < j_\ell$, on pose $f_\mathrm{J} : i \in [\![1\,,\,\ell]\!] \mapsto j_i$. L'application f_J est l'unique application strictement croissante de $[\![1\,,\,\ell]\!]$ dans $[\![1\,,\,n]\!]$ dont l'image est J.

L'application

$$\lambda_{f_\mathrm{J}} : \begin{cases} \mathfrak{S}_\ell \longrightarrow \mathrm{I}_{\ell,n} \\ \sigma \longmapsto f_\mathrm{J} \circ \sigma \end{cases}$$

est induit une bijection de $\mathfrak{S}_\ell$ sur l'ensemble des applications injectives de $[\![1\,,\,\ell]\!]$ dans $[\![1\,,\,n]\!]$ dont l'image est J. De plus, on a $\varepsilon(f_\mathrm{J} \circ \sigma) = \varepsilon(\sigma)$.

Preuve. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$. Comme f_J est injective, on a $f_\mathrm{J} \circ \sigma$ est injective et donc λ_{f_J} est bien définie. Montrons que Λ_{f_J} est injective. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_\ell$ telles que $f_\mathrm{J} \circ \sigma = f_\mathrm{J} \circ \sigma'$. Pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$, on a donc $j_\sigma(i) = j_{\sigma'(i)}$. Ainsi $\sigma(i) = \sigma'(i)$ et donc $\sigma = \sigma'$. Déterminons l'image de λ_{f_J}. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$. Comme σ est surjective, l'image de $f_\mathrm{J} \circ \sigma$ n'est autre que l'image de f_J c'est-à-dire J. Réciproquement, soit $f \in \mathrm{I}_{\ell,n}$ tel que $f([\![1\,,\,\ell]\!]) = \mathrm{J}$. L'application f_J induit une bijection $g_\mathrm{J} : [\![1\,,\,\ell]\!] \to \mathrm{J}$. De même, f induit une bijection $\widetilde{f} : [\![1\,,\,\ell]\!] \to \mathrm{J}$. On définit alors $\sigma = {g_\mathrm{J}}^{-1} \circ \widetilde{f} \in \mathfrak{S}_\ell$ et on a $f_\mathrm{J} \circ \sigma = \lambda_{f_\mathrm{J}}(\sigma) = f$. En effet, par définition de g_J, on $f_\mathrm{J} \circ {g_\mathrm{J}}^{-1} = \mathrm{id}_\mathrm{J}$. Ainsi, pour $f \in \mathrm{I}_{\ell,n}$ tel que $f([\![1\,,\,\ell]\!]) = \mathrm{J}$, l'antécédent de f par λ_{f_J} est ${g_\mathrm{J}}^{-1} \circ f$.

La propriété sur les signatures résulte alors simplement de la stricte croissance de f_J qui assure que $\mathrm{Inv}(f_\mathrm{J} \circ \sigma) = \mathrm{Inv}(\sigma)$.

Remarque 1.7 Pour $f \in \mathrm{I}_{\ell,n}$, il existe une unique application strictement croissante de $[\![1\,,\,\ell]\!]$ dans $[\![1\,,\,n]\!]$ qui a même image que f. En reprenant les notations du lemme précédent, il s'agit de $f_{\mathrm{Im}\,(f)}$ et on a $\varepsilon(f) = \varepsilon((f_{\mathrm{Im}\,(f)})^{-1} \circ f)$. ■

Formes multilinéaires

Proposition-Définition 1.8 — Application multilinéaire alternée. Soient A un anneau commutatif unitaire, E, F deux A-modules et $\ell \in \mathbb{N}$. Soit $f : \mathrm{E}^\ell \to \mathrm{F}$ une application multilinéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(*i*) Pour tout $(v_1, \ldots, v_\ell) \in \mathrm{E}^\ell$ tel qu'il existe $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ avec $v_i = v_{i+1}$, on a $f(v_1, \ldots, v_\ell) = 0$.

(*ii*) Pour tout $(v_1, \ldots, v_\ell) \in \mathrm{E}^\ell$ tel qu'il existe $i, j \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ avec $i \neq j$ et $v_i = v_j$, on a $f(v_1, \ldots, v_\ell) = 0$.

Si f vérifie ces propriétés, on dit que f est une *application ℓ-linéaire alternée.*

Preuve. (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) est évident.
(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Soit $(v_1, \ldots, v_\ell) \in \mathrm{E}^\ell$ tel qu'il existe $i, j \in [\![1\,,\,\ell]\!]$ avec $i \neq j$. On va montrer par récurrence sur $|i-j|$ que $f(v_1, \ldots, v_\ell) = 0$. L'hypothèse (*i*) correspond au cas où $|i-j| = 1$. Supposons que l'hypothèse vérifiée lorsque $1 \leqslant |i-j| \leqslant r$ avec $r < \ell - 1$. On considère $(v_1, \ldots, v_\ell) \in \mathrm{E}^\ell$ avec $v_i = v_{i+r+1}$. On a alors

Comme f est multilinéaire, le point (*i*) donne

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_{i+1}, v_i + v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_\ell) \\ &= f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_\ell) + f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_\ell) \\ &\qquad + f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_\ell) + f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_i, v_{i+2}, \ldots, v_\ell) \\ &= f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_\ell) + f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, v_i, v_{i+2}, \ldots v_\ell)\,. \end{aligned}$$

Ainsi $f(v_1,\dots,v_\ell) = -f(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots,v_\ell)$. On pose alors $w_j = v_j$ si $j \neq i, i+1$ et $w_i = v_{i+1}$ et $w_{i+1} = v_i$. Comme $r+i+1 > i+1$, on a $w_{i+1} = v_i = v_{r+i+1} = w_{r+1+i}$. Comme $(r+1+i)-(i+1) = r$, l'hypothèse de récurrence s'applique et donne

$$f(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots,v_\ell) = f(w_1,\dots,w_\ell) = 0\,.$$

Ainsi $f(v_1,\dots,v_\ell) = 0$.

Proposition-Définition 1.9 — Application multilinéaire antisymétrique. Soient A un anneau commutatif unitaire, E, F deux A-modules, $\ell \in \mathbb{N}$ et $f : \mathrm{E}^\ell \to \mathrm{F}$ une application multilinéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes

(i) Pour tout $(v_1,\dots,v_\ell) \in \mathrm{E}^\ell$ et tout $i \in [\![1\,,\,\ell-1]\!]$, on a

$$f(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots,v_\ell) = -f(v_1,\dots,v_\ell)$$

(ii) Pour tout $(v_1,\dots,v_\ell) \in \mathrm{E}^\ell$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$

$$f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(\ell)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1,\dots,v_\ell)\,.$$

Si f vérifie ces propriétés, on dit que f est une *application ℓ-linéaire antisymétrique.*

Preuve. On commence par démontrer le résultat suivant : soit $f : \mathrm{E}^\ell \to \mathrm{F}$ une application (pas nécessairement multilinéaire) alors

$$\mathrm{G} = \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell, \qquad \forall\,(v_1,\dots,v_\ell) \in \mathrm{E}^\ell, \quad f(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(\ell)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1,\dots,v_\ell\big\})\,.$$

est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_\ell$.

Comme $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$, on a $\mathrm{id} \in \mathrm{G}$. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathrm{G}$ et $(v_1,\dots,v_\ell) \in \mathrm{E}^\ell$. Pour $i \in [\![1\,,\,\ell]\!]$, on pose $w_i = v_{\sigma'(i)}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(v_{\sigma'(\sigma(1))},\dots,v_{\sigma'(\sigma(\ell))}) &= f(w_{\sigma(1)},\dots,w_{\sigma(\ell)}) = \varepsilon(\sigma) f(w_1,\dots,w_\ell) \\ &= \varepsilon(\sigma) f(v_{\sigma'(1)},\dots,v_{\sigma'(\ell)}) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') f(v_1,\dots,v_\ell) \\ &= \varepsilon(\sigma'\sigma) f(v_1,\dots,v_\ell)\,. \end{aligned}$$

Ainsi $\sigma'\sigma \in \mathrm{G}$. On pose $w'_i = v_{\sigma^{-1}(i)}$. On a alors

$$\varepsilon(\sigma^{-1}) f(v_1,\dots,v_\ell) = \varepsilon(\sigma)^{-1} f(w'_{\sigma(1)},\dots,w'_{\sigma(\ell)}) = \varepsilon(\sigma)^{-1}\varepsilon(\sigma) f(w'_1,\dots,w'_\ell) = f(v_{\sigma^{-1}(1)},\dots,v_{\sigma^{-1}(\ell)})\,.$$

Ainsi $\sigma^{-1} \in \mathrm{G}$. Ainsi G est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_\ell$.

Pour $i \in [\![1\,,\,\ell-1]\!]$, on note $\tau_{i,i+1}$ la transposition qui échange i et $i+1$. La propriété (i) signifie que $\tau_{i,i+1}$ appartient à G pour tout $i \in [\![1\,,\,\ell-1]\!]$. La propriété (ii) signifie que $\mathrm{G} = \mathfrak{S}_\ell$. Le résultat provient alors que fait que $\mathfrak{S}_\ell$ est engendré par la famille $(\tau_{i,i+1})_{1\leqslant i\leqslant \ell-1}$. ■

Remarque 1.10 — Alternée implique antisymétrique. Soient A un anneau commutatif unitaire, E, F deux A-modules, $\ell \in \mathbb{N}$ et $f : \mathrm{E}^\ell \to \mathrm{F}$ une application multilinéaire.

Montrons que si f est alternée alors f est antisymétrique et que si f est antisymétrique et F n'a pas de 2-torsion alors f alternée. L'hypothèse « F n'a pas de 2-torsion » signifie que pour $x \in \mathrm{F}$ alors $2x = 0$ implique $x = 0$. C'est le cas, par exemple, si 2 est inversible dans A et donc en particulier si $\mathrm{A} = k$ est un corps de caractéristique différente de 2.

On suppose f alternée. On va montrer que f vérifie le point (i) de la proposition précédente. Il s'agit de montrer que, pour tout $(v_1,\dots,v_r)$, on a

$$f(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots,v_\ell) = -f(v_1,\dots,v_\ell)\,.$$

Par hypothèse, on a

$$f(v_1,\dots,v_{i-1},(v_i+v_{i+1}),(v_i+v_{i+1}),v_{i+2},\dots,v_\ell) = 0\,.$$

La multilinéarité de f donne alors

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_\ell) + f(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots,v_\ell) \\ &\quad + f(v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_\ell) + f(v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_i,v_{i+2},\dots,v_\ell) \\ &= f(v_1,\dots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},v_{i+2},\dots,v_\ell) + f(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots v_\ell)\,. \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat voulu.

Réciproquement, on suppose f antisymétrique et F n'a pas de 2 torsion. Soit $(v_1,\dots,v_\ell)$ tel que $v_i = v_{i+1}$. Par antisymétrie, on a

$$f(v_1,\dots,v_\ell) = -f(v_1,\dots,v_{i-1},v_{i+1},v_i,v_{i+2},\dots,v_\ell)\,.$$

Comme $v_i = v_{i+1}$, on en déduit que $f(v_1, \dots, v_\ell) = -f(v_1, \dots, v_\ell)$. Ainsi $2f(v_1, \dots, v_\ell) = 0$. Comme F n'a pas de 2-torsion, $f(v_1, \dots, v_\ell) = 0$ et f est alternée. ■

Lemme 1.11 — Application antisymétrique et signature. Soient A un anneau commutatif unitaire, E, F deux A-modules, $\ell, n \in \mathbb{N}$ et $\nu : \mathrm{E}^\ell \to \mathrm{F}$ une application ℓ-linéaire antisymétrique. On considère $(v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{E}^n$. Pour une partie $\mathrm{J} = \{i_1, \dots, i_\ell\} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 , n]\!])$ avec $j_1 < \cdots j_\ell$, on pose $v_\mathrm{J} = (v_{j_1}, \dots, v_{j_\ell})$. Soit $f \in \mathrm{I}_{\ell,n}$, on a

$$\nu(v_{f(1)}, \dots, v_{f(\ell)}) = \varepsilon(f)\nu(v_{\mathrm{Im}\,(f)}) .$$

Preuve. On pose $\mathrm{J} = \mathrm{Im}\,(f) = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ avec $i_1 < \cdots i_\ell$. En reprenant les notations du lemme 1.6, on peut écrire $f = f_\mathrm{J} \circ \sigma$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_\ell$. On a alors

$$\nu(v_{f(1)}, \dots, v_{f(\ell)}) = \nu(v_{i_{\sigma(1)}}, \dots, v_{i_{\sigma(\ell)}})$$

L'antisymétrie de ν donne alors

$$\nu(v_{f(1)}, \dots, v_{f(\ell)}) = \varepsilon(\sigma)\nu(v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell}) = \varepsilon(\sigma)\nu(v_\mathrm{J}) .$$

Le lemme 1.6 donne alors $\nu(v_{f(1)}, \dots, v_{f(\ell)}) = \varepsilon(f)\nu(v_{\mathrm{Im}\,(f)})$. ■

Lemme 1.12 — Développement et application multilinéaire alternée. Soient A un anneau commutatif unitaire, E un A-module et $\ell, m, n \in \mathbb{N}$. On considère deux familles $(v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{E}^n$ et $(w_1, \dots, w_m) \in \mathrm{E}^m$ telles que, pour tout $i \in [\![1 , m]\!]$, il existe une famille $(a_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathrm{A}^n$ telle que

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j .$$

On note $\mathrm{M} = (a_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n} \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathrm{A})$ la matrice obtenue. Pour $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_\ell\} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 , m]\!])$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$, on pose $w_\mathrm{I} = (w_{i_1}, \dots, w_{i_\ell})$. De même, pour $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_\ell\} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 , n]\!])$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$, on pose $v_\mathrm{I} = (v_{i_1}, \dots, v_{i_\ell})$. Enfin pour $\mathrm{I}, \mathrm{J} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 , m]\!]) \times \mathscr{P}_\ell([\![1 , n]\!])$, on note a_{IJ} le mineur de M obtenu en extrayant les lignes de M dont l'indice est dans I et les colonnes de M dont l'indice est dans J.

Soient F un A-module et $\nu : \mathrm{E}^\ell \to \mathrm{F}$ une application ℓ-linéaire alternée. Pour $\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 , n]\!])$, on a

$$\nu(w_\mathrm{I}) = \sum_{\mathrm{J} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 , \ell]\!])} a_{\mathrm{IJ}} \nu(v_\mathrm{J}) .$$

Preuve. On pose $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$. On a alors, grâce à la multilinéarité de ν,

$$\begin{aligned}
\nu(w_\mathrm{I}) &= \nu(w_{i_1}, \dots, w_{i_\ell}) \\
&= \nu\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{i_1 j_1} v_{j_1}, \dots, \sum_{j_\ell=1}^{n} a_{i_\ell j_\ell} v_{j_\ell}\right) \\
&= \sum_{(j_1, \dots, j_\ell) \in [\![1 , n]\!]^\ell} \prod_{k=1}^{\ell} a_{i_k j_k} \nu(v_{j_1}, \dots, v_{j_\ell}) \\
&= \sum_{f \in \mathscr{F}([\![1 , \ell]\!], [\![1 , n]\!])} \prod_{k=1}^{\ell} a_{i_k f(k)} \nu(v_{f(1)}, \dots, v_{f(\ell)})
\end{aligned}$$

Si $f \in \mathscr{F}([\![1 , r]\!], [\![1 , n]\!])$ n'est pas injective, il existe $i \neq j$ tel que $f(i) = f(j)$. Ainsi $v_{f(i)} = v_{f(j)}$ et $\nu(v_{f(1)}, \dots, v_{f(r)}) = 0$ puisque ν est alternée. On en déduit que

$$\nu(w_\mathrm{I}) = \sum_{f \in \mathrm{I}_{\ell,n}} \left(\prod_{k=1}^{r} a_{i_k f(k)}\right) \nu(v_{f(1)}, \dots, v_{f(r)}) .$$

Le lemme 1.11 montre alors que

$$\nu(w_\mathrm{I}) = \sum_{f \in \mathrm{I}_{\ell,n}} \left(\prod_{k=1}^{r} a_{i_k f(k)}\right) \varepsilon(f) \nu(v_{\mathrm{Im}\, f}) .$$

En distinguant les éléments de $\mathrm{I}_{\ell,n}$ suivant leur image, on obtient

$$\nu(w_\mathrm{I}) = \sum_{\mathrm{J} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 , n]\!])} \left(\sum_{\{f \in \mathrm{I}_{\ell,n},\ \mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{J}\}} \varepsilon(f) \prod_{k=1}^{r} a_{i_k f(k)}\right) \nu(v_\mathrm{J}) .$$

En utilisant les résultats du lemme 1.6, on obtient

$$\nu(w_\mathrm{I}) = \sum_{\mathrm{J} \in \mathscr{P}_\ell([\![1 , n]\!])} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{r} a_{i_k f_\mathrm{J}(\sigma(k))}\right) \nu(v_\mathrm{J}) .$$

Finalement, en notant $\mathrm{J} = \{j_1, \ldots, j_\ell\} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])$ avec $j_1 < \ldots < j_\ell$, on obtient

$$\nu(w_{\mathrm{I}}) = \sum_{\mathrm{J} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\ell} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{r} a_{i_k j_{\sigma(k)}} \right) \nu(v_{\mathrm{J}}) = \sum_{\mathrm{J} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])} a_{\mathrm{IJ}} \nu(v_{\mathrm{J}})\,.$$

■

1.2 RAPPELS TOPOLOGIQUES

L'objectif de cette section est d'isoler les résultats topologiques utiles en vue de l'étude des variétés holomorphes afin de ne pas alourdir, le moment venu, les démonstrations par des faits généraux.

1.2.1 RECOLLEMENT D'ESPACES TOPOLOGIQUES

Une variété holomorphe est un espace obtenu par des recollements convenables d'ouverts de $\mathbb{C}^n$ et dont la topologie vérifie des propriétés globales de séparation et de séparabilité. Dans cette sous-section, on aborde ce problème du recollement d'espaces topologiques. On y compare trois points de vue équivalents d'un même problème : le recollement le long d'ouverts (remarque 1.14, proposition-définition 1.16 et proposition 1.19). La proposition 1.13 étudie, quant à elle, les propriétés d'unicité et même d'universalité des espaces obtenus par recollement. Son intérêt repose sur le fait que les constructions effectuées dans la proposition-définition 1.16 et la proposition 1.19 vérifient ses hypothèses.

Proposition 1.13 — Quelques propriétés des espaces recollés. Soient $(\mathrm{M}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ une famille d'espaces topologiques. On considère un espace topologique $(\mathrm{M}, \mathscr{T})$ et, pour $\alpha \in \mathrm{A}$, une application $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$. On suppose que $(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est un recouvrement ouvert de M et que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application φ_α réalise un homéomorphisme de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))$.

Soit N un ensemble. On note $\mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N})$ l'ensemble des familles $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, f_α soit une application de M_α dans N et, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on ait

$$(f_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1})\big|_{\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})} = (f_\beta \circ {\varphi_\beta}^{-1})\big|_{\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})}\,.$$

L'application

$$\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Phi} : \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \longrightarrow \mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N}) \\ \quad g \qquad \longmapsto (g \circ \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \end{cases}$$

est bijective. En particulier, pour tout $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \in \mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N})$, il existe une unique application $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ telle que $g \circ \varphi_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Soit N' un espace topologique. On note $\mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}')$ l'ensemble des familles $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \in \mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N}')$ telles que pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application f_α soit continue. L'application $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}',\Phi}$ induit une bijection entre $\mathscr{C}(\mathrm{M}, \mathrm{N}')$ et $\mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}')$. Autrement dit, si f est une application de M dans N' alors f est continue si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $f \circ \varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{N}'$ est continue. En particulier, pour tout $(g_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \in \mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}')$, il existe une unique application $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}'$ telle que $g \circ \varphi_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. De plus, l'application g est continue.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{T}')$ un espace topologique et, pour $\alpha \in \mathrm{A}$, une application $\varphi'_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$. On suppose que $(\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est un recouvrement ouvert de M, que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application φ'_α réalise un homéomorphisme de M_α sur $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ et que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on a ${\varphi'_\alpha}^{-1}(\varphi'_\beta(\mathrm{M}_\beta)) = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et

$${\varphi'_\beta}^{-1} \circ \varphi'_\alpha = {\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{U}_{\beta\alpha}.$$

Il existe un unique homéomorphisme $\delta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ tel que $\delta \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. En particulier, $\mathscr{T}$ est l'unique topologie sur M telle que $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit un ouvert de M et $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit un homéomorphisme pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. La topologie $\mathscr{T}$ est la topologie la plus fine sur M rendant continue les φ_α pour $\alpha \in \mathrm{A}$ et la moins fine rendant continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$ pour $\alpha \in \mathrm{A}$. Elle est donnée par

$$\mathscr{T} = \big\{ \mathrm{U} \subset \mathrm{M}, \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \quad {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{U} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) \in \mathscr{T}_\alpha \big\}.$$

Remarque 1.14 — Quelques propriétés ensemblistes. Soient $(\mathrm{M}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ une famille d'ensembles. On considère un ensemble M et, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, une application injective $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))$. Montrons que $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) = \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$.

Soit $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $y_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$). Par définition de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$), il existe $x_\beta \in \mathrm{M}_\beta$ (resp. $y_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha$) tel que $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$ (resp. $\varphi_\beta(y_\beta) = \varphi_\alpha(y_\alpha)$). On en déduit que $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ (resp. $y_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$) puis que

$\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$ et $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) \subset \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$. Pour $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$, il existe $x_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha$ et $x_\beta \in \mathrm{M}_\beta$ tels que $y = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. On a alors $x_\alpha \in {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)) = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, d'où $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$.

Par ailleurs, si, comme dans l'énoncé de la proposition 1.13, M et les M_α sont des espaces topologiques, les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ des ouverts de M et les φ_α des homéomorphismes de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$, alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, l'ensemble $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un ouvert de M_α et $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est continue.

En effet, comme $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ est un ouvert de M et φ_α continue, on obtient que $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un ouvert de M_α. Or l'application φ_α réalise une bijection de φ_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. On peut donc définir ${\varphi_\alpha}^{-1} : \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \to \mathrm{M}_\alpha$. Par définition de $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$, on a $\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) \subset \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. Ainsi ${\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{M}_\alpha$ a bien un sens. Enfin, par définition de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on obtient que ${\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est bien définie. Enfin, comme φ_α et φ_β sont continues, on obtient que ${\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est continue.

Preuve. Montrons que $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Phi}$ est bien à valeurs dans $\mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N})$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, on a $f \circ \varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{N}$. Il s'agit donc de montrer que $(f \circ \varphi_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1})_{|\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})} = (f \circ \varphi_\beta \circ {\varphi_\beta}^{-1})_{|\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})}$. Or

$$(f \circ \varphi_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1})_{|\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})} = f_{|\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})} \qquad \text{et} \qquad (f \circ \varphi_\beta \circ {\varphi_\beta}^{-1})_{|\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})} = f_{|\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})}.$$

La remarque 1.14 montre que $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$, ce qui donne le résultat souhaité.

Montrons l'injectivité de $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Phi}$. Si $f \circ \varphi_\alpha = g \circ \varphi_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. On obtient, par composition à droite par ${\varphi_\alpha}^{-1}$,

$$f_{|\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)} = g_{|\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)}.$$

Comme les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ recouvrent M, on obtient $f = g$.

Montrons la surjectivité de $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Phi}$. Soient $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N})$ et $x \in \mathrm{M}$. Comme les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ recouvrent M, il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. On pose alors $g(x) = g_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1}(x)$. Montrons que g est bien définie. Si $x \in \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ alors, d'après la remarque 1.14, on a $x \in \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$. Or la famille $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ appartient à $\mathscr{F}(\Phi, \mathrm{N})$, donc $(g_\beta \circ {\varphi_\beta}^{-1})(x) = (g_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1})(x)$. Ainsi g est bien défini et par définition $g_{|\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)} = g_\alpha \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. En particulier, on a $g \circ \varphi_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Montrons que $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}',\Phi}$ induit une bijection de $\mathscr{C}(\mathrm{M}, \mathrm{N}')$ sur $\mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}')$. Il suffit que montrer que

$$\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}',\Phi}(\mathscr{C}(\mathrm{M}, \mathrm{N}')) = \mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}').$$

Si $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}'$ est continue alors, par composition, $f \circ \varphi_\alpha$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. On en déduit que $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Phi}(f) \in \mathscr{C}(\Phi, \mathrm{N}')$. Si $f \circ \varphi_\alpha$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ alors par composition avec l'application continue ${\varphi_\alpha}^{-1}$, on obtient que $f_{|\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)}$ est continue pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Comme les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert de M, on en déduit la continuité de f.

Passons à présent à l'étude de δ. Soit N un espace topologique. On note $\mathscr{C}(\Phi', \mathrm{N})$ l'ensemble des familles $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, f_α soit une application continue de M_α dans N et, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on ait

$$(f_\alpha \circ {\varphi'_\alpha}^{-1})_{|\varphi'_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})} = (f_\beta \circ {\varphi'_\beta}^{-1})_{|\varphi'_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})}.$$

En appliquant ce qui précède à l'espace M′ et aux applications φ'_α et à l'espace topologique N, on obtient que l'application

$$\Delta_{\mathrm{M}'}^{\mathrm{N},\Phi} : \begin{cases} \mathscr{C}(\mathrm{M}', \mathrm{N}) \longrightarrow \mathscr{C}(\Phi', \mathrm{N}) \\ \quad g \qquad \longmapsto (g \circ \varphi'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \end{cases}$$

est une bijection. Par ailleurs, on a ${\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha = {\varphi'_\beta}^{-1} \circ \varphi'_\alpha : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{U}_{\beta\alpha}$. Ainsi

$$({\varphi_\alpha} \circ {\varphi'_\alpha}^{-1})_{|\varphi'_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})} = {\varphi_\beta} \circ {\varphi'_\beta}^{-1}{}_{|\varphi'_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})} = {\varphi_\beta} \circ {\varphi'_\beta}^{-1}{}_{|\varphi'_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})}.$$

On en déduit que $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{C}(\Phi, \mathrm{M})$. Il existe donc une unique application continue $\delta' : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ telle que $\delta' \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$. De même, la famille $(\varphi'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ appartient à $\mathscr{C}(\Phi, \mathrm{M}')$. Il existe donc une unique application continue $\delta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ telle que $\delta \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha$.

Les applications continues $\delta \circ \delta' : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}'$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{M}'}$ vérifient

$$\forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \qquad \delta \circ \delta' \circ \varphi'_\alpha = \delta \circ \varphi_\alpha = \varphi'_\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{M}'} \circ \varphi'_\alpha.$$

Donc $\mathrm{id}'_{\mathrm{M}} = \delta \circ \delta'$. De même, les applications continues $\delta' \circ \delta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ et id_{M} vérifient

$$\forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \qquad \delta' \circ \delta \circ \varphi_\alpha = \delta \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{M}} \circ \varphi_\alpha.$$

Donc $\mathrm{id}_{\mathrm{M}} = \delta \circ \delta'$. Finalement δ et δ' sont des homéomorphismes réciproques l'un des l'autre.

Si $\mathscr{T}_1$ est une topologie sur M telle que les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soient des ouverts de $\mathscr{T}_1$ et les $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soient des homéomorphismes. Comme $(\varphi_\beta)^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et ${\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha = {\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha$, on peut appliquer le raisonnement précédent à l'espace topologique $\mathrm{M}' = (\mathrm{M}, \mathscr{T}_1)$. On en déduit qu'il existe un unique homéomorphisme

$\delta_1 : (\mathrm{M}, \mathscr{T}) \to (\mathrm{M}, \mathscr{T}_1)$ telle que $\delta_1 \circ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Mais id_M est l'unique application g de M dans M vérifiant $g \circ \varphi_\alpha = \varphi_\alpha$. Ainsi, $\delta_1 = \mathrm{id}_\mathrm{M}$ est un homéomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{T})$ sur $(\mathrm{M}, \mathscr{T}_1)$ c'est-à-dire $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1$.

Donnons une deuxième démonstration de l'unicité de la topologie sur M qui fasse des $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ des ouverts de M et des φ_α des homéomorphismes. Cette démonstration présente l'avantage de donner l'expression souhaitée pour $\mathscr{T}$. On définit $\mathscr{T}_1' = \big\{\mathrm{U} \subset \mathrm{M}, \quad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \quad {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{U} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) \in \mathscr{T}_\alpha\big\}$ et on considère une topologie $\mathscr{T}_1$ sur M telle que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit un ouvert de M et $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ un homéomorphisme. Soient $\mathrm{U} \in \mathscr{T}_1$ et $\alpha \in \mathrm{A}$. L'ensemble $\mathrm{U} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est donc un ouvert de $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ et comme φ_α est un homéomorphisme ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{U} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))$ est un ouvert de M_α. Ainsi $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_1'$.

Par ailleurs, si $\mathrm{V} \notin \mathscr{T}_1$, alors il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \notin \mathscr{T}_1$. Sinon, comme les $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ recouvrent M, on aurait

$$\mathrm{V} = \bigcup_{\beta \in \mathrm{A}} (\mathrm{V} \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)) \in \mathscr{T}_1 .$$

Comme $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \in \mathscr{T}_1$, l'ensemble $\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ n'est pas un ouvert de $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. Ainsi, comme φ_α est un homéomorphisme, ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))$ n'est pas un ouvert de M_α et donc $\mathrm{V} \notin \mathscr{T}_1'$. On obtient donc ${}^{\mathrm{c}}\mathscr{T}_1 \subset {}^{\mathrm{c}}\mathscr{T}_1'$ et finalement, $\mathscr{T}_1' = \mathscr{T}_1$.

En particulier, comme $\mathscr{T}$ est une topologie telle que les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soient ouverts de M et les φ_α des homéomorphismes, on en déduit que $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1'$ et que $\mathscr{T}_1'$ est une topologie sur M. On obtient ainsi l'unicité puisqu'on a une description explicite de $\mathscr{T}$.

Montrons que $\mathscr{T}$ est la topologie la plus fine rendant continue les φ_α. Comme les φ_α sont des homéomorphismes lorsqu'on munit M de $\mathscr{T}$, la topologie $\mathscr{T}$ rend continue les φ_α. Soit $\mathscr{T}_1$ une topologie sur M qui rende continue les φ_α et $\mathrm{U} \in \mathscr{T}_1$. L'ensemble ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{U})$ est donc un ouvert de M_α. Comme ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{U}) = {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{U} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))$, on obtient que $\mathrm{U} \in \mathscr{T}$ et donc $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}$. Autrement dit $\mathscr{T}_1$ est moins fine que $\mathscr{T}$.

Montrons que $\mathscr{T}$ est la topologie la moins fine rendant continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$. Comme les φ_α sont des homéomorphismes lorsqu'on munit M de $\mathscr{T}$, la topologie $\mathscr{T}$ rend continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$. Soit $\mathscr{T}_1$ une topologie qui rende continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$ et $\mathrm{V} \in \mathscr{T}$. L'ensemble ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))$ est alors un ouvert de M_α. Comme $g_\alpha = {\varphi_\alpha}^{-1}$ est continue pour $\mathscr{T}_1$, on a

$${g_\alpha}^{-1}({\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = (\varphi_\alpha \circ g_\alpha)^{-1}(\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = (\mathrm{id}_{\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)})^{-1}(\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = \mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \in \mathscr{T}_1$$

et donc
$$\mathrm{V} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} (\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) \in \mathscr{T}_1 .$$

Ainsi $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_1$. Autrement dit $\mathscr{T}$ est moins fine que $\mathscr{T}_1$. ■

Remarque 1.15 – La topologie $\mathscr{T}$. On a vu dans la démonstration de la proposition 1.13 que

$$\mathscr{T}_1 = \big\{\mathrm{U} \subset \mathrm{M}, \quad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \quad {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{U} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) \in \mathscr{T}_\alpha\big\}$$

est une topologie sur M telle que $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit un ouvert de M et φ_α un homéomorphisme de φ_α. La preuve de cette assertion reposait sur la comparaison de $\mathscr{T}_1$ avec la topologie $\mathscr{T}$ de M. Nous donnons ici une preuve directe de cette assertion.

- Comme ${\varphi_\alpha}^{-1}(\varnothing \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = {\varphi_\alpha}^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, on a bien $\varnothing \in \mathscr{T}_1$.
- Comme ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{M} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = \mathrm{M}_\alpha$, on a bien $\mathrm{M} \in \mathscr{T}_1$.
- On considère un ensemble I et pour $i \in \mathrm{I}$, un élément $\mathrm{U}_i \in \mathscr{T}_1$. On pose
$$\mathrm{U} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i .$$
On a alors $\quad {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \mathrm{U}) = {\varphi_\alpha}^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathrm{I}} (\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \mathrm{U}_i)\right) = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \mathrm{U}_i) .$
Comme une réunion d'ouverts est un ouvert, on obtient que ${\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \mathrm{U})$ est un ouvert de M_α et donc $\mathrm{U} \in \mathscr{T}_1$.
- On considère un ensemble fini I et pour $i \in \mathrm{I}$, un élément $\mathrm{U}_i \in \mathscr{T}$. On pose
$$\mathrm{U} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i .$$
On a alors $\quad {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \mathrm{U}) = {\varphi_\alpha}^{-1}\left(\bigcap_{i \in \mathrm{I}} (\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \mathrm{U}_i)\right) = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \mathrm{U}_i) .$
Comme une intersection finie d'ouverts est un ouvert, on en déduit que ${\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \mathrm{U})$ est un ouvert de M_α et donc $\mathrm{U} \in \mathscr{T}_1$.

Ainsi $\mathscr{T}_1$ est bien une topologie sur M. Montrons que $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \in \mathscr{T}_1$ pour tout $\beta \in \mathrm{A}$. D'après la remarque 1.14, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, on a $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$. Ainsi, comme φ_α est injective, on a ${\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \cap$

$\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un ouvert de M_α. Ainsi $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \in \mathscr{T}_1$. Enfin, montrons que les φ_α sont des homéomorphismes de M_α sur l'ouvert $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ de M muni de la topologie induite par $\mathscr{T}_1$. Comme les φ_α sont injectives, il suffit de montrer que les φ_α sont continues et ouvertes. Soit V un ouvert de $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. Comme $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \in \mathscr{T}_1$, on en déduit que $\mathrm{V} \in \mathscr{T}_1$ et donc ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{V} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{V})$ est un ouvert de M_α. Ainsi φ_α est continue. Soit W un ouvert de M_α, montrons que $\varphi_\alpha(\mathrm{W}) \in \mathscr{T}_1$. Comme $\varphi_\alpha(\mathrm{W}) \subset \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ et φ_α est injective, on obtient grâce à la remarque 1.14,

$$\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \cap \varphi_\alpha(\mathrm{W}) = \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\alpha(\mathrm{W}) = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) \cap \varphi_\alpha(\mathrm{W}) = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{W})\,.$$

Par définition de $\psi_{\beta\alpha}$, on a alors

$${\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \cap \varphi_\alpha(\mathrm{W})) = {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{W})) = ({\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha)(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{W})\,.$$

Comme W est un ouvert de M_α, l'ensemble $\mathrm{W} \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un ouvert de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$. Comme ${\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha$ est un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ (d'homéomorphisme réciproque ${\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta$), on en déduit que ${\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) \cap \varphi_\alpha(\mathrm{W}))$ est un ouvert de $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ donc de M_β. Ainsi, $\varphi_\alpha(\mathrm{W}) \in \mathscr{T}_1$ et φ_α est ouverte. Finalement, les φ_α sont bien des homéomorphismes de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. ■

La proposition-définition 1.16 définit la notion de recollement d'espaces topologiques : à partir d'une famille d'espaces topologiques $(\mathrm{M}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ vérifiant de bonnes propriétés (point (i) et (ii) ci-dessous), on construit un espace topologique M dans lequel des parties des M_α (les $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$) ont été identifiées.

Proposition-Définition 1.16 — Recollement d'espaces topologiques par des ouverts. Soient $(\mathrm{M}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2$, on se donne un ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de M_α et un homéomorphisme $\psi_{\beta\alpha} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ vérifiant :

(i) $\mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\psi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$;

(ii) Pour tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathrm{A}^3$, la restriction $\psi^\gamma_{\beta\alpha}$ de $\psi_{\beta\alpha}$ à $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ réalise un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}$ et $\psi^\beta_{\gamma\alpha} = \psi^\alpha_{\gamma\beta} \circ \psi^\gamma_{\beta\alpha}$.

On note
$$\mathrm{X} = \bigsqcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{M}_\alpha$$
l'espace topologique réunion disjointe des M_α et $i_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{X}$ l'injection canonique. Sur X, on considère la relation $\mathscr{R}$ donnée par $y\mathscr{R}z$ si

$$\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \quad \exists\, x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}, \quad \exists\, x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}, \qquad y = i_\alpha(x_\alpha), \quad z = i_\beta(x_\beta) \quad \text{et} \quad \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta\,.$$

La relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. On note $(\mathrm{M}, \mathscr{T})$ l'espace topologique quotient de X par $\mathscr{R}$, $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ la surjection canonique et $\varphi_\alpha = \pi \circ i_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$. On dit que M est l'espace topologique *obtenu par recollement des* M_α *le long des* $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ *au moyen des* $\psi_{\beta\alpha}$ et que les φ_α sont *les homéomorphismes associés.*

Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est un ouvert de M et φ_α un homéomorphisme de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. De plus, on a

(iii) $$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)\,;$$

(iv) $$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \mathrm{U}_{\alpha\beta} = {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))\,;$$

(v) $$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \quad \forall\, x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}, \qquad \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = {\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha(x_\alpha)\,.$$

(vi) $$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) = \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)\,.$$

Soit N un ensemble. On note $\mathscr{F}(\Psi, \mathrm{N})$ l'ensemble des familles $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, f_α soit une application de M_α dans N et, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2$, on ait $f_\alpha{}_{\big|\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = f_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}$. L'application

$$\Delta^{\mathrm{N},\Psi}_{\mathrm{M}} : \begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{N}) \longrightarrow \mathscr{F}(\Psi,\mathrm{N}) \\ \quad g \qquad\quad \longmapsto (g \circ \varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \end{cases}$$

est bijective. En particulier, pour tout $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{F}(\Psi,\mathrm{N})$, il existe une unique application $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ telle que $g \circ \varphi_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Soit N′ un espace topologique. On note $\mathscr{C}(\Psi, \mathrm{N}')$ l'ensemble des familles $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{F}(\Psi,\mathrm{N}')$ telles que pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application f_α soit continue. L'application $\Delta^{\mathrm{N}',\Psi}_{\mathrm{M}}$ induit une bijection entre $\mathscr{C}(\mathrm{M},\mathrm{N}')$ et $\mathscr{C}(\Psi,\mathrm{N}')$. Autrement dit, si f est une application de M dans N′ alors f est continue si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $f \circ \varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{N}'$ est continue. En particulier, pour tout $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{C}(\Psi,\mathrm{N}')$, il existe une unique application $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}'$ telle que $g \circ \varphi_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. De plus, l'application g est continue.

Remarque 1.17 — Homéomorphisme. Appliquons la condition (i) et la condition (ii) avec $\alpha = \gamma$. On obtient alors $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\alpha} = \mathrm{U}_{\beta\alpha}$, $\psi^\alpha_{\beta\alpha} = \psi_{\beta\alpha}$ est un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = \psi_{\beta\alpha} \circ \psi_{\alpha\beta}$. Ainsi $\psi_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\beta\alpha}$ sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre. ■

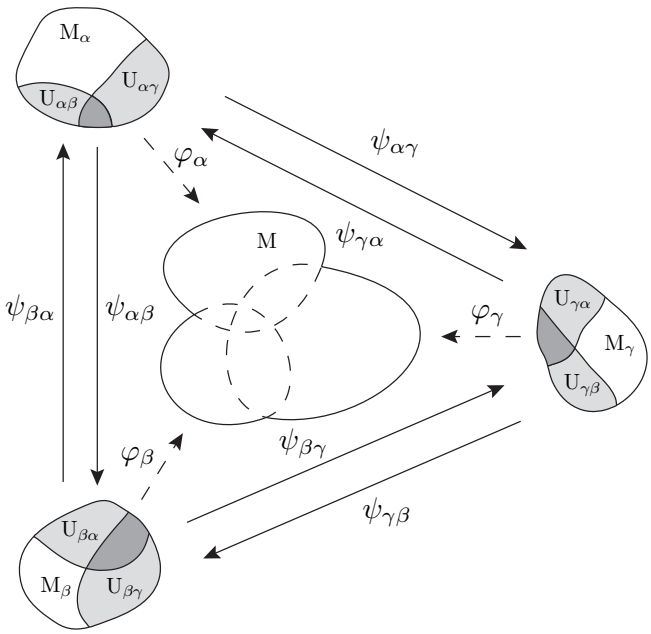


Fig. 1.1 Recollement d'espaces topologiques

Preuve. Montrons que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. Commençons par la réflexivité. Soit $y \in \mathrm{X}$, il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ et $x_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha = \mathrm{U}_{\alpha\alpha}$ tel que $y = i_\alpha(x_\alpha)$. Comme $\psi_{\alpha\alpha}(x_\alpha) = x_\alpha$ par (i), on en déduit que $y\mathscr{R}y$. Passons à la symétrie. Soient $y, z \in \mathrm{X}$ tels que $y\mathscr{R}z$. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ tels que $y = i_\alpha(x_\alpha)$, $z = i_\beta(x_\beta)$ et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. Comme $\psi_{\alpha\beta}$ est la bijection réciproque de $\psi_{\beta\alpha}$ (remarque 1.17), on a $\psi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ et donc $z\mathscr{R}y$. Enfin, terminons par la transitivité. Soient $x, y, z \in \mathrm{X}$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. Il existe $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ tels que $x = i_\alpha(x_\alpha)$, $y = i_\beta(x_\beta)$ et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. Il existe $\beta', \gamma \in \mathrm{A}$, $x_{\beta'} \in \mathrm{U}_{\beta'\gamma}$ et $x_\gamma \in \mathrm{U}_{\gamma\beta'}$ tels que $y = i_{\beta'}(x_{\beta'})$, $z = i_\gamma(x_\gamma)$ et $\psi_{\gamma\beta'}(x_{\beta'}) = x_\gamma$. Par définition de X et injectivité de i_β, on obtient $\beta = \beta'$ et $x_\beta = x_{\beta'} \in \mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}$. L'hypothèse (ii) montre qu'il existe un (unique) $x'_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ tel que $x_\beta = \psi^\gamma_{\beta\alpha}(x'_\alpha) = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$. L'injectivité de $\psi_{\beta\alpha}$ montre que $x_\alpha = x'_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$. On en déduit alors, grâce à (ii) et à la remarque 1.17, que

$$x_\gamma = \psi_{\gamma\beta}(x_\beta) = \psi^\alpha_{\gamma\beta}(x_\beta) = \psi^\alpha_{\gamma\beta}(\psi^\gamma_{\beta\alpha}(x_\alpha)) = \psi^\beta_{\gamma\alpha}(x_\alpha) = \psi_{\gamma\alpha}(x_\alpha) \in \mathrm{U}_{\gamma\alpha}\,.$$

Ainsi $x\mathscr{R}z$. Finalement $\mathscr{R}$ est réflexive, symétrique et transitive. C'est une relation d'équivalence.

On note alors $\mathrm{M} = \mathrm{X}/\mathscr{R}$ et $\mathscr{T}$ la topologie quotient de celle de X. Soit $\alpha \in \mathrm{A}$ et U_α un ouvert de M_α. Montrons que $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha)$ est ouvert dans M. Par définition de la topologie quotient, il s'agit de montrer $\pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$ est un ouvert de X. Or, on a

$$\pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha)) = \bigsqcup_{\beta \in \mathrm{A}} i_\beta(\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha))\,.$$

Montrons cette égalité. Soit $y = i_\beta(x_\beta)$ avec $x_\beta \in \psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta}) \subset \mathrm{U}_{\beta\alpha}$. Comme $\psi_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\beta\alpha}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre (remarque 1.17), l'élément $x_\alpha = \psi_{\alpha\beta}(x_\beta)$ appartient à $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha$. En posant $x = i_\alpha(x_\alpha)$, on obtient $y\mathscr{R}x$ c'est-à-dire $\pi(y) = \pi(x) = \varphi_\alpha(x_\alpha)$. Ainsi $y \in \pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in \pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$. Il existe $x_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha$ tel que $\pi(i_\alpha(x_\alpha)) = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \pi(y)$. En posant $z = i_\alpha(x_\alpha)$, on obtient $z\mathscr{R}y$. Par définition de $\mathscr{R}$, il existe $\alpha', \beta \in \mathrm{A}$, $x_{\alpha'} \in \mathrm{U}_{\alpha'\beta}$ et $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha'}$ tel que $z = i_{\alpha'}(x_{\alpha'})$ et $y = i_\beta(x_\beta)$ et $\psi_{\beta\alpha'}(x_{\alpha'}) = x_\beta$. Par définition de X et injectivité de i_α, on obtient $\alpha = \alpha'$ et $x_\alpha = x_{\alpha'} \in \mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha$. Ainsi $y = i_\beta(x_\beta) \in i_\beta(\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha))$. On obtient donc l'égalité souhaité.

Montrons que cette égalité assure que $\pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$ est un ouvert de M. Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha$ est ouvert dans $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et que $\psi_{\beta\alpha}$ est un homéomorphisme, on en déduit que $\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et donc de M_β. Ainsi, par définition de la topologie de la réunion disjointe, $i_\beta(\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_\alpha))$ est un ouvert de X. Finalement, par réunion, $\pi^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha))$ est ouvert dans X. On en déduit que $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de M. L'application $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ est donc une application ouverte et $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est un ouvert de M.

Par ailleurs, φ_α est continue comme composée des applications continues i_α et π. De plus, φ_α est injective. En effet, si $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\alpha(x'_\alpha)$ alors $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R}\, i_\alpha(x'_\alpha)$. Or α est l'unique élément $\beta \in \mathrm{A}$ tel que $i_\alpha(x_\alpha) \in i_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ (resp. $i_\alpha(x'_\alpha) \in i_\beta(\mathrm{M}_\beta)$) et i_α est injective. La définition de $\mathscr{R}$ montre que $x_\alpha = \varphi_{\alpha\alpha}(x_\alpha) = x'_\alpha$. Finalement φ_α est injective, ouverte et continue. C'est donc un homéomorphisme de M_α sur son image $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ qui est ouverte dans M.

Montrons (iii). Comme π est surjective, on a

$$\mathrm{M} = \pi(\mathrm{X}) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \pi(i_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)\,.$$

Montrons (iv). Soit $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$. On pose $x_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) \in \mathrm{U}_{\beta\alpha} \subset \mathrm{M}_\beta$. On a alors, par définition de $\mathscr{R}$, $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R} i_\beta(x_\beta)$ et donc $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \pi\circ i_\alpha(x_\alpha) = \pi\circ i_\beta(x_\beta) = \varphi_\beta(x_\beta)$. Ainsi $x_\alpha \in \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))$. Réciproquement, si $x_\alpha \in \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta))$ alors, il existe $x_\beta \in \mathrm{M}_\beta$ tel que $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. On a donc $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R} i_\beta(x_\beta)$. Comme α (resp. β) est l'unique élément γ de A tel que $i_\alpha(x_\alpha) \in i_\gamma(\mathrm{M}_\gamma)$ (resp. $i_\beta(x_\beta) \in i_\gamma(\mathrm{M}_\gamma)$) et que i_α et i_β sont injectives, on en déduit que $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. En particulier, $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$.

Montrons (v). Pour $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on pose $x_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$. La définition de $\mathscr{R}$ montre $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R} i_\beta(x_\beta)$ c'est-à-dire $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. Ainsi ${\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(x_\alpha)) = x_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$.

Enfin, montrons (vi). C'est un conséquence directe de la remarque 1.14. Donnons-en une autre démonstration utilisant les propriétés propres à la situation. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2$ et $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$. Il existe $x_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha$ et $x_\beta \in \mathrm{M}_\beta$ tel que $y = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. Ainsi $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R} i_\beta(x_\beta)$. Comme α (resp. β) est l'unique élément γ de A tel que $i_\alpha(x_\alpha) \in i_\gamma(\mathrm{M}_\gamma)$ (resp. $i_\beta(x_\beta) \in i_\gamma(\mathrm{M}_\gamma)$) et que i_α et i_β sont injectives, on en déduit que $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. En particulier, on obtient $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$ et $y \in \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$.

Soit $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$. Il existe $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ tel que $y = \varphi_\alpha(x_\alpha)$. On pose $x_\beta = \psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$. La définition de $\mathscr{R}$ assure que $i_\alpha(x_\alpha)\mathscr{R} i_\beta(x_\beta)$ c'est-à-dire $y = \varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. Ainsi $y \in \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$ et $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$.

De même, si $y \in \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$, on obtient $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$ et $y \in \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$.

On reprend les notations de la proposition 1.13. L'expression de $\psi_{\beta\alpha}$ obtenue au point (v) montre que $\mathscr{F}(\Psi,\mathrm{N}) = \mathscr{F}(\Phi,\mathrm{N})$ et $\mathscr{C}(\Psi,\mathrm{N}') = \mathscr{C}(\Psi,\mathrm{N}')$. De plus, comme les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert de M et que les $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ sont des homéomorphismes, la proposition 1.13 donne alors les résultats souhaités. ■

Remarque 1.18 — Bijectivité de $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Psi}$. On a montré que l'espace topologique $(\mathrm{M},\mathscr{T})$ obtenu par recollement des M_α le long des $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ au moyen des $\psi_{\beta\alpha}$ et les homéomorphismes φ_α vérifient les hypothèses de la proposition 1.13. On a ainsi obtenu une preuve de la bijectivité de $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Psi}$. Cependant, la construction explicite de M permet de donner une autre démonstration de la bijectivité de $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Psi}$.

Injectivité de $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Psi}$. Si $f\circ\varphi_\alpha = g\circ\varphi_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. On a $(f\circ\pi)\circ i_\alpha = (g\circ\pi)\circ i_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Ainsi, la propriété universelle de la réunion disjointe montre que $f\circ\pi = g\circ\pi$. La propriété universelle du quotient (ou la surjectivité de π) montre alors que $f = g$.

Surjectivité de $\Delta_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N},\Psi}$. Soit $(g_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}} \in \mathscr{F}(\Psi,\mathrm{N})$. Par la propriété universelle de la réunion disjointe, il existe une application $\widetilde{g} : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ telle que $\widetilde{g}\circ i_\alpha = g_\alpha$. Montrons que $\widetilde{g}$ est compatible avec $\mathscr{R}$. Soient $y, z \in \mathrm{X}$ tels que $y\mathscr{R}z$. Il existe $\alpha,\beta \in \mathrm{A}$ et $x_\alpha \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, $x_\beta \in \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ tels que $y = i_\alpha(x_\alpha)$, $z = i_\beta(x_\beta)$ et $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. On a alors

$$\widetilde{g}(y) = \widetilde{g}\circ i_\alpha(x_\alpha) = g_\alpha(x_\alpha) = g_\beta(\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha)) = g_\beta(x_\beta) = \widetilde{g}\circ i_\beta(x_\beta) = \widetilde{g}(z)\,.$$

La propriété universelle du quotient montre qu'il existe une application $g : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ telle que $\widetilde{g} = g\circ\pi$. On a donc $g\circ\varphi_\alpha = g\circ\pi\circ i_\alpha = \widetilde{g}\circ i_\alpha = g_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. ■

La proposition suivante donne un critère d'existence et d'unicité d'une topologie sur un ensemble M vérifiant certaines propriétés ensemblistes proches de celles de la proposition 1.13. Elle assurera l'existence et l'unicité de la topologie associée à l'atlas d'une variété holomorphe.

Proposition 1.19 — Construction de topologie. Soient M un ensemble, $((\mathrm{M}_\alpha,\mathscr{T}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille d'espaces topologiques. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, il existe une famille d'applications $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ vérifiant

(i) $$\forall\,\alpha \in \mathrm{A}, \qquad \varphi_\alpha \text{ est injective}\,;$$

(ii) $$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)\,;$$

(iii) $$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \mathrm{U}_{\alpha\beta} := {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)) \in \mathscr{T}_\alpha\,;$$

(iv) $$\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \psi_{\alpha\beta} := {\varphi_\alpha}^{-1}\circ\varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta} \text{ est continue.}$$

Les familles $(\mathrm{U}_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2}$ et $(\psi_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2}$ vérifient les conditions (i) et (ii) de la proposition-définition 1.16. De plus, il existe sur M une unique topologie $\mathscr{T}$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit des ouverts de M et $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ un homéomorphisme. La topologie $\mathscr{T}$ est la plus fine sur M rendant continue les φ_α pour $\alpha \in \mathrm{A}$ et la moins fine rendant continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$ pour $\alpha \in \mathrm{A}$. Elle est donnée par

$$\mathscr{T} = \big\{\mathrm{U} \subset \mathrm{M}, \qquad \forall\,\alpha \in \mathrm{A}, \quad {\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{U} \cap \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) \in \mathscr{T}_\alpha\big\}.$$

Preuve. Montrons que $(\mathrm{U}_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2}$ et $(\psi_{\alpha\beta})_{(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2}$ vérifient les conditions (i) et (ii) de la proposition-définition 1.16. Par l'hypothèse (iii), $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un ouvert de M_α et $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ est un ouvert de M_β.

Montrons que les applications $\psi_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\beta\alpha}$ sont bien définies et sont des homéomorphismes. D'après (i), l'application φ_α réalise une bijection de φ_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. On peut donc définir ${\varphi_\alpha}^{-1} : \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \to \mathrm{M}_\alpha$. Par

définition de $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$, on a $\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) \subset \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. Ainsi ${\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{M}_\alpha$ a bien un sens. Enfin, par définition de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on obtient que $\psi_{\beta\alpha} : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est bien définie. Comme, par définition de $\psi_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\beta\alpha}$, on a $\psi_{\beta\alpha} \circ \psi_{\alpha\beta} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\beta\alpha}}$ et $\psi_{\alpha\beta} \circ \psi_{\beta\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$, le point (iv) montre que $\psi_{\alpha\beta}$ et $\psi_{\beta\alpha}$ sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Par définition, on a $\mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\psi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_\alpha}$. Le point (i) de la proposition-définition 1.16 est vérifié.

Montrons le point (ii) de la proposition-définition 1.16. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$. Comme $\psi_{\alpha\beta}$ (resp. $\psi_{\gamma\beta}$) est un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $\mathrm{U}_{\gamma\beta}$) sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ (resp. $\mathrm{U}_{\gamma\beta}$), la restriction $\psi^\gamma_{\beta\alpha}$ de $\psi_{\beta\alpha}$ à $\mathrm{U}_{\alpha\gamma} \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\gamma} \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ sur $\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\gamma} \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta})$. Comme φ_α est bijective, on a

$$\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\gamma} \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta}) = {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\gamma} \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta})) = {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\gamma})) \cap {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})) = \mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\gamma}))\,.$$

La remarque 1.14 et les définitions de $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ et $\mathrm{U}_{\beta\gamma}$ donnent alors

$$\psi_{\beta\alpha}(\mathrm{U}_{\alpha\gamma} \cap \mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\gamma(\mathrm{M}_\gamma)) = \mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) \cap {\varphi_\beta}^{-1}(\varphi_\gamma(\mathrm{M}_\gamma)) = \mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}\,.$$

De plus, les définitions de $\psi_{\beta\alpha}$, $\psi_{\gamma\beta}$ et $\psi_{\gamma\alpha}$ montrent immédiatement que $\psi^\beta_{\gamma\alpha} = \psi^\alpha_{\gamma\beta} \circ \psi^\gamma_{\beta\alpha}$.

Les hypothèses (i) et (ii) de la proposition-définition 1.16 sont vérifiées. On peut donc considérer l'espace Y obtenu par recollement des M_α le long des $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ au moyen des $\psi_{\beta\alpha}$. On note φ'_α les homéomorphismes associés.

On considère alors la famille $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$. Par définition des $\psi_{\beta\alpha}$, on a $\varphi_\alpha{}_{|\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = \varphi_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}$. La proposition-définition 1.16 appliqué à l'espace Y montre qu'il existe une unique application $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{M}$ telle que $g \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$.

Montrons que g est bijective. Comme $g \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$, on obtient que $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \subset g(\mathrm{X})$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Le point (ii) montre alors que g est surjective. Soient $x, y \in \mathrm{Y}$ tels que $g(x) = g(y)$. Par définition de l'espace obtenu par recollement, il existe $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in \mathrm{M}_\alpha$ et $x_\beta \in \mathrm{M}_\alpha$ tels que $x = \varphi'_\alpha(x_\alpha)$ et $y = \varphi'_\beta(x_\beta)$. En composant par g, on obtient l'égalité $\varphi_\alpha(x_\alpha) = \varphi_\beta(x_\beta)$. Ainsi, par définition des $\psi_{\beta\alpha}$, on a $\psi_{\beta\alpha}(x_\alpha) = x_\beta$. Et donc, en reprenant les notations de la proposition-définition 1.16, on en déduit que $i_\alpha(x_\alpha) \mathscr{R}\, i_\beta(x_\beta)$ c'est-à-dire $x = y$.

Par transfert de structure, il existe une unique topologie sur M telle que g soit un homéomorphisme. Comme $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est un ouvert de Y, on en déduit que $g(\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)) = \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est un ouvert de M et par restriction, g induit un homéomorphisme de $\varphi'_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. Par composition, on obtient que $g \circ \varphi'_\alpha = \varphi_\alpha$ est un homéomorphisme de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$.

La proposition 1.13 permet alors de conclure au sujet de l'unicité de la topologie cherchée et des propriétés qu'elle vérifie. ■

Remarque 1.20 – Bilan. Pour finir cette sous-section, on constate l'équivalence des trois points de vue développés ci-dessus sur le recollement d'espaces topologiques. De façon précise, soit $((\mathrm{M}_\alpha, \mathscr{T}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille d'espaces topologiques. Il revient au même de se donner :

1. Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on se donne un ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de M_α et un homéomorphisme $\psi_{\beta\alpha} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ vérifiant :
   - (i) $\mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\psi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$;
   - (ii) Pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{A}^3$, la restriction $\psi^\gamma_{\beta\alpha}$ de $\psi_{\beta\alpha}$ à $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ réalise un homéomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}$ et $\psi^\beta_{\gamma\alpha} = \psi^\alpha_{\gamma\beta} \circ \psi^\gamma_{\beta\alpha}$;
2. Un espace topologique $(\mathrm{M}, \mathscr{T})$ et, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, une application $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ telle que $(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ soit un recouvrement ouvert de M et φ_α un homéomorphisme de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$.
3. Un ensemble M et, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, une application injective $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ telle que

$$(iii) \qquad \mathrm{M} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)\,;$$

$$(iv) \qquad \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad \mathrm{U}_{\alpha\beta} := {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)) \in \mathscr{T}_\alpha\,;$$

$$(v) \qquad \forall\,(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad {\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta} \text{ soit continue}\,.$$

■

En effet, la remarque 1.14 montre que $2 \Rightarrow 3$, la proposition-définition 1.16 assure que $1 \Rightarrow 2$ et la proposition 1.19 donne l'implication $3 \Rightarrow 1$.

1.3 CARTE ET ATLAS

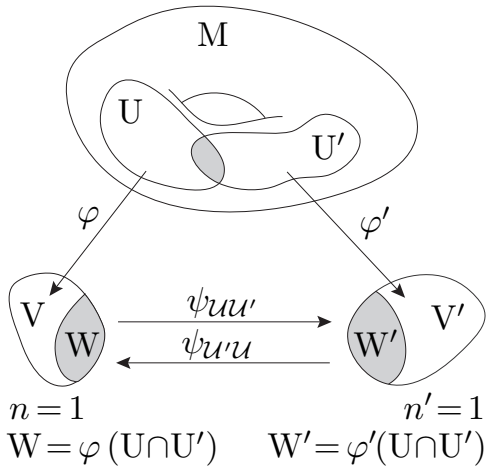
Dans cette section, on définit les notions de cartes et d'atlas et on étudie leurs propriétés élémentaires utiles pour la suite. On insiste en particulier sur la notion d'atlas maximal et de classe d'équivalence d'atlas qui mèneront à la notion de prévariété holomorphe.

1.3.1 PSEUDOCARTES

On commence par l'étude des briques élémentaires des atlas : les pseudocartes sur un ensemble et les pseudocartes topologiques sur un espace topologique. Le lien entre deux pseudocartes est assuré par les applications de transition. Ce sont les conditions de compatibilité sur les applications de transition entre pseudocartes et une condition globale de recouvrement qui donnent la notion d'atlas (voir la définition 1.35).

Définition 1.21 — Pseudocartes.

- Soit M un ensemble (resp. un espace topologique). On dit qu'un quadruplet $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une *pseudocarte* (resp. une *pseudocarte topologique*) sur M si U est une partie de M, V un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une bijection (resp. U est un ouvert de M, V un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ un homéomorphisme). On dit que U est le *domaine* de la pseudocarte $\mathcal{U}$, n sa *dimension* et φ son *transfert* et on note $\mathrm{U} = \mathrm{dom}(\mathcal{U})$.
- On considère un ensemble (resp. un espace topologique) M et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes (resp. topologiques) sur M. On dit que les applications
$$\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} \circ \left(\varphi_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}') \longrightarrow \varphi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')$$
et $$\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = \varphi_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} \circ \left(\varphi'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}\right)^{-1} : \varphi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}') \longrightarrow \varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')$$
sont les *applications de transition* entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$.



Remarque 1.22 — Pseudocarte et pseudocarte topologique. Soit M un espace topologique. Une pseudocarte topologique sur M est toujours une pseudocarte sur l'ensemble M. ■

Exemple 1.23 — Carte vide. Soient M ensemble (resp. un espace topologique). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, le quadruplet $(\varnothing, \varnothing, m, \varnothing)$ est une pseudocarte (resp. topologique) de M appelée *carte vide de dimension* m. ■

Le lemme suivant donne les propriétés élémentaires des fonctions de transition entre deux pseudocartes : ce sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

Lemme 1.24 — Bijectivité. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}'$ deux pseudocartes (resp. deux pseudocartes topologiques) sur M. Les applications de transitions $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre (resp. des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre).

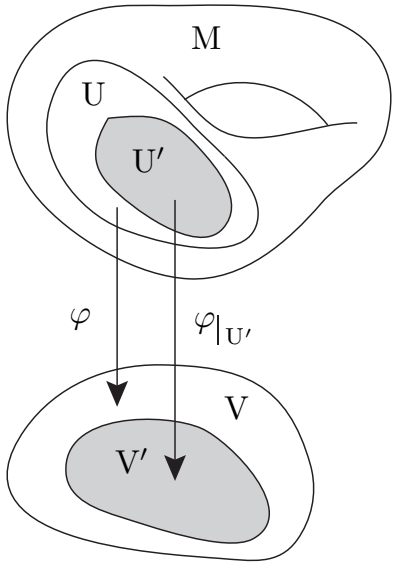
Preuve. On pose $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$. La restriction de φ (resp. φ') réalise une bijection (un homéomorphisme, dans le cas topologique) de $\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'$ sur $\varphi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')$ (resp. sur $\varphi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')$). Par composition, on en déduit que $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ sont des bijections (des homéomorphismes, dans le cas topologique) réciproques l'une de l'autre. ■

La remarque suivante présente un outil bien pratique pour les raisonnements qui vont suivre : la restriction d'une pseudocarte.

Remarque 1.25 — Restriction. Soient M un ensemble, $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une pseudocarte sur M et V′ un ouvert de V. On pose $\mathrm{U}' = \varphi^{-1}(\mathrm{V}')$. Le quadruplet $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n, \varphi_{|\mathrm{U}'})$ est une pseudocarte sur M notée $\mathcal{U}_{|\mathrm{U}'}$ et appelé *restriction de* $\mathcal{U}$ *à* U′. En effet, V′ est ouvert dans V donc dans $\mathbb{C}^n$ et $\varphi_{|\mathrm{U}'}$ réalise une bijection entre U′ et V′.

Soient M un espace topologique, $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une pseudocarte topologique sur M et U′ un ouvert de U. Le quadruplet $(\mathrm{U}', \varphi(\mathrm{U}'), n, \varphi_{|\mathrm{U}'})$ est une pseudocarte topologique sur M notée $\mathcal{U}_{|\mathrm{U}'}$ et appelé *restriction de* $\mathcal{U}$ *à* U′. En effet, U′ est ouvert dans U donc dans M. De plus, comme φ est un homéomorphisme $\varphi(\mathrm{U}')$ est ouvert dans V donc dans $\mathbb{C}^n$. Enfin, $\varphi_{|\mathrm{U}'}$ réalise un homéomorphisme entre U′ et $\varphi(\mathrm{U}')$.

Soient M un espace topologique, $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une pseudocarte topologique sur M et V′ un ouvert de V. Comme $\mathrm{U}' = \varphi^{-1}(\mathrm{V}')$ est un ouvert de U donc de M et que $\varphi(\varphi^{-1}(\mathrm{V}')) = \mathrm{V}'$, la restriction de $\mathcal{U}$ à U′ au sens des pseudocartes coïncide avec la restriction de $\mathcal{U}$ à l'ouvert U′ au sens des pseudocartes topologiques. ■



1.3.2 ATLAS

La notion d'atlas repose sur deux conditions : une condition globale de recouvrement et une condition locale de compatibilité entre pseudocartes (voir la définition 1.35). On commence par présenter de façon détaillée cette notion de compatibilité entre pseudocartes.

COMPATIBILITÉ

La compatibilité entre deux pseudocartes porte naturellement sur les fonctions de transitions entre ces pseudocartes : on impose leur holomorphie. En particulier, dans le cas non topologique, cela impose le fait que les domaines de définition de ces fonctions de transition soient ouverts (condition (i) ci-dessous). Après avoir donné la définition, on étudie les propriétés élémentaires de la compatibilité, en particulier celles liées à l'holomorphie ou à la restriction.

Définition 1.26 — Compatibilité entre pseudocartes.

- Soient M un ensemble et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes sur M. On dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont *compatibles* si les *conditions de compatibilité* suivantes sont vérifiées
  - (i) $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est un ouvert de V et $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est un ouvert de V' ;
  - (ii) les applications de transitions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont holomorphes.
- Soient M un espace topologique et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes topologiques sur M. On dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont *compatibles* si les applications de transitions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont holomorphes.

Exemple 1.27 — Exemple stupide. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une pseudocarte (resp. topologique) de M. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, la carte vide de dimension m est compatible avec $\mathcal{U}$. En effet, $\varphi(\mathrm{U} \cap \varnothing) = \varnothing$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\varnothing(\mathrm{U} \cap \varnothing) = \varnothing$ est un ouvert de $\mathbb{C}^m$ et les applications de transitions sont les applications vides qui sont holomorphes. ■

Exemple 1.28 — Pseudocartes disjointes. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ deux pseudocartes (resp. topologiques) de M de domaine respectif U et U' et de transfert respectif φ et φ'. Si $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' = \varnothing$ alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles puisque $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') = \varnothing$ et $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') = \varnothing$ sont ouverts et que les applications de transitions sont les applications vides qui sont holomorphes. On dit que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont des *pseudocartes disjointes*. ■

Exemple 1.29 — Une seule pseudocarte. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathcal{U}$ une pseudocarte (resp. topologique) de M de domaine U et de transfert φ. Alors $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ sont compatibles. En effet, on a $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}) = \mathrm{V}$ est un ouvert de V et $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$ est holomorphe. ■

Les remarques 1.30 et 1.31 donnent quelques conséquences élémentaires des propriétés de compatibilité entre pseudocartes en lien avec l'holomorphie des applications de transitions. On y aborde aussi le problème de la dimension des pseudocartes.

Remarque 1.30 — Biholomorphisme et dimension. Soient M un ensemble (resp. espace topologique) et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes (resp. pseudocartes topologiques) sur M qui sont compatibles. Les applications de transitions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont des biholomorphismes. En effet, ce sont des bijections réciproques l'une de l'autre (voir le lemme 1.24) qui sont holomorphes. Ainsi, si $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \neq \varnothing$ alors $n = n'$. Autrement dit, les dimensions de deux pseudocartes (resp. topologiques) compatibles dont les domaines se rencontrent sont identiques ou encore, deux pseudocartes (resp. topologiques) compatibles ont même dimension ou ne se rencontrent pas. ■

Remarque 1.31 — Vérification de la compatibilité et biholomorphisme. Soient M un ensemble et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n, \varphi')$ deux pseudocartes sur M de même dimension. Comme une bijection holomorphe d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ est nécessairement une application ouverte et un biholomorphisme sur son image, il suffit de vérifier que $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est ouvert et $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe pour que $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ soit un ouvert et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ soit holomorphe. Ainsi $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles si et seulement si $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est ouvert et $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe ou $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ est ouvert et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ est holomorphe.

Attention, il est important de s'assurer que les deux cartes ont bien la même dimension comme le montre l'exemple suivant. Soit $x \in \mathbb{C}$. On considère les deux pseudocartes de $\mathbb{C}$: $\mathcal{U} = (\{x\}, \{0\}, 0, \varphi_x : x \mapsto 0)$ et $\mathcal{U}' = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, 1, \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$. L'ensemble $\varphi_x(\{x\} \cap \mathbb{C}) = \{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}^0$ et l'application $0 \in \mathbb{C}^0 \mapsto x \in \mathbb{C}$ est holomorphe alors que $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}(\{x\} \cap \mathbb{C}) = \{x\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{C}$.

Soient M est un espace topologique et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n, \varphi')$ sont deux pseudocartes topologiques sur M. Le lemme **??** appliqué aux ouverts $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et à l'application $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ (ou $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$)

montre que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles si et seulement si $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ ou $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ est holomorphe. ■

Les deux remarques qui suivent étudient quelques propriétés de la compatibilité entre pseudocartes en lien avec la restriction des pseudocartes.

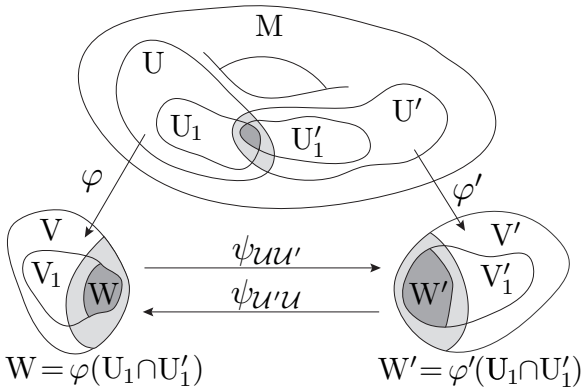
Remarque 1.32 — Compatibilité et restriction. On considère un ensemble M et deux pseudocartes sur M qui sont compatibles $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$. Comme $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ sont ouverts respectivement dans V et dans V′ et que $\varphi^{-1}(\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')) = \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ et $\varphi'^{-1}(\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')) = \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$, on peut parler des pseudocartes $\mathcal{U}_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$ et $\mathcal{U}'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$. Comme $(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \cap (\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') = \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$, elles sont compatibles.

Soient M un espace topologique et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes topologiques sur M. Montrons que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles si et seulement si $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$ et $\mathcal{V}' = \mathcal{U}'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$ le sont.

Comme U et U′ sont des ouverts de M, l'ensemble $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ est ouvert et contenu dans U et U′. Ainsi les pseudocartes topologiques $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ ont bien un sens. Comme $(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')\cap(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}') = \mathrm{U}\cap\mathrm{U}'$, on obtient $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \psi_{\mathcal{V}\mathcal{V}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = \psi_{\mathcal{V}'\mathcal{V}}$. Ainsi $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles si seulement si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ le sont. ■

Remarque 1.33 — Compatibilité et restriction 2. On considère un espace topologique M et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes topologiques sur M. Soient $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{U}'_1 \subset \mathrm{U}'$ deux ouverts de M. Montrons que si les pseudocartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles alors les pseudocartes $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}_1}$ et $\mathcal{U}'_1 = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}'_1}$ le sont aussi.

Comme φ (resp. φ') est un homéomorphisme, l'ensemble $\varphi(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}'_1)$ (resp. $\varphi'(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}'_1)$) est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{C}^{n'}$). Par ailleurs, les applications de transition $\psi_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}$ et $\psi_{\mathcal{U}'_1\mathcal{U}_1}$ entre $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}'_1$ sont les restrictions à $\varphi(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}'_1)$ et $\varphi'(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}'_1)$ de $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$. Elles sont donc holomorphes. ■



Par la suite, on comparera les situations (pseudocartes et atlas) topologiques et non topologiques (voir, par exemple, les remarques 1.36 et 1.47 et corollaire 1.39). La remarque suivante est une première pierre à cet édifice.

Remarque 1.34 — Compatibilité pour les pseudocartes. Soient M un espace topologique et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux pseudocartes topologiques sur M qui sont compatibles en tant que pseudocartes sur l'ensemble M alors il est évident que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles en tant que pseudocartes topologiques.

Réciproquement, soient M un espace topologique et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ deux pseudocartes topologiques sur M qui sont compatibles (en tant que pseudocartes topologiques). Alors $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ sont compatibles en tant que pseudocartes sur l'ensemble M. En effet, U et U′ sont des ouverts de M donc $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ est un ouvert de M contenu dans U et dans U′. Ainsi $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ est ouvert dans U et dans U′. Comme φ est un homéomorphisme, on obtient que $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ sont ouverts respectivement dans V et V′.

Finalement, pour des pseudocartes topologiques, les compatibilités au sens des pseudocartes et au sens des pseudocartes topologiques coïncident. ■

ATLAS

On introduit à présent la notion centrale dans toute la suite de cette section : celle d'atlas. On distingue deux conditions annoncées : la première de nature globale et la deuxième de nature locale.

Définition 1.35 — Atlas.

- Soit M un ensemble. Un ensemble de pseudocartes $\mathscr{A} = \{\mathcal{U}_\alpha, \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ est un *atlas sur* M si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
  - (i) les domaines des $\mathcal{U}_\alpha$ forment un recouvrement de M ;
  - (ii) pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, les pseudocartes $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$ sont compatibles.
- Soit M un espace topologique. Un ensemble de pseudocartes topologiques $\mathscr{A} = \{\mathcal{U}_\alpha, \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ est un *atlas topologique sur* M si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
  - (i) les domaines des $\mathcal{U}_\alpha$ forment un recouvrement (qui est donc un recouvrement ouvert) de M ;
  - (ii) pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, les pseudocartes topologiques $\mathcal{U}_\alpha$ et $\mathcal{U}_\beta$ sont compatibles.
- Soient $\mathscr{A}$ un atlas sur M. On dit que $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ (ou plus brièvement U) est une *carte de* $\mathscr{A}$. Et, si $x \in \mathrm{U}$, on dit que $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une *carte de* $\mathscr{A}$ *en* x.

Les remarques 1.36 et 1.40, la proposition 1.37 et le corollaire 1.39 prolonge le travail de comparaison entre la situation topologique et la situation non topologique, commencé à la remarque 1.34. Le résultat primordial est celui de la proposition 1.37 qui assure l'existence d'une (unique) topologie associée à un atlas : si M est un ensemble muni d'un atlas $\mathscr{A}$, on peut construire une topologie sur M telle que $\mathscr{A}$ soit un atlas topologique sur M.

Remarque 1.36 — Atlas et atlas topologique. Les remarques 1.22 et 1.34 montrent qu'un atlas topologique sur l'espace topologique M est un atlas sur l'ensemble M.

Par ailleurs, soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ un atlas sur M et $\mathscr{T}$ une topologie sur M. Pour que $\mathscr{A}$ soit un atlas topologique sur $(\mathrm{M}, \mathscr{T})$, il faut et il suffit que les cartes de $\mathscr{A}$ soient des pseudocartes topologiques c'est-à-dire que les domaines soient des ouverts de M et les transferts des homéomorphismes.

En effet, la définition d'atlas topologique impose que les cartes de $\mathscr{A}$ des pseudocartes topologiques. Réciproquement, on suppose que les cartes de $\mathscr{A}$ sont des pseudocartes topologiques. Par hypothèse, les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ forment un recouvrement de M. Il reste à vérifier que les cartes de $\mathscr{A}$ sont deux à deux compatibles en tant que pseudocartes topologiques. Comme $\mathscr{A}$ est un atlas, elles sont compatibles en tant que pseudocartes. La remarque 1.34 montre qu'elles sont alors compatibles en tant que pseudocartes topologiques. ■

Proposition 1.37 — Atlas et topologie. Soient M un ensemble et $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha), \quad \alpha \in \mathrm{A}\}$ un atlas sur M. Il existe sur M une unique topologie $\mathscr{T}$, appelée *topologie associée à* $\mathscr{A}$, telle que $\mathscr{A}$ soit un atlas topologique c'est-à-dire telle que pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble U_α soit un ouvert et $\varphi_\alpha : \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{V}_\alpha$ soit un homéomorphisme (remarque 1.36).

De plus, $\mathscr{T}$ est la topologie la plus fine rendant continue les ${\varphi_\alpha}^{-1}$ pour $\alpha \in \mathrm{A}$ et la moins fine rendant continue les φ_α pour $\alpha \in \mathrm{A}$. Elle est donnée par

$$\mathscr{T} = \{\mathrm{U} \subset \mathrm{M}, \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \quad \varphi_\alpha(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_\alpha) \text{ soit un ouvert de } \mathrm{V}_\alpha\} \ .$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition 1.19 à la famille d'espaces topologiques $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ et à la famille d'applications $({\varphi_\alpha}^{-1})_{\alpha\in\mathrm{A}}$. La condition (i) est vérifiée. On a ${\varphi_\alpha}^{-1}(\mathrm{V}_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha$ et $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est un recouvrement de M puisque $\mathscr{A}$ est un atlas. Ainsi la condition (ii) est vérifiée. Pour simplifier les notations, on pose $g_\alpha = {\varphi_\alpha}^{-1}$. Montrons à présent que $\mathrm{U}_{\beta\alpha} = {g_\beta}^{-1}(g_\alpha(\mathrm{V}_\alpha)) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$. Comme, pour $x \in \mathrm{V}_\beta$, on a ${\varphi_\beta}^{-1}(x) \in \mathrm{U}_\beta$, on obtient

$${g_\beta}^{-1}(g_\alpha(\mathrm{V}_\alpha)) = \left\{x \in \mathrm{V}_\beta, \quad {\varphi_\beta}^{-1}(x) \in g_\alpha(\mathrm{V}_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha\right\} = \left\{x \in \mathrm{V}_\beta, \quad {\varphi_\beta}^{-1}(x) \in \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta\right\} = \varphi_\beta(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta).$$

Comme $\mathscr{A}$ est un atlas, $\varphi_\beta(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$ est un ouvert de V_β et la condition (iii) est vérifiée. Enfin, comme $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta)$, la fonction $\psi_{\beta\alpha} := {g_\beta}^{-1} \circ g_\alpha$ n'est autre que la fonction de transition $\psi_{\mathcal{U}_\alpha\mathcal{U}_\beta}$ qui est holomorphe puisque $\mathscr{A}$ est un atlas. En particulier, elle est continue et la condition (iv) est vérifiée. ■

Remarque 1.38 — Atlas et recollement. Soit M un ensemble (resp. un espace topologique) et un $\mathscr{A}$ un atlas (resp. topologique) sur M. Le point 3 (resp. 2) de la remarque 1.20 montre que M est obtenu par recollement d'ouverts de divers $\mathbb{C}^n$. Les fonctions $\psi_{\beta\alpha}$ de la remarque 1.20 qui sont les fonctions de transition entre les cartes de $\mathscr{A}$ ne sont pas simplement continues mais holomorphes.

Corollaire 1.39 — Prévariété. Soit M un ensemble. Il revient au même de se donner

(i) un atlas sur M ;
(ii) une topologie $\mathscr{T}$ sur M et un atlas topologique sur M.

Preuve. **(⇒)** Il s'agit de la proposition 1.37. **(⇐)** Il s'agit de la remarque 1.36. ■

Remarque 1.40 — Topologie. On reprend les notations du corollaire 1.39. On suppose que l'on se trouve dans la situation (ii). D'après le corollaire 1.39, on est aussi dans la situation (i) (avec les mêmes U_α, V_α, n_α et φ_α). La proposition 1.37 montre qu'il existe sur M une unique topologie $\mathscr{T}'$ telle que les U_α sont des ouverts (pour $\mathscr{T}'$) et les φ_α sont des homéomorphismes. Comme les U_α sont déjà des ouverts et les φ_α des homéomorphismes pour $\mathscr{T}$, on en déduit que $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. Autrement dit, la nouvelle topologie est la même que la précédente. ■

Remarque 1.41 — Topologie 2. Soient $(\mathrm{N}, \mathscr{T})$ un espace topologique et $\mathscr{A}$ un atlas (pas nécessairement topologique) sur N. La topologie associée à $\mathscr{A}$ est $\mathscr{T}$ si et seulement si $\mathscr{A}$ est un atlas topologique sur $(\mathrm{N}, \mathscr{T})$.
(⇒) D'après la proposition 1.37, $\mathscr{T}$ est une (l'unique) topologie telle que $\mathscr{A}$ soit un atlas topologique sur N.
(⇐) La propriété d'unicité de la proposition 1.37 montre que $\mathscr{T}$ est la topologie associée à $\mathscr{A}$. ■

La remarque suivante est anecdotique, il s'agit simplement d'une simplification des vérifications à effectuer pour s'assurer qu'un ensemble de pseudocarte est un atlas.

Remarque 1.42 — Vérification. Soient M un ensemble (resp. un espace topologique) et $\mathscr{A}$ un ensemble de pseudocartes (resp. topologiques) dont les domaines recouvrent M. Pour que $\mathscr{A}$ soit un atlas (resp. topologique), il suffit que, pour tous $\mathcal{U},\mathcal{U}' \in \mathscr{A}$ avec $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$, les pseudocartes (resp. topologique) $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ soient compatibles. En effet, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ sont compatibles pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ (voir l'exemple 1.29). ■

1.3.3 Atlas maximal

Dans cette sous-section, on s'intéresse à la notion d'atlas maximal et de relation d'équivalence entre atlas. On montre l'équivalence entre ces deux notions (dans la preuve de la proposition 1.50). Ce sont ces deux notions qui seront à la base de la définition de prévariété holomorphe (voir la définition 1.53). Une fois de plus, on compare la situation topologique et la situation ensembliste.

Compatibilité

On définit ici une relation entre atlas sur un même ensemble : la relation de compatibilité. Elle est fondée sur celle de compatibilité entre pseudocartes (remarque 1.45). On montre que c'est une relation d'équivalence (lemme 1.48) dont chaque classe d'équivalence admet un représentant privilégié (proposition 1.50). Enfin, on compare une fois de plus situation topologique et situation ensembliste (remarques 1.46, 1.47 et 1.49).

Définition 1.43 — Compatibilité. Soient M un ensemble et $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ deux atlas sur M. On dit que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont *compatibles* si $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ est un atlas.

Soient M un espace topologique et $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ deux atlas topologiques sur M. On dit que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont *compatibles* si $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ est un atlas topologique.

Remarque 1.44 — Inclusion d'atlas. Par ailleurs, si $\mathscr{A}$ est un atlas (resp. topologique) contenu dans un atlas (resp. topologique) $\mathscr{A}'$ alors $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont compatibles. ■

Remarque 1.45 — Vérifications. Soient M un ensemble (resp. espace topologiques) et $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ deux atlas (resp. topologiques) sur M. Les atlas $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont compatibles si, pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ et tout $\mathcal{U}' \in \mathscr{A}'$, les pseudocartes (resp. topologiques) $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles.

En effet, comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent déjà M, il suffit de vérifier les conditions de compatibilité entre les cartes. Si les deux cartes considérées sont dans $\mathscr{A}$ ou dans $\mathscr{A}'$, le fait que $\mathscr{A}$ ou $\mathscr{A}'$ soit un atlas (resp. topologique) donne le résultat voulu. ■

Les deux remarques qui suivent assurent essentiellement que compatibilité entre atlas topologique et compatibilité entre atlas sur un ensemble sont deux visions d'une même notion. Elles seront complétées par la remarque 1.49 qui montrent que les classes d'équivalence pour ces deux relations coïncident.

Remarque 1.46 — Topologie. On considère un ensemble M et $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux atlas sur M. Si $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont compatibles alors les topologies sur M associées à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ coïncident. En effet, $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ est un atlas sur M. Les domaines des cartes de $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ et donc de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont des ouverts et les transferts de ces cartes des homéomorphismes pour la topologie associée à l'atlas $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$. Par unicité (proposition 1.37), les topologies associées à $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ coïncident.

Attention, il se peut que deux atlas sur M définissent la même topologie sans être compatibles (voir l'exemple 1.75). Autrement dit, la topologie ne détermine pas la structure de prévariété. De façon heuristique, la notion de prévariété n'est pas purement topologique. ■

Remarque 1.47 — Compatibilité, atlas et atlas topologique. Dans cette remarque, on compare les notions de compatibilité entre atlas et de compatibilité entre atlas topologiques.

a. Soient M un espace topologique et $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux atlas topologiques sur M qui sont compatibles (en tant qu'atlas topologiques). D'après la remarque 1.36, ils sont compatibles en tant qu'atlas sur l'ensemble M.

b. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux atlas compatibles sur M et $\mathscr{T}$ une topologie. Si la topologie $\mathscr{T}$ fait de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ des atlas topologiques sur M (l'unicité dans la proposition 1.37 montre que $\mathscr{T}$ est nécessairement la topologie associée à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$, voir aussi le point **c**), alors $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont compatibles en tant qu'atlas topologiques sur M. Il s'agit de montrer que $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ est un atlas topologique. D'après la remarque 1.36, il suffit de montrer que pseudocartes de $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ sont des pseudocartes topologiques. Comme une pseudocarte de $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ appartient à l'atlas topologique $\mathscr{A}$ ou à l'atlas topologique $\mathscr{A}'$, on obtient le résultat.

c. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux atlas compatibles sur M. D'après la proposition 1.37 et la remarque 1.46, les topologies associées à $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ coïncident et font de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ des atlas topologiques sur M. Le point **b** assure que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont compatibles en tant qu'atlas topologiques sur M.

d. Soient M un ensemble, $\mathscr{A}$ un atlas sur M. Si $\mathscr{A}'$ est un atlas topologique sur M (pour la topologie associée à $\mathscr{A}$) compatible avec $\mathscr{A}$ en tant qu'atlas topologique alors le point **a** montre que $\mathscr{A}'$ est compatible avec $\mathscr{A}$ en tant qu'atlas sur $\mathscr{A}$.

e. Soient M un espace topologique et $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ deux atlas topologiques sur M. On suppose que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont compatibles en tant qu'atlas sur l'ensemble M. Comme la topologie de M fait de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ des atlas topologiques, le point **b** montre que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont compatibles en tant qu'atlas topologiques. ■

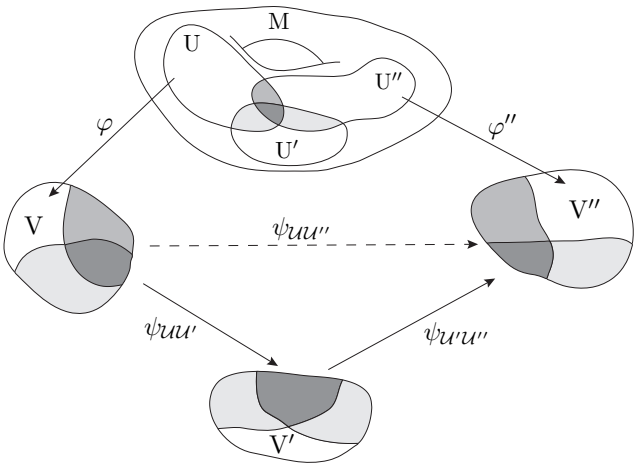
Le lemme suivant est un lemme technique qui assure que la relation de compatibilité entre atlas est une relation d'équivalence.

Lemme 1.48 — Compatibilité et relation d'équivalence. Soit M un ensemble. La relation « être compatible » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas sur M.

Soit M un espace topologique. La relation « être compatible » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des atlas topologiques de M.

Preuve. La réflexivité et la symétrie de la relation « être compatible » sont évidentes puisque $\mathscr{A} \cup \mathscr{A} = \mathscr{A}$ est un atlas (resp. topologique) et $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}' = \mathscr{A}' \cup \mathscr{A}$. Il reste à montrer la transitivité. Commençons par nous ramener au cas topologique. Soient $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ trois atlas sur M tels que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ soient compatibles et $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ soient compatibles. D'après la remarque 1.46, $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ sont des atlas topologiques sur M pour la topologie associé à $\mathscr{A}$. Le point **b** de la remarque 1.47 montre que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$) sont compatibles en tant qu'atlas topologique sur M. Le point **d** de la remarque 1.47 assure alors que l'on peut se contenter du cas topologique.

On considère $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ trois atlas topologiques sur M tels que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ soient compatibles et $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ soient compatibles. Montrons que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}''$ sont compatibles. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}'' = (\mathrm{U}'', \mathrm{V}'', n'', \varphi'') \in \mathscr{A}''$. D'après la remarque 1.45, il suffit de montrer que les applications de transition $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}''}$ et $\psi_{\mathcal{U}''\mathcal{U}}$ sont holomorphes. Or, pour tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}'$, l'ensemble $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'')$ (resp. $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'')$) est un ouvert de $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'')$ (resp. $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$) puisque φ (resp. φ') est un homéomorphisme et que U' (resp. U'') est un ouvert de M. De plus, la restriction de $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}''}$ à $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'')$ coïncide avec la composée de la restriction de $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ à $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'')$ et de la restriction de $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}''}$ à $\varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'')$.



Comme chacune de ces deux applications est holomorphe (comme restriction à un ouvert de fonctions holomorphes), leur composée $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}''}\big|_{\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'')}$ est holomorphe. Comme

$$\bigcup_{(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}'} \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'') = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}''),$$

l'application $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}''}$ est holomorphe sur $\varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'')$. Par un raisonnement analogue, on montre que $\psi_{\mathcal{U}''\mathcal{U}}$ est aussi holomorphe. ■

Remarque 1.49 — Classe d'équivalence. Soient M un ensemble et $\mathscr{A}$ un atlas sur M. D'après les points **c** et **d** de la remarque 1.47, l'ensemble des atlas compatibles avec $\mathscr{A}$ et l'ensemble des atlas topologiques (pour la topologie associée à $\mathscr{A}$) compatibles (en tant qu'atlas topologiques) avec $\mathscr{A}$ coïncident.

Soient M un atlas topologique et $\mathscr{A}$ un atlas topologique sur M. D'après les points **a** et **e** de la remarque 1.47, l'ensemble des atlas sur l'ensemble M qui sont compatibles avec $\mathscr{A}$ et l'ensemble des atlas topologiques compatibles avec $\mathscr{A}$ coïncident. ■

ATLAS MAXIMAL

La proposition suivante est le résultat important de cette sous-section : elle définit la notion d'atlas maximal qui sera à la base de la notion de prévariété holomorphe.

Proposition 1.50 — Atlas maximal. Soient M un ensemble et $\mathscr{A}$ un atlas sur M. La réunion de tous les atlas compatibles avec $\mathscr{A}$ est un atlas noté $\mathscr{A}_{\max}$ compatible avec $\mathscr{A}$. L'atlas $\mathscr{A}_{\max}$ est l'unique atlas maximal (pour l'inclusion) contenant $\mathscr{A}$.

Soient M un espace topologique et $\mathscr{A}$ un atlas topologique sur M. La réunion de tous les atlas topologiques compatibles avec $\mathscr{A}$ est un atlas topologique noté $\mathscr{A}_{\max}$ compatible avec $\mathscr{A}$. L'atlas $\mathscr{A}_{\max}$ est l'unique atlas

topologique maximal (pour l'inclusion) contenant $\mathscr{A}$.

Preuve. Commençons par les atlas topologiques. Comme $\mathscr{A}$ est un atlas topologique compatible avec $\mathscr{A}$, on a $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_{\max}$ et donc les domaines des pseudocartes de $\mathscr{A}_{\max}$ recouvrent M. Montrons la compatibilité entre les pseudocartes de $\mathscr{A}_{\max}$. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux pseudocartes topologiques de $\mathscr{A}_{\max}$. Il existe un atlas $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{A}''$) compatible avec $\mathscr{A}$ contenant $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$). D'après la définition 1.43 et la remarque 1.44, $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}''$) est un atlas compatible avec $\mathscr{A}$. Par transitivité (lemme 1.48), on obtient que $\mathscr{A} \cup \mathscr{A}' \cup \mathscr{A}''$ est un atlas contenant $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$. Ainsi, les applications de transitions $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ sont holomorphes. On en déduit que $\mathscr{A}_{\max}$ est un atlas.

Passons au cas non topologique. Considérons $\mathscr{A}_{\max}$ la réunion de tous les atlas compatibles avec $\mathscr{A}$. D'après la remarque 1.49, $\mathscr{A}_{\max}$ est la réunion de tous les atlas topologiques (pour la topologie associée à $\mathscr{A}$) compatibles avec $\mathscr{A}$. D'après ce qui précède, $\mathscr{A}_{\max}$ est un atlas topologique contenant $\mathscr{A}$. Ainsi, d'après la remarque 1.36, $\mathscr{A}_{\max}$ est un atlas contenant $\mathscr{A}$.

Montrons la propriété de maximalité de $\mathscr{A}_{\max}$. Si $\mathscr{A}'$ est un atlas (resp. topologique) contenant $\mathscr{A}_{\max}$, il contient $\mathscr{A}$ et est donc compatible avec $\mathscr{A}$ (remarque 1.44). Par définition de $\mathscr{A}_{\max}$, on a $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}_{\max}$ et donc $\mathscr{A}_{\max} = \mathscr{A}'$. Finissons par l'unicité de l'atlas cherché. Si $\mathscr{A}'$ est un atlas (resp. topologique) maximal contenant $\mathscr{A}$ alors, d'après la remarque 1.44, $\mathscr{A}'$ est compatible avec $\mathscr{A}$ donc il est contenu dans $\mathscr{A}_{\max}$. Par maximalité de $\mathscr{A}'$, on a $\mathscr{A}' = \mathscr{A}_{\max}$. ■

Ainsi, chaque classe d'équivalence d'atlas contient un représentant privilégié : la réunion de tous les éléments de la classe d'équivalence. La propriété de maximalité donne un critère simple d'appartenance à cet atlas (lemme 1.51). De plus, tout ouvert d'un domaine d'une carte de cet atlas maximal est encore le domaine d'une carte de ce même atlas : de façon plus précise, un atlas maximal est stable par restriction de cartes (lemme 1.51).

Lemme 1.51 — Cartes d'un atlas maximal. Soient M un ensemble (resp. espace topologique), $\mathscr{A}$ un atlas (resp. topologique) sur M et $\mathcal{U}$ une pseudocarte (resp. topologique). Si $\mathcal{U}$ est compatible avec toutes les cartes de $\mathscr{A}$ alors $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_{\max}$.

Soient M un espace topologique, $\mathscr{A}$ un atlas topologique maximal sur M et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$. Pour tout ouvert U_1 de U, $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}_1}$ est une carte de $\mathscr{A}$.

Preuve. Par hypothèse, $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} \cup \{\mathcal{U}\}$ est un atlas puisque les ouverts de $\mathscr{A}$ recouvrent M. Comme $\mathscr{A}_1$ contient $\mathscr{A}$, il est compatible avec $\mathscr{A}$ et donc $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_{\max}$.

Comme $\mathcal{U}$ est compatible avec toutes les cartes de $\mathscr{A}$, la remarque 1.33 montre que $\mathcal{U}_1$ est compatible avec toutes les cartes de $\mathscr{A}$. Ainsi $\mathscr{A} \cup \{\mathcal{U}_1\}$ est un atlas puisque les ouverts de $\mathscr{A}$ recouvrent déjà M. Par maximalité de $\mathscr{A}$, on obtient que $\mathcal{U}_1 \in \mathscr{A}$. ■

Exemple 1.52 — Carte vide. Soient M un ensemble (resp. espace topologique) et $\mathscr{A}$ un atlas (resp. topologique) alors $\mathscr{A}_{\max}$ contient toutes les cartes vides c'est-à-dire pour tout $m \in \mathbb{N}$, $(\varnothing, \varnothing, m, \varnothing) \in \mathscr{A}_{\max}$. En effet, d'après l'exemple 1.27, les cartes vides sont compatibles avec toutes les cartes de $\mathscr{A}$. Le lemme 1.51 montre qu'elles appartiennent à $\mathscr{A}_{\max}$. ■

1.4 La catégorie des prévariétés holomorphes

Dans cette section, on définit les prévariétés holomorphes et les bonnes fonctions entre prévariétés holomorphes : les fonctions holomorphes. Ces nouvelles fonctions holomorphes généralisent la notion usuelle de fonctions holomorphes (exemples 1.89 et 1.90). On donne ensuite des critères pratiques d'holomorphie (proposition 1.101 et application 1.118) et des méthodes de constructions de prévariétés (exemples 1.61 et 1.66, propositions 1.128 et 1.129).

1.4.1 Les objets : les prévariétés

La section précédente qui a mis en place la notion d'atlas permet de donner immédiatement la définition d'une prévariété holomorphe, ou plutôt deux, voire même, trois définitions équivalentes de prévariétés.

Définition 1.53 — Prévariété. Une prévariété holomorphe est un couple $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ formé d'un ensemble M et d'un atlas maximal $\mathscr{A}$ sur M. On dit que l'atlas $\mathscr{A}$ munit l'ensemble M d'une structure de prévariété holomorphe.

Remarque 1.54 — Prévariété. De façon équivalente (proposition 1.50), un couple $(\mathrm{M}, \mathcal{A})$ formé d'un ensemble

M et d'une classe d'équivalence d'atlas sur M est une prévariété holomorphe.

De même, tout couple $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ formé d'un ensemble M et d'un atlas $\mathscr{A}$ sur M détermine sur M une structure de prévariété. Il suffit de considérer l'atlas maximal associé à $\mathscr{A}$ (proposition 1.50) ou, en terme de relation d'équivalence, la classe d'équivalence $\mathcal{A}$ de $\mathscr{A}$. Lorsqu'on parlera de la structure de prévariété d'un ensemble muni d'un atlas, il s'agira de cette structure naturelle associée à l'atlas maximal. ■

Une prévariété holomorphe est, par définition, un espace obtenu par recollement d'ouverts de divers $\mathbb{C}^n$ (voir la remarque 1.38). Il hérite donc des propriétés locales de ces ouverts.

Proposition 1.55 — Propriétés locales d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $x \in \mathrm{M}$. Il existe une base de voisinages de x formée de domaines de cartes contractiles. En particulier, les domaines des cartes en x forment une base de voisinage de x et M est localement connexe, localement connexe par arcs, localement simplement connexe, localement contractile. De plus, pour tout $x \in \mathrm{M}$, le singleton $\{x\}$ est fermé dans M.

Preuve. Il existe une carte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ de $\mathscr{A}$ en x. L'ensemble V est un voisinage de $\varphi(x)$. Comme V est localement contractile (puisque localement convexe), il existe une base de voisinage $\mathcal{V}_{\varphi(x)}$ de $\varphi(x)$ formée d'ouverts contractiles, (par exemple, les boules de centre $\varphi(x)$ de rayon r pour r suffisamment petit). Comme φ est un homéomorphisme, l'ensemble $\left\{\varphi^{-1}(\mathrm{V}'), \quad \mathrm{V}' \in \mathcal{V}_{\varphi(x)}\right\}$ est une base de voisinage de x formée d'ensembles contractiles. Comme $\varphi^{-1}(\mathrm{V}') \subset \mathrm{U}$, le lemme 1.51 donne le résultat. Comme un espace contractile est connexe, connexe par arcs et simplement connexe, on obtient aussi la locale simple connexité, la locale connexité par arcs et la locale connexité de M. Enfin, si $y \neq x$, il suffit de montrer qu'il existe un voisinage ouvert de y ne contenant pas x. Soit $\mathcal{U}$ une carte de $\mathscr{A}$ en y. Si x appartient au domaine U de $\mathcal{U}$ alors, comme U est séparé (puisqu'homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}^n$), il existe deux ouverts U_x et U_y contenant respectivement x et y, contenus dans U et d'intersection vide. Dans ce cas, l'ouvert U_y convient. Si x n'appartient pas à U alors l'ouvert U convient. ■

La dimension d'une carte permet de définir la notion de dimension d'une prévariété en point : c'est l'entier n tel qu'au voisinage de x, la prévariété M ressemble à $\mathbb{C}^n$. La remarque 1.30 assure que cet entier est bien défini. On liera cette notion de dimension d'une prévariété en point à la notion usuelle de dimension d'un espace vectoriel : l'espace tangent (voir la proposition 1.203).

Proposition-Définition 1.56 — Dimension d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $x \in \mathrm{M}$. Toutes les cartes de $\mathscr{A}$ ont la même dimension que l'on note $\dim_x(\mathrm{M})$. On dit que $\dim_x(\mathrm{M})$ est *la dimension de* M *en* x. L'application

$$\dim : \begin{cases} \mathrm{M} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto \dim_x(\mathrm{M}) \end{cases}$$

est localement constante. Si elle est constante, on dit que M est une *prévariété pure*. On définit alors la *dimension de* M qu'on note $\dim(\mathrm{M})$ comme la valeur de cette constante.

Preuve. La remarque 1.30 montre que toutes les cartes de $\mathscr{A}$ en x ont la même dimension ce qui permet de définir $\dim_x(\mathrm{M})$. Par ailleurs, si U est le domaine d'une carte $\mathcal{U}$ de $\mathscr{A}$, on a $\dim_x(\mathrm{M}) = \dim \mathcal{U}$ pour tout $x \in \mathrm{U}$. Ainsi dim est localement constante. ■

1.4.2 Exemples de prévariétés

Dans cette sous-section, on présente quelques exemples théoriques et concrets de prévariétés holomorphes.

Ouverts d'espaces vectoriels

On commence par les exemples les plus simples : les ouverts des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. Les structures de prévariétés sur ces ensembles peuvent être définies grâce à un atlas à une seule carte.

Exemple 1.57 — Ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Alors $\mathscr{A} = \{\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id}_\mathrm{U})\}$ est un atlas sur U. En effet, U est ouvert dans U et recouvre U, id_U est un homéomorphisme de U sur l'ouvert U de $\mathbb{C}^n$ et comme il n'y qu'une carte, la remarque 1.42 montre que $\mathscr{A}$ est bien un atlas. D'après la remarque 1.54, on peut alors munir U d'une structure de prévariété holomorphe. Lorsqu'on parlera de la structure de prévariété d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$, il s'agira de cette structure de prévariété (sauf mention explicite du contraire). L'atlas maximal $\mathscr{A}_{\max}$ est alors la réunion de l'ensemble des pseudocartes topologiques de U de dimension n dont le transfert est un biholomorphisme et de l'ensemble des cartes vides. En effet, soit $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}, m, \varphi) \in \mathscr{A}_{\max}$. Alors $\mathcal{U}$ est une pseudocarte topologique de U. Par hypothèse, $\mathcal{U}'$ est compatible avec $\mathcal{U}$. Or $\mathrm{U}' \cap \mathrm{U} = \mathrm{U}'$ et $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi$ et

$\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = \varphi^{-1}$. Ainsi, la remarque 1.30 montre que φ est un biholomorphisme et $m = n$ (sauf si $\mathrm{U}' = \varnothing$ auquel cas $\mathcal{U}'$ est une carte vide). Réciproquement, si $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}, m, \varphi)$ est une pseudocarte topologique de dimension n dont le transfert est un biholomorphisme alors, comme $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = \varphi^{-1}$ sont holomorphes, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles. Le lemme 1.51 montre que $\mathcal{U}' \in \mathscr{A}_{\max}$. Enfin, si $\mathcal{U}'$ est une carte vide, l'exemple 1.52 montre que $\mathcal{U}' \in \mathscr{A}_{\max}$. ■

Exemple 1.58 — Ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, U un ouvert de E et f un isomorphisme linéaire de E sur $\mathbb{C}^n$. La continuité des applications linéaires en dimension finie assure que l'application f est un homéomorphisme de E sur $\mathbb{C}^n$. En particulier, $f(\mathrm{U})$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et f induit un homéomorphisme f_{U} de U sur $f(\mathrm{U})$. Finalement, comme U est un ouvert de U et recouvre U, la remarque 1.42 montre que $\mathscr{A} = \{\mathcal{U} = (\mathrm{U}, f(\mathrm{U}), n, f_{\mathrm{U}})\}$ est un atlas sur U. Grâce à la remarque 1.54, on en déduit une structure de prévariété holomorphe sur U.

A priori, la structure de prévariété construite sur U dépend du choix de l'isomorphisme linéaire entre E et $\mathbb{C}^n$. Montrons que ce n'est pas le cas. Soit $g : \mathrm{E} \to \mathbb{C}^n$ est un isomorphisme linéaire. Montrons que l'atlas $\mathscr{B} = \{\mathcal{V} = (\mathrm{U}, g(\mathrm{U}), n, g_{\mathrm{U}})\}$ est compatible avec $\mathscr{A}$. Il suffit de montrer que les pseudocartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont compatibles. Or les applications de transition entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont données par

$$\psi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = (g \circ f^{-1})\big|_{f(\mathrm{U})} \qquad \text{et} \qquad \psi_{\mathcal{V}\mathcal{U}} = (f \circ g^{-1})\big|_{g(\mathrm{U})}$$

qui sont holomorphes comme restrictions d'applications linéaires. On en déduit que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont contenu dans le même atlas maximal. Ainsi les structures de prévariétés holomorphes définies par f et g coïncident. Lorsqu'on évoquera la structure de prévariété d'un ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, il s'agira de cette structure de prévariété (sauf mention explicite du contraire).

Enfin, remarquons que l'application $\mathrm{id} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est bien sûr un isomorphisme linéaire. L'exemple 1.57 des ouverts de $\mathbb{C}^n$ est donc un cas particulier de celui-ci. ■

Application 1.59 — Groupe linéaire. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. L'ensemble $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ est naturellement muni d'un structure de prévariété. En effet, $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ est un ouvert de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E})$ puisque $\mathrm{GL}(\mathrm{E}) = \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$ et que $\mathbb{C}^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et det une application continue. De même, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ peut être muni d'une structure de prévariété.

D'une manière plus générale, si F et G sont deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de même dimension finie. On note $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ l'ensemble (non vide) des bijections linéaires de F dans G. Pour $u \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, l'application

$$\lambda_u : \begin{cases} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \\ \quad v \qquad \longmapsto u \circ v. \end{cases}$$

est bijective, linéaire et envoie $\mathrm{GL}(\mathrm{F})$ sur $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Ainsi, elle induit un homéomorphisme de $\mathrm{GL}(\mathrm{F})$ sur l'ouvert $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. En particulier, $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ peut être muni d'une structure de prévariété. ■

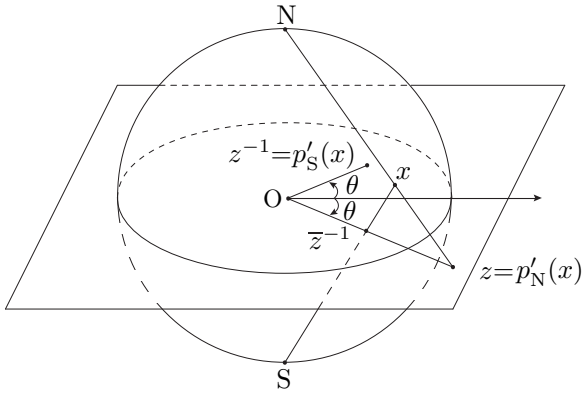
UN EXEMPLE CONCRET : LA SPHÈRE DE RIEMANN

L'exemple suivant fournit un exemple d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel réel qui est pourtant une prévariété holomorphe ou plutôt qu'on peut munir d'une structure de prévariété holomorphe : la sphère euclidienne de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 1.60 — La sphère de Riemann. Soit $\mathbb{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3), \quad {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\right\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ pour la métrique euclidienne.

On considère les points $\mathrm{N} = (0, 0, 1)$ et $\mathrm{S} = (0, 0, -1)$ de $\mathbb{S}^2$ appelés respectivement pôle nord et pôle sud et les deux ouverts $\mathrm{U_N} = \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{\mathrm{N}\}$ et $\mathrm{U_S} = \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{\mathrm{S}\}$ de $\mathbb{S}^2$. On va montrer grâce aux projections stéréographiques que $\mathrm{U_N}$ et $\mathrm{U_S}$ sont homéomorphes à $\mathbb{C}$.

Soit p'_{N} la projection stéréographique de sommet N. Elle est définie géométriquement de la façon suivante : à $x \in \mathrm{U_N}$ on associe le point d'intersection de la droite $(\mathrm{N}x)$ avec l'hyperplan H d'équation $x_n = 0$. L'application réciproque q'_{N} associe au point x appartenant à l'hyperplan H le deuxième point d'intersection de $\mathbb{S}^2$ avec la droite $(\mathrm{N}x)$.



Déterminons des expressions analytiques pour p'_{N} et q'_{N}. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{U_N}$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p'_{\mathrm{N}}(x) = (0,0,1) + \lambda(-x_1, -x_2, 1-x_3) \in \mathrm{H}$. Comme N est le seul point de $\mathbb{S}^2$ tel que $x_3 = 1$ puisqu'alors ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$, on obtient $\lambda = -(1-x_3)^{-1}$ et donc

$$p'_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{1-x_3}(x_1, x_2, 0)\,.$$

Réciproquement, soit $x = (x_1, x_2, 0) \in \mathrm{H}$. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$q'_{\mathrm{N}}(x) = (0,0,1) + \lambda(-x_1, -x_2, 1) \in \mathbb{S}^2 \qquad \text{et} \qquad q'_{\mathrm{N}}(x) \neq \mathrm{N}\,.$$

On obtient
$$\lambda^2({x_1}^2 + {x_2}^2) + (1+\lambda)^2 = 1\,,$$

c'est-à-dire
$$2\lambda + \lambda^2(1 + {x_1}^2 + {x_2}^2) = 0\,.$$

La solution $\lambda = 0$ donne N qu'on exclut. On obtient donc $\lambda = -2(1 + {x_1}^2 + {x_2}^2)^{-1}$ et

$$q'_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{1 + {x_1}^2 + {x_2}^2}\left(2x_1, 2x_2, \left({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1\right)\right).$$

Les expressions trouvées vont nous permettre de construire une structure de prévariété sur $\mathbb{S}^2$: on va exhiber un atlas sur $\mathbb{S}^2$ construit à partir des projections stéréographiques depuis les pôles nord et sud. Dans les calculs qui suivent, on effectue toutes les vérifications analytiques grâce aux expressions obtenues ci-dessus. On considère les applications

$$p_{\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathrm{U_N} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto \dfrac{1}{1-x_3}(x_1 + ix_2) \end{cases}$$

et
$$q_{\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathrm{U_N} \\ z = (x_1 + ix_2) & \longmapsto \dfrac{1}{{x_1}^2 + {x_2}^2 + 1}\left(2x_1, 2x_2, {x_1}^2 + {x_2}^2 - 1\right) = \left(\dfrac{2z}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right). \end{cases}$$

Comme N est le seul point de $\mathbb{S}^2$ tel que $x_3 = 1$ puisqu'alors ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$, l'application p_{N} est bien définie et continue. Par ailleurs, q_{N} est bien à valeurs dans $\mathbb{S}^2$ puisque

$$4{x_1}^2 + 4{x_2}^2 + ({x_1}^2 + {x_2}^2 - 1)^2 = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + 1)^2.$$

De plus,
$$\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \neq 1$$

donc q_{N} est à valeurs dans $\mathrm{U_N}$ et continue. Montrons à présent que p_{N} et q_{N} sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{U_N}$ alors

$$q_{\mathrm{N}} \circ p_{\mathrm{N}}((x_1, x_2, x_3)) = \left(\frac{\dfrac{2x_1}{1-x_3}}{\dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{(1-x_3)^2} + 1}, \frac{\dfrac{2x_2}{1-x_3}}{\dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{(1-x_3)^2} + 1}, \frac{\dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{(1-x_3)^2} - 1}{\dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{(1-x_3)^2} + 1}\right)$$

La relation ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$ assure alors que $q_{\mathrm{N}} \circ p_{\mathrm{N}}((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3)$. Par ailleurs, pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$1 - \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = \frac{2}{|z|^2+1}\,,$$

d'où
$$p_{\mathrm{N}} \circ q_{\mathrm{N}}(z) = \frac{2z}{1+|z|^2}\left(\frac{2}{1+|z|^2}\right)^{-1} = z\,.$$

Ainsi p_{N} et q_{N} sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre.

On passe à présent au cas du pôle sud. Plutôt que de considérer simplement la projection stéréographique de pôle S, on considère sa composée avec la symétrie par rapport à l'axe réel. On définit donc les applications

$$p_{\mathrm{S}} : \begin{cases} \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{\mathrm{S}\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto \dfrac{1}{1+x_3}(x_1 - ix_2) \end{cases}$$

et
$$q_{\mathrm{S}}\colon \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{\mathrm{S}\} \\ z = x_1 + ix_2 & \longmapsto \left(\dfrac{2\overline{z}}{1+|z|^2}, \dfrac{1-|z|^2}{1+|z|^2}\right) . \end{cases}$$

Comme S est le seul point de $\mathbb{S}^2$ tel que $x_3 = -1$ puisqu'alors ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 0$, l'application p_{S} est bien définie et continue. Par ailleurs, q_{S} est bien à valeurs dans $\mathbb{S}^2$ puisque
$$(1-|z|^2)^2 + 4|\overline{z}|^2 = (1-|z|^2)^2 + 4|z|^2 = (|z|^2+1)^2.$$

De plus,
$$\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \neq -1$$
donc q_{S} est à valeurs dans $\mathrm{U_S}$ et continue. Montrons à présent que p_{S} et q_{S} sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Si $(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{U_S}$ alors
$$q_{\mathrm{S}} \circ p_{\mathrm{S}}((x_1,x_2,x_3)) = \left(\frac{\dfrac{2x_1}{1+x_3}}{1+\dfrac{{x_1}^2+(-x_2)^2}{(1+x_3)^2}}, -\frac{\dfrac{2(-x_2)}{1+x_3}}{1+\dfrac{{x_1}^2+(-x_2)^2}{(1+x_3)^2}}, \frac{1-\dfrac{{x_1}^2+(-x_2)^2}{(1+x_3)^2}}{1+\dfrac{{x_1}^2+(-x_2)^2}{(1+x_3)^2}} \right)$$
La relation ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$ assure alors que $q_{\mathrm{S}} \circ p_{\mathrm{S}}((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_2,x_3)$. Par ailleurs, pour $z \in \mathbb{C}$, on a
$$1 + \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} = \frac{2}{1+|z|^2},$$

d'où
$$p_{\mathrm{S}} \circ q_{\mathrm{S}}(z) = \frac{2z}{1+|z|^2}\left(\frac{2}{1+|z|^2}\right)^{-1} = z .$$

Ainsi p_{S} et q_{S} sont des homéomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Finalement $\mathcal{U}_{\mathrm{N}} = (\mathrm{U_N}, \mathbb{C}, 1, p_{\mathrm{N}})$ et $\mathcal{U}_{\mathrm{S}} = (\mathrm{U_S}, \mathbb{C}, 1, p_{\mathrm{S}})$ sont des pseudocartes topologiques pour $\mathbb{S}^2$ Comme $\mathrm{U_N} \cup \mathrm{U_S} = \mathbb{S}^2$, les domaines des pseudocartes recouvrent $\mathbb{S}^2$. De plus, comme $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{N}) = 0$ et $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{S}) = 0$, on a $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{U_N} \cap \mathrm{U_S}) = \mathbb{C}^*$ et $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{U_N} \cap \mathrm{U_S}) = \mathbb{C}^*$. Enfin, comme
$$1 - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} = 1 + \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} = \frac{2|z|^2}{1+|z|^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z^{-1}$$
les applications de transitions sont données par
$$p_{\mathrm{N}} \circ {p_{\mathrm{S}}}^{-1} = p_{\mathrm{S}} \circ {p_{\mathrm{N}}}^{-1}\colon \begin{cases} \mathbb{C}^* & \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto z^{-1} \end{cases}$$

Elles sont holomorphes. Ainsi $\{\mathcal{U}_{\mathrm{N}}, \mathcal{U}_{\mathrm{S}}\}$ est un atlas sur $\mathbb{S}^2$. La remarque 1.54 montre qu'on peut munir $\mathbb{S}^2$ d'une structure de prévariété holomorphe. Munie de cette structure de prévariété holomorphe, on dit que $\mathbb{S}^2$ est la sphère de Riemann. ■

Ouverts d'une prévariété

L'exemple suivant est plus théorique que les précédents. Il permet de construire d'autres prévariétés à partir d'une prévariété fixée. En fait, tout ouvert d'une prévariété est aussi une prévariété ou plus précisément, peut être muni d'une structure de prévariété. Ces structures de prévariété sur les ouverts d'une prévariétés seront très utiles pour l'études des fonctions holomorphes (voir, par exemple, la proposition 1.101).

Exemple 1.61 — Ouvert d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, U un sous-ensemble ouvert de M et $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ un atlas sur M compatible avec $\mathscr{A}$. Montrons que
$$\mathscr{A}'_{\mathrm{U}} = \left\{ \mathcal{U}_{\big|\mathrm{dom}(\mathcal{U})\cap \mathrm{U}}, \quad \mathcal{U} \in \mathscr{A}' \right\}$$
est un atlas topologique sur U (pour la topologie induite sur U par celle de M), que $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$ est un atlas maximal sur U et que $\mathscr{A}_{\mathrm{U}} = \{\mathcal{U} \in \mathscr{A}, \quad \mathrm{dom}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{U}\} \subset \mathscr{A}$. En particulier, $(\mathrm{U}, \mathscr{A}_{\mathrm{U}})$ est une prévariété holomorphe.

Soit $\mathcal{U} \in \mathscr{A}'$. Comme U est ouvert dans M, l'ensemble $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) \cap \mathrm{U}$ est un ouvert de $\mathrm{dom}(\mathcal{U})$. On en déduit que
$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_{\big|\mathrm{dom}(\mathcal{U})\cap \mathrm{U}}$$

a bien un sens et est une pseudocarte topologique sur M dont le domaine est contenu dans U (voir la remarque 1.25). Comme $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) \cap \mathrm{U}$ est un ouvert de U (puisque $\mathrm{dom}(\mathcal{U})$ est un ouvert de M), on en déduit que $\mathcal{V}$ est une pseudocarte topologique sur U. Ainsi $\mathscr{A}'_{\mathrm{U}}$ est un ensemble de pseudocartes topologiques sur U. De plus, comme $\mathscr{A}'$ est un atlas sur M, on a

$$\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathscr{A}'} (\mathrm{dom}(\mathcal{U}) \cap \mathrm{U}) = \left(\bigcup_{\mathcal{U}\in\mathscr{A}'} \mathrm{dom}(\mathcal{U})\right) \cap \mathrm{U} = \mathrm{M} \cap \mathrm{U} = \mathrm{U}\,.$$

Enfin, comme deux cartes de $\mathscr{A}'$ sont compatibles, la remarque 1.33 montre que deux pseudocartes de $\mathscr{A}'_{\mathrm{U}}$ sont compatibles. Ainsi $\mathscr{A}'_{\mathrm{U}}$ est bien un atlas sur U.

On pose, pour simplifier les notations, $\mathscr{B}_{\mathrm{U}} = \{\mathcal{U} \in \mathscr{A}, \quad \mathrm{dom}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{U}\}$. Soit $\mathcal{U} \in \mathscr{B}_{\mathrm{U}}$. On a alors

$$\mathcal{U}_{\big|\mathrm{dom}(\mathcal{U})\cap\mathrm{U}} = \mathcal{U} \in \mathscr{A}_{\mathrm{U}}.$$

Ainsi $\mathscr{B}_{\mathrm{U}} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. D'après le lemme 1.51, on a

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}_{\big|\mathrm{dom}(\mathcal{U})\cap\mathrm{U}} \in \mathscr{A}$$

Comme $\mathrm{dom}(\mathcal{V})$ est contenu dans U, on obtient $\mathscr{A}_{\mathrm{U}} \subset \mathscr{B}_{\mathrm{U}}$. D'où $\mathscr{A}_{\mathrm{U}} = \mathscr{B}_{\mathrm{U}}$.

Montrons la maximalité de $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. On considère un atlas $\mathscr{B}$ sur U tel que $\mathscr{A}_{\mathrm{U}} \subset \mathscr{B}$ et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{B}$. Comme U est un ouvert de M et U′ un ouvert de U, l'ensemble U′ est ouvert dans M et $\mathcal{U}$ est une pseudocarte topologique sur M dont le domaine est contenu dans U. Montrons que $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$. Pour cela, considérons $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}'', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}$ et montrons que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles. On pose

$$\mathcal{V} = \mathcal{U}'_{\big|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}''} = \mathcal{U}'_{\big|\mathrm{U}\cap\mathrm{dom}(\mathcal{U}')}\,.$$

Comme $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$, on a $\mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'' = (\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \cap \mathrm{U}'' = \mathrm{U}' \cap (\mathrm{U}'' \cap \mathrm{U})$. On obtient ainsi $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \psi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}} = \psi_{\mathcal{V}\mathcal{U}}$. Comme $\mathcal{V} \in \mathscr{A}_{\mathrm{U}} \subset \mathscr{B}$ et $\mathcal{U} \in \mathscr{B}$, on en déduit que $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ sont holomorphes et donc $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles. Ainsi $\mathscr{A} \cup \{\mathcal{U}\}$ est un atlas sur M. Par maximalité de $\mathscr{A}$, on en déduit que $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$. De plus, comme le domaine de $\mathcal{U}$ est contenu dans U, on obtient que $\mathcal{U} \in \mathscr{B}_{\mathrm{U}} = \mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. Ainsi $\mathscr{B} = \mathscr{A}_{\mathrm{U}}$.

Ainsi, on peut construire de façon naturelle une structure de prévariété holomorphe sur tout ouvert U d'une prévariété holomorphe $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$. De plus, si $\mathscr{A}'$ est un atlas sur M contenu dans $\mathscr{A}$ (qui détermine donc, grâce à la remarque 1.54 et à la proposition 1.50, la structure de prévariété sur M), alors $\mathscr{A}'_{\mathrm{U}}$ est un atlas sur U contenu dans $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. L'atlas maximal sur U contenant $\mathscr{A}'_{\mathrm{U}}$ est donc $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. La structure de prévariété sur U associée à $\mathscr{A}'_{\mathrm{U}}$ grâce à la remarque 1.54 est donc $(\mathrm{U}, \mathscr{A}_{\mathrm{U}})$. Ainsi la structure de prévariété sur U est déterminée par n'importe lequel des atlas déterminant la structure de prévariété sur M. ■

Voyons quelques exemples et conséquences de ces structures de prévariétés sur un ouvert d'une prévariété. Le point central est la transitivité de ces structures : sur un ouvert d'un ouvert, les structures obtenues comme ouvert de l'espace de départ ou comme ouvert d'un ouvert de l'espace de départ coïncident (remarque 1.62). Les applications 1.63 et 1.64 concernent, quant à elles, une nouvelle fois les ouverts des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Remarque 1.62 — Ouverts d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et U, V deux ouverts de M tels que $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$. Comme V est ouvert dans U et dans M, V hérite de deux structures de prévariétés holomorphes (exemple 1.61). Montrons que ces structures de prévariété coïncident.

On note $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$ (resp. $\mathscr{A}_{\mathrm{V}}$, $\mathscr{A}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}}$) l'atlas maximal sur U (resp. V, V) déterminant la structure de prévariété sur U (resp. V, V) donnée par le fait que U (resp. V, V) soit un ouvert de M (resp. M, V). D'après l'exemple 1.61, on a $\mathscr{A}_{\mathrm{U}} = \{\mathcal{U} \in \mathscr{A}, \quad \mathrm{dom}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{U}\}$, $\mathscr{A}_{\mathrm{V}} = \{\mathcal{U} \in \mathscr{A}, \quad \mathrm{dom}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{V}\}$ et $\mathscr{A}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} = \{\mathcal{U} \in \mathscr{A}_{\mathrm{U}}, \quad \mathrm{dom}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{V}\}$. On en déduit immédiatement que $\mathscr{A}_{\mathrm{V}}^{\mathrm{U}} = \mathscr{A}_{\mathrm{V}}$. Ainsi les deux structures de prévariété sur M coïncident.

Il est donc naturel de ne pas spécifier la structure dont il est question lorsqu'on évoque la structure de prévariété d'un ouvert d'une prévariété. Dans la suite, lorsqu'on considérera une structure de prévariété sur un ouvert d'une prévariété, il s'agira de celle construite dans l'exemple 1.61. ■

Application 1.63 — Ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et V un ouvert de U. Montrons que la structure de prévariété holomorphe sur V obtenue comme ouvert de la prévariété de U (voir exemple 1.61) coïncide avec la structure usuelle (voir l'exemple 1.57).

On considère l'atlas $\mathscr{A}' = \{(\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{U}})\}$ définissant la structure de prévariété sur U. Comme $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \mathrm{V}$, on a $\mathscr{A}'_{\mathrm{V}} = \{(\mathrm{V}, \mathrm{V}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{V}})\}$. Ainsi un atlas déterminant la structure usuelle de prévariété sur V coïncide avec un atlas déterminant la structure de prévariété sur V comme ouvert de U.

En particulier, avec $\mathrm{U} = \mathbb{C}^n$ et $\mathrm{V} = \mathrm{U}$, on obtient que la structure usuelle de prévariété sur U correspond à celle d'ouvert de la prévariété $\mathbb{C}^n$. ■

Application 1.64 — Ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $f : \mathrm{E} \to \mathbb{C}^n$ un isomorphisme linéaire, U un ouvert de E et V un ouvert de U. Montrons

que la structure de prévariété holomorphe sur V obtenue comme ouvert de la prévariété holomorphe U (voir exemple 1.61) coïncide avec la structure usuelle (voir l'exemple 1.58).

On considère l'atlas $\mathscr{A}' = \{(\mathrm{U}, f(\mathrm{U}), n, f_{\mathrm{U}})\}$ déterminant la structure de prévariété sur U. On a $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \mathrm{V}$, donc $\mathscr{A}'_{\mathrm{V}} = \{(\mathrm{V}, f(\mathrm{V}), n, f_{\mathrm{V}})\}$. Ainsi un atlas déterminant la structure usuelle de prévariété sur V coïncide avec un atlas déterminant la structure de prévariété sur V comme ouvert de U.

En particulier, avec $\mathrm{U} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{U}$, on obtient que la structure usuelle de prévariété sur U correspond à celle d'ouvert de la prévariété E. ■

PRODUIT DE PRÉVARIÉTÉS

Dans l'exemple 1.66, on construit à partir de deux prévariétés holomorphes, une nouvelle prévariété holomorphe dont l'espace topologique sous-jacent est le produit des espaces topologiques des deux prévariétés de départ. On appelle cette prévariété la prévariété produit. La proposition 1.103 montrera qu'il s'agit effectivement du produit des prévariétés au sens catégorique (voir le corollaire 1.97). Mais commençons par un petit rappel de notation.

Notation 1.65 — Application produit. Soient X, X′, Y, Y′ quatre espaces topologiques, $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ deux applications continues. On note $f \times g : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{X}' \times \mathrm{Y}'$ l'application qui à $(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ associe $(f(x), g(y)) \in \mathrm{X}' \times \mathrm{Y}'$. La propriété universelle du produit montre qu'elle est continue pour les topologies produits sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ et $\mathrm{X}' \times \mathrm{Y}'$.

Exemple 1.66 — Produit de prévariétés. On considère deux espaces topologiques M et N, un atlas topologique $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha),\ \alpha \in \mathrm{A}\}$ sur M (resp. $\mathscr{B} = \{(\mathrm{U}'_\alpha, \mathrm{V}'_\alpha, n'_\alpha, \varphi'_\alpha),\ \alpha \in \mathrm{B}\}$ sur N) et on munit $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ de la topologie produit. On va munir l'ensemble $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ d'une structure de prévariété.

Pour $\alpha \in \mathrm{A}$ et $\beta \in \mathrm{B}$, on considère les cartes $\mathcal{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{V}_\alpha, n_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}_\beta = (\mathrm{U}'_\beta, \mathrm{V}'_\beta, n'_\beta, \varphi'_\beta) \in \mathscr{A}$. Les applications $\varphi_\alpha \times \varphi'_\beta$ (voir notation 1.65) réalisent des homéomorphismes de $\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta$ sur $\mathrm{V}_\alpha \times \mathrm{V}'_\beta$. Or, par définition de la topologie produit, $\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta$ est un ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ et $\mathrm{V}_\alpha \times \mathrm{V}'_\beta$ est un ouvert de $\mathbb{C}^{n_\alpha + n'_\beta}$. Ainsi $(\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta, \mathrm{V}_\alpha \times \mathrm{V}'_\beta, n_\alpha + n'_\beta, \varphi_\alpha \times \varphi'_\beta)$ est une pseudocarte topologique sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ appelée *pseudocarte produit de* $\mathcal{U}_\alpha$ *et* $\mathcal{U}_\beta$ et notée $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta$. De plus, les domaines de ces pseudocartes topologiques recouvrent $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ puisque

$$\bigcup_{(\alpha,\beta)\in \mathrm{A}\times\mathrm{B}} (\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta) = \left(\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha\right) \times \left(\bigcup_{\beta\in\mathrm{B}} \mathrm{U}'_\beta\right) = \mathrm{M} \times \mathrm{N}\,.$$

Enfin, considérons $\alpha, \alpha' \in \mathrm{A}$ et $\beta, \beta' \in \mathrm{B}$. Montrons que les pseudocartes topologiques $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta$ et $\mathcal{U}_{\alpha'} \times \mathcal{U}_{\beta'}$ sont compatibles. Comme

$$(\mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{U}'_\beta) \cap (\mathrm{U}'_\alpha \times \mathrm{U}'_{\beta'}) = (\mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}'_\alpha) \times (\mathrm{U}'_\beta \cap \mathrm{U}'_{\beta'})\,,$$

les applications de transition $\psi_{(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta)(\mathcal{U}_{\alpha'} \times \mathcal{U}_{\beta'})}$ et $\psi_{(\mathcal{U}_{\alpha'} \times \mathcal{U}_{\beta'})(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta)}$ s'écrivent

$$\psi_{(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta)(\mathcal{U}_{\alpha'} \times \mathcal{U}_{\beta'})} = \psi_{\mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_{\alpha'}} \times \psi_{\mathcal{U}_\beta \mathcal{U}_{\beta'}} \qquad \text{et} \qquad \psi_{(\mathcal{U}_{\alpha'} \times \mathcal{U}_{\beta'})(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta)} = \psi_{\mathcal{U}_{\alpha'} \mathcal{U}_\alpha} \times \psi_{\mathcal{U}_{\beta'} \mathcal{U}_\beta}.$$

Or une application d'un ouvert de $\mathbb{C}^i$ dans $\mathbb{C}^j$ est holomorphe si et seulement si chacune de ses j composantes l'est. Comme les $n_{\alpha'}$ (resp. n_α) premières composantes de $\psi_{(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta)(\mathcal{U}_{\alpha'} \times \mathcal{U}_{\beta'})}$ (resp. de $\psi_{(\mathcal{U}_{\alpha'} \times \mathcal{U}_{\beta'})(\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta)}$) sont celles de $\psi_{\mathcal{U}_\alpha \mathcal{U}_{\alpha'}}$ (resp. de $\psi_{\mathcal{U}_{\alpha'} \mathcal{U}_\alpha}$) et les $n'_{\beta'}$ (resp. n'_β) suivantes celles de $\psi_{\mathcal{U}_\beta \mathcal{U}_{\beta'}}$ (resp. $\psi_{\mathcal{U}_{\beta'} \mathcal{U}_\beta}$), les applications de transition entre $\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta$ et $\mathcal{U}_{\alpha'} \times \mathcal{U}_{\beta'}$ sont holomorphes. Ainsi, l'ensemble $\{\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta,\quad (\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}\}$ est un atlas sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ appelé *atlas produit* et noté $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}$. La remarque 1.54 montre alors qu'on peut munir $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ d'une structure de prévariété holomorphe. Par ailleurs, on remarque que la structure de prévariété obtenue ne dépend pas des atlas choisis dans les classes d'équivalence de $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{B}$. En effet, la construction de l'atlas produit montre immédiatement que si $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{B}'$) est l'atlas maximal contenant $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$), on a $(\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}) \subset (\mathscr{A}' \boxtimes \mathscr{B}')$ et donc $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}$ et $\mathscr{A}' \boxtimes \mathscr{B}'$ sont compatibles et définissent le même atlas maximal sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$. En particulier, lorsque $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ sont deux prévariétés holomorphes, on obtient sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ une structure de prévariété appelée *structure produit*. Lorsqu'on évoquera une structure de prévariété sur un produit de prévariété, il s'agira, sauf mention explicite du contraire, de celle construite ici. ■

Les applications qui suivent montrent quelques coïncidences entre diverses structures de prévariétés holomorphes liées aux prévariétés produits.

Application 1.67 — Produit d'ouverts. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ et U un ouvert de $\mathbb{C}^n$, V un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Montrons que la structure de prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ obtenue par produit des structures de U et de V coïncide avec celle obtenue comme ouvert de $\mathbb{C}^{n+m}$.

D'après l'exemple 1.57, l'atlas $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{U}})\}$ (resp. $\mathscr{B} = \{(\mathrm{V}, \mathrm{V}, m, \mathrm{id}_{\mathrm{V}})\}$) définit la structure de prévariété sur U (resp. V). On a alors $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B} = \{(\mathrm{U} \times \mathrm{V}, \mathrm{U} \times \mathrm{V}, n + m, \mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{V}})\}$ (voir exemple 1.66).

Comme $\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{V}} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}\times\mathrm{V}}$, l'atlas $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}$ n'est autre que l'atlas définissant la structure de prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ comme ouvert de $\mathbb{C}^{n+m}$.

En particulier, la structure de prévariété de $\mathbb{C}^n$ coïncide avec la structure de prévariété produit de $\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$. ■

Application 1.68 — Produit d'ouverts d'espace vectoriel. Soient E, F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie respective m et n et U un ouvert de E, V un ouvert de F. Montrons que la structure de prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ obtenue par produit des structures de U et de V coïncide avec celle obtenue comme ouvert de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathbb{C}^m$ (resp. $g : \mathrm{F} \to \mathbb{C}^n$) un isomorphisme linéaire. D'après l'exemple 1.58 dont on reprend les notations, la structure de prévariété sur U (resp. V) est déterminée par l'atlas $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}, f(\mathrm{U}), m, f_{\mathrm{U}}\}$ (resp. $\mathscr{B} = \{(\mathrm{V}, g(\mathrm{V}), n, g_{\mathrm{V}})\}$). L'atlas $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}$ (voir exemple 1.66) est alors donné par

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{(\mathrm{U} \times \mathrm{V}, f(\mathrm{U}) \times g(\mathrm{V}), n + m, f_{\mathrm{U}} \times g_{\mathrm{V}}))\}.$$

Comme l'application $f \times g : \mathrm{E} \times \mathrm{F} \to \mathbb{C}^{n+m}$ réalise un isomorphisme linéaire et $f_{\mathrm{U}} \times g_{\mathrm{V}} = (f \times g)_{\mathrm{U}\times\mathrm{V}}$, l'atlas $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}$ n'est autre que l'atlas définissant la structure de prévariété holomorphe sur $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ comme ouvert de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$. ■

Comme la structure usuelle de prévariété sur un ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie coïncide avec celle d'ouvert de la prévariété dont l'ensemble sous-jacent est l'espace vectoriel en question (voir les applications 1.63 et 1.64), les applications 1.67 et 1.68 sont en fait des conséquences du résultat général de l'application 1.69 appliquée respectivement aux prévariétés $\mathrm{M} = \mathbb{C}^n$ et $\mathrm{M}' = \mathbb{C}^m$ puis $\mathrm{M} = \mathrm{E}$ et $\mathrm{M}' = \mathrm{F}$ munies de leur structure usuelle.

Application 1.69 — Produit d'ouverts de prévariétés. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes et U (resp. U′) un ouvert de M (resp. M′). L'ensemble $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ est alors un ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$. Montrons que la structure de prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ obtenue par produit des structures de U et de U′ coïncide avec celle obtenue comme ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$ (voir les exemples 1.61 et 1.66).

On note $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$ (resp. $\mathscr{A}_{\mathrm{U}'}$) l'atlas maximal associé à la structure de prévariété sur U (resp. U′). L'atlas produit $\mathscr{A}_{\mathrm{U}} \boxtimes \mathscr{A}_{\mathrm{U}'}$ qui détermine la structure produit sur $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ est alors donné par

$$\mathscr{A}_{\mathrm{U}} \boxtimes \mathscr{A}_{\mathrm{U}'} = \{\mathcal{U} \times \mathcal{U}', \quad \mathcal{U} \in \mathscr{A}, \quad \mathcal{U}' \in \mathscr{A}', \quad \mathrm{dom}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{U}, \quad \mathrm{dom}(\mathcal{U}') \subset \mathrm{U}'\}$$

Par ailleurs, la structure de prévariété produit sur $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$ est déterminée par l'atlas $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{A}'$. La structure de prévariété sur l'ouvert $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$ est donc déterminée par l'atlas

$$(\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{A}')_{\mathrm{U}\times\mathrm{U}'} = \{\mathcal{V} \in \mathscr{A} \boxtimes \mathscr{A}', \quad \mathrm{dom}(\mathcal{V}) \subset \mathrm{U} \times \mathrm{U}'\}$$

Or, pour $\mathcal{V} \in \mathscr{A} \boxtimes \mathscr{A}'$, on a $\mathcal{V} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ avec $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' \in \mathscr{A}'$ et $\mathrm{dom}(\mathcal{V}) = \mathrm{dom}(\mathcal{U}) \times \mathrm{dom}(\mathcal{U}')$. On en déduit que $\mathscr{A}_{\mathrm{U}} \boxtimes \mathscr{A}_{\mathrm{U}'} = (\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{A}')_{\mathrm{U}\times\mathrm{U}'}$. Ainsi un atlas déterminant la structure de prévariété produit sur $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ coïncide avec un atlas déterminant la structure de prévariété sur $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ comme ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$. ■

Prévariétés discrètes

L'exemple suivant montre que tout ensemble peut être muni d'une structure de prévariété : celle de prévariété discrète. Comme la topologie d'une prévariété discrète est la topologie discrète, on dispose, sur $\mathbb{C}$ ou tout autre ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, d'au moins deux structures distinctes de prévariétés holomorphes.

Exemple 1.70 — Ensembles et prévariétés discrètes. Soit M un ensemble. Pour $x \in \mathrm{M}$, on note φ_x l'unique application de $\{x\}$ dans $\{0\} = \mathbb{C}^0$. On considère la famille de pseudocartes $\mathscr{A} = \{(\{x\}, \{0\}, 0, \varphi_x), \quad x \in \mathrm{M}\}$. Comme les domaines des pseudocartes sont deux à deux disjoints, elles sont compatibles (exemple 1.28). Enfin, comme

$$\mathrm{M} = \bigcup_{x\in\mathrm{M}} \{x\},$$

on en déduit que $\mathscr{A}$ est un atlas sur M. On peut donc munir M, grâce à $\mathscr{A}$, d'une structure de prévariété holomorphe (remarque 1.54) qu'on note $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$. La topologie associée à $\mathscr{A}$ est alors la topologie discrète puisque, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'ensemble $\{x\}$ est ouvert. ■

Dans l'exemple précédent, on a construit une structure de prévariété holomorphe sur un ensemble quelconque. La topologie associée à cette structure est alors la topologie discrète. Réciproquement, l'exemple suivant montre que, si la topologie associée à une structure de prévariété est la topologie discrète, la structure de prévariété est nécessairement la structure discrète.

Exemple 1.71 — Espace topologique discret et prévariété discrète. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. On suppose que la topologie associée à $\mathscr{A}$ est la topologie discrète (voir la proposition 1.37). Montrons que $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ est la structure de prévariété discrète sur M et que

$$\mathscr{A} = \{(\{x\}, \{0\}, 0, \varphi_x), \quad x \in \mathrm{M}\} \cup \{(\varnothing, \varnothing, m, \varnothing), \quad m \in \mathbb{N}\}.$$

Soient $x \in \mathrm{M}$ et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ une carte en x. Comme U est un sous-ensemble d'un espace topologique discret, U est discret. Par homéomorphie (via φ), V est aussi un espace topologique discret. Or, pour $n \geqslant 1$, un ouvert de $\mathbb{C}^n$ n'est pas un espace discret. On en déduit alors que $n = 0$. Comme V est un ouvert non vide (puisqu'en bijection avec l'ensemble non vide U) de $\mathbb{C}^0$, on a $\mathrm{V} = \mathbb{C}^0$. Comme U est en bijection avec V et contient x, on obtient $\mathrm{U} = \{x\}$ et $\varphi = \varphi_x : \{x\} \to \mathbb{C}^0$. Comme tout $x \in \mathrm{M}$ est dans une carte de $\mathscr{A}$, on en déduit que l'atlas définissant la structure de prévariété discrète sur M (voir l'exemple 1.70) est contenu dans $\mathscr{A}$ et que toute carte non vide de $\mathscr{A}$ est un carte de l'atlas définissant la structure de prévariété discrète sur M. Ainsi, la structure de prévariété sur M est bien celle de prévariété discrète et l'atlas maximal associé à la structure de prévariété discrète est donné par

$$\mathscr{A} = \{(\{x\}, \{0\}, 0, \varphi_x), \quad x \in \mathrm{M}\} \cup \{(\varnothing, \varnothing, m, \varnothing), \quad m \in \mathbb{N}\}.$$

En particulier, on en déduit que, sur un espace topologique discret, il existe un unique atlas topologique maximal et donc une unique structure de prévariété dont la structure topologique sous-jacente soit la structure discrète. ■

L'exemple précédent assure immédiatement qu'un ouvert d'une prévariété discrète est une prévariété discrète et que le produit de deux prévariétés discrètes est une prévariété discrète (applications 1.72 et 1.73).

Application 1.72 — Sous-ensemble d'une prévariété discrète. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété discrète et U un sous-ensemble de M. Alors U est un ouvert de M et la structure de prévariété sur U induite par celle de M (voir l'exemple 1.61) est la structure de prévariété discrète sur U.

En effet, la topologie induite par M sur U est la topologie discrète. L'exemple 1.71 permet de conclure. ■

Application 1.73 — Produit de prévariétés discrètes. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés discrètes. La prévariété produit de M et N est la prévariété discrète $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$.

En effet, la topologie associée à la structure de prévariété produit de $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ est la topologie produit de celle de M et N c'est-à-dire la topologie produit de la topologie discrète sur M et de la topologie discrète sur N. Or l'espace topologique produit de deux espaces discrets est un espace discret. L'exemple 1.71 permet alors de conclure. ■

Enfin, par un raisonnement similaire à celui de l'exemple 1.71, on montre qu'un ensemble au plus dénombrable admet une unique structure de prévariété.

Exemple 1.74 — Ensembles dénombrables. Soit M un ensemble au plus dénombrable. Il existe une unique structure de prévariété holomorphe sur M : la structure de prévariété discrète.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une structure de prévariété holomorphe sur M, $x \in \mathrm{M}$ et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ une carte en x. Comme U est en bijection avec V (via φ), V est au plus dénombrable. Or, pour $n \geqslant 1$, un ouvert de $\mathbb{C}^n$ n'est pas dénombrable. On en déduit alors que $n = 0$. Comme V est un ouvert non vide (puisqu'en bijection avec l'ensemble non vide U) de $\mathbb{C}^0$, on a $\mathrm{V} = \mathbb{C}^0$. Comme U est en bijection avec V et contient x, on obtient $\mathrm{U} = \{x\}$ et $\varphi = \varphi_x : \{x\} \to \mathbb{C}^0$. Comme tout $x \in \mathrm{M}$ est dans une carte de $\mathscr{A}$, on en déduit que l'atlas définissant la structure de prévariété discrète sur M (voir l'exemple 1.70) est contenu dans $\mathscr{A}$. Ainsi, la structure de prévariété sur M est celle de prévariété discrète. ■

QUELQUES PATHOLOGIES !

L'exemple suivant décrit une troisième structure de prévariété holomorphe sur $\mathbb{C}$ distincte de la structure usuelle ou de la structure discrète. Pour cette nouvelle structure, la topologie associée est la topologie usuelle. Ainsi la notion de prévariété holomorphe n'est pas uniquement une donnée topologique mais contient quelque chose en plus.

Exemple 1.75 — Autres structures de prévariété holomorphe sur $\mathbb{C}$. Considérons l'application $\varphi : z \mapsto \overline{z}$ (ou plus généralement, φ un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ qui n'est pas un biholomorphisme). Alors $\{(\mathbb{C}, \mathbb{C}, 1, \varphi)\}$ est un atlas sur $\mathbb{C}$. En effet, $\mathbb{C}$ est ouvert de $\mathbb{C}$ et recouvre $\mathbb{C}$, φ est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ sur l'ouvert $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}$ et comme il n'y qu'une carte, la remarque 1.42 montre que $\{(\mathbb{C}, \mathbb{C}, 1, \varphi)\}$ est bien un atlas. D'après la remarque 1.54, on peut alors munir $\mathbb{C}$ d'une structure de prévariété holomorphe. Cette structure ne coïncide pas avec celle donnée dans l'exemple 1.57. En effet, les deux atlas $\{(\mathbb{C}, \mathbb{C}, 1, \varphi)\}$ et $\{(\mathbb{C}, \mathbb{C}, 1, \mathrm{id})\}$ ne sont pas compatibles puisque $\varphi = \varphi \circ \mathrm{id}^{-1}$ ou $\varphi^{-1} = \mathrm{id} \circ \varphi^{-1}$ n'est pas holomorphe. Ils ne définissent donc pas le même atlas maximal et donc pas la même structure de prévariété holomorphe sur $\mathbb{C}$. Cependant, les topologies associées à chacun de ces atlas sont les mêmes (la topologie standard de $\mathbb{C}$). L'exemple 1.126 généralisera cette situation à une prévariété holomorphe quelconque. ■

L'exemple suivant fournit un exemple de prévariété holomorphe non séparée.

Exemple 1.76 – $\mathbb{C}_{\pm}$. On considère l'ensemble $\mathrm{M} = (\mathbb{C}^*) \coprod \{a_+, a_-\}$. L'objectif est de munir M d'une structure de prévariété holomorphe pour laquelle la topologie associée n'est pas séparée. On considère pour cela le recouvrement donné par $\mathrm{M} = \mathrm{U}_+ \cup \mathrm{U}_-$ avec $\mathrm{U}_+ = (\mathbb{C}^*) \cup \{a_+\}$ et $\mathrm{U}_- = (\mathbb{C}^*) \cup \{a_-\}$. Les applications

$$\varphi_+ : \begin{cases} \mathrm{U}_+ \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{si } x = a_+ \end{cases} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_- : \begin{cases} \mathrm{U}_- \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{C}^* \\ 0 & \text{si } x = a_- \end{cases} \end{cases}$$

sont des bijections. De plus, $\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_- = \mathbb{C}^*$ et $\varphi_+(\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_-) = \varphi_-(\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_-) = \mathbb{C}^*$ sont des ouverts de $\mathbb{C}$. Enfin, les applications

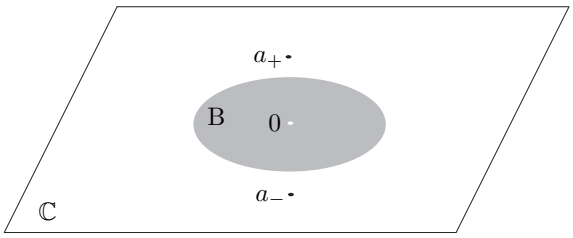
$$\psi_{\pm} = \varphi_+\big|_{\mathrm{U}_+\cap\mathrm{U}_-} \circ \left(\varphi_-\big|_{\mathrm{U}_+\cap\mathrm{U}_-}\right)^{-1} : \varphi_-(\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_-) = \mathbb{C}^* \longrightarrow \varphi_+(\mathrm{U}_- \cap \mathrm{U}_+) = \mathbb{C}^*$$

et

$$\psi_{\mp} = \varphi_-\big|_{\mathrm{U}_+\cap\mathrm{U}_-} \circ \left(\varphi_+\big|_{\mathrm{U}_+\cap\mathrm{U}_-}\right)^{-1} : \varphi_+(\mathrm{U}_+ \cap \mathrm{U}_-) = \mathbb{C}^* \longrightarrow \varphi_-(\mathrm{U}_- \cap \mathrm{U}_+) = \mathbb{C}^*$$

sont égales à $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ et donc holomorphes. Ainsi, $\mathscr{A} = \{(\mathrm{U}_+, \mathbb{C}, 1, \varphi_+), (\mathrm{U}_-, \mathbb{C}, 1, \varphi_-)\}$ est un atlas sur M. La remarque 1.54 montre qu'on peut munir M d'une structure de prévariété holomorphe.

La topologie induite sur M par l'atlas $\mathscr{A}$ n'est pas séparé. En effet, si V_+ (resp. V_-) est un voisinage de a_+ (resp. de a_-) alors comme φ_+ (resp. φ_-) est un homéomorphisme, $\varphi_+(\mathrm{V}_+)$ (resp. $\varphi_-(\mathrm{V}_-)$) contient une boule ouverte B_+ (resp. B_-) de centre 0 et de rayon ε_+ (resp. ε_-) avec $\varepsilon_+ > 0$ (resp. $\varepsilon_- > 0$). Ainsi $\mathrm{B}_+ \smallsetminus \{0\} \subset \mathrm{V}_+$ et $\mathrm{B}_- \smallsetminus \{0\} \subset \mathrm{V}_-$. Et donc en considérant $\varepsilon = \inf(\varepsilon_+, \varepsilon_-) > 0$ et B la boule ouverte de centre 0 et de rayon ε, on a $\varnothing \neq \mathrm{B} \smallsetminus \{0\} \subset \mathrm{V}_- \cap \mathrm{V}_+$ et donc tout voisinage de a_+ rencontre tout voisinage de a_- ce qui contredit la séparation. ■



1.4.3 Les morphismes : applications holomorphes

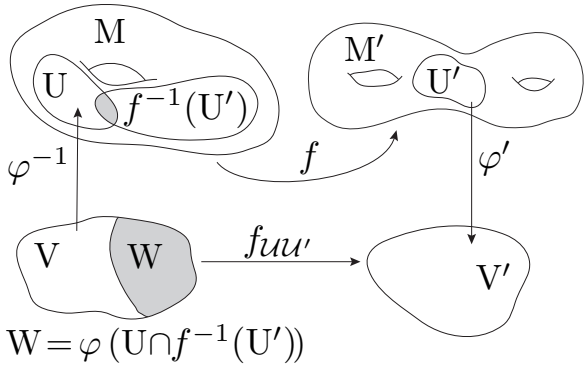
Les prévariétés holomorphes généralisent la notion d'ouverts de $\mathbb{C}^n$: ce sont des espaces qui ressemblent localement à des ouverts d'un $\mathbb{C}^n$ mais globalement n'en sont pas (voir la remarque 1.38). On définit alors une notion qui va généraliser la notion de fonctions holomorphes d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^m$. Comme, une prévariété est localement un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et que la notion classique de fonctions holomorphes est une notion locale, on peut définir la nouvelle notion de fonction holomorphe en un point à partir de la notion classique via les transferts des cartes des atlas de la prévariété de départ et d'arrivée. Il s'agit bien sûr de vérifier que cette notion ne dépend pas des cartes choisies (proposition 1.78 (*ii*) et (*iv*)).

Notation 1.77 – Application lue dans des cartes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. Pour $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$, on note $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ l'application donnée par

$$f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi' \circ f \circ \left(\varphi\big|_{\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')) \longrightarrow \varphi'(\mathrm{U}')$$

On dit que l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est *l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$*.

Proposition-Définition 1.78 – Applications holomorphes en un point. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application et $x \in \mathrm{M}$. On dit que l'application f est *holomorphe en x* si les propositions équivalentes suivantes sont vérifiées.



(*i*) Il existe une carte en x notée $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et une carte en $f(x)$ notée $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$ telles que $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ soit un voisinage de x dans M et $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ soit une application holomorphe en $\varphi(x)$.

(*ii*) Pour toute carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ en x et toute carte $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$ en $f(x)$, $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x dans M et l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe en $\varphi(x)$.

(*iii*) f est continue en x et il existe une carte en x notée $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et une carte en $f(x)$ notée $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$ telles que $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ soit holomorphe en $\varphi(x)$.

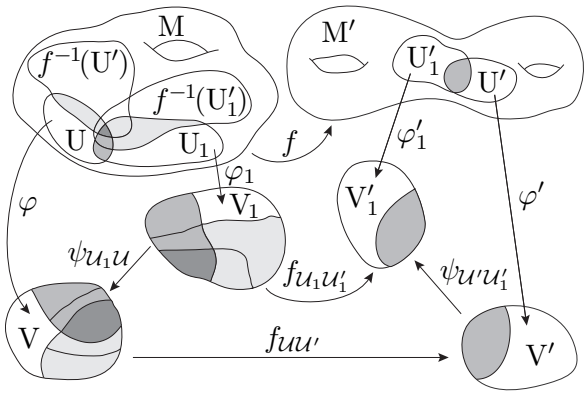
(*iv*) f est continue en x et pour toute carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ en x et toute carte $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$ en $f(x)$, l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe en $\varphi(x)$.

Preuve. *Remarque.* Demander que $\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ soit un voisinage de x assure que $\varphi(\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}'))$ est un voisinage de $\varphi(x)$ puisque φ est un homéomorphisme. Ainsi, cela a bien un sens pour l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ d'être holomorphe en $\varphi(x)$. De même, si f est continue en x, $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte en x et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ est une carte en $f(x)$ alors $\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x. Ainsi, cela a bien un sens pour l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ d'être holomorphe en $\varphi(x)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Comme $\mathscr{A}$ est un atlas, il existe une carte en x. De même, il existe une carte en $f(x)$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. En composant par φ'^{-1} et $\varphi_{|\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}$, l'hypothèse (i) donne la continuité de $f_{|\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')}$ en x. Comme $\mathrm{U}\cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x, on en déduit que f est continue en x. Soient $\mathcal{U}_1 = (\mathrm{U}_1, \mathrm{V}_1, n_1, \varphi_1)$ une carte en x et $\mathcal{U}'_1 = (\mathrm{U}'_1, \mathrm{V}'_1, n'_1, \varphi'_1)$ une carte en $f(x)$. Comme f est continue en x, $f^{-1}(\mathrm{U}'_1)$ est un voisinage de x dans M. Ainsi $\mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1)$ est un voisinage de x dans M. On en déduit que l'ensemble $\mathrm{U}'' = \mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1) \cap \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x dans M. Ainsi $\varphi_1(\mathrm{U}'')$ est voisinage de $\varphi_1(x)$ dans $\varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1))$. On considère alors les applications de transition $\psi_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}}$ et $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}'_1}$ entre les cartes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}$, et $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}'_1$ et $f_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}$ l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}'_1$. Montrons que

$$f_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}\big|_{\varphi_1(\mathrm{U}'')} = \psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}'_1} \circ f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} \circ \psi_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}}\big|_{\varphi_1(\mathrm{U}'')}. \qquad (*)$$



Par définition de U'', on a $\varphi_1(\mathrm{U}'') \subset \varphi_1(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_1)$ et donc

$$\psi_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}}(\varphi_1(\mathrm{U}'')) = \varphi(\mathrm{U}'') \subset \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1)).$$

On en déduit que $(f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} \circ \psi_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}})(\varphi_1(\mathrm{U}'')) \subset \varphi'(\mathrm{U}'_1 \cap \mathrm{U}')$ et finalement $(\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}'_1} \circ f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} \circ \psi_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}})(\varphi_1(\mathrm{U}''))$ a bien un sens. L'égalité $(*)$ résulte alors simplement de l'associativité de la composition. Or $\psi_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}}$ est holomorphe en $\varphi_1(x)$ et envoie $\varphi_1(x)$ sur $\varphi(x)$. Par hypothèse, $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe en $\varphi(x)$ et $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(\varphi(x)) = \varphi'(f(x))$. Enfin $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}'_1}$ est holomorphe en $\varphi'(f(x))$. Par composition, la restriction de $f_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}$ à $\varphi_1(\mathrm{U}'')$ est holomorphe en $\varphi_1(x)$. Comme $\varphi_1(\mathrm{U}'')$ est un voisinage de $\varphi_1(x)$ dans $\varphi_1(\mathrm{U}_1 \cap f^{-1}(\mathrm{U}'_1))$, l'application $f_{\mathcal{U}_1\mathcal{U}'_1}$ est holomorphe en x.

$(i) \Rightarrow (iii)$. On a vu dans la preuve de $(i) \Rightarrow (ii)$ que (i) implique la continuité de f en x.

$(iii) \Rightarrow (i)$ et $(iv) \Rightarrow (ii)$. La remarque initiale montre que $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un voisinage de x.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. On a vu que $(ii) \Rightarrow (i)$ et que (i) implique la continuité de f en x. ■

Remarque 1.79 — Continuité. On a vu que les hypothèses (i) et (ii) assure la continuité de f en x : bien entendu, il s'agit de la continuité pour les topologies de M et N associée aux atlas $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$. ■

Remarque 1.80 — Choix des cartes. En pratique, les points (i) et (iii) de la proposition-définition 1.78 servent à montrer qu'une application entre deux prévariétés holomorphes est holomorphe en un point puisqu'il suffit de trouver une carte au départ et à l'arrivée pour lesquelles l'application lue dans ces cartes est holomorphe. À l'opposé, on utilise les points (ii) et (iv) lorsqu'on sait qu'une application entre deux prévariétés holomorphes est holomorphe en un point. On peut alors choisir les cartes dont on a besoin pour notre raisonnement. ■

Comme dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on définit une fonction holomorphe d'une prévariété dans une autre comme une fonction holomorphe en tout point de l'espace de départ. On obtient immédiatement une caractérisation à l'aide des applications lue dans les cartes et d'une condition de continuité (points (ii) à (v) ci-dessous).

Proposition-Définition 1.81 — Application holomorphe. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. On considère $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{B}'$) un atlas sur M (resp. sur N) contenu dans $\mathscr{A}$ (resp. dans $\mathscr{B}$). On dit que l'application f est *holomorphe* si les propositions équivalentes suivantes sont vérifiées.

(i) L'application f est holomorphe en x pour tout $x \in \mathrm{M}$.

(ii) Pour tout $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$, l'ensemble $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un ouvert de M et l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est holomorphe.

(iii) Pour tout $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}'$ et tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}'$, l'ensemble $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un ouvert de M et l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est holomorphe.

(iv) f est continue et pour tout $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est holomorphe.

(v) f est continue et pour tout $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}'$ et tout $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}'$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est holomorphe.

On note $\mathscr{H}((\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{N}, \mathscr{B}))$ (ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les atlas en question, $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$) l'ensemble des applications holomorphes de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ dans $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$.

Preuve. $(ii) \Rightarrow (iii)$ et $(iv) \Rightarrow (v)$ sont évidentes puisque $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ et $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$.
$(iv) \Rightarrow (ii)$ et $(v) \Rightarrow (iii)$ résultent du fait que $f^{-1}(\mathrm{U}')$ est un ouvert (puisque f est continue et U' ouvert). En effet, on en déduit immédiatement que $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ est ouvert.
$(ii) \Rightarrow (iv)$ et $(iii) \Rightarrow (v)$. Par composition par φ'^{-1} et $\varphi_{|\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')}$, on en déduit que $f_{|\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')}$ est continue. Comme les $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ sont des ouverts de M qui recouvrent M (puisque $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{B}'$) sont des atlas), on en déduit que f est continue sur M.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit $x \in \mathrm{M}$. Comme $\mathscr{A}'$ (resp. $\mathscr{B}'$) est un atlas sur M (resp. sur N), il existe une carte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ en x appartenant à $\mathscr{A}'$ (resp. une carte $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ en $f(x)$ appartenant à $\mathscr{B}'$). Par hypothèse, l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe sur l'ouvert $\varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'))$ qui contient $\varphi(x)$ et donc holomorphe en $\varphi(x)$. Ainsi, d'après la proposition-définition 1.78 (i), f est holomorphe en x.
$(i) \Rightarrow (ii)$. L'application f est continue en x pour tout x, donc f est continue. On en déduit que $f^{-1}(\mathrm{U}') \cap \mathrm{U}$ est ouvert. Il reste à montrer que $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe en $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$. Soit $x \in \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$. Comme $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une carte, le lemme 1.51 montre que

$$\mathscr{U} = (\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'), \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')), n, \varphi_{|\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')})$$

est encore une carte de $\mathscr{A}$. Ainsi $\mathscr{U}$ est une carte en x pour tout $x \in \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ et $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ est une carte en $f(x)$. Comme $\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') = \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$, la proposition-définition 1.78 (ii) montre que $f_{\mathscr{U}\mathcal{U}'} = f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe en $\varphi(x)$. ■

Remarque 1.82 — Choix des atlas. En pratique, les points (iii) et (v) de la proposition-définition 1.81 servent à montrer qu'une application entre deux prévariétés holomorphes est holomorphe. En effet, on n'a pas besoin de considérer toutes les cartes des atlas maximaux de l'espace de départ et d'arrivée mais seulement celles d'atlas plus petits. À l'opposé les points (ii) et (iv) servent lorsqu'on sait qu'une application entre deux prévariétés est holomorphe en un point. On peut alors choisir les cartes dont on a besoin pour notre raisonnement. ■

1.4.4 Exemples d'applications holomorphes

Dans cette sous-section, on présente quelques exemples classiques d'applications holomorphes. On compare, en particulier, la notion usuelle d'applications holomorphes entre ouverts d'espaces vectoriels avec la nouvelle notion d'applications holomorphes (exemple 1.89 et 1.90).

Quelques exemples structurels

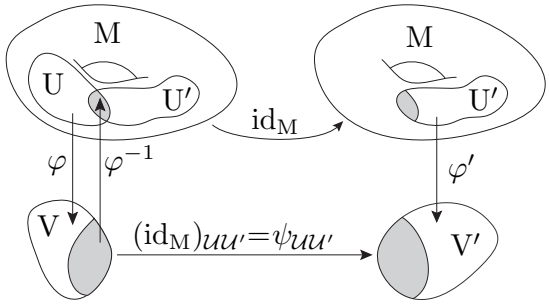
On commence par des exemples simples. Les trois premiers sont des exemples concrets d'applications holomorphes : les applications constantes et l'identité pour laquelle on donne deux démonstrations. Les trois suivants sont directement liés à la structure de prévariété holomorphe : ils étudient le transfert des cartes de l'atlas définissant la structure de prévariété holomorphe.

Exemple 1.83 — Application constante. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application constante. Montrons que $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. L'application f est continue et pour toute carte $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{V} \in \mathscr{B}$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est constante ou vide (si le domaine de $\mathcal{V}$ ne contient pas le singleton image de f) et donc holomorphe. La proposition-définition 1.81 (iv) permet de conclure. ■

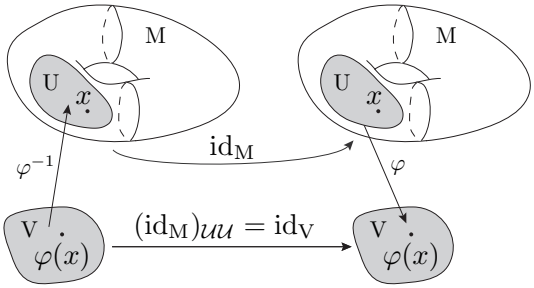
Exemple 1.84 — id_{M}. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. L'application id_{M} est holomorphe. En effet, id_{M} est continue et pour $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ deux cartes de $\mathscr{A}$, on a $\mathrm{U} \cap {\mathrm{id}_{\mathrm{M}}}^{-1}(\mathrm{U}') = \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$ et l'application id_{M} lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est donnée par

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{M}})_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi' \circ \mathrm{id}_{\mathrm{M}} \circ \left(\varphi_{|\,\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'}\right)^{-1} : \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \to \varphi'(\mathrm{U}')\,.$$

Cette expression montre que $(\mathrm{id}_{\mathrm{M}})_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est une application de transition entre les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ de $\mathscr{A}$. Elle est donc holomorphe. On conclut alors grâce à la proposition-définition 1.81 (ii). ■

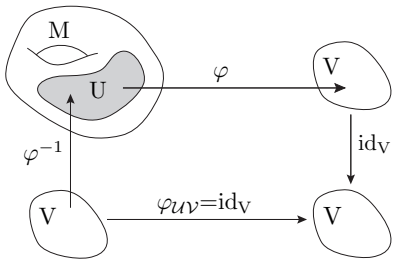


Exemple 1.85 — id_{M} 2. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. Donnons une deuxième démonstration de l'holomorphie de id_{M} reposant cette fois-ci sur le critère (i) de la proposition définition 1.81. Soit $x \in \mathrm{M}$. Montrons que l'application id_{M} est holomorphe en x. Elle est continue et donc continue en x. Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ une carte en $x = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}(x)$. L'application id_{M} lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$ est donnée par $(\mathrm{id}_{\mathrm{M}})_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. Comme cette dernière application est holomorphe au sens classique, la proposition-définition 1.78 (iii) assure que id_{M} est holomorphe en x et la proposition définition 1.81 (i) donne l'holomorphie de id_{M}. ■



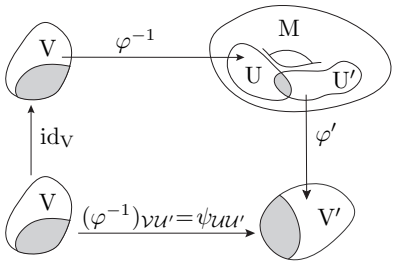
Exemple 1.86 — Carte. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$. Montrons que $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ est holomorphe.

L'ouvert U de M admet une structure de prévariété holomorphe et on note $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$ l'atlas maximal associé (voir l'exemple 1.61). Comme $\mathrm{dom}(\mathcal{U}) = \mathrm{U}$, on a $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. Par ailleurs, $\mathrm{dom}(\mathcal{U})$ recouvre U, la remarque 1.42 montre que $\{\mathcal{U}\}$ est un atlas sur U. Or $\{\mathcal{U}\} \subset \mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. Les atlas $\{\mathcal{U}\}$ et $\mathscr{A}_{\mathrm{U}}$ définissent donc la même structure de prévariété holomorphe sur U. Par ailleurs, la structure de prévariété sur V est donnée par l'atlas $\{\mathcal{V} = (\mathrm{V}, \mathrm{V}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{V}})\}$. Comme φ est continue, il suffit de vérifier que l'application φ lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est holomorphe (proposition-définition 1.81 (v)). Or $\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$ est holomorphe. ■



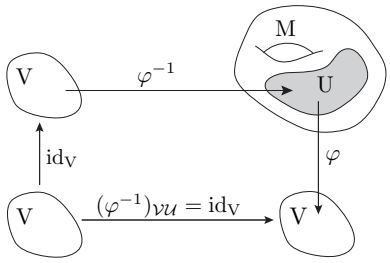
Exemple 1.87 — Carte 2. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$. Montrons que l'application $\varphi^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$ est holomorphe.

Comme φ est un homéomorphisme, φ^{-1} est continue. Par ailleurs, la structure de prévariété holomorphe sur V est donnée par l'atlas $\{\mathcal{V} = (\mathrm{V}, \mathrm{V}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{V}})\}$. La proposition-définition 1.81 (v) assure qu'il suffit de montrer pour toute carte $\mathcal{U}'$ de $\mathscr{A}$, l'application φ^{-1} lue dans les cartes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}'$ est holomorphe. Or, pour $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$, on a $\mathrm{id}_{\mathrm{V}}(\mathrm{V} \cap (\varphi^{-1})^{-1}(\mathrm{U}')) = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $(\varphi^{-1})_{\mathcal{V}\mathcal{U}'} = \psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est l'application de transition entre les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ de $\mathscr{A}$. La compatibilité entre ces cartes donne alors le résultat. ■



Exemple 1.88 — Carte 3. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$. Montrons que l'application $\varphi^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ est holomorphe. On pourra comparer avec les exemples 1.87 et 1.99.

Comme φ est un homéomorphisme, l'application φ^{-1} est continue. Par ailleurs, la structure de prévariété sur V est déterminée par l'atlas $\{\mathcal{V} = (\mathrm{V}, \mathrm{V}, n, \mathrm{id}_{\mathrm{V}})\}$ et, d'après l'exemple 1.86, la structure de prévariété holomorphe de l'ouvert U de M est déterminée par l'atlas $\{\mathcal{U}\}$. La proposition-définition 1.81 (v) assure qu'il suffit de montrer que l'application φ^{-1} lue dans les cartes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ est holomorphe. Or on a $\mathrm{V} \cap (\varphi^{-1})^{-1}(\mathrm{U}) = \mathrm{V}$ et $(\varphi^{-1})_{\mathcal{V}\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. Comme id_{V} est holomorphe, on obtient le résultat souhaité. ■



Applications holomorphes et ouverts d'espaces vectoriels

Dans les deux exemples suivants, on montre que les applications holomorphes au sens des prévariétés entre deux ouverts de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie sont en fait exactement les applications holomorphes au sens classique. Ainsi, on a défini une bonne généralisation des fonctions holomorphes usuelles : on en n'a pas rajouté entre les ouverts des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie et mais on en a définit entre d'autres espaces. On étudie ensuite quelques applications de ces exemples.

Exemple 1.89 — Ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et V un ouvert de $\mathbb{C}^m$. Montrons qu'une application holomorphe pour les structures de variétés sur U et V données par l'exemple 1.57 n'est rien d'autre qu'une application holomorphe au sens classique.

Soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une application. Comme une application holomorphe au sens classique est continue, la proposition-définition 1.81 (v) (pour les atlas $\{\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id}_\mathrm{U})\}$ et $\{\mathcal{V} = (\mathrm{V}, \mathrm{V}, m, \mathrm{id}_\mathrm{V})\}$ qui déterminent la structure de prévariété respectivement sur U et V) assure que f est holomorphe au sens des prévariétés si et seulement si l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est une application holomorphe au sens classique. Or $\mathrm{U} \cap \varphi^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{U}$ et $f_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = \mathrm{id}_\mathrm{V} \circ f \circ {\mathrm{id}_\mathrm{U}}^{-1} = f$. Ainsi $f_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ est holomorphe au sens classique si et seulement si f l'est. ■

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} \arrow[r, "f"] & \mathrm{V} \arrow[d, "\mathrm{id}_\mathrm{V}"] \\
\mathrm{U} \arrow[u, "\mathrm{id}_\mathrm{U}"] \arrow[r, "f_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = f"] & \mathrm{V}
\end{tikzcd}$$

Exemple 1.90 — Ouvert d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient E, F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E, V un ouvert de F, f un isomorphisme linéaire de E sur $\mathbb{C}^n$ et g un isomorphisme linéaire de F sur $\mathbb{C}^m$. Montrons qu'une application holomorphe pour les structures de variétés sur U et V données par l'exemple 1.58 n'est rien d'autre qu'une application holomorphe au sens classique.

On a vu dans l'exemple 1.58 dont on reprend les notations que la structure de prévariété sur U et V est déterminée respectivement par les atlas $\mathscr{A}_\mathrm{U} = \{\mathcal{U} = (\mathrm{U}, f(\mathrm{U}), n, f_\mathrm{U})\}$ et $\mathscr{A}_\mathrm{V} = \{\mathcal{V} = (\mathrm{V}, g(\mathrm{V}), m, g_\mathrm{V})\}$.

Soit $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une application. Comme une application holomorphe au sens classique est continue, la proposition-définition 1.81 (v) (pour les atlas $\mathscr{A}_\mathrm{U}$ et $\mathscr{A}_\mathrm{V}$) assure que φ est holomorphe au sens des prévariétés si et seulement si l'application φ lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est holomorphe au sens classique. Or $\mathrm{U} \cap \varphi^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{U}$ et $\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}} = g_\mathrm{V} \circ \varphi \circ {f_\mathrm{U}}^{-1}$. Comme f et g sont des isomorphismes linéaires et donc des biholomorphismes, f_U et g_V sont aussi des biholomorphismes. Ainsi $\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ est holomorphe au sens classique si et seulement si φ l'est. Finalement φ est holomorphe au sens des prévariétés si et seulement si φ est holomorphe au sens classique. ■

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U} \arrow[r, "\varphi"] & \mathrm{V} \arrow[d, "g_\mathrm{V}"] \\
f(\mathrm{U}) \arrow[u, "{f_\mathrm{U}}^{-1}"] \arrow[r, "\varphi_{\mathcal{U}\mathcal{V}}"] & g(\mathrm{V})
\end{tikzcd}$$

Application 1.91 — Calcul vectoriel et matriciel. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et A une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie (sur $\mathbb{C}$). Les résultats qui suivent s'appliquent en particulier lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{A}$ ou $\mathrm{A} = \mathbb{C}$, $\mathrm{A} = \mathrm{End}_\mathbb{C}(\mathrm{E})$ ou $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

L'application somme $s : (x, y) \in \mathrm{E}^2 \mapsto x + y \in \mathrm{E}$ (resp. l'application opp : $x \in \mathrm{E} \to -x \in \mathrm{E}$) est linéaire et donc holomorphe au sens classique. Elle est donc holomorphe au sens des prévariétés (exemple 1.90) entre la prévariété produit $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ (application 1.68) et la variété E (exemple 1.58). Autrement dit, $s \in \mathscr{H}(\mathrm{E} \times \mathrm{E}, \mathrm{E})$ (resp. $\mathrm{opp} \in \mathscr{H}(\mathrm{E}, \mathrm{E})$).

L'application produit $p : (x, y) \in \mathrm{A}^2 \mapsto xy \in \mathrm{A}$ est bilinéaire et donc holomorphe au sens classique. Elle est donc holomorphe au sens des prévariétés (exemple 1.90) entre la prévariété produit $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ (application 1.68) et la variété A (exemple 1.58). Ainsi $p \in \mathscr{H}(\mathrm{A} \times \mathrm{A}, \mathrm{A})$.

Par ailleurs, $p_\mathrm{E} : (x, y) \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})^2 \mapsto xy \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et $p : (x, y) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^2 \mapsto xy \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont les restrictions à des ouverts d'applications bilinéaires entre espaces vectoriels complexes. Elles sont donc holomorphes au sens classique. On en déduit, grâce à l'exemple 1.90, que p_E et p sont holomorphes au sens des prévariétés.

Pour finir, les applications $x \in \mathrm{GL}(\mathrm{E}) \mapsto x^{-1} \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto x^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont holomorphes au sens classique et donc au sens des prévariétés. De même, si F et G sont deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de même dimension finie alors $u \in \mathrm{Isom}_\mathbb{C}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \mapsto u^{-1} \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\mathrm{G}, \mathrm{F})$ est holomorphe (au sens classique comme au sens des prévariétés). ■

Inclusion d'un ouvert

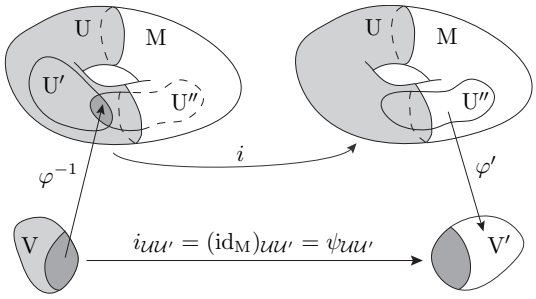
Dans l'exemple qui suit, on poursuit notre étude de la structure de prévariété holomorphe d'un ouvert d'une prévariété : l'inclusion est une application holomorphe. Le deuxième exemple offre une deuxième démonstration du résultat présenté dans le premier.

Exemple 1.92 — Ouvert d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, U un ouvert de M et

$i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion canonique. L'ensemble U est muni d'une structure de prévariété (voir l'exemple 1.61). On note $\mathscr{A}_\mathrm{U}$ l'atlas maximal donnant cette structure de prévariété sur U. Montrons que i est une application holomorphe de $(\mathrm{U}, \mathscr{A}_\mathrm{U})$ dans $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$.

La topologie sur l'ensemble U est la topologie induite par celle de M (voir l'exemple 1.61). On en déduit que i est continue. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}', \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}_\mathrm{U}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}'', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}$. Comme $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$, on en déduit que $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ (exemple 1.61) et

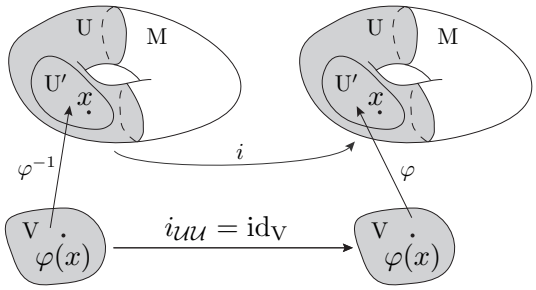
$$\mathrm{U}' \cap i^{-1}(\mathrm{U}'') = \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}'' \cap \mathrm{U} = \mathrm{U}' \cap \mathrm{U}''.$$



Ainsi, l'application i lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ n'est autre que l'application de transition $\psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ entre ces deux cartes de $\mathscr{A}$ ou encore l'application id_M lue dans ces mêmes cartes de $\mathscr{A}$ (voir l'exemple 1.84). On obtient donc l'holomorphie (au sens classique) de $i_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et donc celle de i est holomorphe. ■

Exemple 1.93 — Ouvert d'une prévariété 2. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, U un ouvert de M et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion canonique. L'ensemble U est muni d'une structure de prévariété (voir l'exemple 1.61). On note $\mathscr{A}_\mathrm{U}$ l'atlas maximal donnant cette structure de prévariété sur U. Donnons une deuxième démonstration de l'holomorphie de i reposant cette fois-ci sur le critère (i) de la proposition définition 1.81.

Soit $x \in \mathrm{U}$. Montrons que i est holomorphe en x. La topologie sur l'ensemble U est la topologie induite par celle de M (voir l'exemple 1.61). On en déduit que i est continue et donc continue en x. On considère $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}_\mathrm{U}$ une carte en x. D'après l'exemple 1.61, $\mathcal{U}$ est une carte de $\mathscr{A}$ en $i(x) = x$. De plus, l'application i lue dans les cartes $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_\mathrm{U}$ et $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ est donnée par $i_{\mathcal{U}\mathcal{U}} = \mathrm{id}_\mathrm{V}$. Comme cette dernière application est holomorphe au sens classique, la proposition-définition 1.78 (iii) assure que i est holomorphe en x. Enfin, la proposition définition 1.81 (i) donne l'holomorphie de i. ■



Application projection

Dans l'exemple qui suit, on poursuit notre étude de la structure produit de prévariétés holomorphes : les projections sur chacun des facteurs sont holomorphes.

Exemple 1.94 — Prévariété produit. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes. On munit $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ de la structure de prévariété holomorphe produit (exemple 1.66) et on note $p_\mathrm{M} : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ et $p_\mathrm{N} : \mathrm{M} \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}$ les projections canoniques. Montrons que les applications p_M et p_N sont holomorphes.

Elles sont continues (puisque la topologie sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ est la topologie produit). Soit $(x, y) \in \mathrm{M} \times \mathrm{N}$. Montrons que p_M est holomorphe en (x, y). Il existe une carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ de $\mathscr{A}$ en $x = p_\mathrm{M}((x, y))$ et une carte $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ de $\mathscr{B}$ en y. Par définition de la structure de prévariété holomorphe sur $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$, la carte produit $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ est une carte pour $\mathrm{M} \times \mathrm{N}$ en (x, y). Comme ${p_\mathrm{M}}^{-1}(\mathrm{U}) = \mathrm{U} \times \mathrm{N}$, on en déduit que

$$(\varphi \times \varphi')((\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \cap {p_\mathrm{M}}^{-1}(\mathrm{U})) = \varphi(\mathrm{U}) \times \varphi'(\mathrm{U}') = \mathrm{V} \times \mathrm{V}'.$$

L'application p_M lue dans les cartes $\mathcal{U} \times \mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}$ est alors donnée par

$$p_{\mathrm{M}(\mathcal{U} \times \mathcal{U}')\mathcal{U}} : \begin{cases} \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \longrightarrow \mathrm{V} \\ (v, v') \longmapsto v\,. \end{cases}$$

Elle est holomorphe puisque c'est la restriction à un ouvert d'une application linéaire. Le point (i) de la proposition-définition 1.78 montre que p_M est holomorphe en (x, y). La proposition-définition 1.81 (i) montre alors que p_M est holomorphe. De même, p_N est holomorphe. ■

Applications holomorphes et prévariétés discrètes

Dans l'exemple suivant, on étudie les applications holomorphes issues d'une prévariété discrète et les applications holomorphes à valeurs dans une prévariété discrète. Toute application qui part d'une prévariété discrète est holomorphe alors qu'une application qui arrive dans une prévariété discrète est holomorphe si et seulement si elle est continue.

Exemple 1.95 — Applications holomorphes et prévariétés discrètes. Soient M un ensemble, M_disc la prévariété holomorphe discrète associée (voir l'exemple 1.70), $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ une prévariété holomorphe et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. Montrons que f est holomorphe.

Soit $x \in \mathrm{M}$. On considère la carte $\mathcal{U} = (\{x\}, \{0\}, 0, \varphi_x)$ de $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$ en x (voir l'exemple 1.70) et une carte et $\mathcal{V} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{B}$ en $f(x)$. L'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est alors donnée par $g : \mathbb{C}^0 \to \mathrm{V}$ qui est holomorphe au sens classique. Ainsi, grâce à la proposition-définition 1.78 (i), l'application f est holomorphe en x. Finalement, la proposition-définition 1.81 (i) montre que f est holomorphe.

Ainsi lorsqu'on part d'une prévariété discrète, on est toujours holomorphe. Que se passe-t-il lorsqu'on arrive dans une prévariété discrète ?

Soient M un ensemble, $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$ la prévariété holomorphe discrète associée, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ une prévariété holomorphe et $f : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ une application. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes

(i) l'application f est holomorphe ;

(ii) l'application f est continue ;

(iii) l'application f est localement constante.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ résulte du fait que la topologie sur M est discrète. $(i) \Rightarrow (ii)$ résulte des définitions.

$(iii) \Rightarrow (i)$ résulte du fait qu'être holomorphe est une propriété locale et du fait qu'une application constante est holomorphe. De façon détaillée, l'application f est continue. Il suffit, d'après la proposition-définition 1.81 (i) et 1.78 (iii) de montrer que l'application f lue dans de bonnes cartes en x et $f(x)$ est holomorphe. Donnons deux démonstrations de ce fait.

Première démonstration. On considère $x \in \mathrm{N}$ et une carte $\mathcal{U}'$ de $\mathscr{B}$ en x. Il existe un ouvert U de N tel que la restriction de f à x soit constante. Quitte à considère la restriction de $\mathcal{U}'$ à l'intersection de U avec le domaine de $\mathcal{U}'$, on peut supposer que U est le domaine d'une carte $\mathcal{U}$ de $\mathscr{B}$ en x (voir le lemme 1.51). Si $\mathcal{V}$ est une carte de $\mathrm{M}_{\mathrm{disc}}$ en $f(x)$, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est constante donc holomorphe au sens classique.

Deuxième démonstration. On considère la carte $\mathcal{V} = (\{f(x)\}, \{0\}, 0, f(x) \mapsto 0)$ et $\mathcal{U}$ une carte de $\mathscr{B}$ en x. L'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est constante donc holomorphe au sens classique. ■

1.4.5 La catégorie des prévariétés holomorphes

On arrive à présent au résultat élémentaire le plus important sur les fonctions holomorphes : la composée de deux fonctions holomorphes est holomorphes. Il permet, avec l'exemple 1.84, de définir la catégorie des prévariétés holomorphes comme sous-catégorie de la catégorie **Ens** des ensembles (voir le corollaire 1.97).

Proposition 1.96 — Composition d'applications holomorphes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ trois prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ et $g : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ deux applications holomorphes. L'application $g \circ f : \mathrm{M} \to \mathrm{P}$ est holomorphe.

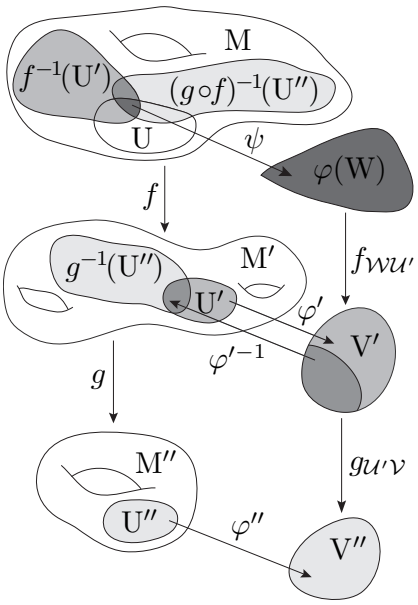
Preuve. Montrons que $g \circ f$ est holomorphe en x pour tout $x \in \mathrm{M}$. Comme f et g sont continues (proposition-définition 1.81 (iv)), l'application $g \circ f$ est continue et donc continue en x. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$ en x, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ une carte de $\mathscr{B}$ en $f(x)$ et $\mathcal{V} = (\mathrm{U}'', \mathrm{V}'', n'', \varphi'')$ une carte de $\mathscr{C}$ en $g(f(x))$. Le lemme 1.51 montre que $\mathrm{W} = \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \cap f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}''))$ est le domaine de la carte $\mathcal{W} = \mathcal{U}_{|\mathrm{W}}$ de $\mathscr{A}$ contenant x. Pour simplifier, on note ψ le transfert de $\mathcal{W}$. L'application

$$(g \circ f)_{\mathcal{W}\mathcal{V}} = \varphi'' \circ (g \circ f) \circ \psi^{-1} : \psi(\mathrm{W}) \to \varphi''(\mathrm{U}'')$$

se décompose alors en

$$(g \circ f)_{\mathcal{W}\mathcal{V}} = \left(\varphi'' \circ g \circ \left(\varphi'_{|g^{-1}(\mathrm{U}'') \cap \mathrm{U}'} \right)^{-1} \right) \circ (\varphi' \circ f \circ \psi^{-1}) = g_{\mathcal{U}'\mathcal{V}} \circ f_{\mathcal{W}\mathcal{U}'} \,.$$

Comme f est holomorphe, l'application $f_{\mathcal{W}\mathcal{U}'}$ est holomorphe (au sens classique) en $\psi(x)$ et envoie $\psi(x)$ sur $\varphi'(f(x))$. De même, le caractère holomorphe de g assure que l'application $g_{\mathcal{U}'\mathcal{V}}$ est holomorphe (au sens classique) en $\varphi'(f(x))$. Ainsi, par composition, $(g \circ f)_{\mathcal{W}\mathcal{V}}$ est holomorphe en $\psi(x)$ ce qui, d'après la proposition-définition 1.78 (iii), montre que f est holomorphe en x. ■



Corollaire 1.97 — La catégorie des prévariétés holomorphes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ trois prévariétés holomorphes. La proposition 1.96 montre que la composition fournit une application

$$\circ : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) \times \mathscr{H}(\mathrm{N}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \\ \qquad (f, g) \qquad\qquad \longmapsto g \circ f \end{cases}$$

Comme, d'après l'exemple 1.84, $\mathrm{id}_{\mathrm{M}} \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M})$, les prévariétés holomorphes forment une sous-catégorie de celle des espaces topologiques qu'on note **Prev**.

Ouverts d'une prévariété

En appliquant la proposition 1.96 à la structure de prévariété d'un ouvert d'une prévariété, on obtient immédiatement que la restriction d'une application holomorphe est encore holomorphe (application 1.98), une description de l'ensemble des fonctions holomorphes à valeurs dans un ouvert d'une prévariété (exemple 1.99), l'holomorphie de différentes applications induites par une application holomorphe (application 1.100) et une caractérisation de l'holomorphie en terme de recouvrements ouverts de l'espace de départ ou de l'espace d'arrivée (proposition 1.101).

Application 1.98 — Restriction de fonctions holomorphes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes, U un ouvert de M, $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une application holomorphe. L'application $f_{|\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{M}'$ est holomorphe.

En effet, on a $f_{|\mathrm{U}} = f \circ i$. Comme i est holomorphe (exemple 1.92), on obtient le résultat par composition (proposition 1.96). La restriction d'une application holomorphe à un ouvert de la prévariété de départ est donc holomorphe. ■

Exemple 1.99 — Ouvert d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, U un ouvert de M qu'on munit de sa structure de prévariété holomorphe (voir l'exemple 1.61) et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Pour toute prévariété holomorphe $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$, l'application

$$\Psi^{\mathrm{P}}_{\mathrm{U},\mathrm{M}} : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{U}) \longrightarrow \{g \in \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M}), \quad g(\mathrm{P}) \subset \mathrm{U}\} \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto i \circ f \end{cases}$$

est une bijection.

Comme i est holomorphe (voir l'exemple 1.92), l'application $\Psi^{\mathrm{P}}_{\mathrm{U,M}}$ est bien définie. Comme i est injective, $\Psi^{\mathrm{P}}_{\mathrm{U,M}}$ l'est aussi. Montrons que $\Psi^{\mathrm{P}}_{\mathrm{U,M}}$ est surjective. Soit $f \in \mathscr{H}(\mathrm{P},\mathrm{M})$ tel que $f(\mathrm{P}) \subset \mathrm{N}$. L'application f induit alors une (unique) application $f_{\mathrm{U}} : \mathrm{P} \to \mathrm{U}$ telle que $f = i \circ f_{\mathrm{U}}$. Montrons que f_{U} est holomorphe. Par définition de la topologie induite, l'application f_{U} est continue. Soient $\mathcal{U} \in \mathscr{C}$ et $\mathcal{U}' \in \mathscr{A}_{\mathrm{U}}$. Comme $\mathscr{A}_{\mathrm{U}} \subset \mathscr{A}$ (voir l'exemple 1.61) et $f \in \mathscr{H}(\mathrm{P},\mathrm{M})$, l'application f_{U} lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$, qui n'est autre que l'application f lue dans ces mêmes cartes, est holomorphe. La proposition-définition 1.81 (iv) montre que $f_{\mathrm{U}} \in \mathscr{H}(\mathrm{P},\mathrm{U})$. ■

Application 1.100 – Application induite. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$, $(\mathrm{M}',\mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes, U un ouvert de M, U′ un ouvert de M′ et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une application holomorphe. On suppose que $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{U}'$. Montrons que l'application $f_{\mathrm{UU}'} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ induite par f est holomorphe.

On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. D'après l'exemple 1.92, l'application i est holomorphe. On en déduit, par composition, que $f \circ i \in \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathrm{M}')$. Par hypothèse, $f \circ i$ est à valeurs dans U′, l'exemple 1.99 montre que l'application $f_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ induite par $f \circ i$ est holomorphe. Or, on a clairement $f_{\mathrm{U}} = f_{\mathrm{UU}'}$ et donc $f_{\mathrm{UU}'}$ est holomorphe.

En appliquant le résultat à $\mathrm{U}' = \mathrm{M}'$, l'hypothèse $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{U}'$ est automatiquement vérifiée et l'application induite par f est $f_{|\mathrm{U}}$, on retrouve ainsi le résultat de l'application 1.98. ■

Proposition 1.101 – Caractérisation des fonctions holomorphes. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$, $(\mathrm{N},\mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) L'application f est holomorphe.
- (ii) Pour tout recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de M et tout $\alpha \in \mathrm{A}$, on a $f_{|\mathrm{U}_\alpha} \in \mathscr{H}(\mathrm{U}_\alpha,\mathrm{N})$.
- (iii) Il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de M tel que $f_{|\mathrm{U}_\alpha} \in \mathscr{H}(\mathrm{U}_\alpha,\mathrm{N})$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.
- (iv) Pour tout $x \in \mathrm{M}$, il existe un voisinage ouvert U_x de x et une application $g \in \mathscr{H}(\mathrm{U}_x,\mathrm{N})$ telle que $f(y) = g(y)$ pour tout $y \in \mathrm{U}_x$.
- (v) L'application f est continue et pour tout recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de N et tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $f_\alpha : f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha) \to \mathrm{V}_\alpha$ induite par f est holomorphe.
- (vi) L'application f est continue et il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de N tel que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $f_\alpha : f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha) \to \mathrm{V}_\alpha$ induite par f soit holomorphe.
- (vii) Il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de N tel que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ soit un ouvert de M et l'application $f_\alpha : f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha) \to \mathrm{V}_\alpha$ soit holomorphe.
- $(viii)$ Pour tout recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de M et tout recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$ de N, l'ensemble $f^{-1}(\mathrm{V}_\beta)\cap\mathrm{U}_\alpha$ est un ouvert de M et l'application $f_{\alpha\beta} : f^{-1}(\mathrm{V}_\beta)\cap\mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{V}_\beta$ induite par f est holomorphe, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$.
- (ix) Il existe un recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de M et un recouvrement ouvert $(\mathrm{V}_\beta)_{\beta\in\mathrm{B}}$ de N telle que $f^{-1}(\mathrm{V}_\beta)\cap\mathrm{U}_\alpha$ soit un ouvert de M et l'application $f_{\alpha\beta} : f^{-1}(\mathrm{V}_\beta)\cap\mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{V}_\beta$ induite par f soit holomorphe, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$. L'application 1.98 appliquée à U_α donne le résultat.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ résulte de ce qu'il existe un recouvrement ouvert de M. Par exemple, le recouvrement formé du seul ouvert M.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Comme U_α est ouvert dans M et que $f_{|\mathrm{U}_\alpha}$ est continue, on en déduit que f est continue sur M. Pour $x \in \mathrm{M}$, il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\alpha$. On note $\mathscr{A}_\alpha$ l'atlas maximal associé à la structure de prévariété sur U_α et on considère une carte $\mathcal{U} \in \mathscr{A}_\alpha$ en x et une carte $\mathcal{V} \in \mathscr{B}$ en $f(x)$. D'après l'exemple 1.61, $\mathcal{U}$ est aussi une carte de $\mathscr{A}$. Ainsi, cela a bien un sens de parler de l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Or les applications f et $f_{|\mathrm{U}_\alpha}$ lues dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ coïncident. Comme $f_{|\mathrm{U}_\alpha}$ est holomorphe, l'application $f_{|\mathrm{U}_\alpha}$ lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est holomorphe (proposition-définition 1.81 (iv)). L'application f lues dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est donc holomorphe. Ainsi f est holomorphe en x (proposition-définition 1.78). Finalement, f est holomorphe en x pour tout $x \in \mathrm{M}$ et donc $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{N})$ grâce à la proposition-définition 1.81 (i).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Soit $x \in \mathrm{M}$. Il existe $\alpha \in \mathrm{A}$ tel que $x \in \mathrm{U}_\alpha$. On considère alors l'application $g = f_{|\mathrm{U}_\alpha}$. Comme U_α est un voisinage ouvert de M et pour tout $y \in \mathrm{U}_\alpha$, on a $g(y) = f(y)$, on obtient le résultat souhaité.

$(iv) \Rightarrow (iii)$. La famille $(\mathrm{U}_x)_{x\in\mathrm{M}}$ forme un recouvrement ouvert de M et $f_{|\mathrm{U}_x} = g$ est holomorphe.

$(v) \Rightarrow (vi)$. Comme f est continue, $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ est un ouvert de M et peut donc être muni d'une structure de prévariété holomorphe (exemple 1.61). Ainsi $\mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha),\mathrm{V}_\alpha)$ a bien un sens. On obtient le résultat puisqu'il existe un recouvrement ouvert de N.

$(vi) \Rightarrow (iii)$. Pour $\alpha \in \mathrm{A}$, on note $i_\alpha : \mathrm{V}_\alpha \to \mathrm{N}$. D'après l'exemple 1.92, $i_\alpha \in \mathscr{H}(\mathrm{V}_\alpha, \mathrm{N})$. Par composition, on en déduit que

$$i_\alpha \circ f_\alpha = f_{\big|_{f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)}} \quad \in \mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha), \mathrm{N}) .$$

Comme les $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ recouvrent M, on obtient le résultat.
$(i) \Rightarrow (v)$. Par définition, une application holomorphe est continue. Ainsi f est continue. On en déduit que $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ est un ouvert de M et donc est muni d'une structure de prévariété holomorphe. L'application 1.100 appliquée à f et aux ouverts $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ et V_α montre alors que $f_\alpha \in \mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha), \mathrm{V}_\alpha)$.
$(vi) \Rightarrow (vii)$. L'application f est continue donc $f^{-1}(\mathrm{V}_\alpha)$ est ouvert pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.
$(vii) \Rightarrow (vi)$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application f_α induite par f est continue. Comme $(\mathrm{V}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est un recouvrement ouvert de N, l'application f est continue.
$(i) \Rightarrow (viii)$. L'application f est continue donc $f^{-1}(\mathrm{V}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ est ouvert dans M. Par ailleurs, on a $f(f^{-1}(\mathrm{V}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha) \subset f(f^{-1}(\mathrm{V}_\beta)) \subset \mathrm{V}_\beta$. L'application 1.100 appliquée à f et aux ouverts $f^{-1}(\mathrm{V}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ et V_β montre que $f_{\alpha\beta}$ est holomorphe.
$(viii) \Rightarrow (ix)$ résulte du fait qu'il existe des recouvrements ouverts de M et N (par exemple (M) et (N)).
$(ix) \Rightarrow (i)$. On fixe $\beta \in \mathrm{B}$. La famille $(f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est un recouvrement ouvert de $f^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$. Comme l'application $f : f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha \to \mathrm{U}_\beta$ est la restriction à $f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \cap \mathrm{U}_\alpha$ de l'application $f : f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \to \mathrm{U}_\beta$, l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ montre que $f : f^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \to \mathrm{U}_\beta$ est holomorphe. L'implication $(vi) \Rightarrow (i)$ montre que f est holomorphe. ■

Remarque 1.102 — L'holomorphie est une propriété locale. Le point (iv) de la proposition 1.101 montre que, comme pour les fonctions holomorphes au sens usuel, l'holomorphie est une propriété locale. En particulier, grâce à l'exemple 1.83, on obtient que toute fonction localement constante entre deux prévariétés holomorphes est holomorphe et donc une troisième démonstration du résultat de l'exemple 1.95. ■

PRODUIT CATÉGORIQUE

Dans l'exemple qui suit, on montre que la prévariété produit au sens de l'exemple 1.66 est le produit dans la catégorie **Prev** des prévariétés.

Exemple 1.103 — Prévariété produit. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes. On munit $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$ de la structure de prévariété holomorphe produit (exemple 1.66) et on note $p_\mathrm{M} : \mathrm{M}\times\mathrm{N} \to \mathrm{M}$ et $p_\mathrm{N} : \mathrm{M}\times\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ les projections canoniques. Montrons que la prévariété produit $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$ munie des applications p_M et p_N est un produit de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ dans **Prev**.

D'après l'exemple 1.94, les applications p_M et p_N sont holomorphes. Montrons la propriété universelle du produit pour les prévariétés : soit $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ une prévariété, l'application

$$\Delta_{\mathrm{M},\mathrm{N}} : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M}\times\mathrm{N}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) \times \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{N}) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto (p_\mathrm{M} \circ f, p_\mathrm{N} \circ f) \end{cases}$$

est bijective.

Comme p_M et p_N sont holomorphes, la proposition 1.96 montre que, pour $f \in \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M}\times\mathrm{N})$, les applications $p_\mathrm{M} \circ f$ et $p_\mathrm{N} \circ f$ sont holomorphes. Ainsi $\Delta_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$ est bien définie.

Montrons l'injectivité de $\Delta_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$. Soient $f, g \in \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M}\times\mathrm{N})$ telle que $p_\mathrm{M} \circ g = p_\mathrm{M} \circ f$ et $p_\mathrm{N} \circ g = p_\mathrm{N} \circ f$. La propriété universelle du produit d'ensemble, montre $f = g$.

Passons enfin à la surjectivité de $\Delta_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$. Soient $f_\mathrm{M} \in \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M})$ et $f_\mathrm{N} \in \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{N})$. Comme f_M et f_N sont continues et que $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$ est muni de la topologie produit, la propriété universelle du produit (pour les espaces topologiques) montre qu'il existe une unique application continue $f : \mathrm{P} \to \mathrm{M}\times\mathrm{N}$ telle que $p_\mathrm{M} \circ f = f_\mathrm{M}$ et $p_\mathrm{N} \circ f = f_\mathrm{N}$. Cette application f est donnée par $f : p \mapsto (f_\mathrm{M}(p), f_\mathrm{N}(p))$. Montrons que f est holomorphe. On considère trois cartes : $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{C}$, $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}'' = (\mathrm{U}'', \mathrm{V}'', n'', \varphi'') \in \mathscr{B}$. La carte produit $\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' \in \mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}$ est une carte pour la structure de prévariété holomorphe sur $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$. Pour simplifier les notations, on pose

$$\mathrm{W} = \varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}' \times \mathrm{U}'')) = \varphi(\mathrm{U} \cap {f_\mathrm{M}}^{-1}(\mathrm{U}') \cap {f_\mathrm{N}}^{-1}(\mathrm{U}'')) .$$

On obtient alors que l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}' \times \mathcal{U}''$ est donnée par

$$f_{\mathcal{U}(\mathcal{U}'\times\mathcal{U}'')} : \begin{cases} \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{V} \times \mathrm{V}' \\ p \longmapsto (\varphi' \circ f_\mathrm{M} \circ \varphi^{-1}(p), \varphi'' \circ f_\mathrm{N} \circ \varphi^{-1}(p)) = (f_{\mathrm{M}\mathcal{U}\mathcal{U}'}(p), f_{\mathrm{N}\mathcal{U}\mathcal{U}''}(p)) . \end{cases}$$

Or $f_{\mathrm{M}\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe sur $\varphi(\mathrm{U} \cap {f_\mathrm{M}}^{-1}(\mathrm{U}'))$ donc sur W. De même, $f_{\mathrm{N}\mathcal{U}\mathcal{U}''}$ est holomorphe sur W. Ainsi, chacune des composantes de $f_{\mathcal{U}(\mathcal{U}'\times\mathcal{U}'')}$ est holomorphe et donc $f_{\mathcal{U}(\mathcal{U}'\times\mathcal{U}'')}$ l'est aussi. Comme $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B}$ est un atlas définissant la structure de prévariété sur $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$, la proposition-définition 1.81 (iii) montre que f est holomorphe.

On en déduit que pour qu'une application $f : \mathrm{P} \to \mathrm{M} \times \mathrm{N}$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $p_{\mathrm{M}} \circ f$ et $p_{\mathrm{N}} \circ f$ le soient. En effet, si f est holomorphe alors $p_{\mathrm{M}} \circ f$ et $p_{\mathrm{N}} \circ f$ le sont. Réciproquement, si $p_{\mathrm{M}} \circ f$ et $p_{\mathrm{N}} \circ f$ sont deux applications holomorphes alors la surjectivité de $\Delta_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$ montre qu'il existe $g \in \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M} \times \mathrm{N})$ telle que $p_{\mathrm{M}} \circ g = p_{\mathrm{M}} \circ f$ et $p_{\mathrm{N}} \circ g = p_{\mathrm{N}} \circ f$. La propriété universelle du produit (d'ensembles) assure alors que $f = g$. Ainsi $f \in \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M} \times \mathrm{N})$.

On vient de montrer que, dans la catégorie **Prev**, les produits de deux objets existent. On en déduit que, dans cette catégorie, les produits finis existent. ■

Application 1.104 – Application produit. L'existence du produit de deux objets dans la catégorie **Prev** assure aussi le résultat suivant. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{N}, \mathrm{N}'$ quatre prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $f' : \mathrm{M}' \to \mathrm{N}'$ deux applications holomorphes. Montrons que l'application

$$f \times f' : (m, m') \in \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \to (f(m), f'(m)) \in \mathrm{N} \times \mathrm{N}'$$

est holomorphe. On note $p_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ la première projection. De même, on note $p_{\mathrm{M}'}$, p_{N} et $p_{\mathrm{N}'}$. Comme $p_{\mathrm{N}} \circ (f \times f') = f \circ p_{\mathrm{M}} \in \mathscr{H}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}', \mathrm{N})$ et $p_{\mathrm{N}'} \circ (f \times f') = f' \circ p_{\mathrm{M}'} \in \mathscr{H}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}', \mathrm{N}')$. On en déduit le résultat souhaité grâce à l'exemple 1.94. ■

Propriétés algébriques des ensembles de fonctions holomorphes

Terminons les applications de la proposition 1.96 de composition des fonctions holomorphes par l'étude de la structure algébrique des fonctions holomorphes à valeurs dans un ensemble muni d'une structure algébrique. L'application 1.105 traite le cas d'une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie et l'application 1.106 celui d'un module de type fini sur une $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire de dimension finie. On étudie par la même occasion les propriétés algébriques de la restriction des applications holomorphes.

Application 1.105 – Algèbre des fonctions holomorphes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et A une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie. Montrons que l'ensemble $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ est une sous-$\mathbb{C}$-algèbre (unitaire si A l'est) de l'algèbre des fonctions de M dans A.

D'après l'exemple 1.83, les fonctions constantes sont holomorphes. En particulier, l'application nulle (et l'application unité si A est unitaire) appartiennent à $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$. Pour $f, g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$, l'application 1.104 montre que $f \times g$ est holomorphe. En composant avec les applications $s : (x, y) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A} \mapsto x + y \in \mathrm{A}$ et $p : (x, y) \in \mathrm{A} \times \mathrm{A} \mapsto xy \in \mathrm{A}$ qui sont holomorphes d'après l'application 1.91, on obtient que $f + g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ et $fg \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$. Enfin, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on note f_λ l'application constante sur M égale à λ. L'application $f_\lambda \times f$ est holomorphe (voir l'application 1.104). Comme l'application $(\lambda, v) \in \mathbb{C} \times \mathrm{A} \mapsto \lambda v \in \mathrm{A}$ est holomorphe (puisque bilinéaire), on en déduit, par composition, que l'application $x \in \mathrm{M} \mapsto \lambda f(x) \in \mathrm{A}$ est holomorphe.

On en déduit ainsi que si A est une $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire (resp. une algèbre de Lie, resp. une algèbre associative unitaire commutative) que $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ est une algèbre de Lie associative unitaire (resp. une algèbre de Lie, resp. une algèbre associative unitaire commutative). En particulier, pour $\mathrm{A} = \mathbb{C}$, on obtient que $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ est une algèbre associative unitaire commutative.

Par ailleurs, montrons que, si $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ est une prévariété holomorphe et $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une application holomorphe alors l'application

$$\rho_g : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M}', \mathrm{A}) & \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{A}) \\ f & \longmapsto f \circ g \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres (unitaires si A l'est).

Si f est holomorphe alors $f \circ g$ est holomorphe (voir la proposition 1.96). Ainsi ρ_g est bien définie. De plus, par définition de la restriction, on a, pour $f, f' \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{A})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(f + f') \circ g = f \circ g + f' \circ g, \qquad (ff') \circ g = (f \circ g)(f' \circ g) \qquad \text{et} \qquad (\lambda f) \circ g = \lambda (f \circ g)\,.$$

Finalement ρ_g est bien un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. De plus, si A est unitaire, l'élément neutre de $\mathscr{H}(\mathrm{M}', \mathrm{A})$ est l'application $f : \mathrm{M}' \to \mathrm{A}$ constante égale à 1 et $f \circ g$ est l'application constante sur M égale à 1. Ainsi ρ_g est un morphisme unitaire si A l'est. En particulier, pour $\mathrm{A} = \mathbb{C}$, l'application

$$\rho_g : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M}', \mathbb{C}) & \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C}) \\ f & \longmapsto f \circ g \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres unitaires.

Appliquons ce qui précède à un ouvert U de M et à l'inclusion $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ qui est holomorphe (exemple 1.92). On obtient que l'application

$$\rho_{\mathrm{M,U}} = \rho_i \colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathrm{A}) \\ \quad f \qquad \longmapsto f_{|\mathrm{U}} = f \circ i \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres (unitaires si A l'est) et

$$\rho_{\mathrm{M,U}} = \rho_i \colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C}) \\ \quad f \qquad \longmapsto f_{|\mathrm{U}} = f \circ i \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres unitaires. ■

Application 1.106 — Module des fonctions holomorphes. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, A une $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire de dimension finie et F un A-module de type fini. Montrons que l'ensemble $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$-module.

Comme A est une $\mathbb{C}$-algèbre de dimension finie, on en déduit que F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Ainsi F admet une structure naturelle de prévariété holomorphe et $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ a bien un sens. Pour $f, g \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$, l'application $f \times g$ est holomorphe d'après l'application 1.104. En composant avec l'application $s : (x,y) \in \mathrm{F}\times\mathrm{F} \to x+y \in \mathrm{F}$ qui est holomorphe d'après l'application 1.91, on obtient que $f+g \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$. Ainsi $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ est un sous-groupe de $\mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{F})$.

Soit $\lambda \in \mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{A})$ et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{F})$. L'application

$$\begin{cases} \mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{A}) \times \mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{F}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{F}) \\ \qquad (\lambda, f) \qquad\qquad \longmapsto \big(x \mapsto (\lambda\cdot f)(x) = \lambda(x)f(x)\big) \end{cases}$$

munit $\mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ d'une structure de $\mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{A})$-module et donc de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$-module puisque, d'après la remarque 1.105, $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$ est une sous-algèbre associative unitaire de $\mathscr{F}(\mathrm{M},\mathrm{A})$.

Il reste alors à montrer que pour $\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$ et $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$, on a $\lambda\cdot f \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$. Or, d'après l'application 1.104, $f\times\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{M}\times\mathrm{M},\mathrm{F}\times\mathrm{A})$. En composant avec $(x,\mu) \in \mathrm{F}\times\mathrm{A} \to \mu x \in \mathrm{F}$ qui est holomorphe puisque bilinéaire (voir l'exemple 1.90), on obtient que $\lambda\cdot f \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ et $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ est bien un $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$-module.

Par ailleurs, montrons que, si $(\mathrm{M}',\mathscr{A}')$ est une prévariété holomorphe et $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une application holomorphe alors l'application

$$\rho_g \colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathrm{F}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F}) \\ \quad f \qquad \longmapsto f\circ g \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathrm{A})$-modules.

D'après ce qui précède, $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$-module. Par ailleurs, d'après l'application 1.105, la composition par g est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathrm{A})$ dans $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$. Ainsi, par restriction des scalaires, $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ est muni d'une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathrm{A})$-module.

Si f est holomorphe alors $f\circ g$ est holomorphe (voir la proposition 1.96). Ainsi ρ_g est bien définie. De plus, par définition de la restriction, on a, pour $f, f' \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$,

$$(f+f')\circ g = f\circ g + f'\circ g \qquad \text{et} \qquad (\lambda\cdot f)\circ g = (\lambda\circ g)\cdot(f\circ g) = \lambda\cdot(f\circ g)\,.$$

Finalement ρ_g est bien $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$-linéaire. En particulier, pour un ouvert U de M et l'inclusion $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ qui est holomorphe (exemple 1.92), on obtient que l'application

$$\rho_{\mathrm{M,U}} = \rho_i \colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathrm{F}) \\ \quad f \qquad \longmapsto f\circ i = f_{|\mathrm{U}} \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{A})$-modules.

On considère le cas particulier où $\mathrm{A} = \mathbb{C}$ et donc F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Ainsi $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module. On considère $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_\ell)$ une base de F et $\mathscr{B}^* = (\pi_1,\dots,\pi_\ell)$ sa base duale. Les applications

$$\Phi_{\mathrm{M}} \colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F}) \longrightarrow (\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C}))^\ell \\ \quad f \qquad \longmapsto (\pi_1\circ f,\dots,\pi_\ell\circ f) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Psi_{\mathrm{M}} \colon \begin{cases} (\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C}))^\ell \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F}) \\ (f_1,\dots,f_\ell) \longmapsto f_1e_1+\cdots+f_\ell e_\ell \end{cases}$$

sont des isomorphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-modules réciproques l'un de l'autre.

En effet, comme π_i est $\mathbb{C}$-linéaire, π_i est holomorphe (exemple 1.90). Par composition, $\pi_i\circ f \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$ et Φ_{M} est bien définie. On note u_i l'application constante sur M égale à e_i. Elle est holomorphe (exemple 1.83). L'application $f_1e_1+\cdots+f_\ell e_\ell$ s'écrit aussi $f_1\cdot u_1+\cdots+f_\ell\cdot u_\ell$ et donc est holomorphe. Autrement dit, Ψ_{M} est

bien définie. Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$ sont des bases duales l'une de l'autre, Ψ_{M} et Φ_{M} sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Enfin, comme les π_i sont $\mathbb{C}$-linéaires, on a, pour $f, g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ et $x \in \mathrm{M}$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{M}}(f+g)(x) &= (\pi_1(f(x)+g(x)), \dots, \pi_\ell(f(x)+g(x)))\\ &= (\pi_1(f(x)), \dots, \pi_\ell(f(x))) + (\pi_1(g(x)), \dots, \pi_\ell(g(x)))\\ &= \Phi_{\mathrm{M}}(f)(x) + \Phi_{\mathrm{M}}(g)(x) = (\Phi_{\mathrm{M}}(f) + \Phi_{\mathrm{M}}(g))(x)\,,\end{aligned}$$

et pour $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ et $\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ et $x \in \mathrm{M}$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{M}}(\lambda \cdot f)(x) &= (\pi_1(\lambda(x)f(x)), \dots, \pi_\ell(\lambda(x)f(x)))\\ &= \lambda(x)(\pi_1(f(x)), \dots, \pi_\ell(f(x)))\\ &= \lambda(x)\Phi_{\mathrm{M}}(f)(x) = (\lambda \cdot \Phi_{\mathrm{M}}(f))(x)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que Φ_{M} est $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-linéaire et donc Ψ_{M} aussi. On en déduit que $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$ est $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module libre de base $(u_1, \dots u_\ell)$.

Par ailleurs, considérons un ouvert U de M. En appliquant ce qui précède dans le cas $\mathrm{F} = \mathrm{A} = \mathbb{C}$, on obtient un morphisme $\rho_{\mathrm{M,U}}$ de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-modules de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$. On considère alors le morphisme produit $(\rho_{\mathrm{M,U}})^n : \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})^n \to \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})^n$ qui est $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-linéaire. Montrons que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{F}) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{M,U}}"'] & \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})^n \arrow[d, "(\rho_{\mathrm{M,U}})^n"] \\ \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathrm{F}) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{U}}"] & \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})^n\end{tikzcd}$$

Pour $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{F})$, on a

$$(\rho_{\mathrm{M,U}})^n(\psi_{\mathrm{M}}(f)) = (\rho_{\mathrm{M,U}})^n(\pi_1 \circ f, \dots, \pi_n \circ f) = (\rho_{\mathrm{M,U}}(\pi_1 \circ f), \dots, \rho_{\mathrm{M,U}}(\pi_n \circ f)) = (\pi_1 \circ f_{|\mathrm{U}}, \dots, \pi_n \circ f_{|\mathrm{U}})$$

et
$$\Phi_{\mathrm{U}} \circ \rho_{\mathrm{M,U}}(f) = \Phi_{\mathrm{U}}(f_{|\mathrm{U}}) = (\pi_1 \circ f_{|\mathrm{U}}, \dots, \pi_n \circ f_{|\mathrm{U}})\,.$$ ■

1.4.6 Biholomorphisme

Dans cette sous-section, on étudie les isomorphismes de la catégorie **Prev** : les biholomorphismes. On détaille dans le cas de la catégorie **Prev** quelques résultats généraux sur les isomorphismes dans une catégorie (remarques 1.109 et 1.110). On étudie ensuite quelques propriétés des biholomorphismes.

Définition 1.107 – Biholomorphisme. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application. On dit que f est un *biholomorphisme de* $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ *sur* $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ si $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ et s'il existe $g \in \mathscr{H}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{N}}$ et $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, on dit que $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ sont isomorphes s'il existe un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$.

Remarque 1.108 – Langage catégorique. Un biholomorphisme n'est rien d'autre qu'un isomorphisme dans la catégorie **Prev**. Ainsi $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ sont isomorphes si et seulement si les objets $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ de la catégorie **Prev** sont isomorphes. ■

Remarque 1.109 – Biholomorphisme. Comme **Prev** est une sous-catégorie de la catégorie **Ens**, on peut formuler la définition 1.107 de la façon suivante : un biholomorphisme est une application bijective holomorphe dont la bijection réciproque est holomorphe. Les propriétés des isomorphismes d'une catégorie assurent que

(*i*) id_{M} est un isomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$,

(*ii*) la bijection réciproque d'un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ est un biholomorphisme de $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ sur $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$,

(*iii*) la composée d'un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ et d'un biholomorphisme de $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ sur $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$.

Finalement, comme dans toute catégorie, la relation « être isomorphe » est une relation d'équivalence sur tout ensemble de prévariétés holomorphes. ■

Remarque 1.110 – Biholomorphisme et isomorphisme. Un biholomorphisme étant un isomorphisme dans la catégorie **Prev**, il permet de confondre deux versions d'un « même » objet. Lorsque les deux versions sont identifiés (grâce à cet isomorphisme), d'autres éléments vont aussi être confondus. Par exemple, une application

issue de l'une des deux versions s'identifie à une application issue de l'autre version : l'application précédente composée avec l'isomorphisme en question. De façon précise, on a le résultat suivant.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un biholomorphisme et $(\mathrm{P}, \mathscr{C})$ une prévariété holomorphe. Une application $g : \mathrm{P} \to \mathrm{N}$ est holomorphe si et seulement si $f^{-1} \circ g : \mathrm{P} \to \mathrm{M}$ l'est. Une application $h : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ est holomorphe si et seulement si $h \circ f : \mathrm{M} \to \mathrm{P}$ l'est.

En effet, si g est holomorphe alors, par composition par l'application holomorphe f^{-1}, l'application $f^{-1} \circ g$ est holomorphe. Si $f^{-1} \circ g$ est holomorphe alors, par composition avec l'application holomorphe f, l'application g est holomorphe. Si h est holomorphe alors, par composition par l'application holomorphe f, l'application $h \circ f$ est holomorphe. Si $h \circ f$ est holomorphe alors, par composition avec l'application holomorphe f^{-1}, l'application f est holomorphe.

Le résultat précédent se formule aussi de la façon suivante :

$$\lambda_{f^{-1}} : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{N}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) \\ g \longmapsto f^{-1} \circ g \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lambda_f : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{P}, \mathrm{N}) \\ g \longmapsto f \circ g \end{cases}$$

sont des bijections réciproque l'une de l'autre et

$$\rho_f : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{N}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \\ h \longmapsto h \circ f \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \rho_{f^{-1}} : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{N}, \mathrm{P}) \\ h \longmapsto h \circ f^{-1} \end{cases}$$

sont des bijections réciproque l'une de l'autre. ■

EXEMPLES DE BIHOLOMORPHISMES

Les deux premiers exemples sont des exemples concrets de biholomorphismes : l'identité, le transfert d'une carte. Le dernier exemple étudie le cas de la structure de prévariété sur $\mathbb{C}$ donnée dans l'exemple 1.75.

Exemple 1.111 Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. Montrons que id_M est un biholomorphisme.

D'après le corollaire 1.97, **Prev** est une sous-catégorie de **Ens**, id_M est un isomorphisme et donc un biholomorphisme. De façon équivalente, d'après l'exemple 1.84, id_M est holomorphe. Comme id_M est son propre inverse, on obtient le résultat. ■

Exemple 1.112 — Carte. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$. Montrons que φ réalise un biholomorphisme entre U et V.

L'exemple 1.86 montre que φ est holomorphe. L'exemple 1.87 montre que $\varphi^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{M}$ est holomorphe. Comme $\varphi^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{U}$, l'exemple 1.99 montre que $\varphi^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ est holomorphe.

En particulier, on en déduit, par composition, que les morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\rho_{\varphi^{-1}} : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{V}, \mathbb{C}) \\ f \longmapsto f \circ \varphi^{-1} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \rho_\varphi : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{V}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}) \\ f \longmapsto f \circ \varphi \end{cases}$$

sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre (voir l'application 1.105 et la remarque 1.110). ■

Exemple 1.113 — $z \mapsto \overline{z}$. L'application $\varphi : z \in \mathbb{C} \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ permet de construire une structure de prévariété holomorphe sur $\mathbb{C}$ qu'on note $\mathbb{C}_\varphi$ (voir l'exemple 1.75). Dans la suite de cet exemple, on va comparer $\mathbb{C}_\varphi$ à la structure classique de prévariété holomorphe sur $\mathbb{C}$ qu'on note simplement $\mathbb{C}$.

Aucune des deux applications $\mathrm{id}_\mathbb{C} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_\varphi$ et $\mathrm{id}_\mathbb{C} : \mathbb{C}_\varphi \to \mathbb{C}$ n'est holomorphe. D'après la proposition-définition 1.81 (v), il suffit de vérifier $\mathrm{id}_\mathbb{C}$ lue dans les cartes $\mathcal{U} = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, 1, \mathrm{id}_\mathbb{C})$ et $\mathcal{V} = (\mathbb{C}, \mathbb{C}, 1, \varphi)$ (resp. $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$) n'est pas holomorphe au sens classique. Or cette application n'est autre que φ (resp. $\varphi^{-1} = \varphi$) qui n'est pas holomorphe. L'exemple 1.84 montre alors que les structures $\mathbb{C}_\varphi$ et $\mathbb{C}$ de prévariété holomorphe sur $\mathbb{C}$ sont distinctes.

Par ailleurs, l'application φ est un biholomorphisme de $\mathbb{C}_\varphi$ sur $\mathbb{C}$. En effet, dans les deux cas, la topologie sur $\mathbb{C}$ est la topologie classique donc φ et φ^{-1} sont continues. De plus, l'application φ lue dans les cartes $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ est alors $\mathrm{id}_\mathbb{C}$ qui est de classe holomorphe (au sens classique) et l'application φ^{-1} lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est aussi $\mathrm{id}_\mathbb{C}$ qui est holomorphe.

Ainsi, sur l'ensemble $\mathbb{C}$, on a construit deux structures de prévariétés distinctes mais biholomorphes. Les résultats présentés dans cet exemple et la construction de l'exemple 1.75 se généralisent aux autres prévariétés holomorphes (voir l'exemple 1.126). ■

Restriction et biholomorphisme

Les deux exemples qui suivent étudient les liens entre restriction et biholomorphie. Un biholomorphisme entre deux prévariétés induit un biholomorphisme entre un ouvert de la prévariété de départ et son image (exemple 1.114) et une bijection qui est localement un biholomorphisme est un biholomorphisme (exemple 1.115).

Exemple 1.114 – Restriction de biholomorphismes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ un biholomorphisme et U un ouvert de M. Montrons que $f(\mathrm{U})$ est ouvert dans M' et que f induit un biholomorphisme de U sur $f(\mathrm{U})$.

Comme f est un homéomorphisme, $f(\mathrm{U})$ est un ouvert de M'. L'application 1.100 appliquée à f et aux ouverts U et $f(\mathrm{U})$ puis à f^{-1} et aux ouverts $f(\mathrm{U})$ et $\mathrm{U} = f^{-1}(f(\mathrm{U}))$ montre que f et f^{-1} induisent des applications holomorphes entre U et $f(\mathrm{U})$. On obtient le résultat souhaité puisque les applications induites par f et f^{-1} entre U et $f(\mathrm{U})$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre. ■

Exemple 1.115 – Restriction de biholomorphismes 2. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une bijection, $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ (resp. $(\mathrm{U}'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$) un recouvrement ouvert de M (resp. M'). On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application f induit un biholomorphisme f_α de U_α sur U'_α. Montrons que f est un biholomorphisme.

Pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application f_α est un homéomorphisme de U_α sur U'_α, l'application f est donc un homéomorphisme. Comme f est bijective, on a $f^{-1}(\mathrm{U}'_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha$ et $f(\mathrm{U}_\alpha) = (f^{-1})^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) = \mathrm{U}'_\alpha$. La proposition 1.101 (*vi*) appliquée à f et au recouvrement $(\mathrm{U}'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de M' (resp. f^{-1} et $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$) assure que f (resp. f^{-1}) est holomorphe. ■

Utilisation des biholomorphismes

On peut caractériser la structure de prévariété sur un ensemble à l'aide de la notion de biholomorphisme. De façon plus précise, le fait id_M soit un biholomorphisme entre deux structures de prévariété sur un même ensemble M assure que ces deux structures coïncident (exemple 1.116). Cet exemple sera complété par la remarque 1.123.

Exemple 1.116 – id_M. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{M}, \mathscr{B})$ deux structures de prévariété holomorphe sur M. Montrons que l'application id_M est un biholomorphisme si et seulement si $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

(⇐) Comme **Prev** est une sous-catégorie de **Ens**, id_M est un isomorphisme et donc un biholomorphisme. De façon équivalente : id_M est holomorphe d'après l'exemple 1.84 et est son propre inverse.

(⇒) Comme une application holomorphe est continue, on en déduit que id_M est un homéomorphisme entre l'espace M muni de la topologie associé à $\mathscr{A}$ et l'espace M muni de la topologie associée à $\mathscr{B}$. Ainsi ces deux topologies coïncident et $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont deux atlas topologiques pour cette topologie (voir la proposition 1.37). On va montrer que $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont compatibles (en tant qu'atlas topologique sur M). D'après la remarque 1.45, il suffit de montrer que toute carte de $\mathscr{A}$ est compatible avec toute carte de $\mathscr{B}$. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$. Comme $\mathrm{id}_\mathrm{M} \in \mathscr{H}((\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}, \mathscr{B}))$, l'application id_M lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est holomorphe. Or

$$(\mathrm{id}_\mathrm{M})_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} = \varphi' \circ \mathrm{id}_\mathrm{M} \circ \left(\varphi_{|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}}\right)^{-1} = \psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'} : \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \to \varphi'(\mathrm{U}') .$$

De même, comme $\mathrm{id}_\mathrm{M} \in \mathscr{H}((\mathrm{M}, \mathscr{B}), (\mathrm{M}, \mathscr{A}))$, l'application $\psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ est holomorphe. Ainsi les fonctions de transitions entre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont holomorphes et $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ sont compatibles. On en déduit que $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$ est un atlas. Par maximalité de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$, on obtient $\mathscr{A} = \mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \mathscr{B}$. ■

Cette caractérisation de la structure de prévariété via la biholomorphie de l'identité permet de donner un critère d'unicité pour la structure de prévariété sur un ouvert d'une prévariété.

Application 1.117 – Caractérisation de la structure de prévariété d'un ouvert. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, U un ouvert de M et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. On note $\mathscr{A}_\mathrm{U}$ l'atlas maximal associé à la structure de prévariété de U obtenu comme ouvert de M (voir l'exemple 1.61).

D'après les exemples 1.92 et 1.99, $\mathscr{A}_\mathrm{U}$ vérifie les propriétés suivantes

a. i est holomorphe ;

b. pour toute prévariété holomorphe $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ et toute application holomorphe $f : (\mathrm{N}, \mathscr{B}) \to (\mathrm{M}, \mathscr{A})$ vérifiant $f(\mathrm{N}) \subset \mathrm{U}$, l'application $f_\mathrm{U} : \mathrm{N} \to \mathrm{U}$ induite par f est holomorphe.

On va montrer que $\mathscr{A}_\mathrm{U}$ est le seul atlas maximal sur U vérifiant ces propriétés. Soit $\mathscr{B}$ un atlas maximal sur U vérifiant les propriétés **a** et **b**. On a $i \in \mathscr{H}((\mathrm{U}, \mathscr{B}), (\mathrm{M}, \mathscr{A}))$ (d'après **a** appliqué à $\mathscr{B}$) et $i(\mathrm{U}) = \mathrm{U}$. On en déduit, grâce à **b** appliqué à $\mathscr{A}_\mathrm{U}$ que l'application induite par i qui n'est autre que id_U est une application holomorphe de $(\mathrm{U}, \mathscr{B})$ sur $(\mathrm{U}, \mathscr{A}_\mathrm{U})$. De même, on a $i \in \mathscr{H}((\mathrm{U}, \mathscr{A}_\mathrm{U}), (\mathrm{M}, \mathscr{A}))$ (d'après **a** appliqué à $\mathscr{A}_\mathrm{U}$) et $i(\mathrm{U}) = \mathrm{U}$. On en déduit, grâce à **b** appliqué à $\mathscr{B}$ que l'application induite par i qui n'est autre que id_U est une application

holomorphe de $(\mathrm{U}, \mathscr{A}_\mathrm{U})$ sur $(\mathrm{U}, \mathscr{B})$. Ainsi id_U est un biholomorphisme de $(\mathrm{U}, \mathscr{A}_\mathrm{U})$ sur $(\mathrm{U}, \mathscr{B})$. L'exemple 1.116 montre que $\mathscr{A}_\mathrm{U} = \mathscr{B}$. ■

Terminons par un exemple concret d'utilisation d'un biholomorphisme dans le cadre présenté dans la remarque 1.110. Cet exemple sera particulièrement utile pour l'étude des fibrés vectoriels (section 1.5).

Application 1.118 — Applications à valeurs dans un espace d'applications linéaires. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, F, G deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes.

(*i*) L'application f est holomorphe.
(*ii*) L'application $(x, v) \mapsto f(x)(v)$ appartient à $\mathscr{H}(\mathrm{M} \times \mathrm{F}, \mathrm{G})$
(*iii*) Pour tout $v \in \mathrm{F}$, l'application $(x \mapsto f(x)(v))$ appartient à $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{G})$.
(*iv*) Pour toute base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_\ell)$ de F, les ℓ applications $(x \mapsto f(x)(v_i))$ appartiennent à $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{G})$.
(*v*) Il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_\ell)$ de F telle que les ℓ applications $(x \mapsto f(x)(v_i))$ appartiennent à $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{G})$.

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). L'application $(x, v) \mapsto f(x)(v)$ est la composée de l'application holomorphe $f \times \mathrm{id}_\mathrm{F}$ (voir l'application 1.104) avec l'application bilinéaire (donc holomorphe) $(\varphi, w) \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \times \mathrm{F} \mapsto \varphi(w) \in \mathrm{G}$. La proposition 1.96 donne le résultat.

(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*). Considérons l'application $x \mapsto (x, v)$. Sa première composante est id_M et la deuxième composante est l'application constante égale à v. On en déduit, grâce à l'exemple 1.94, que l'application $x \mapsto (x, v)$ est holomorphe. Par composition, avec l'application $(x, v) \mapsto f(x)(v)$ qui est holomorphe par hypothèse, on obtient le résultat voulu.

(*iii*) $\Rightarrow$ (*iv*) et (*iv*) $\Rightarrow$ (*v*) sont évidentes (puisqu'il existe une base de F).

(*v*) $\Rightarrow$ (*i*). Commençons par remarquer que l'application

$$\mu\colon \begin{cases} \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G}^\ell \\ \qquad \varphi \qquad \longmapsto (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_\ell)) \end{cases}$$

est un isomorphisme linéaire. Ainsi μ est un biholomorphisme (puisqu'une application linéaire est holomorphe). Par ailleurs, chacune des applications $x \mapsto f(x)(v_i)$ est, par hypothèse, holomorphe. La propriété universelle du produit 1.104 assure alors que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{G}^\ell \\ x \longmapsto (f(x)(v_1), \ldots, f(x)(v_\ell)) \end{cases}$$

est holomorphe. Par composition avec μ^{-1}, on en déduit que f est holomorphe. ■

Bijection holomorphe et biholomorphisme

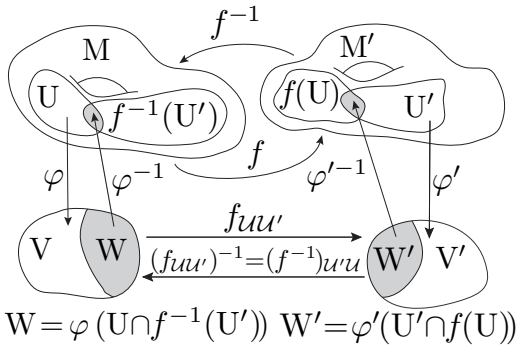
Attention, une bijection holomorphe n'est pas nécessairement un biholomorphisme (voir l'exemple 1.120). Cependant, lorsqu'on demande une condition supplémentaire de continuité (celle de la bijection réciproque), la biholomorphie est assurée comme le montre le lemme suivant.

Lemme 1.119 — Homéomorphisme et biholomorphisme. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une bijection. Alors les conditions suivantes sont équivalentes

(*i*) f est un homéomorphisme holomorphe ;
(*ii*) f est biholomorphisme ;
(*iii*) f^{-1} est un homéomorphisme holomorphe ;
(*iv*) f^{-1} est un biholomorphisme.

Preuve. La remarque 1.109 (*ii*) montre que (*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iv*). Comme une application holomorphe est continue, on a immédiatement (*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) et (*iv*) $\Rightarrow$ (*iii*).

$(i) \Rightarrow (ii)$. Il s'agit de montrer l'holomorphie de f^{-1}. Comme f^{-1} est continue, il suffit de montrer que l'application f^{-1} lue dans les cartes de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{A}$ est holomorphe. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{B}$. Comme $\mathrm{U}' \cap (f^{-1})^{-1}(\mathrm{U}) = \mathrm{U}' \cap f(\mathrm{U})$, l'image de l'application f^{-1} lue dans les cartes $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}$ n'est autre que $\varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'))$ et donc $(f^{-1})_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est la bijection réciproque de l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$. Par ailleurs, $f(\mathrm{U})$ est un ouvert de M (puisque f est un homéomorphisme) et donc $f(\mathrm{U}) \cap \mathrm{U}'$ aussi. Ainsi $\varphi'(f(\mathrm{U}) \cap \mathrm{U}')$ est un ouvert de $\mathbb{C}^{n'}$.



Le lemme **??** appliqué aux ouverts $\varphi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'))$ et $\varphi'(\mathrm{U}' \cap f(\mathrm{U}))$ et à l'application $f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ montre que $(f_{\mathcal{U}\mathcal{U}'})^{-1} = (f^{-1})_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$ est holomorphe.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. Il suffit d'appliquer $(i) \Rightarrow (ii)$ à f^{-1}. ■

Exemple 1.120 – $\mathbb{C}_{\mathbf{disc}}$. On considère les prévariétés holomorphes $\mathbb{C}_{\mathrm{disc}}$ (voir l'exemple 1.70) et $\mathbb{C}$ (notation de l'exemple 1.113). L'exemple 1.95 montre que l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}_{\mathrm{disc}} \to \mathbb{C}$ est holomorphe. Il montre aussi $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}_{\mathrm{disc}} \to \mathbb{C}$ n'est pas un biholomorphisme. En effet, la bijection réciproque de $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ est $\mathrm{id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}_{\mathrm{disc}}$ qui n'est pas continue puisque la topologie usuelle sur $\mathbb{C}$ n'est pas la topologie discrète. ■

1.4.7 Construction de prévariétés holomorphes

Dans cette sous-section, on propose des méthodes générales de construction de prévariétés holomorphes (proposition 1.129) ou de structure de prévariétés holomorphes sur un ensemble donné (lemme 1.121, proposition 1.128) reposant sur le recollement d'espaces topologiques et le transfert de structure. Cette sous-section se clôt par une formulation des notions de prévariétés holomorphes et de fonctions holomorphes dans le langage des faisceaux sur un espace topologique.

Transfert de structure

Une prévariété est un ensemble plus une structure supplémentaire : celle d'atlas. Ainsi lorsque $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ est une prévariété et N un ensemble en bijection (via f) avec M, on peut transporter l'atlas $\mathscr{A}$ grâce à f sur N et obtenir ainsi une structure de prévariété sur N (lemme 1.121). On étudie ensuite quelques conséquences de cette possibilité de transférer des structures de prévariété.

Lemme 1.121 – Transfert de structure. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, N un ensemble et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une bijection. Il existe une unique structure de prévariété holomorphe sur N telle que f soit un biholomorphisme. L'atlas maximal $f_*(\mathscr{A})$ associé à cette structure de prévariété sur N est donné par

$$f_*(\mathscr{A}) = \left\{ \left(f(\mathrm{U}), \mathrm{V}, n, \varphi \circ f^{-1}\big|_{f(\mathrm{U})} \right), \quad (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A} \right\}$$

On dit que $(\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A}))$ est la *structure de prévariété obtenue par transfert de structure via f*.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une prévariété holomorphe, $g : \mathrm{M}' \to \mathrm{N}$, $h : \mathrm{N} \to \mathrm{M}'$ deux applications. L'application g est holomorphe si et seulement si $f^{-1} \circ g : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ l'est. L'application h est holomorphe si et seulement si $h \circ f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ l'est.

Preuve. Par transfert de la structure topologique de M à N, il existe une unique topologie sur N telle que f soit un homéomorphisme. On peut donc supposer que N est un espace topologique et f un homéomorphisme. Montrons à présent que $f_*(\mathscr{A})$ est un atlas topologique sur N. Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$, alors

$$f_*(\mathcal{U}) = \left(f(\mathrm{U}), \mathrm{V}, n, \varphi \circ f^{-1}\big|_{f(\mathrm{U})} \right)$$

est une pseudocarte topologique sur N. En effet, comme f est un homéomorphisme, $f(\mathrm{U})$ est bien un ouvert de N et par composition, $\varphi \circ f^{-1}\big|_{f(\mathrm{U})}$ est homéomorphisme de $f(\mathrm{U})$ sur l'ouvert V de $\mathbb{C}^n$. Ainsi $f_*(\mathscr{A})$ est un ensemble de pseudocartes topologiques sur N. Pour montrer que $f_*(\mathscr{A})$ est un atlas sur N, il reste à montrer la compatibilité entre les pseudocartes de $f_*(\mathscr{A})$ et la condition de recouvrement par les domaines des pseudocartes de $f_*(\mathscr{A})$. Soit $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}$. Montrons que $f_*(\mathcal{U})$ et $f_*(\mathcal{U}')$ sont compatibles. Cela résulte immédiatement des égalités $\psi_{f_*(\mathcal{U})f_*(\mathcal{U}')} = \psi_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ et $\psi_{f_*(\mathcal{U}')f_*(\mathcal{U})} = \psi_{\mathcal{U}'\mathcal{U}}$. Par ailleurs, comme les domaines

des cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent M et que f est surjective, les domaines des pseudocartes de $f_*(\mathscr{A})$ recouvrent N. Ainsi $f_*(\mathscr{A})$ est bien un atlas holomorphe sur N.

Montrons à présent la maximalité de l'atlas $f_*(\mathscr{A})$. On note $\mathscr{B}$ l'atlas maximal sur N contenant $f_*(\mathscr{A})$. Pour $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$, on a ${f^{-1}}_*(f_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Ainsi ${f^{-1}}_*(\mathscr{B})$ est un atlas contenant $\mathscr{A}$ et donc, par maximalité de $\mathscr{A}$, on obtient ${f^{-1}}_*(\mathscr{B}) = \mathscr{A}$. Comme $f_*({f^{-1}}_*(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{B}$, on en déduit que $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{A})$. Ainsi $(\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A}))$ est une prévariété holomorphe.

Montrons que f est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A}))$. Par hypothèse, l'application f est continue, donc continue en x pour tout $x \in \mathrm{M}$. De plus, l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$ et $f_*(\mathcal{U})$ n'est autre que id_V qui est holomorphe. On en déduit que f est de classe holomorphe en x pour tout x appartenant à $\mathrm{dom}(\mathcal{U})$ (voir la proposition-définition 1.78 (*iii*)). Comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent M, l'application f est holomorphe en x pour tout $x \in \mathrm{M}$. Finalement f est holomorphe (voir la proposition-définition 1.81 (*i*)). De même, f^{-1} est continue en x pour tout $x \in \mathrm{N}$ et l'application f^{-1} lue dans les cartes $\mathcal{V} = f_*(\mathcal{U}) \in f_*(\mathscr{A})$ et $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})_* \in \mathscr{A}$ n'est autre que id_V qui est holomorphe. On en déduit que f^{-1} est holomorphe en x pour tout x appartenant au domaine de $\mathcal{V}$. Comme les domaines de cartes de $f_*(\mathscr{A})$ recouvrent N, l'application f^{-1} est holomorphe en x pour tout $x \in \mathrm{N}$ et donc f^{-1} est holomorphe.

Si g est holomorphe alors, par composition par l'application holomorphe f^{-1}, l'application $f^{-1} \circ g$ est holomorphe. Si $f^{-1} \circ g$ est holomorphe alors, par composition avec l'application holomorphe f, l'application g est holomorphe. Si h est holomorphe alors, par composition par l'application holomorphe f, l'application $h \circ f$ est holomorphe. Si $h \circ f$ est holomorphe alors, par composition avec l'application holomorphe f^{-1}, l'application f est holomorphe.

Passons à la propriété d'unicité. Soit $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ une structure de prévariété holomorphe sur N telle que $f : (\mathrm{M}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{N}, \mathscr{B})$ soit un biholomorphisme. Alors, par composition $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_\mathrm{N}$ est un biholomorphisme de $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ sur $(\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A}))$. L'exemple 1.116 montre alors que $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{A})$. ■

Remarque 1.122 — Situation ensembliste, situation topologique. Dans la démonstration du lemme 1.121, on a commencé par mettre une topologie sur N puis on a montré que $f_*(\mathscr{A})$ est un atlas topologique pour cette topologie. Ainsi, d'après la remarque 1.41, la topologie sur N associée à $f_*(\mathscr{A})$ et la topologie obtenue par transfert de celle de M coïncident. En particulier, si la donnée initiale est, non pas un ensemble N et une bijection $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, mais un espace topologique $(\mathrm{N}, \mathscr{T})$ et un homéomorphisme $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ alors la topologie obtenue par transfert de structure de celle de M via f est $\mathscr{T}$ et coïncide avec la topologie associée à $f_*(\mathscr{A})$.

Par ailleurs, on a choisi de mettre tout de suite une topologie sur N puis de montrer que $f_*(\mathscr{A})$ est un atlas topologique pour cette topologie car il y a alors moins de vérifications à effectuer. Donnons ici les éléments supplémentaires nécessaires pour montrer directement que $f_*(\mathscr{A})$ est un atlas sur l'ensemble N (sans mettre de topologie a priori).

La première différence intervient au niveau de la compatibilité entre les pseudocartes $f_*(\mathcal{U})$ et $f_*(\mathcal{U}')$. Il faut en plus vérifier que $\varphi \circ {f^{-1}}\big|_{f(\mathrm{U})}(f(\mathrm{U}) \cap f(\mathrm{U}'))$ est ouvert dans V et $\varphi' \circ {f^{-1}}\big|_{f(\mathrm{U})}(f(\mathrm{U}) \cap f(\mathrm{U}'))$ ouvert dans V′. Or

$$\varphi \circ {f^{-1}}\big|_{f(\mathrm{U})}(f(\mathrm{U}) \cap f(\mathrm{U}')) = \varphi \circ {f^{-1}}\big|_{f(\mathrm{U})}(f(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')) = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$$

et

$$\varphi' \circ {f^{-1}}\big|_{f(\mathrm{U}')}(f(\mathrm{U}) \cap f(\mathrm{U}')) = \varphi' \circ {f^{-1}}\big|_{f(\mathrm{U}')}(f(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')) = \varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')\,.$$

La compatibilité de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ assure le résultat.

La deuxième différence intervient pour montrer la biholomorphie de f. Il faut montrer que f et f^{-1} sont continues. En fait, on va montrer directement que f est un homéomorphisme. La topologie sur N est l'unique topologie telle que $f(\mathrm{U})$ soit un ouvert et $\varphi \circ {f^{-1}}\big|_{f(\mathrm{U})}$ soit un homéomorphisme pour tout $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$ (voir la proposition 1.37). Or φ est un homéomorphisme de U sur V, donc ${f^{-1}}\big|_{f(\mathrm{U})}$ est un homéomorphisme de $f(\mathrm{U})$ sur U pour tout ouvert U qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$. Comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ forment un recouvrement ouvert de M et que les $f(\mathrm{U})$ pour U qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ forment un recouvrement ouvert de N, on en déduit que f^{-1} et donc f est un homéomorphisme. On retrouve alors le fait que la topologie associée à $f_*(\mathscr{A})$ soit la topologie obtenue par transfert via f. ■

La remarque suivante généralise l'exemple 1.116 : un biholomorphisme définit de façon unique la structure de prévariété de l'espace d'arrivée à partir de celle de l'espace de départ.

Remarque 1.123 — Transfert et biholomorphisme. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une bijection. Montrons que f est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ si et seulement si $f_*(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$.

(⇐) Comme $f_*(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$ et f est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', f_*(\mathscr{A}))$, l'application f est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$.

(⇒) D'après la proposition 1.121, $(\mathrm{M}', f_*(\mathscr{A}))$ est l'unique structure de prévariété sur M' qui fasse de f un biholomorphisme. Comme f est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, on obtient l'égalité souhaitée par unicité.

Autrement dit, f est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ si et seulement si $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ est la structure de prévariété holomorphe obtenue par transfert de structure via f. ■

Grâce à la remarque précédente, on en déduit immédiatement la propriété de transitivité des structures transférées (remarque 1.124).

Remarque 1.124 – Transferts consécutifs. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, N, P deux ensembles (resp. deux espaces topologiques) et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ et $g : \mathrm{N} \to \mathrm{P}$ deux bijections (resp. deux homéomorphismes). On a $g_*(f_*(\mathscr{A})) = (g \circ f)_*(\mathscr{A})$.

En effet, $(g \circ f)_*(\mathscr{A})$ est l'unique atlas maximal $\mathscr{B}$ sur P tel que $g \circ f : (\mathrm{M}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{P}, \mathscr{B})$ soit un biholomorphisme. Comme $f : (\mathrm{M}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A}))$ et $g : (\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A})) \to (\mathrm{P}, g_*(f_*(\mathscr{A})))$ sont des biholomorphismes, on en déduit, par composition, que $g \circ f : (\mathrm{M}, \mathscr{A}) \to (\mathrm{P}, g_*(f_*(\mathscr{A})))$ est un biholomorphisme. Ainsi $g_*(f_*(\mathscr{A})) = (g \circ f)_*(\mathscr{A})$. ■

On termine l'étude des transferts de structure de prévariété par la remarque suivante qui étudie les conditions de coïncidence de structures de prévariété obtenues par transfert de structure depuis des prévariétés distincts.

Remarque 1.125 – Multi-transfert. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes, N un ensemble et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $g : \mathrm{M}' \to \mathrm{N}$ deux bijections. Montrons que $g^{-1} \circ f$ est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ si et seulement si $f_*(\mathscr{A}) = g_*(\mathscr{A}')$.

D'après le lemme 1.121, f est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{N}, f_*(\mathscr{A}))$ et g^{-1} un biholomorphisme de $(\mathrm{N}, g_*(\mathscr{A}))$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$. Par composition, on obtient alors que $g^{-1} \circ f$ est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$. Réciproquement, la remarque 1.123 assure que $(g^{-1} \circ f)_*(\mathscr{A}) = \mathscr{A}'$. La remarque 1.124 donne alors $g_*(\mathscr{A}') = g_*(g^{-1} \circ f)_*(\mathscr{A}) = f_*(\mathscr{A})$.

Autrement dit, les structures de prévariété holomorphe sur N obtenu par transfert de structure via f et g coïncident si et seulement si $g^{-1} \circ f$ est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$. ■

L'exemple suivant généralise à une prévariété quelconque les exemples 1.75 et 1.113 où on avait construit sur $\mathbb{C}$ une structure de prévariété distincte de la structure usuelle mais isomorphe à celle-ci.

Exemple 1.126 – Structures distinctes mais isomorphes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété, $\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ un homéomorphisme (pour la topologie associé à $\mathscr{A}$) et $(\mathrm{M}, \varphi_*(\mathscr{A}))$ la structure de prévariété holomorphe sur M obtenu par transfert de structure via φ.

Montrons que les conditions suivantes sont équivalentes.

(*i*) $\mathscr{A} = \varphi_*(\mathscr{A})$.
(*ii*) id_M est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}, \varphi_*(\mathscr{A}))$.
(*iii*) $\mathrm{id}_\mathrm{M} \in \mathscr{H}((\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}, \varphi_*(\mathscr{A})))$.
(*iv*) φ est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$.
(*v*) $\varphi \in \mathscr{H}((\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}, \mathscr{A}))$.

Comme φ est un homéomorphisme, on obtient que la topologie associée à $\varphi_*(\mathscr{A})$ est la topologie ambiante sur M. Il y a une seule topologie sur M qui entre en jeu.
(*ii*) ⇔ (*iii*) et (*iv*) ⇔ (*v*) résultent du lemme 1.119, (*i*) ⇔ (*ii*) de l'exemple 1.84 et (*i*) ⇔ (*iv*) de la remarque 1.123.

Par ailleurs, la remarque 1.123 montre que l'application φ est toujours un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}, \varphi_*(\mathscr{A}))$. Ainsi, lorsque φ est un homéomorphisme qui n'est pas holomorphe (de $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ sur $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$), on obtient sur M deux structures de prévariétés distinctes mais biholomorphes. On généralise bien ainsi les exemples 1.75 et 1.113. ■

Recollement de prévariétés holomorphes

Dans la sous-section 1.2.1, on a étudié le recollement d'espaces topologiques. On s'attaque ici au même problème mais pour les prévariétés. On décompose le raisonnement en trois étapes données par les propositions 1.127, 1.128 et 1.129. Dans la première étape, on cherche à savoir construire une « bonne » structure de prévariété sur un espace topologique lorsqu'on dispose d'une structure de prévariété sur chacun des ouverts d'un recouvrement ouvert de cet espace topologique. Dans la deuxième étape, on utilise le transfert de structure pour construire des structures de prévariété sur chacun des ouverts d'un recouvrement ouvert d'un espace topologique. Enfin, lors de la troisième étape, on effectue le recollement des prévariétés à partir du recollement des espaces topologiques sous-jacents.

Proposition 1.127 — Recouvrement par des ouverts. Soient M un espace topologique et $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'ensemble U_α est muni d'une structure de prévariété holomorphe. On note $\mathscr{A}_\alpha$ l'atlas maximal associé à cette structure. Pour $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$ et on note $\mathscr{A}_\alpha^\beta$ (resp. $\mathscr{A}_\beta^\alpha$) l'atlas maximal associé à la structure de prévariété holomorphe induite sur l'ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de U_α (resp de U_β) par celle de U_α (resp. celle de U_β).

Il existe une structure de prévariété holomorphe sur M telle que la structure induite par M sur U_α soit $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$ si et seulement si $\mathscr{A}_\alpha^\beta = \mathscr{A}_\beta^\alpha$ pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2$.

De plus, s'il existe une structure de prévariété holomorphe sur M telle que la structure induite par M sur U_α soit $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$ alors elle est unique.

Preuve. (⇒) S'il existe une unique structure de prévariété holomorphe sur M telle que la structure induite par M sur U_α soit $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$, l'application 1.62 montre que $\mathscr{A}_\alpha^\beta = \mathscr{A}_\beta^\alpha$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$.
(⇐) On va montrer que

$$\mathscr{B} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \mathscr{A}_\alpha$$

est un atlas topologique sur M et que la structure de prévariété induite par $\mathscr{B}$ sur U_α est $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$.

On commence par vérifier que $\mathscr{B}$ est constitué de pseudocartes topologiques sur M. Soient $\alpha \in \mathrm{A}$ et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}_\alpha$. Comme U est un ouvert de U_α, U est un ouvert de M et $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}_\alpha$ est donc une pseudocarte topologique sur M. On montre à présent que deux pseudocartes de $\mathscr{B}$ sont compatibles. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}_\alpha$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi') \in \mathscr{A}_\beta$. Le lemme 1.51 montre que $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} \in \mathscr{A}_\alpha$. Comme le domaine de $\mathcal{V}$ est inclus dans $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on en déduit que $\mathcal{V} \in \mathscr{A}_\alpha^\beta$ (voir l'exemple 1.61). Par des arguments identiques, on obtient que $\mathcal{V}' = \mathcal{U}'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} \in \mathscr{A}_\beta$ puis $\mathcal{V}' \in \mathscr{A}_\beta^\alpha$. Ainsi $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{V}$ sont compatibles puisque $\mathscr{A}_\alpha^\beta = \mathscr{A}_\beta^\alpha$ et donc $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ aussi (voir la remarque 1.32). De plus, les domaines des cartes de $\mathscr{A}_\alpha$ recouvrent U_α pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$ et les U_α recouvrent M. Les domaines de pseudocartes de $\mathscr{B}$ recouvrent M. Ainsi $\mathscr{B}$ est bien un atlas topologique sur M.

D'après la remarque 1.54, $\mathscr{B}$ définit une structure de prévariété holomorphe sur M. Comme $\mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{B}$ et que les domaines des cartes de $\mathscr{A}_\alpha$ sont contenus dans U_α, on en déduit (voir l'exemple 1.61) que $\mathscr{A}_\alpha$ est contenu dans l'atlas maximal associé à la structure de prévariété holomorphe de U_α induite par celle de M. Par maximalité de $\mathscr{A}_\alpha$, on en déduit qu'ils coïncident. Ainsi, la structure induite par M sur U_α est bien $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$.

Passons à l'unicité. *Première démonstration.* Soit $\mathscr{B}'$ un atlas maximal sur M tel que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, la structure de prévariété sur U_α induite par $(\mathrm{M}, \mathscr{B}')$ soit $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$. D'après l'exemple 1.61, on a $\mathscr{A}_\alpha \subset \mathscr{B}'$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Ainsi $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$. Par unicité de l'atlas maximal contenant $\mathscr{B}$, on obtient le résultat voulu.

Deuxième démonstration. Soient $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ deux atlas maximaux sur M tels que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, la structure de prévariété sur U_α induite par $(\mathrm{M}, \mathscr{B}')$ et $(\mathrm{M}, \mathscr{B}'')$ soit $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)$. En reprenant les notations de l'exemple 1.61, on a donc $\mathscr{B}'_{\mathrm{U}_\alpha} = \mathscr{B}''_{\mathrm{U}_\alpha} = \mathscr{A}_\alpha$. On en déduit que $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_\alpha}$ induit un biholomorphisme de $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{B}'_{\mathrm{U}_\alpha})$ sur $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{B}''_{\mathrm{U}_\alpha})$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_\alpha}$ est l'application induite par id_M entre U_α et U_α, l'exemple 1.115 montre que id_M est un biholomorphisme de $(\mathrm{M}, \mathscr{B}')$ sur $(\mathrm{M}, \mathscr{B}'')$. L'exemple 1.116 assure alors que $\mathscr{B}' = \mathscr{B}''$. ■

Proposition 1.128 — Recollement de prévariété. Soient M un ensemble et $((\mathrm{M}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille de prévariétés holomorphes. On suppose que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, il existe une famille d'applications $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M}$ vérifiant

$$(i) \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{A}, \qquad \varphi_\alpha \text{ est injective};$$

$$(ii) \qquad \mathrm{M} = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha);$$

$$(iii) \qquad \forall\, (\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad {\varphi_\alpha}^{-1}(\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)) \text{ est un ouvert } \mathrm{U}_{\alpha\beta} \text{ de } \mathrm{M}_\alpha;$$

$$(iv) \qquad \forall\, (\alpha,\beta) \in \mathrm{A}^2, \qquad {\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta} \text{ est holomorphe.}$$

Il existe alors une unique structure de prévariété holomorphe sur M telle que les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soient des ouverts de M et les $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ des biholomorphismes.

Preuve. Supposons qu'une telle structure existe sur M. Les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ forme un recouvrement ouvert de M. Comme les $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ sont des biholomorphismes, la structure de prévariété holomorphe induite par celle de M sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ est nécessairement celle obtenue par transfert de structure de celle de M_α via φ_α (voir la remarque 1.123). La dernière partie de la proposition 1.127 montre qu'une telle structure est unique.

D'après la proposition 1.19, il existe une unique topologie sur M telle que les $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soient des ouverts de M et les φ_α soient des homéomorphismes. On cherche à appliquer à présent la proposition 1.127 au recouvrement ouvert $(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ de M. On considère sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ la structure de prévariété obtenue par transfert de structure de celle de M_α via φ_α (lemme 1.121). Montrons que les structures de prévariété holomorphe induite par $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ et $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ coïncident. On a vu dans la preuve de la proposition 1.19 que $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap$

$\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) = \varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) = \varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$. D'après l'exemple 1.114, φ_α (resp. φ_β) induit un biholomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$) sur $\varphi_\alpha(\mathrm{U}_{\alpha\beta})$ (resp. $\varphi_\beta(\mathrm{U}_{\beta\alpha})$). La remarque 1.123 montre que la structure induite par $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ (resp. $\varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$) sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ n'est autre que celle obtenue par transfert de structure de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (resp. $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$) via φ_α (resp. φ_β). Comme $\varphi_\alpha \circ {\varphi_\beta}^{-1} : \mathrm{U}_{\beta\alpha} \to \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ est un biholomorphisme, la remarque 1.125 montre que les deux structures de prévariété holomorphes sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha) \cap \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta)$ coïncident. La proposition 1.127 montre alors qu'il existe une structure de prévariété sur M telle que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, la structure de prévariété sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ induite par celle de M soit celle obtenue par transfert de structure via φ_α. Ainsi, la remarque 1.123 montre que φ_α est un biholomorphisme de M_α sur $\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$. ■

Proposition 1.129 – Recollement de prévariétés. Soient $(\mathrm{M}_\alpha, \mathscr{A}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille de prévariétés holomorphe. On suppose que pour tous $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, il existe un ouvert $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ de M_α, un ouvert $\mathrm{U}_{\beta\alpha}$ de M_β et un biholomorphisme $\psi_{\beta\alpha} : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \to \mathrm{U}_{\beta\alpha}$ vérifiant les conditions suivantes :

(*i*) $\mathrm{U}_{\alpha\alpha} = \mathrm{M}_\alpha$ et $\psi_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_\alpha}$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

(*ii*) Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{A}$, la restriction $\psi^\gamma_{\beta\alpha}$ de $\psi_{\beta\alpha}$ à $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ réalise un biholomorphisme de $\mathrm{U}_{\alpha\beta} \cap \mathrm{U}_{\alpha\gamma}$ sur $\mathrm{U}_{\beta\alpha} \cap \mathrm{U}_{\beta\gamma}$ et $\psi^\beta_{\gamma\alpha} = \psi^\alpha_{\gamma\beta} \circ \psi^\gamma_{\beta\alpha}$.

Il existe une prévariété holomorphe M et une famille d'application $(\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{M})_{\alpha\in\mathrm{A}}$ telles que $(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ soit un recouvrement ouvert de M et $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ un biholomorphisme. On dit que M est une prévariété holomorphe *obtenue par recollement des* M_α *le long des* $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ *au moyen des* $\varphi_{\beta\alpha}$ et que les φ_α sont les *biholomorphismes associés.*

Preuve. On considère M l'espace topologique obtenu par recollement des M_α le long des $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ au moyen des $\psi_{\beta\alpha}$ et φ_α les homéomorphismes associés (proposition-définition 1.16). Les propriétés (*iii*) à (*vi*) de la proposition-définition 1.16 et l'holomorphie de $\psi_{\beta\alpha}$ montre que les hypothèses de la proposition 1.128 sont vérifiées. Il existe donc une unique structure de prévariété holomorphe sur M telle que $(\varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ soit un recouvrement ouvert de M et, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, l'application $\varphi_\alpha : \mathrm{M}_\alpha \to \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)$ soit un biholomorphisme. ■

Faisceau

On termine cette section de présentation des prévariétés holomorphes par une nouvelle formulation des notions de prévariété holomorphe et de fonction holomorphe, cette fois-ci en termes de la théorie des faisceaux sur un espace topologique.

Proposition 1.130 – Faisceau des fonctions holomorphes. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. On note $\mathrm{Ouv}(\mathrm{M})$ l'ensemble des ouverts de M. Pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})$, on pose $\mathrm{F}(\mathrm{U}) = \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$. Alors F muni de la restriction des applications est un faisceau en $\mathbb{C}$-algèbres sur M localement isomorphe au faisceau des fonctions holomorphes sur un ouvert d'un $\mathbb{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. On dit que F est le *faisceau des fonctions holomorphes de* M et on le note $\mathscr{H}(\mathrm{M})$.

Réciproquement, soient M un espace topologique et F un faisceau en $\mathbb{C}$-algèbres sur M localement isomorphe au faisceau des fonctions holomorphe sur un ouvert d'un $\mathbb{C}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Il existe une unique structure de prévariété holomorphe sur M telle que les faisceaux en $\mathbb{C}$-algèbres F et $\mathscr{H}(\mathrm{M})$ soient isomorphes.

Preuve. Tout ouvert de M étant une prévariété holomorphe (exemple 1.61), $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$ a bien un sens et est une $\mathbb{C}$-algèbre unitaire (application 1.105). De plus, si $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ sont deux ouverts de M alors V est un ouvert de U et, d'après l'application 1.105, la restriction des applications est un morphisme $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}$ de $\mathbb{C}$-algèbres unitaires de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}(\mathrm{V}, \mathbb{C})$. Enfin, si $\mathrm{W} \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ sont trois ouverts de M, on a, pour $f \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$,

$$\rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}} \circ \rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(f) = f_{|\mathrm{W}} = \rho_{\mathrm{U},\mathrm{W}}(f)\,.$$

On en déduit que F est un préfaisceau en $\mathbb{C}$-algèbres unitaires.

Montrons que F est un faisceau. Soient $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})$ et $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert de U. Pour $i, j \in \mathrm{I}$, on pose $\mathrm{U}_{ij} = \mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$. On considère une famille $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de fonctions telles que $f_i \in \mathscr{H}(\mathrm{U}_i, \mathbb{C})$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ et $f_{i|\mathrm{U}_{ij}} = f_{j|\mathrm{U}_{ij}}$ pour tous $i, j \in \mathrm{I}$. Comme les f_i coïncident deux à deux là où elles sont définies, il existe une unique application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ telle que $f_{|\mathrm{U}_i} = f_i$. En effet, pour $x \in \mathrm{U}_i$, on a nécessairement $f(x) = f_i(x)$ et comme les U_i recouvrent U, f est entièrement définie. De plus, si x appartient aussi à U_j, on a $f_j(x) = f_i(x)$ par hypothèse et la valeur de f ne dépend pas du choix de $i \in \mathrm{I}$. Par ailleurs, comme $f_{|\mathrm{U}_i} = f_i \in \mathscr{H}(\mathrm{U}_i, \mathbb{C})$, la proposition 1.101 (*iii*) montre que $f \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$. Ainsi F est bien un faisceau en $\mathbb{C}$-algèbres.

Pour finir, on considère une carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ de M, deux ouverts $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}''$ contenus dans U et $\mathrm{V}' = \varphi(\mathrm{U}') \subset \mathrm{V}'' = \varphi(\mathrm{U}'')$ les ouverts de V correspondant à U' et U'' par l'homéomorphisme φ. On note alors $\gamma_{\mathrm{U}'\mathrm{U}''} : \mathscr{H}(\mathrm{U}'', \mathbb{C}) \to \mathscr{H}(\mathrm{U}', \mathbb{C})$ et $\gamma_{\mathrm{V}'\mathrm{V}''} : \mathscr{H}(\mathrm{V}'', \mathbb{C}) \to \mathscr{H}(\mathrm{V}', \mathbb{C})$ les morphismes de restrictions. L'exemple 1.112 appliqué aux cartes $\mathcal{U}_{|\mathrm{U}'}$ et $\mathcal{U}_{|\mathrm{U}''}$ montre que, dans le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}(\mathrm{U}'',\mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho_{\varphi^{-1}}} & \mathscr{H}(\mathrm{V}'',\mathbb{C}) \\ \gamma_{\mathrm{U}'\mathrm{U}''}\Big\downarrow & & \Big\downarrow\gamma_{\mathrm{V}'\mathrm{V}''} \\ \mathscr{H}(\mathrm{U}',\mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho_{\varphi^{-1}}} & \mathscr{H}(\mathrm{V}',\mathbb{C}) \end{array}$$

les flèches horizontales sont des isomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres. Ainsi φ induit un isomorphisme de faisceaux entre $\mathrm{F}_{|\mathrm{U}}$ et le faisceau des fonctions holomorphes sur l'ouvert V de $\mathbb{C}^n$.

Réciproquement, l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts U de M tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{F}_{|\mathrm{U}}$ soit isomorphe au faisceau des fonctions holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ forme un recouvrement ouvert de M. De plus, si $\mathrm{U} \in \mathcal{O}$ (resp. $\mathrm{U}' \in \mathcal{O}$), il existe un ouvert V de $\mathbb{C}^n$ (V′ de $\mathbb{C}^{n'}$) et un homéomorphisme $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ (resp. $\varphi' : \mathrm{U}' \to \mathrm{V}'$) et un isomorphisme de faisceau en $\mathbb{C}$-algèbres $\psi : \mathrm{F}_{|\mathrm{U}} \to \mathscr{H}(\mathrm{V})$ (resp. $\psi' : \mathrm{F}_{|\mathrm{U}'} \to \mathscr{H}(\mathrm{V}')$). En particulier, $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ (resp. $(\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$) est une pseudocarte topologique sur M. Pour simplifier les notations, on introduit $\psi = \varphi_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$ et $\psi' = \varphi'_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$, $\mathrm{W} = \varphi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\mathrm{W}' = \varphi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$. On en déduit que

$$\psi'^{-1}\mathscr{H}(\mathrm{W}') = (\varphi'^{-1}\mathscr{H}(\mathrm{V}'))_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} = \mathrm{F}_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} = (\varphi^{-1}\mathscr{H}(\mathrm{V}))_{|\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'} = \psi^{-1}\mathscr{H}(\mathrm{W})$$

Ainsi $\psi\circ\psi'^{-1}$ et $\psi'\circ\psi^{-1}$ sont holomorphes et les ouverts de $\mathcal{O}$ forment un atlas sur M auquel on peut attacher une structure de prévariété holomorphe (remarque 1.54). Par ailleurs, $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ est une pseudocarte topologique pour la structure de prévariété holomorphe qu'on a construite sur M. Grâce à l'isomorphisme associé à φ, le faisceau $\mathrm{F}_{|\mathrm{U}}$ s'identifie à $\mathscr{H}(\mathrm{U})$ (voir l'application 1.112). Ainsi F et $\mathscr{H}(\mathrm{M})$ sont isomorphes. ■

On a définit le faisceau des fonctions holomorphes au-dessus d'une prévariété. On étudie maintenant les fibres de ce faisceau : ce sont des anneaux locaux appelés anneaux des germes de fonctions holomorphes. Ces anneaux jouent un rôle important dans la suite puisque la construction et les propriétés de l'espace tangent en un point d'une prévariété repose leurs propriétés (voir la proposition-définition 1.200 et la proposition 1.203).

Proposition-Définition 1.131 — Germes de fonctions holomorphes. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $x \in \mathrm{M}$. On note

$$\mathscr{H}_x(\mathrm{M}) = \varinjlim_{x\in\mathrm{U}} \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$$

la $\mathbb{C}$-*algèbre des germes des fonctions holomorphes en* $x \in \mathrm{M}$ et

$$\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}} : \mathscr{H}_x(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

le *morphisme d'évaluation en* x. L'algèbre $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ est une $\mathbb{C}$-algèbre locale de corps résiduel $\mathbb{C}$ et on a la somme directe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathscr{H}_x(\mathrm{M}) = \mathbb{C}1 \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}})$.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une prévariété holomorphe et $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. On pose $f(x) = y \in \mathrm{M}'$. La composition par f induit un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres locales $f_x^* : \mathscr{H}_y(\mathrm{M}') \to \mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ qui vérifient $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}} \circ f_x^* = \mathrm{ev}_y^{\mathrm{M}}$.

De plus, on a $\mathrm{id}_x^* = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_x(\mathrm{M})}$. Pour $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$ une prévariété holomorphe et $g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}', \mathrm{M}'')$. On a $(g \circ f)_x^* = f_x^* \circ g_y^*$.

Preuve. On reprend les notations de la proposition 1.130. Pour $\mathrm{W} \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ avec $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$, on dispose des morphismes de $\mathbb{C}$-algèbres $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}$, $\rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}}$ et $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{W}}$. Ils vérifient

$$\rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}} \circ \rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}} = \rho_{\mathrm{U},\mathrm{W}} \qquad \text{et} \qquad \rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}} = \mathrm{id}_{\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})}.$$

Ainsi,
$$\mathrm{I}_{\mathrm{M},x} = ((\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathrm{M}))_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})}, (\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}})_{\mathrm{V}\subset\mathrm{U},\ \mathrm{U},\mathrm{V}\in\mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})})$$

est un système inductif de $\mathbb{C}$-algèbres. De plus, pour $\mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$, on a $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \subset \mathrm{V}$ et $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$. Ainsi le système inductif $\mathrm{I}_{\mathrm{M},x}$ est filtrant. On définit alors

$$\Xi_{\mathrm{M},x} = \bigsqcup_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})} \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})\,.$$

Un élément de $\Xi_{\mathrm{M},x}$ est donc une fonction holomorphe définie sur un ouvert de M contenant x. Pour un élément f de $\Xi_{\mathrm{M},x}$, on note $\mathrm{def}(f)$ l'ouvert de définition de f. Comme le système inductif $\mathrm{I}_{\mathrm{M},x}$ est filtrant, on peut définir sa limite inductive $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ comme quotient de l'ensemble $\Xi_{\mathrm{M},x}$ par la relation d'équivalence donnée par

$$f\,\mathscr{R}\,g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists\,\mathrm{W} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M}), \quad \mathrm{W} \subset \mathrm{def}(f) \cap \mathrm{def}(g), \quad f_{|\mathrm{W}} = g_{|\mathrm{W}}\,.$$

On note alors $\pi : \Xi_{\mathrm{M},x} \to \Xi_{\mathrm{M},x}/\mathscr{R}$ la surjection canonique et, pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$, $\lambda_{\mathrm{U},x} : \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}) \to \mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ le morphisme d'algèbres canonique. De plus, pour $f \in \Xi_{\mathrm{M},x}$, on note $\overline{f}$ plutôt que $\pi(f)$ ou $\lambda_{\mathrm{def}(f),x}(f)$.

Par ailleurs, pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$, on définit le morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathrm{ev}_{x,\mathrm{U}}\colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad f \qquad \longmapsto f(x)\,. \end{cases}$$

Pour $\mathrm{V}\subset\mathrm{U}$ avec $\mathrm{V},\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$, on a $\mathrm{ev}_{x,\mathrm{U}}=\mathrm{ev}_{x,\mathrm{V}}\circ\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}$. La propriété universelle de la limite inductive donne alors un unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}:\varinjlim_{x\in\mathrm{U}}\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})\to\mathbb{C}$$

vérifiant $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}\circ\lambda_{\mathrm{U},x}=\mathrm{ev}_{x,\mathrm{U}}$. Ce morphisme d'algèbres vérifie, $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}\big(\overline{f}\big)=f(x)$ pour tout $\overline{f}\in\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$.

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$, si f est l'application constante sur M égale à λ, on a $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}\big(\overline{f}\big)=\lambda$. Ainsi $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}$ est surjective. Son noyau $\mathfrak{m}$ est donc un idéal maximal de $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$. Par ailleurs, soit $\gamma\notin\mathfrak{m}$, il existe $\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$ et $f\in\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$ tel que $\lambda_{\mathrm{U},x}(f)=\overline{f}=\gamma$ et $f(x)\neq 0$. Par continuité, il existe alors $\mathrm{V}\in\mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}}(x)$ tel que $f(y)\neq 0$ pour tout $y\in\mathrm{V}$. On en déduit que $g=\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(f)=f_{|\mathrm{V}}\in\mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C}^*)$ (voir l'exemple 1.99 et l'application 1.98). Par composition avec l'application $x\mapsto x^{-1}$ (voir l'exemple 1.91), on obtient que $g^{-1}\in\mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C}^*)$ et donc $g^{-1}\in\mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C})$ (voir l'exemple 1.99). On a alors

$$\gamma\overline{g^{-1}}=\overline{f}\,\overline{g^{-1}}=\lambda_{\mathrm{U},x}(f)\lambda_{\mathrm{V},x}(g^{-1})=\lambda_{\mathrm{V},x}(\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(f))\lambda_{\mathrm{V},x}(g^{-1})=\lambda_{\mathrm{V},x}(g)\lambda_{\mathrm{V},x}(g^{-1})=\lambda_{\mathrm{V},x}(1)=1_{\mathscr{H}_x(\mathrm{M})}\,.$$

et γ est inversible dans f. Ainsi ${}^{\mathrm{c}}\mathfrak{m}\subset\mathscr{H}_x(\mathrm{M})^\times$ et $\mathfrak{m}$ est donc l'unique idéal maximal de $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ et vérifie $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})/\mathfrak{m}\overset{\mathbb{C}\text{-alg.}}{\simeq}\mathbb{C}$. En particulier, on en déduit que $\mathfrak{m}$ est un hyperplan de $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$. Comme $1\notin\mathfrak{m}$, on obtient la décomposition souhaitée.

Pour $\mathrm{U}'\in\mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}'}(f(x))$, on a $f^{-1}(\mathrm{U}')\in\mathrm{Ouv}_x(\mathrm{M})$ et on note $f_{\mathrm{U}'}:f^{-1}(\mathrm{U}')\to\mathrm{U}'$, l'application induite par f. D'après l'application 1.100, $f_{\mathrm{U}'}$ est holomorphe. L'application 1.105 montre alors que l'application

$$\mathrm{Comp}(f,\mathrm{U}')\colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U}',\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{U}'),\mathbb{C}) \\ \quad g \qquad \longmapsto g\circ f_{\mathrm{U}'} \end{cases}$$

est bien définie et est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. Soit $\mathrm{V}'\in\mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}'}(f(x))$ avec $\mathrm{V}'\subset\mathrm{U}'$, on a

$$\mathrm{Comp}(f,\mathrm{V}')\circ\rho_{\mathrm{U}',\mathrm{V}'}=\rho_{f^{-1}(\mathrm{U}'),f^{-1}(\mathrm{V}')}\circ\mathrm{Comp}(f,\mathrm{U}').$$

Ainsi, comme $\lambda_{f^{-1}(\mathrm{V}'),x}\circ\rho_{f^{-1}(\mathrm{U}'),f^{-1}(\mathrm{V}')}=\lambda_{f^{-1}(\mathrm{U}'),x}$, les morphismes de $\mathbb{C}$-algèbre $\mathrm{Comp}_{\mathrm{U}',x}$ définis par

$$\mathrm{Comp}_{\mathrm{U}',x}=\lambda_{f^{-1}(\mathrm{U}'),x}\circ\mathrm{Comp}(f,\mathrm{U}'):\mathscr{H}(\mathrm{U}',\mathbb{C})\to\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$$

vérifient
$$\mathrm{Comp}_{\mathrm{V}',x}\circ\rho_{\mathrm{U}',\mathrm{V}'}=\mathrm{Comp}_{\mathrm{U}',x}\,.$$

La propriété universelle de la limite inductive de $\mathbb{R}$-algèbre fournit alors un unique morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $f_x^*:\mathscr{H}_y(\mathrm{M}')\to\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ vérifiant $f_x^*\circ\lambda_{\mathrm{U}',y}=\mathrm{Comp}_{\mathrm{U}',x}$ pour tout $\mathrm{U}'\in\mathrm{Ouv}_y(\mathrm{M}')$. De plus, pour $g\in\Xi_{\mathrm{M}',f(x)}$, on note $\overline{g}$ son image dans $\mathscr{H}_{f(x)}(\mathrm{M}')$ et $\mathrm{U}'=\mathrm{def}(g)$ son ensemble de définition. Par construction de f_x^*, on a alors

$$f_x^*(\overline{g})=f_x^*(\lambda_{\mathrm{U}',y}(g))=\mathrm{Comp}_{\mathrm{U}',x}(g)=\lambda_{f^{-1}(\mathrm{U}'),x}\circ\mathrm{Comp}(f,\mathrm{U}')(g)=\overline{g\circ f_{\mathrm{U}'}}\,. \tag{1}$$

On en déduit alors, par construction de $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}$, que

$$\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}(f_x^*(\overline{g}))=g(f_{\mathrm{U}'}(x))=g(f(x))=g(y)=\mathrm{ev}_y^{\mathrm{M}'}(\overline{g})\,.$$

En particulier, si $\mathfrak{m}_y=(\mathrm{ev}_y^{\mathrm{M}'})^{-1}(0)$ (resp. $\mathfrak{m}_x=(\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}})^{-1}(0)$) désigne l'idéal maximal de $\mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$ (resp. $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$), on a $f_x^*(\mathfrak{m}_y)\subset\mathfrak{m}_x$ et f_x^* est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres locales.

Montrons les propriétés de fonctorialité. L'égalité (**1**) montre que $\mathrm{id}_x^*(\overline{g})=\overline{g}$. De plus, si $h\in\Xi_{\mathrm{M}'',g(f(x))}$, on note $\overline{h}$ son image dans $\mathscr{H}_{g(f(x))}(\mathrm{M}'')$. Comme $(g\circ f)_{\mathrm{def}(h)}=g_{\mathrm{def}(h)}\circ f_{g^{-1}(\mathrm{def}(h))}$ et $h\circ g_{\mathrm{def}(h)}\in\Xi_{\mathrm{M}',f(x)}$ et vérifie $\mathrm{def}(h\circ g_{\mathrm{def}(h)})=g^{-1}(\mathrm{def}(h))$, l'égalité (**1**) donne

$$(g\circ f)_x^*\big(\overline{h}\big)=\overline{h\circ(g\circ f)_{\mathrm{def}(h)}}=\overline{h\circ g_{\mathrm{def}(h)}\circ f_{g^{-1}(\mathrm{def}(h))}}=f_x^*\big(\overline{h\circ g_{\mathrm{def}(h)}}\big)=f_x^*\circ g_y^*\big(\overline{h}\big)\,. \qquad \blacksquare$$

Remarque 1.132 – Décomposition en somme directe. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $x\in\mathrm{M}$. Pour $f\in\Xi_{\mathrm{M},x}$, la décomposition de $\overline{f}$ suivant la somme directe $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})=\mathbb{C}1\oplus\mathrm{Ker}\,(\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}})$ est donnée par

$$\overline{f}=f(x)1+\overline{f-f(x)1}\,.$$

En effet, on a $f(x)1\in\mathbb{C}1$ et $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}\big(\overline{f-f(x)1}\big)=(f-f(x)1)(x)=0$. $\blacksquare$

Les morphismes d'évaluation en différents points d'une prévariété permettent de définir sur $\mathbb{C}$ des structures structures de modules sur les anneaux des germes de fonctions holomorphes. Dans la remarque qui suit, on compare ces différentes structures de modules sur $\mathbb{C}$.

Remarque 1.133 — Structure de module. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $x \in \mathrm{M}$. Le morphisme $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}$ munit $\mathbb{C}$ d'une structure de $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$-module que l'on note $\mathbb{C}_{x,\mathrm{M}}$.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une prévariété holomorphe, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ une application holomorphe et $y = f(x) \in \mathrm{M}'$. L'application $f_x^* : \mathscr{H}_y(\mathrm{M}') \to \mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. Ainsi, par restriction des scalaires via f_x^*, le $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$-module $\mathbb{C}_{x,\mathrm{M}}$ hérite d'une structure de $\mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$-module. Montrons que cette structure de $\mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$-module sur $\mathbb{C}$ n'est autre que la structure $\mathbb{C}_{y,\mathrm{M}'}$.

Soient $v \in \mathbb{C}$ et $g \in \mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$. On désigne par $g \cdot_x v$ l'image de v par g agissant sur $\mathbb{C}$ par restriction des scalaires via f_x^* et par $g \cdot_y v$ l'image de v par g agissant sur $\mathbb{C}_{y,\mathrm{M}'}$. Comme $\mathrm{ev}_y^{\mathrm{M}'} = \mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}} \circ f_x^*$, on a

$$g \cdot_x v = f_x^*(g) \cdot v = \mathrm{ev}_{\mathrm{M}}^x(f_x^*(g))v = \mathrm{ev}_{\mathrm{M}'}^y(g)v = g \cdot_y v\,.$$

On obtient bien l'égalité entre les deux structures de $\mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$-module sur $\mathbb{C}$. ■

L'inclusion d'un ouvert dans une prévariété à la remarquable propriété que i_x^* soit un isomorphisme et permettent ainsi d'identifier les germes de fonctions holomorphes en $x \in \mathrm{U}$ au germes de fonctions holomorphes en $x \in \mathrm{M}$. Cette propriété traduit une nouvelle fois la propriété de localité des fonctions holomorphes.

Remarque 1.134 — Restriction. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, U un ouvert de M et $x \in \mathrm{U}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion qui est holomorphe (exemple 1.92). Montrons que l'application i_x^* réalise un isomorphisme entre $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ et $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$.

Soit $g \in \Xi_{\mathrm{U},x}$ (resp. $g \in \Xi_{\mathrm{M},x}$) ; on note $\overline{g}^{\mathrm{U}}$ (resp. $\overline{g}^{\mathrm{M}}$) son image dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$ (resp. $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$).

Montrons que i_x^* est surjective. Soit $\gamma \in \mathscr{H}_x(\mathrm{U})$. Il existe un ouvert V de U contenant x et $g \in \mathscr{H}(\mathrm{V}, \mathbb{C})$ tel que $\overline{g}^{\mathrm{U}} = \gamma$. L'ensemble de définition de g est un ouvert de U, donc de M, contenant x. Ainsi $g \in \Xi_{\mathrm{M},x}$. De plus, on a $i^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{V} \cap \mathrm{U} = \mathrm{V}$ et l'application i_{V} induite par i entre $i^{-1}(\mathrm{V})$ et V n'est autre que id_{V}. L'égalité (**1**) donne alors

$$i_x^*\big(\overline{g}^{\mathrm{M}}\big) = \overline{g \circ i_{\mathrm{V}}}^{\mathrm{U}} = \overline{g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{V}}}^{\mathrm{U}} = \overline{g}^{\mathrm{U}} = \gamma\,. \tag{2}$$

Ainsi i_x^* est surjective.

Montrons que i_x^* est injective. Soit $\gamma \in \mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ tel que $i_x^*(\gamma) = 0$. Il existe un ouvert V de M contenant x et $g \in \mathscr{H}(\mathrm{V}, \mathbb{C})$ tel que $\overline{g}^{\mathrm{M}} = \gamma$. Par ailleurs, on note $\lambda : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ l'application constante égale à 0 et $i_{\mathrm{V}} : i^{-1}(\mathrm{V}) \to \mathrm{V}$ l'application induite par i. L'égalité (**1**) donne alors

$$0 = \overline{\lambda}^{\mathrm{U}} = i_x^*\big(\overline{g}^{\mathrm{M}}\big) = \overline{g \circ i_{\mathrm{V}}}^{\mathrm{U}} = \overline{g_{|_{\mathrm{V}\cap\mathrm{U}}}}^{\mathrm{U}}\,.$$

Par définition de la relation d'équivalence sur $\Xi_{\mathrm{U},x}$, il existe $\mathrm{W} \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ avec W ouvert de U contenant x tel que $g_{|_{\mathrm{W}}} = \lambda_{|_{\mathrm{W}}} = 0$. Comme W est un ouvert de M contenant x, on en déduit, par définition de la relation d'équivalence sur $\Xi_{\mathrm{M},x}$, que $\overline{g}^{\mathrm{M}} = \overline{\lambda}^{\mathrm{M}} = 0$. Ainsi i_x^* est injective.

De plus, la bijection réciproque de i_x^* est donnée par

$$(i_x^*)^{-1} : \begin{cases} \mathscr{H}_x(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathscr{H}_x(\mathrm{M}) \\ \overline{g}^{\mathrm{U}} \quad \longmapsto \overline{g}^{\mathrm{M}}\,. \end{cases}$$

En effet, l'égalité (**2**) montre que, pour $g \in \Xi_{\mathrm{U},x}$, l'élément $\overline{g}^{\mathrm{M}}$ est l'antécédent de $\overline{g}^{\mathrm{U}}$ par i_x^*. ■

Proposition 1.135 — Application holomorphe. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{N}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application continue. Pour U ouvert de N, on note $f_{\mathrm{U}} : f^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ l'application induite par f. L'application f est holomorphe si et seulement si pour tout ouvert U de N et tout $g \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$, on a $g \circ f_{\mathrm{U}} \in \mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathbb{C})$.

Preuve. (⇒) Comme f est continue, $f^{-1}(\mathrm{U})$ est ouvert dans M et peut donc être muni d'une structure prévariété holomorphe (exemple 1.61). Ainsi $\mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathbb{C})$ a bien un sens. De plus, comme $f(f^{-1}(\mathrm{U})) \subset \mathrm{U}$, l'application 1.100 montre que $f_{\mathrm{U}} \in \mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathrm{U})$. Par composition, on en déduit que $g \circ f_{\mathrm{U}} \in \mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{U}), \mathbb{C})$.
(⇐) Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi)$ une carte de $\mathscr{A}$ et $\mathcal{V} = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \varphi')$ une carte de $\mathscr{B}$. On va montrer que l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est holomorphe. Comme f est continue, $f^{-1}(\mathrm{U}')$ est ouvert dans M et donc $\mathrm{W} = \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}')$ aussi. On note alors, pour simplifier, ψ le transfert de la carte $\mathcal{U}_{|_{\mathrm{W}}}$. L'exemple 1.112 montre que $\psi^{-1} : \varphi(\mathrm{W}) \to \mathrm{W}$ est holomorphe. Par ailleurs, pour $i \in [\![1\,, n']\!]$, on note $\pi_i : \mathrm{V}' \to \mathbb{C}$ la restriction à V′ de l'application i^{e} coordonnée. Comme π_i est holomorphe et $\varphi' \in \mathscr{H}(\mathrm{U}', \mathrm{V}')$ (application 1.86), on en déduit que $\pi_i \circ \varphi' \in \mathscr{H}(\mathrm{U}', \mathbb{C})$. L'hypothèse montre alors que $f_i = (\pi_i \circ \varphi') \circ f_{\mathrm{U}'} \in \mathscr{H}(f^{-1}(\mathrm{U}'), \mathbb{C})$. L'application 1.98 montre que la restriction à W de f_i est holomorphe. Par composition, on obtient que $f_i \circ \psi^{-1} \in \mathscr{H}(\varphi(\mathrm{W}), \mathbb{C})$. L'exemple 1.89 montre que l'application $f_i \circ \psi^{-1}$ est holomorphe au sens classique. Or $f_i \circ \psi^{-1}$ n'est autre que la i^{e} coordonnée de l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$. Comme une application entre un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et un ouvert de $\mathbb{C}^{n'}$ est holomorphe si et seulement si ses n' coordonnées le sont, on en déduit que l'application

f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ est holomorphe. Comme f est continue, la proposition-définition 1.81 (iv) montre que $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$. ■

1.5 FIBRÉ VECTORIEL

Dans cette section, on définit les fibrés vectoriels holomorphes et les morphismes entre fibrés vectoriels holomorphes. Ces notions généralisent la notion d'espaces vectoriels complexes et d'applications linéaires (voir les exemples 1.143 et 1.151). En fait, on a un ensemble d'espaces vectoriels ou d'applications linéaires et ces espaces vectoriels ou ces applications linéaires changent avec le point de la prévariété de base au-dessus de laquelle on se place (définitions 1.137 et 1.148). Le concept de fibré vectoriel mène à la notion de section (voir la sous-section 1.5.4) et à l'étude des $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-modules localement libres (voir la proposition 1.179). Par ailleurs, les fibrés vectoriels fournissent un cadre général dans lequel rentre les fibrés tangent et cotangent. Enfin, dans la sous-section 1.5.5, on donne des méthodes de constructions de fibrés vectoriels holomorphes (propositions 1.182 et 1.186) et des méthodes de construction de morphismes de fibrés vectoriels (propositions 1.189 et 1.192).

1.5.1 FIBRÉS VECTORIELS : DÉFINITION ET EXEMPLES

Dans cette sous-section, on définit les fibrés vectoriels holomorphes et on donne quelques exemples classiques de fibrés vectoriels : fibrés triviaux (exemple 1.144), fibrés produits (exemple 1.146) et fibrés induit par restriction (exemple 1.145). Mais auparavant, on commence par présenter et décrypter une situation qu'on sera amené à rencontrer en permanence lors de l'étude des fibrés vectoriels.

Prolégomènes 1.136 Pour éviter d'alourdir les notations, lorsqu'on rencontrera, dans cette section, la notation p_1 ou p_2, elle désignera toujours la première (resp. deuxième) projection d'un produit de deux ensembles sur le premier (resp. deuxième) facteur. Le cadre de travail indiquera sans ambiguïté les ensembles en question.

Par ailleurs, dans la suite, on rencontrera très souvent la situation suivante : on dispose de trois ensembles $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{F}$ et de deux applications $p : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$, $\varphi : \mathrm{V} \to \mathrm{U} \times \mathrm{F}$ telles que $p = p_1 \circ \varphi$, ou de manière équivalente, on dispose du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{U} \times \mathrm{F} \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{U} & \end{tikzcd}$$

Dans ces conditions, on considère $\mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$. Montrons que $\varphi(p^{-1}(\mathrm{U}')) \subset \{\mathrm{U}'\} \times \mathrm{F} = {p_1}^{-1}(\mathrm{U}')$. Soit $y \in p^{-1}(\mathrm{U}')$. Comme $p_1(\varphi(y)) = p(y) \in \mathrm{U}'$, on obtient l'inclusion souhaité. On en déduit que φ induit une application de $p^{-1}(\mathrm{U}')$ dans $\mathrm{U}' \times \mathrm{F}$ qu'on note $\varphi_{\mathrm{U}'} : p^{-1}(\mathrm{U}') \to \mathrm{U}' \times \mathrm{F}$. De plus, lorsque $\mathrm{U}' = \{x\}$, on la note plutôt φ_x que $\varphi_{\{x\}}$. Finalement, on se retrouve avec le « même » diagramme commutatif que ci-dessus mais au-dessus de U'

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathrm{U}') \arrow[rr, "\varphi_{\mathrm{U}'}"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(\mathrm{U}')}"'] & & \mathrm{U}' \times \mathrm{F} \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{U}' & \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, comme

$$p^{-1}(\mathrm{U}') = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}'} p^{-1}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}' \times \mathrm{F} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}'} {p_1}^{-1}(x) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}'} (\{x\} \times \mathrm{F}),$$

on en déduit que

$$\varphi_{\mathrm{U}'} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}'} \varphi_x \,.$$

En particulier, avec $\mathrm{U}' = \mathrm{U}$, on obtient

$$\mathrm{V} = p^{-1}(\mathrm{U}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} p^{-1}(x), \qquad \mathrm{U} \times \mathrm{F} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} (\{x\} \times \mathrm{F}) \qquad \text{et} \qquad \varphi = \varphi_{\mathrm{U}} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} \varphi_x \,.$$

Ainsi, on en déduit que φ (resp. $\varphi_{\mathrm{U}'}$) est bijective si et seulement si φ_x l'est pour tout $x \in \mathrm{U}$ (resp. $x \in \mathrm{U}'$). Enfin, remarquons que, grâce au critère précédent, la bijectivité de φ implique celle de $\varphi_{\mathrm{U}'}$. ■

DÉFINITION

On arrive à présent à la définition des fibrés vectoriels holomorphes. Comme annoncé, on voit apparaître les espaces vectoriels E_x variant avec le point x de la prévariété de base M. Mais, on ne se contente pas de la simple

existence de cette famille ; on demande en plus des conditions de juxtaposition entre ces espaces pour rigidifier la situation et assurer son intérêt. Ces conditions de juxtaposition sont données par les trivialisations.

Définition 1.137 — Fibré vectoriel. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes. On dit qu'une application $p \in \mathscr{H}(\mathrm{E}, \mathrm{M})$ est un *fibré vectoriel holomorphe* si, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'ensemble $p^{-1}(x)$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel telle que, pour tout $x \in \mathrm{M}$, il existe un voisinage ouvert U de x, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel F de dimension finie et un biholomorphisme $\varphi : p^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times \mathrm{F}$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathrm{U}) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(\mathrm{U})}"'] & & \mathrm{U} \times \mathrm{F} \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{U} & \end{tikzcd}$$

et tels que, pour tout $y \in \mathrm{U}$, l'application $p_2 \circ \varphi_y : p^{-1}(y) \to \mathrm{F}$ soit $\mathbb{C}$-linéaire.

On dit que M est la *base du fibré vectoriel* p, E est l'*espace total*, $\mathrm{E}_x = p^{-1}(x)$ est *la fibre de* p *au-dessus de* x, U un *ouvert distingué* ou *ouvert trivialisant pour* p, φ une *trivialisation de* p *de fibre* F *au-dessus de* U et $(\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$ une *carte trivialisante pour* p. On dit que U est le *domaine* de la carte trivialisante $(\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$.

Lorsqu'on souhaite mettre en avant la base du fibré vectoriel, on utilise l'expression p est un *fibré vectoriel holomorphe au-dessus de* M.

Dans les remarques qui suivent, on explicite quelques conséquences de la définition de fibré vectoriel. On s'intéresse au problème de la linéarité de l'application $p_2 \circ \varphi_y$, aux questions tournant autour de la dimension et du choix des fibres et pour finir au problème des ouverts trivialisants.

Remarque 1.138 — Linéarité. Comme φ est un biholomorphisme, l'application φ_y est bijective (voir les prolégomènes 1.136). De plus, p_2 réalise une bijection entre $\{y\} \times \mathrm{F}$ et F, donc $p_2 \circ \varphi_y : p^{-1}(y) \to \mathrm{F}$ qui est linéaire par hypothèse, est un isomorphisme.

Par ailleurs, Comme p_2 réalise une bijection entre $\{y\} \times \mathrm{F}$ et F, on peut munir $\{y\} \times \mathrm{F}$ d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie par transfert de structure via p_2. Autrement dit, pour $v, w \in \mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose

$$(y, v) + (y, w) = (y, v + w) \qquad \text{et} \qquad \lambda(y, v) = (y, \lambda v).$$

Avec cette structure d'espace vectoriel sur $\{y\} \times \mathrm{F}$, s'assurer que $p_2 \circ \varphi_y$ est linéaire est équivalent à s'assurer que φ_y est linéaire.

En particulier, si U est un ouvert de M, F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : p^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U} \times \mathrm{F}$ une application, alors φ est une trivialisation de p au-dessus de U si et seulement si φ est un biholomorphisme, $p = p_1 \circ \varphi$ et, pour tout $y \in \mathrm{U}$, l'application φ_y est linéaire. ■

Dans la remarque qui suit, on définit (lorsque c'est possible) la notion de rang d'un fibré vectoriel. Elle généralise celle de dimension d'un espace vectoriel : il s'agit de la dimension commune des fibres de p au-dessus de chacun des points de M. La condition de trivialisation assure qu'on peut toujours parler du rang d'un fibré vectoriel lorsque la base est connexe.

Remarque 1.139 — Dimension des fibres. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe. On considère U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U de fibre F.

La remarque 1.138 montre que, pour tout $x \in \mathrm{U}$, l'application $p_2 \circ \varphi_x$ réalise un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $p^{-1}(x)$ sur F. En particulier, l'application $x \mapsto \dim_{\mathbb{C}}(p^{-1}(x))$ est constante sur U égale à $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{F}$.

En considérant pour tout $x \in \mathrm{M}$, un ouvert U_x contenant x et trivialisant pour p, on en déduit que l'application $x \mapsto \dim_{\mathbb{C}}(p^{-1}(x))$ est localement constante donc constante sur chaque composante connexe de M. En particulier, si M est connexe, toutes les fibres de p ont la même dimension.

Si toutes les fibres de p ont la même dimension r, on dit que p est un fibré vectoriel holomorphe de *rang* r. On note alors $\mathrm{rg}\,(p) = r$ pour le rang de p. En particulier, on peut toujours parler du rang d'un fibré vectoriel au-dessus d'une variété connexe. ■

La remarque qui suit montre comment remplacer un espace vectoriel par un autre de même dimension dans une carte trivialisante. On peut ainsi choisir des trivialisation dont la fibre est l'un des espaces vectoriels complexes typiques $\mathbb{C}^\ell$.

Remarque 1.140 — Choix de la fibre d'une trivialisation. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe. On considère U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U de fibre F. On va construire une trivialisation de p au-dessus de U dont la fibre est l'un des $\mathbb{C}^\ell$.

Soient G un $\mathbb{C}$-espace vectoriel vérifiant $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{F} = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{G}$ et $f : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire. Montrons que l'application $\psi = (\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times f) \circ \varphi$ est une trivialisation de p au-dessus de U de fibre G.

Comme f est un biholomorphisme, on en déduit que $\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times f : \mathrm{U} \times \mathrm{F} \to \mathrm{U} \times \mathrm{G}$ est un biholomorphisme de biholomorphisme réciproque $\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times f^{-1}$ (voir l'application 1.104). Ainsi, ψ est un biholomorphisme, $p_1 \circ \psi = p$ et $p_2 \circ \psi_x = p_2 \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times f) \circ \varphi_x = f \circ p_2 \circ \varphi_x$ est linéaire. En prenant $\mathrm{G} = \mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{F}}$, on obtient le résultat voulu. ■

La remarque qui suit est aux fibrés vectoriels ce que la proposition 1.127 est aux prévariétés. Chacun des points de l'espace de base admet une base de voisinages formée d'ouverts trivialisant. En fait, comme dans le cas des cartes d'un atlas (voir le lemme 1.51), si U est un ouvert trivialisant alors tout ouvert contenu dans U est encore un ouvert trivialisant pour la « même » trivialisation.

Remarque 1.141 — Ouvert trivialisant. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe. Soient U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U. Montrons que tout ouvert U′ contenu dans U est un ouvert trivialisant pour p et que $\varphi_{\mathrm{U}'}$ est une trivialisation de p au-dessus de U′ (la notation $\varphi_{\mathrm{U}'}$ est définie dans les prolégomènes 1.136).

Comme φ est un biholomorphisme, que $p^{-1}(\mathrm{U}')$ (resp. $\mathrm{U}' \times \mathrm{F}$) est un ouvert de $p^{-1}(\mathrm{U})$ (resp. $\mathrm{U} \times \mathrm{F}$), l'exemple 1.114 montre que $\varphi_{\mathrm{U}'}$ est un biholomorphisme. De plus, par restriction, le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathrm{U}') \arrow[rr, "\varphi_{\mathrm{U}'}"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(\mathrm{U}')}"'] & & \mathrm{U}' \times \mathrm{F} \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{U}' & \end{tikzcd}$$

est commutatif et $p_2 \circ (\varphi_{\mathrm{U}'})_y = p_2 \circ \varphi_y : p^{-1}(y) \to \mathrm{F}$ est linéaire pour tout $y \in \mathrm{U}'$.

Comme, pour tout $x \in \mathrm{M}$, il existe un ouvert trivialisant contenant x, on en déduit que les ouverts trivialisant contenant x forment une base de voisinage de x. De plus, en considérant l'intersection d'un domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ en x et d'un ouvert trivialisant pour p, le lemme 1.51 et ce qui précède montre qu'on peut choisir un ouvert trivialisant contenant x qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ en x. ■

Avant de passer aux exemples de fibrés vectoriels, terminons par une dernière remarque. Celle-ci généralise la remarque 1.141 au cas d'un nombre fini de fibrés vectoriels : on peut trouver une base d'ouvert de M qui trivialisent tous les fibrés vectoriels simultanément.

Remarque 1.142 — Trivialisation commune. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{E}_1, \mathscr{B}_1)$, $(\mathrm{E}_2, \mathscr{B}_2)$ trois prévariétés holomorphes et $p_1 : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{M}$ et $p_2 : \mathrm{E}_2 \to \mathrm{M}$ deux fibrés vectoriels holomorphes.

Pour $j \in \{1, 2\}$ et pour $x \in \mathrm{M}$, il existe un ouvert trivialisant U_j pour p_j contenant x. La remarque 1.141 montre que $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$ est un ouvert trivialisant à la fois pour p_1 et p_2. En appliquant une nouvelle fois la remarque 1.141, on en déduit que les ouverts contenant x qui trivialisent simultanément p_1 et p_2 forment une base de voisinage de x.

Ainsi, en considérant $(\mathrm{U}_x)_{x \in \mathrm{M}}$ une famille d'ouverts qui trivialisent simultanément p_1 et p_2 tels que $x \in \mathrm{U}_x$ pour tout $x \in \mathrm{M}$, on obtient un recouvrement ouvert de M par des ouverts qui trivialisent simultanément p_1 et p_2. ■

EXEMPLES DE FIBRÉS VECTORIELS

Le premier exemple montre comment la notion de fibré vectoriel généralise celle d'espace vectoriel. Si M est une prévariété réduite à un point alors un fibré vectoriel au-dessus de M n'est rien d'autre qu'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exemple 1.143 — Fibré au-dessus d'un point. Soient $\mathrm{M} = \{x\}$ une prévariété réduite à un point (voir l'exemple 1.74), E une prévariété holomorphe et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe alors $\mathrm{E} = p^{-1}(\{x\})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Réciproquement, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel alors l'application constante $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ est un fibré vectoriel holomorphe. En effet, p est holomorphe puisque constante. De plus, $p^{-1}(x) = \mathrm{E}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et l'application $\varphi : e \in \mathrm{E} \to (x, e) \in \{x\} \times \mathrm{E}$ est une trivialisation de p au-dessus de l'ouvert $\{x\}$ de M. En effet, l'application $p_2 \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ est linéaire et on a $p_1 \circ \varphi = p$. De plus, comme p et id_{E} sont holomorphes, l'application φ est holomorphe (voir l'exemple 1.103) et, comme φ^{-1} est la deuxième projection, φ^{-1} est aussi holomorphe (voir l'exemple 1.94). On en déduit que φ est un biholomorphisme et donc une trivialisation de p. Ainsi p est bien un fibré vectoriel.

Finalement se donner un fibré vectoriel au-dessus d'un point revient à se donner un espace vectoriel complexe. ■

Dans l'exemple qui suit, on étudie les fibrés triviaux qui, par l'intermédiaire des trivialisations sont les exemples typiques de fibrés vectoriels (voir l'exemple 1.169).

Exemple 1.144 — Fibré trivial. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. La première projection $p_1 : \mathrm{M} \times \mathrm{F} \to \mathrm{M}$ de la prévariété holomorphe produit $\mathrm{M} \times \mathrm{F}$ dans M est un fibré vectoriel holomorphe appelé *fibré vectoriel trivial sur* M *de fibre* F et noté $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$. En effet, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'ensemble ${p_1}^{-1}(x) = \{x\} \times \mathrm{F}$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie (grâce à celle de F via p_2). De plus, pour tout $x \in \mathrm{M}$, M est un voisinage ouvert de x, le diagramme

$$\begin{tikzcd} {p_1}^{-1}(\mathrm{M}) = \mathrm{M} \times \mathrm{F} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathrm{M}\times\mathrm{F}}"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \mathrm{M} \times \mathrm{F} \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{M} & \end{tikzcd}$$

est commutatif et $\mathrm{id}_{\mathrm{M}\times\mathrm{F}}$ est un biholomorphisme. Enfin, $(\mathrm{id}_{\mathrm{M}\times\mathrm{F}})_x = \mathrm{id}_{\{x\}\times\mathrm{F}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire par définition de la structure d'espace vectoriel sur M. On conclut grâce à la remarque 1.138.

Si $\mathrm{F} = \{0\}$ est l'espace vectoriel nul, on note $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{0}$ le fibré trivial associé. On dit que $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{0}$ est le fibré nul au-dessus de M. ■

On a vu dans l'exemple 1.61 que tout ouvert d'une prévariété est aussi une prévariété. L'exemple suivant généralise aux fibrés vectoriels ce principe : un fibré vectoriel induit par restriction un fibré vectoriel au-dessus de chacun des ouverts de la base. De plus, on verra à l'exemple 1.152 que cette restriction se comporte aussi bien pour les morphismes de fibrés vectoriels que la restriction à un ouvert ne le fait pour les applications holomorphes (voir les exemples 1.92 et 1.99).

Exemple 1.145 — Restriction d'un fibré à un ouvert. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe et U un ouvert de M. Montrons que l'application $p_{\mathrm{U}} : p^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ induite par p est un fibré vectoriel holomorphe.

Comme p est continue, $p^{-1}(\mathrm{U})$ est un ouvert de E et admet donc une structure de prévariété holomorphe (exemple 1.61). De plus, l'application p_{U} est holomorphe (voir l'application 1.100).

Soit $x \in \mathrm{U}$. L'ensemble ${p_{\mathrm{U}}}^{-1}(x) = p^{-1}(x)$ est muni d'une structure d'espace vectoriel. Soient U' est un ouvert trivialisant pour p contenant x et φ une trivialisation de p au-dessus de U' de fibre F. L'ensemble $\mathrm{U}' \cap \mathrm{U}$ est un ouvert de U contenant x. Comme ${p_{\mathrm{U}}}^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') = p^{-1}(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$, la remarque 1.141 montre que $\varphi_{\mathrm{U}\cap\mathrm{U}'}$ est une trivialisation de p_{U} au-dessus de $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$. Ainsi p_{U} est bien un fibré vectoriel holomorphe.

Par ailleurs, si F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $p = \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ est le fibré trivial de fibre F sur M alors $p_{\mathrm{U}} = \mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{F}}$ est le fibré trivial de fibre F sur U. En effet, on a $p^{-1}(\mathrm{U}) = \mathrm{U} \times \mathrm{F}$. ■

On termine par un exemple plus anecdotique : celui de fibré produit qui sera bien sûr le produit de deux fibrés vectoriels dans la catégorie des fibrés vectoriels (voir la remarque 1.149 et l'exemple 1.153).

Exemple 1.146 — Fibré produit. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}', \mathscr{A}'), (\mathrm{E}, \mathscr{B}), (\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels holomorphes. Montrons que $p \times p' : \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \to \mathrm{M} \times \mathrm{M}'$ est un fibré vectoriel holomorphe.

Soient $(x, x') \in \mathrm{M} \times \mathrm{M}'$. L'ensemble $(p \times p')^{-1}(x, x') = \mathrm{E}_x \times {\mathrm{E}'}_{x'}$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel (produit de celles de E_x et ${\mathrm{E}'}_{x'}$) de dimension finie. On considère U (resp. U') un ouvert trivialisant pour p (resp. p') contenant x (resp. contenant x') et φ (resp. φ') une trivialisation de p (resp. p') au-dessus de U (resp. U') de fibre F (resp. G). L'ensemble $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ est alors un ouvert de $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$ contenant (x, x'). De plus, $(p \times p')^{-1}(\mathrm{U} \times \mathrm{U}') = p^{-1}(\mathrm{U}) \times {p'}^{-1}(\mathrm{U}')$ et $\varphi \times \varphi'$ est un biholomorphisme de $p^{-1}(\mathrm{U}) \times {p'}^{-1}(\mathrm{U}')$ dans $\mathrm{U} \times \mathrm{F} \times \mathrm{U}' \times \mathrm{G}$. On pose $\sigma : \mathrm{U} \times \mathrm{F} \times \mathrm{U}' \times \mathrm{G} \to (\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \times (\mathrm{F} \times \mathrm{G})$ le biholomorphisme obtenu par permutation des variables et $\psi = \sigma \circ (\varphi \times \varphi')$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (p \times p')^{-1}(\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "p\times p'"'] & & (\mathrm{U} \times \mathrm{U}') \times (\mathrm{F} \times \mathrm{G}) \arrow[dl, "p_1"] \\ & \mathrm{U} \times \mathrm{U}' & \end{tikzcd}$$

est alors commutatif et ψ est un biholomorphisme comme composé de biholomorphisme. Enfin, l'application $\psi_{(x,x')} : \mathrm{E}_x \times {\mathrm{E}'}_{x'} \to \{(x, x')\} \times (\mathrm{F} \times \mathrm{G})$ est bien linéaire. En effet, il s'agit de la composée de l'application linéaire produit de φ_x et ${\varphi'}_{x'}$

$$\varphi_x \times {\varphi'}_{x'} : \mathrm{E}_x \times {\mathrm{E}'}_{x'} \to (\{x\} \times \mathrm{F}) \times (\{x'\} \times \mathrm{G}).$$

et de l'application $\widetilde{\sigma}$ induite par σ

$$\widetilde{\sigma}\colon \begin{cases} (\{x\}\times \mathrm{F})\times(\{x'\}\times \mathrm{G}) \longrightarrow \{(x,x')\}\times(\mathrm{F}\times \mathrm{G}) \\ \qquad ((x,v),(x',w)) \qquad \longmapsto ((x,x'),(v,w)) \end{cases}$$

qui est évidemment linéaire. ■

1.5.2 Morphismes de fibrés vectoriels

Dans cette sous-section, on définit les morphismes de fibrés vectoriels et on illustre cette notion par quelques exemples. On donne ensuite un critère pratique pour qu'un couple d'applications holomorphes soit un morphisme de fibrés vectoriels. Enfin, on construit des structures algébriques sur certains sous-ensembles de morphismes de fibrés vectoriels. Auparavant, on présente une situation utilisée en permanence dans l'étude des morphismes de fibrés vectoriels.

Prolégomènes 1.147 — Application induite. On considère quatre ensemble $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{E}$ et E' et quatre applications $u : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $u' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ et $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$. On suppose que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & \mathrm{E}' \arrow[d, "u'"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "g"] & \mathrm{M}' \end{tikzcd}$$

Soit $x \in \mathrm{M}$. Montrons que $f(u^{-1}(x)) \subset u'^{-1}(g(x))$. Pour $e \in u^{-1}(x)$, on a $u'(f(e)) = g(u(e)) = g(x)$ et donc $f(e) \in u'^{-1}(g(x))$. On en déduit que f induit une application de $u^{-1}(x)$ dans $u'^{-1}(g(x))$ que l'on note pour simplifier f_x.

En effet, en choisissant $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$ et $g = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$, on retrouve la situation des prolégomènes 1.136. La notation f_x introduite ici est donc une généralisation de la notation des prolégomènes 1.136. ■

Définition

On arrive à présent à la définition des morphismes de fibrés vectoriels. Il s'agit de couples de fonctions holomorphes : une application entre les espaces totaux des fibrés vectoriels et une application entre les bases. On demande bien sûr quelques conditions supplémentaires : compatibilité avec les fibrés vectoriels en question (commutativité d'un diagramme) et compatibilité avec la structure vectoriel des fibrés (linéarité des applications induites entre les fibres). Comme annoncé dans l'introduction de la section, la notion de morphisme de fibrés vectoriels généralise celle d'applications linéaires : l'application entre les espaces totaux des fibrés vectoriels est en fait une juxtaposition d'applications linéaires (les f_x pour $x \in \mathrm{M}$).

Définition 1.148 — Morphisme de fibrés vectoriels. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels holomorphes. On dit qu'un couple (f, g) formé d'une application $f \in \mathscr{H}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$ et d'une application $g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ est un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{E}' \arrow[d, "p'"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "g"] & \mathrm{M}' \end{tikzcd}$$

et, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $f_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_{g(x)}$ est linéaire (voir les prolégomènes 1.147 pour la définition de f_x).

On note $\mathrm{Hom}(p, p')$ l'ensemble des morphismes de fibrés vectoriels holomorphes de p dans p' et

$$\mathrm{Hom}^g(p, p') = \{f \in \mathscr{H}(\mathrm{E}, \mathrm{E}'), \quad p' \circ f = g \circ p, \quad \forall\, x \in \mathrm{M},\ f_x \text{ est linéaire}\}.$$

Autrement dit, $\mathrm{Hom}^g(p, p') = \{f \in \mathscr{H}(\mathrm{E}, \mathrm{E}'), \quad (f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')\}$.

Dans la remarque qui suit, on définit la composition entre morphismes de fibrés vectoriels. Cela assure que les fibrés vectoriels forment une catégorie **Fib**. Cependant la catégorie qui nous intéressera vraiment est la catégorie $\mathbf{Fib}_{\mathbf{M}}$ des fibrés vectoriels au-dessus d'une base fixée M, définie à la remarque 1.166.

Remarque 1.149 — Catégorie des fibrés vectoriels. On cherche à définir la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes. On a défini les objets (définition 1.137) et les morphismes (définition 1.148). Il s'agit de définir la composition de deux morphismes et de vérifier les axiomes des catégories.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ et $(\mathrm{E}'', \mathscr{B}'')$ six prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ et $p'' : \mathrm{E}'' \to \mathrm{M}''$ trois fibrés vectoriels holomorphes, $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')$ et $(f', g') \in \mathrm{Hom}(p', p'')$. On définit alors $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$. Montrons que $(f', g') \circ (f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p'')$.

D'après la proposition 1.96, $f' \circ f \in \mathscr{H}(\mathrm{E}, \mathrm{E}'')$ et $g' \circ g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}'')$. De plus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{E}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & \mathrm{E}'' \arrow[d, "p''"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "g"] & \mathrm{M}' \arrow[r, "g'"] & \mathrm{M}'' \end{tikzcd}$$

commute. Enfin, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $(f' \circ f)_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}''_{g'(g(x))}$ est la composée des applications linéaires $f_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_{g(x)}$ et $f'_{g(x)} : \mathrm{E}'_{g(x)} \to \mathrm{E}''_{g'(g(x))}$. Elle est donc linéaire et $(f', g') \circ (f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p'')$.

Montrons que le couple $\mathrm{id}_p = (\mathrm{id}_\mathrm{E}, \mathrm{id}_\mathrm{M})$ appartient à $\mathrm{Hom}(p, p)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "\mathrm{id}_\mathrm{E}"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{M} \arrow[r, "\mathrm{id}_\mathrm{M}"] & \mathrm{M} \end{tikzcd}$$

commute et, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $(\mathrm{id}_\mathrm{E})_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}_x$ est l'identité et donc linéaire.

Soient $(\mathrm{M}''', \mathscr{A}''')$, $(\mathrm{E}''', \mathscr{B}''')$ deux prévariétés holomorphes, $p''' : \mathrm{E}''' \to \mathrm{M}'''$ un fibré vectoriel holomorphe et $(f'', g'') \in \mathrm{Hom}(p'', p''')$. L'associativité de la composition des applications montre que

$$(f'', g'') \circ ((f', g') \circ (f, g)) = (f'' \circ f' \circ f, g'' \circ g' \circ g) = ((f'', g'') \circ (f', g')) \circ (f, g).$$

De plus, par définition de id_p et $\mathrm{id}_{p'}$, on obtient

$$(f, g) \circ \mathrm{id}_p = (f, g) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_{p'} \circ (f, g) = (f, g).$$

Ainsi les fibrés vectoriels holomorphes forment une catégorie que l'on note **Fib**. ■

Exemple des morphismes de fibrés vectoriels

On commence par l'exemple du morphisme nul. La structure d'espace vectoriel des fibres permet de définir un morphisme nul. Il s'agit d'une généralisation à la fois de la notion de fonctions constantes et de l'application linéaire nulle. En effet, lue à travers les cartes trivialisantes, le morphisme nul est en fait une application constante (ou tout au moins sa deuxième composante est constante) et, pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application linéaire f_x est l'application nulle. Ce morphisme nul sera bien sûr l'élément neutre pour l'addition lorsqu'on munira $\mathrm{Hom}^g(p, p')$ d'une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module (voir la proposition 1.162).

Exemple 1.150 — Morphisme nul. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels holomorphes et $g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. On considère l'application

$$f_g^0 : \begin{cases} \mathrm{E} & \longrightarrow \mathrm{E}' \\ e \in \mathrm{E}_{p(e)} & \longmapsto 0 \in \mathrm{E}'_{g(p(e))} \end{cases}.$$

Montrons que $f_g^0 \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$. Par définition, on a $p' \circ f_g^0(e) = g \circ p(e)$ pour tout $e \in \mathrm{E}$. De plus, pour $x \in \mathrm{M}$, l'application $f_{g\,x}^0 = 0$ est linéaire. Il reste à montrer que f_g^0 est holomorphe. Soient U' un ouvert trivialisant pour p' et φ une trivialisation de p au-dessus de U'. Par continuité de p et g, l'ensemble $\mathrm{W} = p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')) = (f_g^0)^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}'))$ est un ouvert de E. De plus, $f_g^0(\mathrm{W}) \subset p'^{-1}(\mathrm{U}')$ et on peut donc composer la restriction de f_g^0 à W avec φ.

Comme $p_2 \circ \varphi$ est linéaire, on a $p_2 \circ \varphi \circ f_g^0(e) = 0$ pour tout $e \in \mathrm{W}$. Ainsi la restriction à W de $p_2 \circ \varphi \circ f_g^0$ est constante donc holomorphe. De plus, l'holomorphie de p et g assure que

$$p_1 \circ \varphi \circ (f_g^0|_\mathrm{W}) = p' \circ (f_g^0|_\mathrm{W}) = g \circ p|_\mathrm{W} \in \mathscr{H}(\mathrm{W}, \mathrm{M}')$$

est holomorphe. L'exemple 1.103 montre alors que $\varphi \circ (f_g^0|_\mathrm{W})$ est holomorphe. Comme φ est un biholomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1}, que $f_g^0|_\mathrm{W}$ est holomorphe. Par ailleurs, on peut recouvrir M' par des ouverts trivialisants pour p'. De plus, si $(\mathrm{U}'_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est un recouvrement ouvert de M' par des ouverts trivialisants pour p' la famille $(\mathrm{W}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ où $\mathrm{W}_\alpha = p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}'_\alpha))$ est un recouvrement ouvert de E. D'après ce qui précède, la restriction de f_g^0 à chacun des W_α est holomorphe, la proposition 1.101 montre alors que f_g^0 est holomorphe. Ainsi $(f_g^0, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')$ et $f_g^0 \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$. ■

L'exemple qui suit prolonge l'exemple 1.143. Il montre comment les morphismes de fibrés vectoriels généralisent la notion d'applications linéaires : un morphisme entre deux fibrés vectoriels au-dessus d'un point n'est rien d'autre qu'une application linéaire entre les espaces totaux.

Exemple 1.151 — Morphisme et base triviale. Soient $\mathrm{M} = \{x\}$, $\mathrm{M}' = \{x'\}$ deux prévariétés réduites à un point (voir l'exemple 1.74), p (resp. p') un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M (resp. M′) d'espace total E (resp. E′) et $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')$.

L'application g est entièrement déterminée : il s'agit de l'application $x \mapsto x'$. De plus, on a $\mathrm{E} = \mathrm{E}_x$, $\mathrm{E}' = \mathrm{E}'_{x'} = \mathrm{E}'_{g(x)}$ et $f = f_x$. Ainsi $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ est linéaire.

Réciproquement, soient E, E′ sont deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ une application linéaire. On pose $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ (resp. $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$) l'application constante et $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ l'unique application entre M et M′. D'après l'exemple 1.143, p et p' sont deux fibrés vectoriels. Montrons que $f \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$. L'application f est linéaire donc holomorphe. De plus, on a bien sûr $p' \circ f = g \circ p$ et l'application induite par f entre $\mathrm{E}_x = \mathrm{E}$ et $\mathrm{E}'_{g(x)} = \mathrm{E}'$ n'est autre que l'application linéaire f elle-même.

Finalement se donner un morphisme de fibrés vectoriels entre deux fibrés vectoriels au-dessus d'un point revient à se donner une application $\mathbb{C}$-linéaire. ■

L'exemple qui suit généralise les exemples 1.92 et 1.99. Les inclusions donnent un morphisme de fibrés vectoriels entre un fibré vectoriel induit au-dessus d'un ouvert et le fibré initial. De plus, à partir du moment où la deuxième composante d'un morphisme de fibrés vectoriels peut se factoriser par U (c'est-à-dire est à valeurs dans U), on peut aussi factoriser le morphisme en question par le fibré induit.

Exemple 1.152 — Restriction. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{A})$ deux prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe et U un ouvert de M. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ (resp. $j : p^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{E}$) l'inclusion et p_{U} le fibré obtenu par restriction à U (voir l'exemple 1.145). Montrons que $(j, i) \in \mathrm{Hom}(p_{\mathrm{U}}, p)$.

L'exemple 1.92 montre que i et j sont holomorphes. De plus, on a bien sûr $p \circ j = i \circ p_{\mathrm{U}}$ et, pour $x \in \mathrm{U}$, l'application $j_x : p_{\mathrm{U}}^{-1}(x) = p^{-1}(x) \to \mathrm{E}_x = p^{-1}(x)$ n'est autre que l'identité qui est linéaire.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ deux prévariétés holomorphes, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ un fibré vectoriel holomorphe et $g : \mathrm{M}' \to \mathrm{U}$ une application holomorphe. Montrons que l'application

$$\Gamma : \begin{cases} \mathrm{Hom}^g(p', p_{\mathrm{U}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{i \circ g}(p', p) \\ \qquad f \qquad\quad \longmapsto j \circ f \end{cases}$$

est une bijection.

Soit $f \in \mathrm{Hom}^g(p', p_{\mathrm{U}})$. Comme $(j, i) \in \mathrm{Hom}(p_{\mathrm{U}}, p)$, on obtient $(j \circ f, i \circ g) \in \mathrm{Hom}(p', p)$ par composition. Ainsi Γ est bien à valeurs dans $\mathrm{Hom}^{i \circ g}(p', p)$.

Par ailleurs, si $f' \in \mathrm{Hom}^g(p', p_{\mathrm{U}})$ vérifie $\Gamma(f) = j \circ f = j \circ f' = \Gamma(f')$ alors $f = f'$ puisque j est injective. Ainsi Γ est injective.

Enfin, si $f' \in \mathrm{Hom}^{i \circ g}(p', p)$ alors $p \circ f' = i \circ g \circ p'$ et f' est donc à valeurs dans $p^{-1}(\mathrm{U})$. Il existe donc une application holomorphe $f'' : \mathrm{E}'' \to p^{-1}(\mathrm{U})$ telle que $j \circ f'' = f'$ (voir l'exemple 1.99). Montrons que $f'' \in \mathrm{Hom}^g(p', p_{\mathrm{U}})$ et que $\Gamma(f'') = f'$. Par construction, on a $i \circ p_{\mathrm{U}} \circ f'' = p \circ j \circ f'' = p \circ f'$. Or $(f', i \circ g) \in \mathrm{Hom}(p', p)$, ainsi $i \circ p_{\mathrm{U}} \circ f'' = i \circ g \circ p$. Par injectivité de i, on obtient $p_{\mathrm{U}} \circ f'' = g \circ p$. De plus, pour $x \in \mathrm{M}'$, l'application $f''_x : \mathrm{E}'_x \to {p_{\mathrm{U}}}^{-1}(x) = \mathrm{E}_x$ n'est autre que l'application f'_x qui est linéaire. Ainsi $f'' \in \mathrm{Hom}^g(p', p_{\mathrm{U}})$ et $\Gamma(f'') = j \circ f'' = f'$. Finalement Γ est bien bijective. ■

L'exemple qui suit généralise les exemples 1.94 et 1.103. Le fibré vectoriel $p \times p'$ (voir la notation dans l'exemple 1.146) produit de p et p' muni du couple des premières projections et du couple des deuxièmes projections est un produit de p et p' dans la catégorie **Fib**.

Exemple 1.153 — Fibré produit. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}', \mathscr{A}'), (\mathrm{E}, \mathscr{B}), (\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels holomorphes. On note $p_{\mathrm{M}} : \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \to \mathrm{M}$ (resp. $p_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \to \mathrm{E}$) la première projection et $p_{\mathrm{M}'} : \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \to \mathrm{M}'$ (resp. $p_{\mathrm{E}'} : \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \to \mathrm{E}'$) la deuxième projection. Le couple $q = (p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{M}})$ (resp. $q' = (p_{\mathrm{E}'}, p_{\mathrm{M}'})$) est un morphisme de fibrés vectoriels de $p \times p'$ dans p (resp. de $p \times p'$ dans p').

En effet, p_{E} et p_{M} sont holomorphe, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \arrow[r, "p_{\mathrm{E}}"] \arrow[d, "p \times p'"'] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \arrow[r, "p_{\mathrm{M}}"] & \mathrm{M} \end{tikzcd}$$

est commutatif et l'application induite par p_{E} entre $(\mathrm{E} \times \mathrm{E}')_{(x,x')} = \mathrm{E}_x \times \mathrm{E}'_{x'}$ et E_x est la première projection qui est linéaire puisque la structure d'espace vectoriel sur $\mathrm{E}_x \times \mathrm{E}'_{x'}$ est la structure produit de celle de E_x et $\mathrm{E}'_{x'}$. Un raisonnement analogue montre que q' est aussi un morphisme de fibrés vectoriels.

On considère à présent $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$, $(\mathrm{E}'', \mathscr{B}'')$ deux prévariétés holomorphes, $p'' : \mathrm{E}'' \to \mathrm{M}''$ un fibré vectoriel holomorphe et $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p'', p)$ et $(f', g') \in \mathrm{Hom}(p'', p')$. Montrons qu'il existe un unique morphisme F de fibrés vectoriels de p'' dans $p \times p'$ tel que $q \circ \mathrm{F} = (f, g)$ et $q' \circ \mathrm{F} = (f', g')$.

Si un tel $\mathrm{F} = (u, v)$ existe alors, par définition de la composition des morphismes de fibrés vectoriels, on a $(p_{\mathrm{E}} \circ u, p_{\mathrm{M}} \circ v) = (f, g)$ et $(p_{\mathrm{E}'} \circ u, p_{\mathrm{M}'} \circ v) = (f', g')$. La propriété universelle du produit (d'ensembles) appliquée à $\mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ (resp. $\mathrm{M} \times \mathrm{M}'$) montre alors $u : \mathrm{E}'' \to \mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ (resp. $v : \mathrm{M}'' \to \mathrm{M} \times \mathrm{M}'$) est uniquement déterminée. Il s'agit de l'application $e'' \mapsto (f(e''), f'(e''))$ (resp. $m'' \mapsto (g(m''), g'(m''))$). On obtient ainsi la propriété d'unicité.

Par ailleurs, comme f et f' (resp g et g') sont holomorphes, l'exemple 1.103 montre que l'application $u : e'' \mapsto (f(e''), f'(e''))$ (resp. $v : m'' \mapsto (g(m''), g'(m''))$), qui est l'unique application vérifiant $p_{\mathrm{E}} \circ u = f$ et $p_{\mathrm{E}'} \circ u = f'$ (resp. $p_{\mathrm{M}} \circ v = g$ et $p_{\mathrm{M}'} \circ v = g'$), est holomorphe. Montrons que $(u, v) \in \mathrm{Hom}(p'', p \times p')$.

On commence par montrer par deux méthodes que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}'' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p''"'] & \mathrm{E} \times \mathrm{E}' \arrow[d, "p \times p'"] \\ \mathrm{M}'' \arrow[r, "v"] & \mathrm{M} \times \mathrm{M}' \end{tikzcd}$$

commute.

Première méthode. On utilise, dans cette démonstration, l'expression de u et v donnée ci-dessus. Comme $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p'', p)$ et $(f', g') \in \mathrm{Hom}(p'', p')$, on a, pour $e'' \in \mathrm{E}''$,

$$(p \times p') \circ u(e'') = (p \circ f(e''), p' \circ f'(e'')) = (g \circ p''(e''), g' \circ p''(e'')) = (g \times g') \circ p''(e'')\,,$$

ce qui donne le résultat.

Deuxième méthode. On utilise la propriété universelle du produit d'ensembles. Comme $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p'', p)$ et $(p_{\mathrm{E}}, p_{\mathrm{M}}) \in \mathrm{Hom}(p \times p', p)$, on a

$$p_{\mathrm{M}} \circ v \circ p'' = g \circ p'' = p \circ f = p \circ p_{\mathrm{E}} \circ u = p_{\mathrm{M}} \circ (p \times p') \circ u$$

De même, on a $$p_{\mathrm{M}'} \circ v \circ p'' = g' \circ p'' = p \circ f' = p \circ p_{\mathrm{E}'} \circ u = p_{\mathrm{M}'} \circ (p \times p') \circ u.$$

La propriété universelle du produit donne alors $v \circ p'' = (p \times p') \circ u$.

Passons à présent à la propriété de linéarité. Pour $x'' \in \mathrm{M}''$, on a $v(x'') = (g(x''), g'(x''))$ et l'application $u_{x''}$ induite par u est donnée par

$$u_{x''} : \begin{cases} {\mathrm{E}''}_{x''} \longrightarrow (\mathrm{E} \times \mathrm{E}')_{v(x'')} = \mathrm{E}_{g(x'')} \times {\mathrm{E}'}_{g'(x'')} \\ \quad e'' \quad \longmapsto (f(e''), f'(e'')) = (f_{x''}(e''), {f'}_{x''}(e'')) \,. \end{cases}$$

Elle est donc linéaire puisque $f_{x''}$ et ${f'}_{x''}$ le sont.

Ainsi $(p \times p', q, q')$ est un produit de p et p' dans la catégorie des fibrés vectoriels. ■

L'exemple qui suit s'intéresse aux morphismes entre fibrés vectoriels triviaux. Elle montre l'importance de l'application 1.118.

Exemple 1.154 — Morphisme entre fibrés triviaux. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes, F, G deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}} : \mathrm{M} \times \mathrm{F} \to \mathrm{M}$, $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}'}^{\mathrm{G}} : \mathrm{M}' \times \mathrm{G} \to \mathrm{M}'$ les fibrés vectoriels holomorphes triviaux. Montrons que l'application

$$\mathrm{Triv} : \begin{cases} \mathrm{Hom}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}'}^{\mathrm{G}}) \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})) \times \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}') \\ \qquad (f, g) \qquad\qquad \longmapsto ([x \mapsto (v \mapsto (p_2 \circ f)(x, v))], g) \end{cases}$$

est une bijection dont la bijection réciproque est

$$\mathrm{Triv}' : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})) \times \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}') \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}'}^{\mathrm{G}}) \\ \qquad (\delta, g) \qquad\qquad\qquad \longmapsto ((x, v) \mapsto (g(x), \delta(x)(v)), g)\,. \end{cases}$$

Montrons que l'application Triv est bien définie. L'application $(v \mapsto (p_2 \circ f)(x, v))$ est la composée de l'application $v \mapsto (x, v)$ qui est linéaire par définition de la structure d'espace vectoriel sur $\{x\} \times \mathrm{F}$, de l'application $f_x : \{x\} \times \mathrm{F} \to \{f(x)\} \times \mathrm{G}$ qui est linéaire puisque $(f, g) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}'}^{\mathrm{G}})$ et de l'application $(f(x), w) \mapsto w$ qui est linéaire par définition de la structure d'espace vectoriel sur $\{f(x)\} \times \mathrm{G}$. Elle est donc linéaire. Ainsi l'application $\delta : x \mapsto (v \mapsto (p_2 \circ f)(x, v))$ est une application de M à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. De plus, pour tout $(x, v) \in \mathrm{M} \times \mathrm{F}$, on a $\delta(x)(v) = (p_2 \circ f)(x, v)$. Comme $p_2 \circ f \in \mathscr{H}(\mathrm{M} \times \mathrm{F}, \mathrm{G})$, l'application 1.118 (*ii*) montre que $x \mapsto (v \mapsto (p_2 \circ f)(x, v))$ est holomorphe. Ainsi Triv est bien définie.

Montrons à présent que l'application Triv′ est bien définie. On commence par vérifier que l'application $f : (x, v) \mapsto (g(x), \delta(x)(v))$ est holomorphe. La première composante de f est $g \circ \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ qui est holomorphe et la deuxième est holomorphe d'après l'application 1.118 (*iii*). L'exemple 1.103 assure alors l'holomorphie de f. De plus, on a bien sûr, $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}'}^{\mathrm{G}} \circ f = g \circ \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$ et l'application $f_x : \{x\} \times \mathrm{F} \to \{g(x)\} \times \mathrm{G}$ n'est autre que l'application $(x, v) \mapsto (g(x), \delta(x)(v))$ qui, au vu des structures d'espace vectoriel de $\{x\} \times \mathrm{F}$ et de $\{g(x)\} \times \mathrm{G}$ et de la linéarité de $\delta(x)$, est linéaire. Comme $g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$, on en conclut $(f, g) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}'}^{\mathrm{G}})$ et Triv′ est bien définie.

Enfin, pour $(\delta, g) \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})) \times \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$, on a

$$\mathrm{Triv} \circ \mathrm{Triv}'((\delta, g)) = ((x \mapsto (v \mapsto \delta(x)(v))), g) = (x \mapsto \delta(x), g) = (\delta, g).$$

Et, pour $(f, g) \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Triv}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{M}}, \mathrm{Triv}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{M}'})$, on a $\mathrm{Triv}' \circ \mathrm{Triv}((f, g)) = ((x, v) \mapsto (g(x), (p_2 \circ f)(x, v)), g)$. Comme, pour tout $(x, v) \in \mathrm{M} \times \mathrm{F}$, on a $g(x) = (g \circ \mathrm{Triv}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{M}})((x, v)) = (\mathrm{Triv}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{M}'} \circ f)((x, v)) = (p_1 \circ f)((x, v))$, on obtient

$$\mathrm{Triv}' \circ \mathrm{Triv}((f, g)) = ((x, v) \mapsto ((p_1 \circ f)((x, v)), (p_2 \circ f)((x, v))), g) = (f, g).$$

La forme des bijections Triv et Triv′ montre immédiatement que, pour $g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$, les applications

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}^g(\mathrm{Triv}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{M}}, \mathrm{Triv}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{M}'}) & \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})) \\ \qquad f & \longmapsto [x \mapsto (v \mapsto (p_2 \circ f)(x, v))] \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})) & \longrightarrow \mathrm{Hom}^g(\mathrm{Triv}^{\mathrm{F}}_{\mathrm{M}}, \mathrm{Triv}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{M}'}) \\ \qquad \delta & \longmapsto [(x, v) \mapsto (g(x), \delta(x)(v))] \end{cases}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autres. ■

Isomorphisme de fibrés

Comme dans toute catégorie, on peut définir la notion d'isomorphisme dans la catégorie **Fib**. On les appelle isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes.

Définition 1.155 — Isomorphisme de fibrés vectoriels. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés holomorphes, et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels holomorphes. Soit $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')$. On dit que (f, g) est un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes s'il existe $(f', g') \in \mathrm{Hom}(p', p)$ tels que $(f', g') \circ (f, g) = \mathrm{id}_p$ et $(f, g) \circ (f', g') = \mathrm{id}_{p'}$.

On dit que *p et p' sont isomorphes* s'il existe un isomorphisme de fibrés vectoriels de p dans p'.

Remarque 1.156 — Langage catégorique. Un isomorphisme de fibré vectoriel n'est rien d'autre qu'un isomorphisme dans la catégorie des fibrés vectoriels. ■

La remarque suivante donne une caractérisation des isomorphismes de la catégorie **Fib** : un morphisme est un isomorphisme si et seulement si chacune de ses deux composantes est un biholomorphisme. Elle résulte principalement du fait que l'inverse d'une application linéaire bijective est nécessairement linéaire. L'application 1.161 complétera cette caractérisation.

Remarque 1.157 — Biholomorphisme. On reprend les notation de la définition 1.107. On a immédiatement la caractérisation suivante. Soit $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')$. Alors (f, g) est un isomorphisme si et seulement si f et g sont des biholomorphismes.

On suppose que (f, g) est un isomorphisme. Par définition de la composition des morphismes de fibrés, on a $f \circ f' = \mathrm{id}_{\mathrm{E}'}$, $f' \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$, $g \circ g' = \mathrm{id}_{\mathrm{M}'}$ et $g' \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ avec f' et g' holomorphes puisque $(f', g') \in \mathrm{Hom}(p', p)$. Comme f et g sont holomorphes, on en déduit que f et g sont des biholomorphismes.

On suppose f et g sont des biholomorphismes. Comme $p \circ g = f \circ p'$, on obtient que $f^{-1} \circ p = p' \circ g^{-1}$ avec f^{-1} et g^{-1} holomorphes. De plus, pour $y \in \mathrm{M}'$, l'application ${f^{-1}}_y : \mathrm{E}'_y \to \mathrm{E}_{g^{-1}(y)}$ est l'inverse de l'application linéaire $f_x : \mathrm{E}_x \to \mathrm{E}'_{g(x)}$ où $x = g^{-1}(y)$. Elle est donc linéaire. Ainsi $(f^{-1}, g^{-1}) \in \mathrm{Hom}(p', p)$ et $(f, g) \circ (f^{-1}, g^{-1}) = \mathrm{id}_{p'}$ et $(f^{-1}, g^{-1}) \circ (f, g) = \mathrm{id}_p$.

Cette caractérisation permet de donner une autre démonstration dans le cas particulier de la catégorie **Fib** de résultats généraux sur les isomorphismes d'une catégorie : la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme, l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme et id_p est un isomorphisme. La caractérisation ci-dessus et les remarques 1.109 et 1.149 montrent que la composée de deux isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes est un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes. La caractérisation ci-dessus montre que (f^{-1}, g^{-1}) est l'inverse de (f, g) et est un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes. L'exemple 1.84, id_p est isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes d'inverse id_p. Finalement, comme dans toute catégorie, la relation « être isomorphe » est une relation d'équivalence sur tout ensemble de fibrés vectoriels holomorphes. ■

Critères techniques pour être un morphisme de fibrés vectoriels

On va donner ci-dessous une caractérisation technique des morphismes de fibrés vectoriels holomorphes. Le point clé est l'holomorphie de la première composante. Pour simplifier la démonstration, on extrait un lemme technique purement ensembliste.

Lemme 1.158 — Un petit lemme ensembliste. Soient $\mathrm{M}, \mathrm{M}', \mathrm{E}, \mathrm{E}', \mathrm{F}$ et F' six ensembles et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$, $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$, $\varphi : \mathrm{E} \to \mathrm{M} \times \mathrm{F}$ et $\varphi' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}' \times \mathrm{F}'$ six applications telles que φ et φ' soient bijectives et le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \times \mathrm{F} \arrow[dr, "p_1"'] & \mathrm{E} \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & \mathrm{E}' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "p'"'] & \mathrm{M}' \times \mathrm{F}' \arrow[dl, "p_1"] \\
& \mathrm{M} \arrow[r, "g"] & \mathrm{M}' &
\end{tikzcd}$$

Alors, pour tout $(u, f) \in \mathrm{U} \times \mathrm{F}$, on a $(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})(u, f) = (g(u), (p_2 \circ {\varphi'}_{g(u)})^{-1} \circ f_u \circ (p_2 \circ \varphi_u)^{-1}(f))$.

Preuve. Soit $u \in \mathrm{M}$. Comme $p_1 \circ \varphi = p$ et $p_1 \circ \varphi' = p'$, les prolégomènes 1.136 montrent $\varphi_u : p^{-1}(u) \to \{u\} \times \mathrm{F}$ et ${\varphi'}_{g(u)} : (p')^{-1}(g(u)) \to \{g(u)\} \times \mathrm{F}$ sont bien définies et bijectives puisque φ et φ' le sont. Ainsi $p_2 \circ \varphi_u$ est une bijection de $p^{-1}(u)$ sur F et $(p_2 \circ \varphi_u)^{-1}$ est bien défini. Pour finir, les prolégomènes 1.147 montrent que $f_u : p^{-1}(u) \to (p')^{-1}(g(u))$ a bien un sens.

Passons au calcul. On a $(p_2 \circ \varphi_u)^{-1}(f) = {\varphi_u}^{-1} \circ {p_2}^{-1}(f) = {\varphi_u}^{-1}(u, f)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
(\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1})(u, f) &= (p_1 \circ \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(u, f), p_2 \circ \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(u, f)) \\
&= (p' \circ f \circ \varphi^{-1}(u, f), p_2 \circ \varphi' \circ f \circ {\varphi_u}^{-1}(u, f)) \\
&= (g \circ p \circ \varphi^{-1}(u, f), (p_2 \circ {\varphi'}_{g(u)}) \circ f_u \circ (p_2 \circ \varphi_u)^{-1}(f)) \\
&= (g \circ p_1(u, f), (p_2 \circ {\varphi'}_{g(u)}) \circ f_u \circ (p_2 \circ \varphi_u)^{-1}(f)) \\
&= (g(u), (p_2 \circ {\varphi'}_{g(u)}) \circ f_u \circ (p_2 \circ \varphi_u)^{-1}(f)) \,.
\end{aligned}$$

On a bien l'égalité souhaitée. ■

On arrive à l'énoncé du lemme technique. Les hypothèses de l'énoncé peuvent sembler inhabituelles. En fait, elles sont ; dans la pratique, faciles à vérifier et, par la suite, on se retrouvera fréquemment dans la situation décrite par l'énoncé (voir la proposition 1.162). Ce critère est l'analogue pour les fibrés vectoriels holomorphes de la proposition-définition 1.81. On montre en fait que l'application f est holomorphe si lorsqu'elle est lue dans les cartes, elle est holomorphe. Bien sûr, les cartes en question ne sont pas ici les cartes des atlas des prévariétés en question mais les cartes trivialisantes pour les fibrés vectoriels en question.

Proposition 1.159 — Critère technique. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{M}', \mathscr{A}'), (\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels holomorphes. On considère $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ et $g : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ deux applications vérifiant $p' \circ f = g \circ p$, f_x est linéaire pour tout $x \in \mathrm{M}$ et $g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) f est holomorphe ;

(*ii*) $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')$;

(*iii*) il existe une famille $\mathscr{F} = (\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $\mathscr{F}' = (\mathfrak{U}_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{G}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') vérifiant

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha, \qquad \mathrm{M}' = \bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} \mathrm{U}_\beta$$

et
$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe ;

(*iv*) pour toute famille $\mathscr{F} = (\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $\mathscr{F}' = (\mathfrak{U}_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{G}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') vérifiant

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}' = \bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} \mathrm{U}_\beta$$

l'application
$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe.

(*v*) pour tout carte trivialisante $(\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$ pour p et tout carte trivialisante $(\mathrm{U}', \mathrm{G}, \varphi')$ pour p', l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ {\varphi'}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe.

Preuve. Commençons par une remarque. Soient $(\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$ une carte trivialisante pour p et $(\mathrm{U}', \mathrm{G}', \varphi')$ une carte trivialisante pour p' et $x \in \mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')$. Comme φ est une trivialisation de p au-dessus de U, l'application $p_2 \circ \varphi_x$ est bien définie, linéaire et bijective. De même, on a $g(x) \in \mathrm{U}'$ et donc, comme φ' est une trivialisation de p' au-dessus de U′, l'application $p_2 \circ {\varphi'}_{g(x)}$ est bien définie, linéaire et bijective. Comme f_x est linéaire, on en déduit que $(p_2 \circ {\varphi'}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$.

Par ailleurs, on a $p^{-1}(\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')) \subset p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')) = f^{-1}({p'}^{-1}(\mathrm{U}'))$. On en déduit que

$$f(p^{-1}(\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}'))) \subset {p'}^{-1}(\mathrm{U}').$$

On en déduit que f induit une application entre les ouverts $p^{-1}(\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}'))$ et ${p'}^{-1}(\mathrm{U}')$. De plus, grâce aux prolégomènes 1.136 et à l'exemple 1.115, φ induit un biholomorphisme entre $p^{-1}(\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}'))$ et $(\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')) \times \mathrm{F}$. De même, φ induit un biholomorphisme entre ${p'}^{-1}(\mathrm{U}')$ et $\mathrm{U}' \times \mathrm{G}$. En particulier, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')) \times \mathrm{F} \arrow[dr, "p_1"'] & p^{-1}(\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')) \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & {p'}^{-1}(\mathrm{U}') \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "p'"'] & \mathrm{U}' \times \mathrm{G} \arrow[dl, "p_1"] \\
& \mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}') \arrow[r, "g"] & \mathrm{U}' &
\end{tikzcd}$$

avec φ et φ' bijective. Le lemme 1.158 montre alors que, pour $(x, v) \in (\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')) \times \mathrm{F}$, on a

$$\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}(x, v) = (g(x), (p_2 \circ {\varphi'}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1}(v)).$$

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ résulte de la définition.
$(i) \Rightarrow (v)$. La remarque initiale montre que f induit une application entre les ouverts $p^{-1}(\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}'))$ et ${p'}^{-1}(\mathrm{U}')$. D'après l'application 1.100, cette application induite par f est holomorphe. Par composition, on obtient que l'application

$$\psi = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1} : (\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')) \times \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{U}' \times \mathrm{G}.$$

est holomorphe. Or, toujours grâce à la remarque initiale, on a, pour $(x, v) \in (\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')) \times \mathrm{F}$,

$$\psi(x, v) = (g(x), (p_2 \circ {\varphi'}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1}(v)).$$

Ainsi l'application $p_2 \circ \psi : (x, v) \mapsto (p_2 \circ {\varphi'}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1}(v)$ est holomorphe. L'application 1.118 (ii) donne le résultat souhaité.
$(v) \Rightarrow (iv)$ est évident.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. Comme p et p' sont des fibrés vectoriels holomorphes, il existe une famille $\mathscr{F}$ (resp. $\mathscr{F}'$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') dont les domaines forment un recouvrement ouvert de M (resp. M′).
$(iii) \Rightarrow (i)$. Soient $\alpha \in \mathrm{A}$ et $\beta \in \mathrm{B}$. On considère la carte trivialisante $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha)$ pour p et la carte trivialisante $(\mathrm{U}_\beta, \mathrm{F}_\beta, \varphi_\beta)$ pour p'. D'après la remarque initiale, on a

$$\psi = \varphi_\beta \circ f \circ {\varphi_\alpha}^{-1} : \begin{cases} (\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \times \mathrm{F}_\alpha \longrightarrow \mathrm{U}_\beta \times \mathrm{G}_\beta \\ \qquad (x, v) \qquad \longmapsto (g(x), (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1}(v)). \end{cases}$$

D'après (iii) et l'application 1.118 (ii), l'application $p_2 \circ \psi : (x, v) \mapsto (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1}(v)$ est holomorphe. De plus, l'application $p_1 \circ \psi = g \circ p_1$ est holomorphe. L'exemple 1.103 montre alors que l'application ψ est holomorphe. Comme φ_β et φ_α sont des biholomorphismes, on en déduit que l'application

$$f : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \to {p'}^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$$

est holomorphe. Or $({p'}^{-1}(\mathrm{U}_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$ est un recouvrement ouvert de E′ et $(p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de E. Comme, pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, on a

$$p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) = p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \cap p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) = p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \cap f^{-1}({p'}^{-1}(\mathrm{U}_\beta)),$$

la proposition 1.101 (ix) montre que f holomorphe. ■

Remarque 1.160 — Une autre démonstration. On reprend les notations de la proposition 1.159. Le point central de la démonstration de l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ est l'holomorphie de l'application ψ. On va donner dans cette remarque une démonstration de cette holomorphie utilisant cette fois-ci l'exemple 1.154.

L'application g induit une application holomorphe $g : \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \to \mathrm{U}_\beta$ entre l'ouvert $\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$ et U_β. L'holomorphie de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha) \\ \qquad x \qquad \longmapsto (p_2 \circ \varphi'_{\alpha x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

et la bijection de l'exemple 1.154

$$\begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta), \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta)) & \longrightarrow \mathrm{Hom}^g(\mathrm{Triv}^{\mathrm{F}_\alpha}_{\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)}, \mathrm{Triv}^{\mathrm{F}_\beta}_{\mathrm{U}_\beta}) \\ \delta & \longmapsto [(x,v) \mapsto (g(x), \delta(x)(v))] \end{cases}$$

montre que l'application

$$\psi\colon \begin{cases} (\mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) \times \mathrm{F}_\alpha & \longrightarrow \mathrm{U}_\beta \times \mathrm{F}_\beta \\ x & \longmapsto (g(x), (p_2 \circ \varphi'_{\alpha x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1}(v)) \end{cases}$$

est un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes. En particulier, elle est holomorphe. ■

La proposition précédente permet de donner une caractérisation des isomorphismes de fibrés vectoriels holomorphes qui complète celle de la remarque 1.157.

Application 1.161 — Isomorphisme. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ et $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels holomorphes et $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')$.

Alors (f, g) est un isomorphisme de fibrés vectoriels si et seulement si g est un biholomorphisme et f est bijective.

D'après la remarque 1.157, il suffit de montrer si g est un biholomorphisme et f est bijective alors f^{-1} est holomorphe. On utiliser pour cela la proposition 1.159. Comme $(f, g) \in \mathrm{Hom}(p, p')$ et g est un biholomorphisme, on a $g^{-1} \in \mathscr{H}(\mathrm{M}', \mathrm{M})$, $g^{-1} \circ p' = p \circ f^{-1}$ et $(f^{-1})_y = (f_{g^{-1}(y)})^{-1}$ pour tout $y \in \mathrm{M}'$.

Par ailleurs, pour toute carte trivialisante $(\mathrm{U}, \mathrm{F}, \varphi)$ pour p et $(\mathrm{U}', \mathrm{G}, \varphi')$ pour p', l'application

$$\psi\colon \begin{cases} g(\mathrm{U}) \cap \mathrm{U}' & \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{G}, \mathrm{F}) \\ y & \longmapsto (p_2 \circ \varphi_{g^{-1}(y)}) \circ {f^{-1}}_y \circ (p_2 \circ {\varphi'}_y)^{-1} \end{cases}$$

est la composée de l'application

$$\begin{cases} g(\mathrm{U}) \cap \mathrm{U}' & \longrightarrow \mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}') \\ y & \longmapsto g^{-1}(y) \end{cases}$$

qui est holomorphe car g l'est (voir l'exemple 1.114) avec l'application

$$\psi'\colon \begin{cases} \mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}') & \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) \\ x & \longmapsto (p_2 \circ {\varphi'}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_x)^{-1} \end{cases}$$

qui est holomorphe, d'après la proposition 1.159, et l'application

$$\mathrm{Inv}\colon \begin{cases} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G}) & \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{G}, \mathrm{F}) \\ u & \longmapsto u^{-1} \end{cases}$$

qui est holomorphe d'après l'application 1.91. Ainsi, par composition, ψ est holomorphe. La proposition 1.159 montre que f^{-1} est holomorphe et donc $(f^{-1}, g^{-1}) \in \mathrm{Hom}(p', p)$.

Il reste à démontrer qu'on peut bien composer ψ' et Inv. En fait, la bijectivité de f assure que f_x est bijective pour tout $x \in \mathrm{M}$. Ainsi, l'application ψ' est à valeurs dans l'ouvert $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$ et donc, d'après l'exemple 1.99, l'application ψ' est holomorphe en tant qu'applications à valeurs dans $\mathrm{Isom}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$. Ainsi, on peut bien composer ψ' et Inv. ■

Structure algébrique des morphismes de fibrés vectoriels

Soient M et M′ deux prévariétés holomorphes et p (resp. p') un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M (resp. M′). Par définition des morphismes de fibrés vectoriels, l'application

$$\begin{cases} \bigsqcup_{g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')} \mathrm{Hom}^g(p, p') & \longrightarrow \mathrm{Hom}(p, p') \\ f \in \mathrm{Hom}^g(p, p') & \longmapsto (f, g) \end{cases}$$

est bijective et permet d'identifier $\mathrm{Hom}^g(p, p')$ à un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(p, p')$. La proposition suivante montre comment construire une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module sur chacun des sous-ensembles $\mathrm{Hom}^g(p, p')$ de $\mathrm{Hom}(p, p')$. Cependant, on ne munit pas $\mathrm{Hom}(p, p')$ d'une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module. En fait, on a besoin de fixer l'application entre les bases pour pouvoir utiliser la structure d'espace vectoriel des différentes fibres de p'.

Proposition 1.162 — Structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ quatre prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}'$ deux fibrés vectoriels holomorphes. Pour toute application $g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$, l'ensemble $\mathrm{Hom}^g(p, p')$ peut être muni d'une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module.

Preuve. Soient $f, f' \in \mathrm{Hom}^g(p,p')$, $x \in \mathrm{M}$ et $e \in \mathrm{E}_x$. Comme $f(e)$ et $f'(e)$ appartiennent à ${\mathrm{E}'}_{g(x)}$, la structure d'espace vectoriel de ${\mathrm{E}'}_{g(x)}$ donne alors un sens à $f(e)+f'(e)$. On définit alors l'application $(f+f') : e \in \mathrm{E} \mapsto f(e)+f'(e) \in \mathrm{E}'$. Montrons que $f+f' \in \mathrm{Hom}^g(p,p')$. Comme, pour $e \in \mathrm{E}_x$, on a $(f+f')(e) \in {\mathrm{E}'}_{g(x)}$, on en déduit que $(p' \circ (f+f'))(e) = g(x) = g(p(e))$. Ainsi $p' \circ (f+f') = g \circ p$. De plus, pour $x \in \mathrm{M}$, on a par construction, $(f+f')_x = f_x + {f'}_x$. D'où $(f+f')_x$ est linéaire. Il reste à montrer que $f+f'$ est holomorphe. On va pour cela utiliser le critère technique 1.159.

Soient $((\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille de cartes trivialisantes pour p et $((\mathrm{U}_\beta, \mathrm{G}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta\in\mathrm{B}}$ une famille de cartes trivialisantes pour p'. Comme $(f,g) \in \mathrm{Hom}(p,p')$ et $(f',g) \in \mathrm{Hom}(p,p')$, les applications

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ {f'}_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} \end{cases}$$

sont holomorphes. L'application 1.106 (pour $\mathrm{A} = \mathbb{C}$ et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{F} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta)$) montre alors que l'application

$$\Delta\colon \begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} + (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ {f'}_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. Or

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} + (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ {f'}_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} \\ &= (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ (f_x + {f'}_x) \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} \\ &= (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ (f+f')_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1}\,. \end{aligned}$$

La proposition 1.159 montre que $f+f'$ est holomorphe. Ainsi, la loi $+$ est une loi de composition interne sur $\mathrm{Hom}^g(p,p')$.

Soient $f \in \mathrm{Hom}^g(p,p')$, $\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$, $x \in \mathrm{M}$ et $e \in \mathrm{E}_x$. Comme $f(e)$ appartient à ${\mathrm{E}'}_{g(x)}$, la structure d'espace vectoriel de ${\mathrm{E}'}_{g(x)}$ donne un sens à $\lambda(x)f(e)$. On définit alors $(\lambda \cdot f) : e \in \mathrm{E} \mapsto \lambda(p(e))f(e) \in \mathrm{E}'$. Montrons que $\lambda \cdot f \in \mathrm{Hom}^g(p,p')$. Comme, pour $e \in \mathrm{E}_x$, on a, par définition $(\lambda \cdot f)(e) \in {\mathrm{E}'}_{g(x)}$, on en déduit que $(p' \circ (\lambda \cdot f))(e) = g(x) = g(p(e))$. Ainsi $p' \circ (\lambda \cdot f) = g \circ p$. De plus, pour $x \in \mathrm{M}$, on a, par définition, $(\lambda \cdot f)_x = \lambda(x) f_x$. D'où $(\lambda \cdot f)_x$ est linéaire. Il reste à montrer que $\lambda \cdot f$ est holomorphe. On va à nouveau utiliser la proposition 1.159 (elle est faite pour cela).

Soient $((\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ une famille de cartes trivialisantes pour p et $((\mathrm{U}_\beta, \mathrm{G}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta\in\mathrm{B}}$ une famille de cartes trivialisantes pour p'. Comme $(f,g) \in \mathrm{Hom}(p,p')$, l'application

$$\Delta\colon \begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. L'application 1.106 (pour $\mathrm{A} = \mathbb{C}$ et le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{F} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta)$) montre alors que

$$\lambda \cdot \Delta\colon \begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{G}_\beta) \\ \qquad x \qquad\quad \longmapsto \lambda(x)((p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1}) \end{cases}$$

est holomorphe. Or

$$\begin{aligned} (\lambda \cdot \Delta)(x) &= \lambda(x)((p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1}) \\ &= (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ \lambda(x) f_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1} \\ &= (p_2 \circ {\varphi_\beta}_{g(x)}) \circ (\lambda \cdot f)_x \circ (p_2 \circ {\varphi_\alpha}_x)^{-1}\,. \end{aligned}$$

La proposition 1.159 montre que $\lambda \cdot f$ est holomorphe. Ainsi, on définit une action de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Hom}^g(p,p')$.

Montrons à présent que muni de cette loi $+$ et de cette action de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$, l'ensemble $\mathrm{Hom}^g(p,p')$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module. La loi $+$ est associative puisque pour $f, f', f'' \in \mathrm{Hom}^g(p,p')$ et $e \in \mathrm{E}$, on a

$$(f+(f'+f''))(e) = f(e) + (f'(e)+f''(e)) = (f(e)+f'(e)) + f''(e) = ((f+f')+f'')(e)\,.$$

La loi $+$ est commutative puisque pour $f, f' \in \mathrm{Hom}^g(p,p')$ et $e \in \mathrm{E}$, on a

$$(f+f')(e) = f(e)+f'(e) = f'(e)+f(e) = (f'+f)(e)\,.$$

Le morphisme nul (f_g^0, g) est élément neutre pour $+$ puisque pour $f \in \mathrm{Hom}^g(p,p')$ et $e \in \mathrm{E}$, on a

$$(f + f_g^0)(e) = f(e) + 0 = f(e) = 0 + f(e) = (f_g^0 + f)(e)\,.$$

On considère $\lambda : \mathrm{M} \to \mathbb{C}$ l'application constante égale à -1 qui, d'après l'exemple 1.83, est holomorphe. Pour $f \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$ et $e \in \mathrm{E}$, on a $\lambda \cdot f \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$ et

$$(f + \lambda \cdot f)(e) = f(e) + (-f(e)) = 0 = f_g^0(e)\,.$$

Ainsi $(\lambda \cdot f, g)$ est l'opposé de f pour la loi $+$ et $(\mathrm{Hom}^g(p, p'), +)$ est un groupe abélien.

Pour $\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$, $f, f' \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$ et $e \in \mathrm{E}$, on a

$$(\lambda \cdot (f + f'))(e) = \lambda(p(e))(f(e) + f'(e)) = \lambda(p(e))f(e) + \lambda(p(e))f'(e) = (\lambda \cdot f + \lambda \cdot f')(e)\,.$$

Pour $\lambda, \mu \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$, $f \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$ et $e \in \mathrm{E}$, on a

$$((\lambda + \mu) \cdot f)(e) = (\lambda(p(e)) + \mu(p(e)))f(e) = \lambda(p(e))f(e) + \mu(p(e))f(e) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(e)\,.$$

Pour $\lambda, \mu \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$, $f \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$ et $e \in \mathrm{E}$, on a

$$((\lambda\mu) \cdot f)(e) = (\lambda(p(e))\mu(p(e)))f(e) = \lambda(p(e))(\mu(p(e))f(e)) = (\lambda \cdot (\mu \cdot f))(e)\,.$$

Soit λ l'élément neutre de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ pour la multiplication. L'application λ est constante égale à 1. Pour $f \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$ et $e \in \mathrm{E}$, on a $\lambda \cdot f \in \mathrm{Hom}^g(p, p')$ et $(\lambda \cdot f)(e) = f(e)$. Ainsi $\mathrm{Hom}^g(p, p')$ est bien un $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module. ■

Remarque 1.163 – Holomorphie et structure algébrique. On reprend les notations de la proposition 1.162. On donne dans cette remarque une autre démonstration de l'holomorphie de $f + f'$ et $\lambda \cdot f$ reposant sur le même principe que celle de l'holomorphie de f_g^0 (voir l'exemple 1.150). On considère U' un ouvert trivialisant pour p' et φ' une trivialisation de p' de fibre F au-dessus de U'. Par continuité de p et g, l'ensemble

$$\mathrm{W} = p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')) = f^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}')) = f'^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}'))$$

est un ouvert de E. De plus, on en déduit que $f(\mathrm{W}) \subset p'^{-1}(\mathrm{U}')$, $f'(\mathrm{W}) \subset p'^{-1}(\mathrm{U}')$ et, par définition de $f + f'$, que $(f + f')(\mathrm{W}) \subset p'^{-1}(\mathrm{U}')$. On peut donc composer les restrictions à W de f, de f' et de $f + f'$ avec φ.

Comme $p_2 \circ \varphi$ est linéaire, on obtient, pour $e \in \mathrm{W}$,

$$(p_2 \circ \varphi)((f + f')(e)) = (p_2 \circ \varphi)(f(e) + f'(e)) = (p_2 \circ \varphi \circ f)(e) + (p_2 \circ \varphi \circ f')(e).$$

Ainsi,
$$p_2 \circ \varphi \circ (f + f')_{|\mathrm{W}} = (p_2 \circ \varphi \circ (f_{|\mathrm{W}})) + (p_2 \circ \varphi \circ (f'_{|\mathrm{W}})).$$

Comme p_2, φ, f et f' sont holomorphes, on en déduit par composition que $p_2 \circ \varphi \circ (f_{|\mathrm{W}})$ et $p_2 \circ \varphi \circ (f'_{|\mathrm{W}})$ sont holomorphes (proposition 1.96 et application 1.98). L'application 1.106 pour $\mathrm{A} = \mathbb{C}$ et F montre alors que $p_2 \circ \varphi \circ (f + f')_{|\mathrm{W}}$ est holomorphe. De plus, l'holomorphie de p et g assure que

$$p_1 \circ \varphi \circ ((f + f')_{|\mathrm{W}}) = p' \circ (f + f')_{|\mathrm{W}} = g \circ p_{|\mathrm{W}}$$

est holomorphe. L'exemple 1.103 montre alors que $\varphi \circ ((f + f')_{|\mathrm{W}})$ est holomorphe. Comme φ est un biholomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1} que $(f + f')_{|\mathrm{W}}$ est holomorphe.

Par ailleurs, on peut recouvrir M' par des ouverts trivialisants pour p'. De plus, si $(\mathrm{U}'_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est un recouvrement ouvert de M' par des ouverts trivialisants pour p', la famille $(\mathrm{W}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ où $\mathrm{W}_\alpha = p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}'_\alpha))$ est un recouvrement ouvert de E. D'après ce qui précède, la restriction de $f + f'$ à chacun des W_α est holomorphe, la proposition 1.101 montre alors que $f + f'$ est holomorphe.

Passons à présent au cas de $\lambda \cdot f$. On considère U' un ouvert trivialisant pour p' et φ' une trivialisation de p' de fibre F au-dessus de U'. Par continuité de p et g, l'ensemble $\mathrm{W} = p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}')) = f^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}'))$ est un ouvert de E. De plus, on en déduit que $f(\mathrm{W}) \subset p'^{-1}(\mathrm{U}')$ et, par définition de $\lambda \cdot f$, que $(\lambda \cdot f)(\mathrm{W}) \subset p'^{-1}(\mathrm{U}')$. On peut donc composer les restrictions à W de f, de $\lambda \cdot f$ avec φ.

Comme $p_2 \circ \varphi$ est linéaire, on obtient, pour $e \in \mathrm{W}$,

$$(p_2 \circ \varphi)((\lambda \cdot f)(e)) = (p_2 \circ \varphi)(\lambda(p(e))f(e)) = \lambda(p(e))(p_2 \circ \varphi \circ f)(e)\,.$$

Ainsi,
$$p_2 \circ \varphi \circ (\lambda \cdot f)_{|\mathrm{W}} = (\lambda \circ p)_{|\mathrm{W}} \cdot (p_2 \circ \varphi \circ (f_{|\mathrm{W}})).$$

Comme p_2, φ, f, λ et p sont holomorphes, on en déduit par composition que $p_2 \circ \varphi \circ (f_{|\mathrm{W}})$ et $(\lambda \circ p)_{|\mathrm{W}}$ sont holomorphes (proposition 1.96 et application 1.98). L'application 1.106 pour $\mathrm{A} = \mathbb{C}$ et F montre alors que $p_2 \circ \varphi \circ (\lambda \cdot f)_{|\mathrm{W}}$ est holomorphe. De plus, l'holomorphie de p et g assure que

$$p_1 \circ \varphi \circ ((\lambda \cdot f)_{|\mathrm{W}}) = p' \circ (\lambda \cdot f)_{|\mathrm{W}} = g \circ p_{|\mathrm{W}}$$

est holomorphe. L'exemple 1.103 montre alors que $\varphi \circ ((\lambda \cdot f)_{|\mathrm{W}})$ est holomorphe. Comme φ est un biholomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1} que $(\lambda \cdot f)_{|\mathrm{W}}$ est holomorphe.

Par ailleurs, on peut recouvrir M' par des ouverts trivialisants pour p'. De plus, si $(\mathrm{U}'_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ est un recouvrement ouvert de M' par des ouverts trivialisants pour p', la famille $(\mathrm{W}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ où $\mathrm{W}_\alpha = p^{-1}(g^{-1}(\mathrm{U}'_\alpha))$ est un recouvrement ouvert de E. D'après ce qui précède, la restriction de $\lambda\cdot f$ à chacun des W_α est holomorphe, la proposition 1.101 montre alors que $\lambda\cdot f$ est holomorphe. ■

L'un des intérêts de la structure de module construite dans la proposition 1.162 repose sur sa compatibilité avec la composition. C'est le programme de la proposition suivante.

Proposition 1.164 — Structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$, $(\mathrm{M}',\mathscr{A}')$, $(\mathrm{M}'',\mathscr{A}'')$, $(\mathrm{E},\mathscr{B})$, $(\mathrm{E}',\mathscr{B}')$ et $(\mathrm{E}'',\mathscr{B}'')$ six prévariétés holomorphes, $p:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$, $p':\mathrm{E}'\to\mathrm{M}'$ et $p'':\mathrm{E}''\to\mathrm{M}''$ trois fibrés vectoriels holomorphes et $g:\mathrm{M}\to\mathrm{M}'$ et $g':\mathrm{M}'\to\mathrm{M}''$ deux applications holomorphes. L'application

$$\circ:\begin{cases}\mathrm{Hom}^g(p,p')\times\mathrm{Hom}^{g'}(p',p'') \longrightarrow \mathrm{Hom}^{g'\circ g}(p,p'')\\ \qquad (f,f') \qquad\qquad\qquad \longmapsto f'\circ f\end{cases}$$

est $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéaire en la première variable et $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathbb{C})$-bilinéaire.

Preuve. Soit $(f,f')\in\mathrm{Hom}^g(p,p')\times\mathrm{Hom}^{g'}(p',p'')$. On a $(f,g)\in\mathrm{Hom}(p,p')$ et $(f',g')\in\mathrm{Hom}(p',p'')$ et donc, par composition, $(f'\circ f, g'\circ g)\in\mathrm{Hom}(p,p'')$. Ainsi $f'\circ f\in\mathrm{Hom}^{g'\circ g}(p,p'')$.

D'après l'application 1.105, la composition par g est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$. Comme $\mathrm{Hom}^g(p,p')$ et $\mathrm{Hom}^{g'\circ g}(p,p'')$ sont des $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-modules (proposition 1.162), on obtient par restriction des scalaires une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathbb{C})$ sur $\mathrm{Hom}^g(p,p')$ et $\mathrm{Hom}^{g'\circ g}(p,p'')$.

Soient $f_1,f_2\in\mathrm{Hom}^g(p,p')$, $f'_1,f'_2\in\mathrm{Hom}^{g'}(p',p'')$, $e\in\mathrm{E}$ et $x=p(e)$. On a, par linéarité de $(f'_1)_{g(x)}$ et $(f'_2)_{g(x)}$,

$$\begin{aligned}(f'_1+f'_2)\circ(f_1+f_2)(e) &= ((f'_1)_{g(x)}+(f'_2)_{g(x)})\circ((f_1)_x(e)+(f_2)_x(e))\\ &= (f'_1)_{g(x)}\circ(f_1)_x(e)+(f'_2)_{g(x)}\circ(f_1)_x(e)+(f'_1)_{g(x)}\circ(f_2)_x(e)+(f'_2)_{g(x)}\circ(f_2)_x(e)\\ &= f'_1\circ f_1(e)+f'_2\circ f_1(e)+f'_1\circ f_2(e)+f'_2\circ f_2(e)\,.\end{aligned}$$

De plus, pour $\lambda\in\mathrm{Hom}(\mathrm{M},\mathbb{C})$ on a, par linéarité de $(f'_1)_{g(x)}$,

$$\begin{aligned}(f'_1)\circ(\lambda\cdot f_1)(e) &= (f'_1)_{g(x)}(\lambda(p(e))(f_1)_x(e))\\ &= \lambda(p(e))(f'_1)_{g(x)}\circ(f_1)_x(e)\\ &= \lambda(p(e))(f'_1\circ f_1)(e) = (\lambda\cdot(f'_1\circ f_1))(e)\,.\end{aligned}$$

On obtient ainsi la $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéarité par rapport à la première variable. De plus, comme la structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathbb{C})$-module sur $\mathrm{Hom}^g(p,p')$ et $\mathrm{Hom}^{g'\circ g}(p,p'')$ est obtenu par restriction des scalaires via ρ_g de celle de $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathbb{C})$-module, on en déduit la $\mathscr{H}(\mathrm{M}',\mathbb{C})$-linéarité par rapport à la première variable.
Enfin, pour $\mu\in\mathrm{Hom}(\mathrm{M}',\mathbb{C})$, on a

$$\begin{aligned}(\mu\cdot f'_1)\circ f_1(e) &= \mu(p'(\lambda\cdot f_1(e)))(f'_1)_{g(x)}\circ(f_1)_x(e)\\ &= \mu(g(p(e)))(f'_1)_{g(x)}\circ(f_1)_x(e)\\ &= \mu(g(p(e)))(f'_1\circ f_1)(e) = (\mu\cdot(f'_1\circ f_1))(e)\,,\end{aligned}$$

ce qui donne la linéarité souhaité. ■

1.5.3 Fibré au-dessus d'une base

Dans cette sous-section, on se fixe une base et on définit et étudie la catégorie de fibrés vectoriels au-dessus de cette base. Pour définir les morphismes, on fixe aussi l'application entre les bases : il s'agit de l'identité. Cela permet de mettre sur les espaces de morphismes une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module. De plus, rigidifier ainsi la situation assure une certaine richesse qui permet d'envisager de nouvelles propriétés (proposition 1.171). Outre la définition, on donne aussi quelques critères techniques permettant d'assurer qu'une application est bien un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus d'une base.

Notation 1.165 — Au-dessus d'une base. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$, $(\mathrm{E},\mathscr{B})$ et $(\mathrm{E}',\mathscr{B}')$ trois prévariétés holomorphes et $p:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$, $p':\mathrm{E}'\to\mathrm{M}$ deux fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de M. On pose $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$ pour $\mathrm{Hom}^{\mathrm{id}_{\mathrm{M}}}(p,p')$. Un élément $f\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$ est appelé un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de M.

La catégorie des fibrés au-dessus d'une base

L'un des avantages de la catégorie $\mathbf{Fib}_{\mathbf{M}}$ (voir la définition ci-dessous) des fibrés vectoriels au-dessus de M sur la catégorie **Fib** repose sur le fait que ses morphismes, qui sont de simples applications entre les espaces

totaux, sont plus simples à manipuler que les couples d'applications de la catégorie **Fib**. Un autre avantage est que, contrairement à la catégorie **Fib**, la catégorie $\mathbf{Fib_M}$ est $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéaire (application 1.195).

Remarque 1.166 – Catégorie des fibrés au-dessus d'une base. Soit $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. Pour p,p' deux fibrés vectoriels holomorphes de base M, on considère $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$ comme ensemble de morphismes entre p et p'.

Soient p,p',p'' trois fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de M, $f\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$ et $f'\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p',p'')$. La proposition 1.164 montre que $f'\circ f\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p',p'')$ et que l'application

$$\circ\colon\begin{cases}\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')\times\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p',p'') & \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p'')\\ (f,f') & \longmapsto f'\circ f\end{cases}$$

est $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-bilinéaire. En particulier, on peut donc composer des morphismes de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de p.

Par ailleurs, on note E l'espace total de p. Comme $(\mathrm{id}_{\mathrm{E}},\mathrm{id}_{\mathrm{M}})=\mathrm{id}_p\in\mathrm{Hom}(p,p)$. On a $\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p)$. On note E′ l'espace total de p'. Pour $f\in\mathrm{Hom}(p,p')$, on a $f\circ\mathrm{id}_{\mathrm{E}}=f$ et $\mathrm{id}_{\mathrm{E}'}\circ f=f$. Soit p''' un fibré vectoriel au-dessus de M. Pour $f\in\mathrm{Hom}(p,p')$, $f'\in\mathrm{Hom}(p',p'')$ et $f''\in\mathrm{Hom}(p'',p''')$, on a par associativité de la composition, $f''\circ(f'\circ f)=(f''\circ f')\circ f$.

Ainsi les fibrés vectoriels au-dessus de M forment une catégorie pré-$\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéaire que l'on note $\mathbf{Fib_M}$ et

$$\mathrm{I}\colon\begin{cases}p\longmapsto p\\ f\longmapsto(f,\mathrm{id}_{\mathrm{M}})\end{cases}$$

est un foncteur fidèle de $\mathbf{Fib_M}$ dans **Fib**. ■

Remarque 1.167 – id_p. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et p un fibré vectoriel holomorphe de base M. Si on considère p comme un fibré vectoriel au-dessus de M alors id_p est l'application identité de l'espace total de p. Si on considère p comme un fibré vectoriel alors id_p est un couple formé de l'application identité de l'espace total de p et de id_{M}. C'est le cadre de travail qui permettra d'éviter les confusions. ■

La remarque qui suit est une traduction pour la catégorie $\mathbf{Fib_M}$ du résultat de l'application 1.161. On obtient ainsi une caractérisation simple des isomorphismes de $\mathbf{Fib_M}$.

Remarque 1.168 – Isomorphisme. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, p,p' deux fibrés vectoriels holomorphes de base M et $f\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$. Montrons que l'application f est un isomorphisme dans $\mathbf{Fib_M}$ si et seulement si f est bijective.

(⇐) Comme id_{M} est un biholomorphisme, l'application 1.161 montre que $(f^{-1},\mathrm{id}_{\mathrm{M}})\in\mathrm{Hom}(p',p)$. Ainsi $f^{-1}\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p',p)$. De plus $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_{p'}$ et $f^{-1}\circ f=\mathrm{id}_p$.

(⇒) Il existe $f'\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p',p)$ tel que $f\circ f'=\mathrm{id}_{p'}$ et $f'\circ f=\mathrm{id}_p$. Comme id_p (resp. $\mathrm{id}_{p'}$) est l'identité de l'espace total de p (resp. p'), on obtient que f est bijective. ■

Avant d'expliciter quelques critères techniques permettant de vérifier qu'une application est un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus d'une base fixée, on termine la présentation de la catégorie $\mathbf{Fib_M}$ par un exemple fondateur d'isomorphismes : une trivialisation est un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de l'ouvert trivialisant en question. Ainsi un fibré vectoriel est localement (isomorphe à) un fibré trivial. On comprend mieux ainsi l'importance des fibrés triviaux.

Exemple 1.169 – Ouvert trivialisant. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$, $(\mathrm{E},\mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, $p:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe, U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U de fibre F. Alors φ est un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de U entre p_{U} et $p_1:\mathrm{U}\times\mathrm{F}\to\mathrm{U}$.

En effet, l'application φ est holomorphe. De plus, on a $p_1\circ\varphi=p$ et, pour $x\in\mathrm{U}$, φ_x est linéaire (remarque 1.138). Ainsi $\varphi\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{U}}(p_{\mathrm{U}},p_1)$. Comme φ est un biholomorphisme, la remarque 1.168 montre que φ est un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de U entre p_{U} et $p_1=\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathrm{F}}$. ■

Quelques critères pratiques

Les remarques et propositions qui suivent s'intéressent aux morphismes de fibrés vectoriels au-dessus d'une base. L'objectif est de montrer le caractère local de ces morphismes (proposition 1.171) et de donner un critère technique assurant qu'une application est un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus d'une base (proposition 1.172). On commence par montrer, dans la remarque qui suit, qu'à partir d'un morphisme de fibrés vectoriels, on obtient un morphisme de fibrés vectoriels entre les fibrés induits au-dessus de chacun des ouverts de la base M. Cette remarque sert en fait de lemme préparatoire à la proposition 1.171.

Remarque 1.170 — Morphisme de fibrés. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ trois prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}$ deux fibrés vectoriels holomorphes et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ telle que $p' \circ f = p$ et f_x est linéaire pour tout $x \in \mathrm{M}$.

Soit U un ouvert de M. Comme $p' \circ f = p$, on obtient que $f^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U})) = p^{-1}(\mathrm{U})$ et f induit une application $f_\mathrm{U} : p^{-1}(\mathrm{U}) \to p'^{-1}(\mathrm{U})$. Elle est donnée par

$$f_\mathrm{U} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{U}} f_x \,.$$

On considère $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M. Pour simplifier les notations, on pose $p_\alpha = p_{\mathrm{U}_\alpha}$, $p'_\alpha = p'_{\mathrm{U}_\alpha}$ (voir l'exemple 1.145) et $f_\alpha = f_{\mathrm{U}_\alpha}$. Montrons que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \in \mathrm{Hom}^\mathrm{M}(p, p')$;
(ii) f est holomorphe ;
(iii) pour tout ouvert U de M, $f_\mathrm{U} \in \mathrm{Hom}^\mathrm{U}(p_\mathrm{U}, p'_\mathrm{U})$;
(iv) pour tout ouvert U de M, f_U est holomorphe ;
(v) $f_\alpha \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{U}_\alpha}(p_\alpha, p'_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$;
(vi) f_α est holomorphe pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

$(i) \Leftrightarrow (ii)$ résulte de la définition de $\mathrm{Hom}^\mathrm{M}(p, p')$.

$(ii) \Rightarrow (iv)$. L'application f_U est induite par f. L'application 1.100 montre que f_U est holomorphe.

$(iv) \Rightarrow (vi)$ est évidente.

$(vi) \Rightarrow (ii)$. Comme $(p'^{-1}(\mathrm{U}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ forment un recouvrement ouvert de E′ et $f^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)) = p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$, la proposition 1.101 (vii) montre l'holomorphe de f.

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$. Comme $p' \circ f = p$, on a $p'_\mathrm{U} \circ f_\mathrm{U} = p_\mathrm{U}$. De plus, pour $x \in \mathrm{U}$, l'application

$$(f_\mathrm{U})_x : {p_\mathrm{U}}^{-1}(x) = \mathrm{E}_x \to {p'_\mathrm{U}}^{-1}(x) = \mathrm{E}'_x$$

est en fait l'application linéaire f_x. Elle est donc linéaire. Le résultat provient alors de la définition de $\mathrm{Hom}^\mathrm{U}(p, p')$.

$(v) \Leftrightarrow (vi)$. Comme $p' \circ f = p$, on a $p'_\alpha \circ f_\alpha = p_\alpha$. De plus, pour $x \in \mathrm{U}_\alpha$, l'application

$$(f_\alpha)_x : {p_\alpha}^{-1}(x) = \mathrm{E}_x \to {p'_\alpha}^{-1}(x) = \mathrm{E}'_x$$

est en fait l'application linéaire f_x. Ainsi elle est linéaire et le résultat provient de la définition de $\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}_\alpha}(p_\alpha, p'_\alpha)$. ■

La proposition suivante assure qu'être un morphisme de fibrés vectoriels est une propriété locale ce qui se résume par « $\mathscr{H}om(p, p')$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module ».

Proposition 1.171 — Caractère local des morphismes de fibrés. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$, $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ trois prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}$ deux fibrés vectoriels holomorphes.

On considère U un ouvert de M. L'application

$$r_{\mathrm{M},\mathrm{U}} : \begin{cases} \mathrm{Hom}^\mathrm{M}(p, p') \longrightarrow \mathrm{Hom}^\mathrm{U}(p_\mathrm{U}, p'_\mathrm{U}) \\ \quad f \qquad\quad \longmapsto f_\mathrm{U} \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-modules.

Soient $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M. Pour simplifier les notations, on pose $p_\alpha = p_{\mathrm{U}_\alpha}$ et $p'_\alpha = p'_{\mathrm{U}_\alpha}$. L'application

$$\mathrm{R}_\mathfrak{U} : \begin{cases} \mathrm{Hom}^\mathrm{M}(p, p') \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{U}_\alpha}(p_\alpha, p'_\alpha) \\ \quad f \qquad\quad \longmapsto (f_{\mathrm{U}_\alpha})_{\alpha \in \mathrm{A}} \end{cases}$$

est un morphisme injectif de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-modules dont l'image est

$$\mathrm{F}_\mathfrak{U} = \left\{ (f_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \in \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{Hom}^{\mathrm{U}_\alpha}(p_\alpha, {p'}_\alpha), \qquad \forall\, (\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2, \quad (f_\alpha)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} = (f_\beta)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}} \right\}.$$

Finalement
$$\mathscr{H}om(p, p') : \begin{cases} \mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M}) \longmapsto \mathrm{Hom}^\mathrm{U}(p_\mathrm{U}, p'_\mathrm{U}) \\ \quad i : \mathrm{V} \subset \mathrm{U} \quad \longmapsto r_{\mathrm{U},\mathrm{V}} \end{cases}$$

est un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module.

Preuve. On reprend les notations de la remarque 1.170. Pour $f \in \mathrm{Hom}^\mathrm{M}(p, p')$, on a bien $f_\mathrm{U} \in \mathrm{Hom}^\mathrm{U}(p_\mathrm{U}, p'_\mathrm{U})$. Ainsi $r_{\mathrm{M},\mathrm{U}}$ est bien définie. Par ailleurs, la restriction des applications est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\rho_{\mathrm{M},\mathrm{U}}$

de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$ (voir l'application 1.105). Comme $\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(p_{\mathrm{U}},p'_{\mathrm{U}})$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-module (proposition 1.162), on obtient, par restriction des scalaires via $\rho_{\mathrm{M,U}}$, une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module sur $\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(p_{\mathrm{U}},p'_{\mathrm{U}})$. Montrons à présent la linéarité de $r_{\mathrm{M,U}}$. Soit $f,f'\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$ et $\lambda\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$. Pour $e\in p^{-1}(\mathrm{U})$, on a

$$(f+f')_{\mathrm{U}}(e)=(f+f')(e)=f(e)+f'(e)=f_{\mathrm{U}}(e)+f'_{\mathrm{U}}(e)=(f_{\mathrm{U}}+f'_{\mathrm{U}})(e)$$

et
$$(\lambda\cdot f)_{\mathrm{U}}(e)=(\lambda\cdot f)(e)=\lambda(p(e))f(e)=\lambda_{|\mathrm{U}}(p(e))f_{\mathrm{U}}(e)=((\lambda_{|\mathrm{U}})\cdot f_{\mathrm{U}})(e)=(\lambda\cdot f_{\mathrm{U}})(e)\,.$$

Passons à l'étude de $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$. D'après la remarque 1.170, $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est bien défini. Par ailleurs, d'après ce qui précède, chacun des $\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}_\alpha}(p_\alpha,p'_\alpha)$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module. Par produit, on obtient donc une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module sur

$$\prod_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}_\alpha}(p_\alpha,p'_\alpha).$$

Comme les composantes de $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ sont les $r_{\mathrm{M,U}_\alpha}$ qui sont $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéaires, $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéaire.

Montrons que $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est bien à valeurs dans $\mathrm{F}_{\mathfrak{U}}$. On reprend les notations de la remarque 1.170. Soit $\alpha,\beta\in\mathrm{A}^2$, comme $(f_{\mathrm{U}_\alpha})_x=f_x$ et $(f_{\mathrm{U}_\beta})_x=f_x$ pour tout $x\in\mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on obtient

$$(f_{\mathrm{U}_\alpha})_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}=(f_{\mathrm{U}_\beta})_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}=\bigsqcup_{x\in\mathrm{U}_{\alpha\beta}}f_x=f_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}\,.$$

Finalement $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est bien à valeurs dans $\mathrm{F}_{\mathfrak{U}}$.

Soit $f,f'\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$ tel que $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}(f)=\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}(f')$. Pour $e\in\mathrm{E}$, on pose $x=p(e)$. Il existe $\alpha\in\mathrm{A}$ tel que $x\in\mathrm{U}_\alpha$. On a alors $f(e)=f_{\mathrm{U}_\alpha}(e)=f'_{\mathrm{U}_\alpha}(e)=f'(e)$. Ainsi $f=f'$ et $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ est injective.

Soient $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}\in\mathrm{F}_{\mathfrak{U}}$ et $x\in\mathrm{M}$. Il existe $\alpha\in\mathrm{A}$ tel que $x\in\mathrm{U}_\alpha$. On pose alors $f_x=f_{\alpha x}:\mathrm{E}_x\to\mathrm{E}'_x$. L'application f_x ne dépend pas du choix de $\beta\in\mathrm{A}$ tel que $x\in\mathrm{U}_\beta$ puisque $(f_\alpha)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}=(f_\beta)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$ et donc

$$(f_\alpha)_x=((f_\alpha)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}})_x=((f_\beta)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}})_x=(f_\beta)_x\,.$$

On pose alors
$$f=\bigsqcup_{x\in\mathrm{M}}f_x:\mathrm{E}=\bigsqcup_{x\in\mathrm{M}}\mathrm{E}_x\to\mathrm{E}'=\bigsqcup_{x\in\mathrm{M}}\mathrm{E}'_x\,.$$

On a bien sûr $p'\circ f=p$, l'application induite par f de $\mathrm{E}_x\to\mathrm{E}'_x$ est f_x qui est linéaire. Enfin, $f_{\mathrm{U}_\alpha}=f_\alpha$ est holomorphe. La remarque 1.170 montre que f est holomorphe. On en conclut que $f\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$ et $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}(f)=(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$.

Montrons à présent que $\mathscr{H}om(p,p')$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module. Soit U un ouvert de M. Alors $\mathscr{H}om(p,p')(\mathrm{U})$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-module (voir la proposition 1.162). Par ailleurs, soit V un ouvert de M contenu dans U. Comme $(p_{\mathrm{U}})_{\mathrm{V}}=p_{\mathrm{V}}$ et $(p'_{\mathrm{U}})_{\mathrm{V}}=p'_{\mathrm{V}}$, ce qui précède montre que l'application

$$r_{\mathrm{U,V}}:\begin{cases}\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(p_{\mathrm{U}},p'_{\mathrm{U}})\longrightarrow\mathrm{Hom}^{\mathrm{V}}((p_{\mathrm{U}})_{\mathrm{V}},(p'_{\mathrm{U}})_{\mathrm{V}})=\mathrm{Hom}^{\mathrm{V}}(p_{\mathrm{V}},p'_{\mathrm{V}})\\ \qquad f\qquad\longmapsto f_{\mathrm{V}}\end{cases}$$

est bien définie et $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire. De plus, pour $f\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(p_{\mathrm{U}},p'_{\mathrm{U}})$, on a $\rho_{\mathrm{U,U}}(f)=f_{\mathrm{U}}=f$ et si W est un ouvert de M contenu dans V alors

$$\rho_{\mathrm{V,W}}\circ\rho_{\mathrm{U,V}}(f)=(f_{\mathrm{V}})_{\mathrm{W}}=\bigsqcup_{x\in\mathrm{W}}f_x=f_{\mathrm{W}}=\rho_{\mathrm{U,W}}(f).$$

Il reste à montrer les propriétés de recollement des faisceaux. Elles sont en fait des conséquences des propriétés de $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$. En effet, soit U un ouvert de M et $\mathfrak{U}=(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de U. On note $\mathrm{U}_{\alpha\beta}=\mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}_\beta$. L'objectif est de montrer que l'application

$$\Xi:\begin{cases}\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(p_{\mathrm{U}},p'_{\mathrm{U}})\longrightarrow\prod_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}_\alpha}(p_{\mathrm{U}_\alpha},p'_{\mathrm{U}_\alpha})\\ \qquad f\qquad\longmapsto(\rho_{\mathrm{U,U}_\alpha}(f))_{\alpha\in\mathrm{A}}\end{cases}$$

est injective et d'image

$$\mathrm{G}_{\mathfrak{U}}=\left\{(f_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}\in\prod_{\alpha\in\mathrm{A}}\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}_\alpha}(p_{\mathrm{U}_\alpha},p'_{\mathrm{U}_\alpha}),\qquad\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathrm{A}^2,\quad\rho_{\mathrm{U}_\alpha,\mathrm{U}_{\alpha\beta}}(f_\alpha)=\rho_{\mathrm{U}_\beta,\mathrm{U}_{\alpha\beta}}(f_\beta)\right\}.$$

Comme $p_{\mathrm{U}_\alpha}=(p_{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}_\alpha}$, $p'_{\mathrm{U}_\alpha}=(p'_{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}_\alpha}$ et $\rho_{\mathrm{U,U}_\alpha}(f)=f_{\mathrm{U}_\alpha}$, l'application Ξ n'est autre que $\mathrm{R}_{\mathfrak{U}}$ pour les fibrés p_{U} et $p_{\mathrm{U}'}$. Elle est donc injective d'image $\mathrm{F}_{\mathfrak{U}}$. Comme $\rho_{\mathrm{U}_\alpha,\mathrm{U}_{\alpha\beta}}(f_\alpha)=(f_\alpha)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$ et $\rho_{\mathrm{U}_\beta,\mathrm{U}_{\alpha\beta}}(f_\beta)=(f_\beta)_{\mathrm{U}_{\alpha\beta}}$, on obtient $\mathrm{G}_{\mathfrak{U}}=\mathrm{F}_{\mathfrak{U}}$ et Ξ est injective d'image $\mathrm{G}_{\mathfrak{U}}$. Ainsi $\mathscr{H}om(p,p')$ est bien un faisceau et même un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module. ■

La proposition suivante est une traduction de la proposition 1.159 dans le cadre de la catégorie $\mathbf{Fib_M}$. Il s'agit d'un critère technique permettant de montrer qu'une application est un morphisme de fibrés vectoriels

au-dessus d'une base fixée. Ce critère s'exprime au travers de l'holomorphie d'applications à valeurs des espaces d'applications linéaires.

Proposition 1.172 — Critère technique. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A}), (\mathrm{E}, \mathscr{B}), (\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ trois prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}$ deux fibrés vectoriels holomorphes. On considère $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ une application vérifiant $p' \circ f = p$ et f_x est linéaire pour tout $x \in \mathrm{M}$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(*i*) f est holomorphe ;

(*ii*) $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p, p')$;

(*iii*) il existe une famille $(\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}'_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha, \varphi'_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') telles que

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha$$

et l'application
$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \varphi'_{\alpha x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

soit holomorphe ;

(*iv*) pour toute une famille $(\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}'_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha, \varphi'_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') vérifiant

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha,$$

l'application
$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \varphi'_{\alpha x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe.

(*v*) il existe une famille $(\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}'_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{F}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') telles que

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha = \bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} \mathrm{U}_\beta$$

et l'application
$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta) \\ \quad x \quad \longmapsto (p_2 \circ \varphi'_{\beta x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

soit holomorphe ;

(*vi*) pour toute une famille $(\mathfrak{U}_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}'_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{F}_\beta, \varphi_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) de cartes trivialisantes pour p (resp. p') vérifiant

$$\mathrm{M} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathrm{U}_\alpha = \bigcup_{\beta \in \mathrm{B}} \mathrm{U}_\beta,$$

l'application
$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta) \\ \quad x \quad \longmapsto (p_2 \circ \varphi'_{\beta x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe.

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ résulte de la définition de $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p, p')$.
$(v) \Rightarrow (i)$ et $(i) \Rightarrow (vi)$. Comme ${\mathrm{id}_{\mathrm{M}}}^{-1}(\mathrm{U}_\beta) = \mathrm{U}_\beta$, la proposition 1.159 appliquée à $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$ et $g = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ donnent les implications souhaités.
$(vi) \Rightarrow (v)$ résulte simplement du fait que p et p' sont des fibrés vectoriels holomorphes et donc admette des trivialisations dont les domaines recouvrent M.
$(i) \Rightarrow (iv)$. Comme ${\mathrm{id}_{\mathrm{M}}}^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) = \mathrm{U}_\alpha$, la proposition 1.159 v appliquée à $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$ et $g = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ et aux cartes $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha)$ et $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha, \varphi'_\alpha)$ donne le résultat.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. La remarque 1.142 montre que de telles familles existent.
$(iii) \Rightarrow (i)$. L'holomorphie de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \varphi'_{\alpha x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

et la bijection de l'exemple 1.154

$$\begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}'_\alpha)) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}_\alpha}^{\mathrm{F}_\alpha}, \mathrm{Triv}_{\mathrm{U}_\alpha}^{\mathrm{F}'_\alpha}) \\ \delta \longmapsto [(x,v) \mapsto (x, \delta(x)(v))] \end{cases}$$

montre que l'application

$$\psi\colon \begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha \longrightarrow \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{F}'_\alpha \\ x \longmapsto (x, (p_2 \circ \varphi'_{\alpha x}) \circ f_x \circ (p_2 \circ \varphi_{\alpha x})^{-1}(v)) \end{cases}$$

est un morphisme de fibrés vectoriels holomorphes. En particulier, elle est holomorphe. Par ailleurs, d'après le lemme 1.158, on a $\psi = \varphi'_\alpha \circ f \circ {\varphi_\alpha}^{-1}$. Comme φ_α et φ'_α sont des biholomorphismes, on en déduit que $f : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \to {p'}^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ est holomorphe. Comme $f^{-1}({p'}^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)) = p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ et les ${p'}^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert de E', on en déduit le résultat grâce à la proposition 1.101 (*vii*). ■

La proposition précédente appliqué à $\mathrm{id}_{\mathrm{E}} \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p)$ donne un résultat d'holomorphie de certaines applications à valeurs dans des espaces d'applications linéaires.

Application 1.173 — id_{E}. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe. On considère un recouvrement $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de M par des ouverts trivialisants pour p et, pour $\alpha \in \mathrm{A}$, une trivialisation φ_α de p au-dessus de U_α de fibre F_α. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, on pose $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$.

Comme $\mathrm{id}_{\mathrm{E}} \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p)$ et $(\mathrm{id}_{\mathrm{E}})_x = \mathrm{id}_{\mathrm{E}_x}$, la proposition 1.172 (*vi*) appliquée à $f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ et aux familles de cartes trivialisantes $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ et $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ montre que l'application

$$g_{\alpha\beta}\colon \begin{cases} \mathrm{U}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\beta, \mathrm{F}_\alpha) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \varphi_{\alpha x}) \circ (p_2 \circ \varphi_{\beta x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. De plus, $(p_2 \circ \varphi_{\alpha x}) \circ (p_2 \circ \varphi_{\beta x})^{-1}$ est une application linéaire inversible pour tout $x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$ et donc $g_{\alpha\beta}$ induit une application holomorphe de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ dans $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\beta, \mathrm{F}_\alpha)$. ■

1.5.4 Section

Dans cette sous-section, on définit la notion de sections holomorphes d'un fibré vectoriel. Comme pour les cas des morphismes de fibrés vectoriels (voir la proposition 1.162), on munit l'ensemble des sections d'une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module. On termine cette sous-section en mettant en avant les liens entre les sections d'un fibrés vectoriel et la théorie des faisceaux (notamment dans la proposition 1.179).

Définition

Une section d'un fibré vectoriel est une application holomorphe issue de la base du fibré vectoriel à valeurs dans l'espace total du fibré vectoriel telle que l'image de chacun des points soit dans la fibre de ce point.

Définition 1.174 — Section d'un fibré vectoriel. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe et U un ouvert de M. On dit qu'une application holomorphe $s : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ est *une section holomorphe de p au-dessus de* U si $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$.

On dit qu'une application holomorphe $s : \mathrm{M} \to \mathrm{E}$ est *une section holomorphe de p* ou *une section globale de p* si s est section holomorphe de p au-dessus de M.

On note $\Gamma(p, \mathrm{U})$ l'ensemble des sections holomorphes de p au-dessus de U.

Dans la remarque qui suit, on montre que les sections d'un fibré vectoriel p au-dessus d'un ouvert ne sont rien d'autres que les sections globales du fibré induit par p au-dessus de cet ouvert.

Remarque 1.175 — Section. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel et U un ouvert de M. Une section holomorphe de p au-dessus de U n'est rien d'autre qu'une section holomorphe de p_{U}.

En effet, si s est une section holomorphe de p au-dessus de U alors $p \circ s(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{U}$ et donc $s(x) \in p^{-1}(\mathrm{U})$. L'application $s : \mathrm{U} \to p^{-1}(\mathrm{U})$ est donc holomorphe (exemple 1.99) et $p_{\mathrm{U}} \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$.

Si s est une section holomorphe de p_{U} alors $s : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ est holomorphe (comme composée de $s : \mathrm{U} \to p^{-1}(\mathrm{U})$ et de $i : p^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{E}$) et $p_{\mathrm{U}} \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. ■

La structure d'espaces vectoriels de chacune des fibres permet de définir une section nulle. On obtient ainsi un premier exemple de section holomorphe.

Exemple 1.176 — Section nulle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe. On définit l'application $s_0 : x \in \mathrm{M} \mapsto 0 \in \mathrm{E}_{p^{-1}(x)}$. Montrons que s_0 est une section holomorphe de p.

On a bien sûr $p \circ s_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$. Il reste à montrer que s_0 est holomorphe. Soient $x \in \mathrm{M}$ et U_x un ouvert contenant x et trivialisant pour p et φ une trivialisation de p au-dessus de U_x. Pour tout $y \in \mathrm{U}_x$, on a $s_0(y) = \varphi^{-1}(y, 0)$. En effet, on a $p_1 \circ \varphi(s_0(y)) = p(s_0(y)) = y$ et $p_2 \circ \varphi(s_0(y)) = 0$ puisque $p_2 \circ \varphi$ est linéaire. Or, d'après l'exemple 1.103, l'application $y \in \mathrm{U}_x \mapsto (y, 0)$ est holomorphe sur U_x puisque les deux composantes sont holomorphes (il s'agit de $\mathrm{id}_{\mathrm{U}_x}$ et d'une application constante). Ainsi, par composition, la restriction de s_0 à U_x est holomorphe. La proposition 1.101 (*iv*) montre que s_0 est holomorphe. ■

SECTION ET STRUCTURE ALGÉBRIQUE

De la même façon qu'on munit $\mathrm{Hom}^g(p, p')$ d'une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module grâce à la structure d'espace vectoriel des fibres, on peut munir $\Gamma(p, \mathrm{U})$ d'une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module. On pourra d'ailleurs remarquer les similitudes entre la démonstration de l'holomorphie de $s + s'$ ou de $\lambda \cdot s$ dans la proposition ci-dessous à celle de $f + f'$ ou $\lambda \cdot f$ donnée dans la remarque 1.163. Au vue du lemme 1.181, ces ressemblances n'ont rien d'étonnant.

Proposition 1.177 — Structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe. Pour $s, s' \in \Gamma(p, \mathrm{M})$ et $\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$, on pose

$$s + s' : x \mapsto s(x) + s'(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda \cdot s : x \mapsto \lambda(x) s(x)\,.$$

Alors $s + s'$ et $\lambda \cdot s$ appartiennent à $\Gamma(p, \mathrm{M})$.

Le triplet $(\Gamma(p, \mathrm{M}), +, \cdot)$ est alors un $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module.

Preuve. Soit $x \in \mathrm{M}$. Comme s et s' appartiennent à $\Gamma(p, \mathrm{M})$, $s(x)$ et $s'(x)$ appartiennent à E_x. La structure d'espace vectoriel de E_x donne alors un sens à $s(x) + s'(x)$. En particulier, on a $(s + s')(x) \in \mathrm{E}_x$ et donc $(p \circ (s + s'))(x) = x$. De même, $\lambda(x) \in \mathbb{C}$ donc $\lambda(x)s(x)$ a bien un sens et $p \circ (\lambda \cdot s)(x) = x$.

Il reste à montrer que $s + s'$ et $\lambda \cdot s$ sont holomorphes. On considère U un ouvert trivialisant pour p et φ une trivialisation de p de fibre F au-dessus de U.

Commençons par $s + s'$. Comme $p_2 \circ \varphi : \mathrm{E}_x \to \mathrm{F}$ est linéaire, on obtient, pour $x \in \mathrm{U}$,

$$(p_2 \circ \varphi)((s + s')(x)) = (p_2 \circ \varphi)(s(x) + s'(x)) = (p_2 \circ \varphi \circ s)(x) + (p_2 \circ \varphi \circ s')(x).$$

Ainsi,
$$p_2 \circ \varphi \circ ((s + s')_{|\mathrm{U}}) = (p_2 \circ \varphi \circ (s_{|\mathrm{U}})) + (p_2 \circ \varphi \circ (s'_{|\mathrm{U}})).$$

Comme p_2, φ, s et s' sont holomorphes, on en déduit, par composition, que $p_2 \circ \varphi \circ (s_{|\mathrm{U}})$ et $p_2 \circ \varphi \circ (s'_{|\mathrm{U}})$ sont holomorphes (proposition 1.96 et application 1.98). L'application 1.106 pour $\mathrm{A} = \mathbb{C}$ et F montre alors que $p_2 \circ \varphi \circ (s + s')_{|\mathrm{U}}$ est holomorphe. De plus, $p_1 \circ \varphi \circ ((s + s')_{|\mathrm{U}}) = p \circ ((s + s')_{|\mathrm{U}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$ est holomorphe. L'exemple 1.103 assure alors que $\varphi \circ ((s + s')_{|\mathrm{U}})$ est holomorphe. Comme φ est un biholomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1}, que $(s + s')_{|\mathrm{U}}$ est holomorphe. Comme, on peut recouvrir M par des ouverts trivialisants pour p, la proposition 1.101 (*ii*) montre que $s + s'$ est holomorphe.

Passons à $\lambda \cdot s$. Comme $p_2 \circ \varphi : \mathrm{E}_x \to \mathrm{F}$ est linéaire, on obtient, pour $x \in \mathrm{U}$,

$$(p_2 \circ \varphi)((\lambda \cdot s)(x)) = (p_2 \circ \varphi)(\lambda(x)s(x)) = \lambda(x)(p_2 \circ \varphi \circ s)(x).$$

Ainsi,
$$p_2 \circ \varphi \circ ((\lambda \cdot s)_{|\mathrm{U}}) = \lambda_{|\mathrm{U}} \cdot (p_2 \circ \varphi \circ (s_{|\mathrm{U}})).$$

Comme p_2, φ, s et λ sont holomorphes, on en déduit que $p_2 \circ \varphi \circ (s_{|\mathrm{U}})$ et $\lambda_{|\mathrm{U}}$ sont holomorphes (proposition 1.96 et application 1.98). L'application 1.106 pour $\mathrm{A} = \mathbb{C}$ et F montre alors que $\lambda_{|\mathrm{U}} \cdot p_2 \circ \varphi \circ (s_{|\mathrm{U}})$ est holomorphe. Ainsi $p_2 \circ \varphi \circ (\lambda \cdot s)_{|\mathrm{U}}$ est holomorphe. De plus, $p_1 \circ \varphi \circ ((\lambda \cdot s)_{|\mathrm{U}}) = p \circ ((\lambda \cdot s)_{|\mathrm{U}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$ est holomorphe. L'exemple 1.103 assure alors que $\varphi \circ ((\lambda \cdot s)_{|\mathrm{U}})$ est holomorphe. Comme φ est un biholomorphisme, on en déduit, par composition par φ^{-1}, que $(\lambda \cdot s)_{|\mathrm{U}}$ est holomorphe. Comme, on peut recouvrir M par des ouverts trivialisants pour p, la proposition 1.101 (*ii*) montre que $\lambda \cdot s$ est holomorphe.

Montrons à présent que muni de cette loi $+$ et de cette action de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$, l'ensemble $\Gamma(p, \mathrm{M})$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module. La loi $+$ est associative puisque pour $s, s', s'' \in \Gamma(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$(s + (s' + s''))(x) = s(x) + (s'(x) + s''(x)) = (s(x) + s'(x)) + s''(x) = ((s + s') + s'')(x)\,.$$

La loi $+$ est bien sûr commutative puisque, pour $s, s' \in \Gamma(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$(s + s')(x) = s(x) + s'(x) = s'(x) + s(x) = (s' + s)(x)\,.$$

La section nulle s_0 est élément neutre pour $+$ puisque, pour $s \in \Gamma(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a

$$(s + s_0)(x) = s(x) + 0 = s(x) = 0 + s(x) = (s_0 + s)(x)\,.$$

Soit $\lambda : \mathrm{M} \to \mathbb{C}$ l'application constante égale à -1 qui est holomorphe (exemple 1.83). Pour $s \in \Gamma(p, \mathrm{M})$ et $x \in \mathrm{M}$, on a $\lambda \cdot s \in \Gamma(p, \mathrm{M})$ et

$$(s+\lambda\cdot s)(x)=s(x)+(-s(x))=0=s_0(x)\,.$$

Ainsi $\lambda\cdot s$ est l'opposé de s pour la loi $+$ et $(\Gamma(p,\mathrm{M}),+)$ est un groupe abélien.

Pour $\lambda\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$, $s,s'\in\Gamma(p,\mathrm{M})$ et $x\in\mathrm{M}$, on a

$$(\lambda\cdot(s+s'))(x)=\lambda(x)(s(x)+s'(x))=\lambda(x)s(x)+\lambda(x)s'(x)=(\lambda\cdot s+\lambda\cdot s')(x)\,.$$

Pour $\lambda,\mu\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$, $s\in\Gamma(p,\mathrm{M})$ et $x\in\mathrm{M}$, on a

$$((\lambda+\mu)\cdot s)(x)=(\lambda(x)+\mu(x))s(x)=\lambda(x)s(x)+\mu(x)s(x)=(\lambda\cdot s+\mu\cdot s)(x)\,.$$

Pour $\lambda,\mu\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$, $s\in\Gamma(p,\mathrm{M})$ et $x\in\mathrm{M}$, on a

$$((\lambda\mu)\cdot s)(x)=(\lambda(x)\mu(x))s(x)=\lambda(x)(\mu(x)s(x))=(\lambda\cdot(\mu\cdot s))(x)\,.$$

Soit λ l'élément neutre de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$ pour la multiplication. L'application λ est constante égale à 1. Elle est holomorphe (exemple 1.83). Pour $s\in\Gamma(p,\mathrm{M})$ et $x\in\mathrm{M}$, on a $\lambda\cdot s\in\Gamma(p,\mathrm{M})$ et $(\lambda\cdot s)(x)=s(x)$. Ainsi $(\Gamma(p,\mathrm{M}),+)$ est bien un $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module. ■

L'exemple qui suit donne la forme générale des sections d'un fibré trivial $p:\mathrm{M}\times\mathrm{F}\to\mathrm{M}$: elles s'identifient aux fonctions holomorphes à valeurs dans l'espace vectoriel F. L'exemple 1.178 sert aussi de lemme préparatoire à la proposition 1.179 et c'est pour cette raison qu'on s'intéresse dans un deuxième temps aux propriétés de la restriction des sections du fibré trivial.

Exemple 1.178 — Section d'un fibré trivial. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}:\mathrm{M}\times\mathrm{F}\to\mathrm{M}$ le fibré vectoriel trivial de fibré F. Montrons que les applications

$$\Delta_{\mathrm{M}}:\begin{cases}\Gamma(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}},\mathrm{M})\longrightarrow\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})\\ \quad s\qquad\longmapsto p_2\circ s\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\Delta'_{\mathrm{M}}:\begin{cases}\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})\longrightarrow\Gamma(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}},\mathrm{M})\\ \quad f\qquad\longmapsto(\,x\mapsto(x,f(x))\,)\end{cases}$$

sont des isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-modules réciproque l'un de l'autre.

Soit $s\in\Gamma(p,\mathrm{M})$. Comme $p_2:\mathrm{M}\times\mathrm{F}\to\mathrm{F}$ est holomorphe (exemple 1.94), on obtient, par composition, $p_2\circ s\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$. Ainsi Δ_{M} est bien définie. Soit $f\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$. Comme $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}\circ\Delta'_{\mathrm{M}}(f)=p_1\circ\Delta'_{\mathrm{M}}(f)=\mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ et $p_2\circ\Delta'_{\mathrm{M}}(f)=f$, l'exemple 1.103 montre que $\Delta'_{\mathrm{M}}(f)$ est holomorphe. De plus, comme $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}\circ\Delta'_{\mathrm{M}}(f)=\mathrm{id}_{\mathrm{M}}$, on a $\Delta'_{\mathrm{M}}(f)\in\Gamma(p,\mathrm{M})$ et Δ'_{M} est bien définie.

Par ailleurs, on a $\Delta_{\mathrm{M}}\circ\Delta'_{\mathrm{M}}(f)=f$ pour tout $f\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$. De plus, pour $s\in\Gamma(p,\mathrm{M})$, on a

$$\Delta'_{\mathrm{M}}\circ\Delta_{\mathrm{M}}(s)=(x\mapsto(x,p_2(s(x)))).$$

Comme s est une section de $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$, on a $x=\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}(s(x))=p_1(s(x))$ pour tout $x\in\mathrm{M}$. Ainsi,

$$\Delta'_{\mathrm{M}}\circ\Delta_{\mathrm{M}}(s)=(x\mapsto(p_1(s(x)),p_2(s(x))))=(x\mapsto s(x))=s.$$

Il reste à montrer, par exemple, que Δ'_{M} est $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéaire. Soit $f\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$ et $\lambda\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$. On a $\Delta'_{\mathrm{M}}(\lambda\cdot f)=(x\mapsto(x,\lambda(x)f(x)))$. Au vu de la structure d'espace vectoriel sur la fibre $\{x\}\times\mathrm{F}$, on a $\Delta'_{\mathrm{M}}(\lambda\cdot f)=(x\mapsto\lambda(x)\cdot(x,f(x)))$. Au vu de la structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module sur $\Gamma(p,\mathrm{M})$, on obtient $\Delta'_{\mathrm{M}}(\lambda\cdot f)=\lambda\cdot\Delta'_{\mathrm{M}}(f)$.

Soit $f,g\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{F})$. On a $\Delta'_{\mathrm{M}}(g+f)=(x\mapsto(x,g(x)+f(x)))$. Au vu de la structure d'espace vectoriel sur la fibre $\{x\}\times\mathrm{F}$, on a $\Delta'_{\mathrm{M}}(g+f)=(x\mapsto(x,f(x))+(x,g(x)))$. Au vu de la structure de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-module sur $\Gamma(p,\mathrm{M})$, on obtient $\Delta'_{\mathrm{M}}(g+f)=\Delta'_{\mathrm{M}}(g)+\Delta'_{\mathrm{M}}(f)$.

Finalement Δ_{M} et Δ'_{M} sont bien des isomorphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-modules réciproques l'un de l'autre.

Considérons à présent deux ouverts $\mathrm{V}\subset\mathrm{U}$ de M. D'après l'exemple 1.145, p_{U} et p_{V} sont les fibrés triviaux de fibre F. Les isomorphismes $\Delta_{\mathrm{U}}:\Gamma(p,\mathrm{U})=\Gamma(p_{\mathrm{U}},\mathrm{U})\to\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathrm{F})$ et $\Delta_{\mathrm{V}}:\Gamma(p,\mathrm{V})=\Gamma(p_{\mathrm{V}},\mathrm{V})\to\mathscr{H}(\mathrm{V},\mathrm{F})$ sont donc bien définis. Par ailleurs, considérons $s\in\Gamma(p,\mathrm{U})$. D'après l'application 1.98, $s_{|\mathrm{V}}$ est holomorphe. De plus, $p\circ(s_{|\mathrm{V}})=(p\circ s)_{|\mathrm{V}}=\mathrm{id}_{\mathrm{U}|\mathrm{V}}=\mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. Ainsi $s_{|\mathrm{V}}\in\Gamma(\mathrm{V},p)$. On peut donc définir l'application $\rho:s\in\Gamma(p,\mathrm{U})\mapsto s_{|\mathrm{V}}\in\Gamma(p,\mathrm{V})$. Montrons que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}\Gamma(p,\mathrm{U})\arrow[r,"\Delta_{\mathrm{U}}"]\arrow[d,"\rho"'] & \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathrm{F})\arrow[d,"\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}"] \\ \Gamma(p,\mathrm{V})\arrow[r,"\Delta_{\mathrm{V}}"] & \mathscr{H}(\mathrm{V},\mathrm{F})\end{tikzcd}$$

Pour $s\in\Gamma(p,\mathrm{U})$, on a $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}\circ\Delta_{\mathrm{U}}(s)=(p_2\circ s)_{|\mathrm{U}}=p_2\circ(s_{|\mathrm{U}})=\Delta_{\mathrm{V}}\circ\rho(s)$. ■

Section et faisceau

Dans la proposition qui suit, on construit le faisceau des sections d'un fibré vectoriel et on montre que cette construction est fonctorielle. Le foncteur Γ ainsi construit est en fait une équivalence de catégorie $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéaires entre la catégorie des fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de M et celle des $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-modules localement libres de rang fini.

Proposition 1.179 — Faisceau localement libre. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{E}, \mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe et $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ deux ouverts de M. L'application

$$\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(p) : \begin{cases} \Gamma(\mathrm{U}, p) = \Gamma(\mathrm{U}, p_{\mathrm{U}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{V}, p) = \Gamma(\mathrm{V}, p_{\mathrm{V}}) \\ \qquad s \qquad\qquad \longmapsto s_{|\mathrm{V}} \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-modules.

Ainsi $\mathrm{U} \mapsto \Gamma(\mathrm{U}, p)$ muni des applications $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(p)$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module localement libre noté $\Gamma(p)$.

Fonctorialité. Soient $(\mathrm{E}', \mathscr{B}')$ une prévariété holomorphe, $p' : \mathrm{E}' \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe et $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{E}, \mathrm{E}')$. Alors f induit un morphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-modules de $\Gamma(p)$ dans $\Gamma(p')$ noté γ_f.

Soient $(\mathrm{E}'', \mathscr{B}'')$ une prévariété holomorphe, $p'' : \mathrm{E}'' \to \mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M et $f' \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{E}', \mathrm{E}'')$. Alors $\gamma_{f' \circ f} = \gamma_{f'} \circ \gamma_f$. De plus, on a $\gamma_{\mathrm{id}_p} = \mathrm{id}_{\Gamma(p)}$. Enfin, l'application

$$\Gamma : \begin{cases} \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p, p') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(\mathrm{M})}(\Gamma(p), \Gamma(p')) \\ \qquad f \qquad\qquad \longmapsto \gamma_f \end{cases}$$

est un morphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-modules.

Preuve. D'après l'application 1.98, $s_{|\mathrm{V}}$ est holomorphe. De plus, $p \circ (s_{|\mathrm{V}}) = (p \circ s)_{|\mathrm{V}} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}|\mathrm{V}} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. Ainsi $s_{|\mathrm{V}} \in \Gamma(\mathrm{V}, p)$ et $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(p)$ est bien définie.

La restriction des applications est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres ρ de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}(\mathrm{V}, \mathbb{C})$ (voir l'application 1.105). Comme $\Gamma(p, \mathrm{V}) = \Gamma(p_{\mathrm{V}}, \mathrm{V})$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{V}, \mathbb{C})$-module (proposition 1.177), on obtient, par restriction des scalaires via ρ, une structure de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-module sur $\Gamma(p, \mathrm{V})$.

Par ailleurs, pour $s, s' \in \Gamma(\mathrm{U}, p)$ et $x \in \mathrm{V}$, on a

$$(s + s')_{|\mathrm{V}}(x) = (s + s')(x) = s(x) + s'(x) = (s_{|\mathrm{V}})(x) + (s'_{|\mathrm{V}})(x)\,,$$

et pour $s \in \Gamma(\mathrm{U}, p)$, $\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$ et $x \in \mathrm{V}$, on a

$$(\lambda \cdot s)_{|\mathrm{V}}(x) = (\lambda \cdot s)(x) = \lambda(x)s(x) = \lambda_{|\mathrm{V}}(x)s_{|\mathrm{V}}(x) = (\lambda_{|\mathrm{V}} \cdot s_{|\mathrm{V}})(x) = (\lambda \cdot (s_{|\mathrm{V}}))(x)\,.$$

Ainsi $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(p)$ est bien $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-linéaire.

Montrons que $\Gamma(p)$ est un faisceau. Soient $\mathrm{W} \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ trois ouverts de M, on a, pour $s \in \Gamma(p, \mathrm{U})$

$$(\rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}}(p) \circ \rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(p))(s) = s_{|\mathrm{W}} = \rho_{\mathrm{U},\mathrm{W}}(p)(s) \qquad \text{et} \qquad \rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}}(s) = s_{|\mathrm{U}} = s.$$

Ainsi $\Gamma(p)$ est un préfaisceau. Soient U un ouvert de M et $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert de U. Pour $i, j \in \mathrm{I}$, on note $\mathrm{U}_{ij} = \mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$. On considère une famille $(s_i)_{i \in \mathrm{I}}$ telle que $s_i \in \Gamma(\mathrm{U}_i, p)$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ et $s_{i|\mathrm{U}_{ij}} = s_{j|\mathrm{U}_{ij}}$ pour tout $i, j \in \mathrm{I}$. Comme les s_i coïncident deux à deux là où elles sont définies, il existe une unique application $s : \mathrm{U} \to \mathrm{E}$ telle que $s_{|\mathrm{U}_i} = s_i$. En effet, si une telle fonction s existe alors, pour $x \in \mathrm{U}_i$, on a nécessairement $s(x) = s_i(x)$. De plus, comme les U_i recouvrent U, s est alors entièrement déterminée. Enfin, si x appartient aussi à U_j, alors, par hypothèse, $s_j(x) = s_i(x)$. La valeur de s en x ne dépend donc pas du choix de $i \in \mathrm{I}$ et s est bien définie. Enfin, comme $s_{|\mathrm{U}_i} = s_i \in \mathscr{H}(\mathrm{U}_i, \mathrm{E})$, la proposition 1.101 (ii) montre que $s \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathrm{E})$. Enfin, pour $x \in \mathrm{U}$, il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que $x \in \mathrm{U}_i$, d'où $p \circ s(x) = p \circ s_i(x) = x$ et donc $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. On a donc bien $s \in \Gamma(\mathrm{U}, p)$ et $\Gamma(p)$ est un faisceau. La première partie de la proposition montre que $\Gamma(p)$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module.

Fonctorialité. Avant de montrer que $\Gamma(p)$ est localement libre, on va démontrer les propriétés de fonctorialité. Soient U un ouvert de M et $s \in \Gamma(p, \mathrm{U})$. L'application $f \circ s : \mathrm{U} \to \mathrm{E}'$ est holomorphe puisque f et s le sont. De plus, comme $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p, p')$, on a $p \circ f \circ s = p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. Ainsi, la composition par f envoie $\Gamma(p, \mathrm{U})$ dans $\Gamma(p', \mathrm{U})$. On peut donc définir

$$\gamma_{f,\mathrm{U}} : \begin{cases} \Gamma(p, \mathrm{U}) \longrightarrow \Gamma(p', \mathrm{U}) \\ \qquad s \qquad\quad \longmapsto f \circ s\,. \end{cases}$$

Soient $\mu \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$ et $s, s' \in \Gamma(p, \mathrm{U})$. Pour $x \in \mathrm{U}$ et par linéarité de f_x, on a

$$f \circ (s + s')(x) = f_x(s(x) + s'(x)) = f_x(s(x)) + f_x(s'(x)) = f(s(x)) + f(s'(x)) = (f \circ s + f \circ s')(x)$$

et $$f \circ (\mu \cdot s)(x) = f(\mu(x)s(x)) = f_x(\mu(x)s(x)) = \mu(x)f_x(s(x)) = \mu(x)f(s(x)) = (\mu \cdot (f \circ s))(x)\,.$$

Ainsi $\gamma_{f,\mathrm{U}}$ est $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-linéaire. Soient $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ deux ouverts de M et $s \in \Gamma(p, \mathrm{U})$. On a

$$\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(p')(f \circ s) = (f \circ s)_{|\mathrm{V}} = f \circ (s_{|\mathrm{V}}) = f \circ (\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(p)(s)).$$

Ainsi f induit par composition un morphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-modules de $\Gamma(p)$ dans $\Gamma(p')$ que l'on note γ_f.

Soient U un ouvert de M et $s \in \Gamma(p, \mathrm{U})$. On a

$$\gamma_{f'\circ f,\mathrm{U}}(s) = (f'\circ f)\circ s = f'\circ(f\circ s) = \gamma_{f',\mathrm{U}}\circ\gamma_{f,\mathrm{U}}(s) \qquad \text{et} \qquad \gamma_{\mathrm{id}_p,\mathrm{U}}(s) = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}\circ s = s = \mathrm{id}_{\Gamma(p,\mathrm{U})}(s).$$

Ainsi on obtient $\gamma_{f'\circ f} = \gamma_{f'}\circ\gamma_f$ et $\gamma_{\mathrm{id}_p} = \mathrm{id}_{\Gamma(p)}$. Montrons à présent que $f \mapsto \gamma_f$ est un morphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-modules. Soient $f, f' \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$, U un ouvert de M, $s \in \Gamma(p,\mathrm{U})$ et $x \in \mathrm{U}$. On a

$$\begin{aligned}\gamma_{f+f',\mathrm{U}}(s)(x) &= ((f+f')\circ s)(x) = (f+f')(s(x)) = f_x(s(x)) + {f'}_x(s(x))\\ &= (f\circ s)(x) + (f'\circ s)(x) = ((f\circ s)+(f'\circ s))(x) = (\gamma_{f,\mathrm{U}}(s)+\gamma_{f',\mathrm{U}}(s))(x)\,.\end{aligned}$$

Soient $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p,p')$, $g \in \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$, U un ouvert de M, $s \in \Gamma(p,\mathrm{U})$ et $x \in \mathrm{U}$. On a

$$\gamma_{g\cdot f,\mathrm{U}}(s)(x) = ((g\cdot f)\circ s)(x) = g(x)f(s(x)) = (g_{|\mathrm{U}}\cdot(f\circ s))(x) = (g\cdot\gamma_{f,\mathrm{U}})(s)(x)\,.$$

Ainsi Γ est bien $\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C})$-linéaire.

Montrons maintenant que $\Gamma(p)$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module localement libre. On reprend les notations de l'application 1.106 et de l'exemple 1.178. Soient U un ouvert trivialisant pour p et φ un trivialisation de p au-dessus de U de fibre $\mathbb{C}^n$. Comme, d'après l'exemple 1.169, φ est un isomorphisme de fibrés au-dessus de U, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\mathrm{V},p) \arrow[r, "\gamma_{\varphi,\mathrm{V}}"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}}(p)"'] & \Gamma(\mathrm{V},p_1) \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{V}}"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}}(p_1)"] & \mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C}^n) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{V}}"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}}"] & (\mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C}))^n \arrow[d, "(\rho_{\mathrm{V},\mathrm{W}})^n"] \\
\Gamma(\mathrm{W},p) \arrow[r, "\gamma_{\varphi,\mathrm{W}}"] & \Gamma(\mathrm{W},p_1) \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{W}}"] & \mathscr{H}(\mathrm{W},\mathbb{C}^n) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{W}}"] & (\mathscr{H}(\mathrm{W},\mathbb{C}))^n
\end{tikzcd}$$

où sur la première (resp. deuxième) ligne, toutes les flèches sont des isomorphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C})$-modules (resp. $\mathscr{H}(\mathrm{W},\mathbb{C})$-modules) et sur les colonnes, les flèches sont des morphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C})$-modules. Ainsi on obtient un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U})$-modules de $\Gamma(p)_{|\mathrm{U}}$ sur $(\mathscr{H}(\mathrm{U}))^n$. ■

Dans la remarque qui suit, on met en avant une conséquence de la fonctorialité qui nous sera bien utile pour la suite.

Remarque 1.180 — Section et faisceaux isomorphes. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et p, p' deux fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de M. On suppose que p et p' sont isomorphes (en tant que fibrés vectoriels au-dessus de M) et que f réalise un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de M entre p et p'. La propriété de fonctorialité assure que γ_f réalise un isomorphisme (dont la réciproque est $\gamma_{f^{-1}}$) entre le faisceau des sections de p et celui de p'. En particulier, pour U un ouvert de M, l'application $\gamma_{f,\mathrm{U}}$ (qui n'est autre que la composition par f) réalise un isomorphisme entre les sections globales de p au-dessus de U et les sections de p' au-dessus de U. Autrement dit, lorsqu'on identifie p et p' par l'intermédiaire de f, on confond la section $s \in \Gamma(p,\mathrm{U})$ avec la section $f\circ s \in \Gamma(p',\mathrm{U})$. On dit que $f\circ s$ est la *section qui correspond à s* dans cette identification. ■

Le lemme qui suit montre comment confondre les sections d'un fibré vectoriel avec des morphismes de fibrés vectoriels par l'intermédiaire du fibré trivial de fibre $\mathbb{C}$.

Lemme 1.181 — Section et morphisme de fibrés. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ et $(\mathrm{E},\mathscr{B})$ deux prévariétés holomorphes, $p : \mathrm{E}\to\mathrm{M}$ un fibré vectoriel holomorphe et U un ouvert de M. Les applications

$$\delta^{\mathrm{U}} : \begin{cases}\Gamma(p,\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(\mathrm{Triv}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{U}}, p_{\mathrm{U}})\\ \quad s \quad\longmapsto ((x,\lambda)\mapsto\lambda s(x))\end{cases} \qquad \text{et} \qquad \eta^{\mathrm{U}} : \begin{cases}\mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(\mathrm{Triv}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{U}}, p_{\mathrm{U}}) \longrightarrow \Gamma(p,\mathrm{U})\\ \quad f \quad\longmapsto (x\mapsto f(x,1))\end{cases}$$

sont des isomorphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-modules réciproque l'un de l'autre.

De plus, $\delta = (\delta_{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}(\mathrm{M})} : \Gamma(p)\to\mathscr{H}om(\mathrm{Triv}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{M}},p)$ et $\eta = (\eta_{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}(\mathrm{M})} : \mathscr{H}om(\mathrm{Triv}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{M}},p)\to\Gamma(p)$ sont deux isomorphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module réciproques l'un de l'autre.

Preuve. Soit $s \in \Gamma(p,\mathrm{U})$. La structure d'espace vectoriel sur E_x assure que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathrm{M}$, $\lambda s(x)$ est bien définie et appartient à E_x. On en déduit que l'application $f : (x,\lambda) \mapsto \lambda s(x)$ a bien un sens et $p\circ f(x,\lambda) = x = \mathrm{Triv}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{M}}(x,\lambda)$. De plus, pour $x \in \mathrm{M}$, l'application $f_x : (\mathrm{Triv}^{\mathbb{C}}_{\mathrm{M}})^{-1}(x) = \{x\}\times\mathbb{C}\to\mathrm{E}_x$ induite par f est linéaire puisque, pour $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, on a

$$f_x(x,\lambda+\mu) = (\lambda+\mu)s(x) = \lambda s(x)+\mu s(x) = f_x(x,\lambda)+f_x(x,\mu) \qquad \text{et} \qquad f_x(x,\mu\lambda) = \mu\lambda s(x) = \mu f_x(x,\lambda)\,.$$

Montrons que f est holomorphe. Comme les ouverts trivialisants pour p_{U} forment un recouvrement ouvert de U (puisque p_{U} est un fibré vectoriel holomorphe), la remarque 1.170 assure qu'il suffit de montrer que f_{V} est holomorphe pour tout ouvert V trivialisant pour p_{U}.

Soient V un ouvert trivialisant pour p_{U} et φ une trivialisation de p_{U} au-dessus de V de fibre F. L'application $\varphi\circ f_{\mathrm{V}}$ est donnée par

$$\varphi \circ f_{\mathrm{V}} : \begin{cases} (\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathbb{C}})^{-1}(\mathrm{V}) = \mathrm{V} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{V} \times \mathrm{F} \\ \qquad (x, \lambda) \qquad\qquad \longmapsto (p_1 \circ \varphi \circ f(x, \lambda), p_2 \circ \varphi \circ f(x, \lambda)) \,. \end{cases}$$

Or, pour $(x, \lambda) \in \mathbb{C}$, on a $p_1 \circ \varphi \circ f(x, \lambda) = p \circ f(x, \lambda) = x$. Ainsi $p_1 \circ \varphi \circ f = p_1$ est holomorphe. Par ailleurs, $p_2 \circ \varphi$ est linéaire, ainsi

$$p_2 \circ \varphi \circ f(\lambda, x) = p_2 \circ \varphi(\lambda s(x)) = \lambda p_2 \circ \varphi \circ s(x)$$

On en déduit que $p_2 \circ \varphi \circ f$ est la composée des applications $(p_2 \circ \varphi \circ s_{|\mathrm{V}}) \times \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ et $(v, \lambda) \in \mathrm{F} \times \mathbb{C} \mapsto \lambda v \in \mathrm{F}$. La première est holomorphe grâce à la proposition 1.96 et aux applications 1.98 et 1.104 ; la deuxième est holomorphe car bilinéaire. Les deux composantes de φ sont donc holomorphes. L'exemple 1.103 montre alors que $\varphi \circ f_{\mathrm{V}}$ est holomorphe. Comme φ est un biholomorphisme, f_{V} est holomorphe. Pour finir, la remarque 1.170 assure que $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathbb{C}}, p)$. Finalement δ^{U} est bien définie.

Soit $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathbb{C}}, p)$. L'application $x \mapsto (x, 1)$ est holomorphe puisque ses deux composantes le sont (la première est id_{U} et la deuxième une application constante). Par composition avec f, l'application $s : x \mapsto f(x, 1)$ est donc holomorphe. De plus, pour $x \in \mathrm{U}$, on a $p \circ s(x) = p \circ f(x, 1) = p_1(x, 1) = x$. Ainsi $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. Finalement $s \in \Gamma(p, \mathrm{U})$ et η^{U} est bien définie.

Par ailleurs, pour $s \in \Gamma(p, \mathrm{U})$, on a

$$\eta^{\mathrm{U}} \circ \delta^{\mathrm{U}}(s) = \eta^{\mathrm{U}}((x, \lambda) \mapsto \lambda s(x)) = (x \mapsto 1 s(x)) = s \ ;$$

et, pour $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathbb{C}}, p)$, grâce à la linéarité de f_x, on obtient

$$\delta^{\mathrm{U}} \circ \eta^{\mathrm{U}}(f) = ((x, \lambda) \mapsto \lambda f(x, 1)) = ((x, \lambda) \mapsto \lambda f_x(x, 1)) = ((x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)) = f \,.$$

Ainsi δ^{U} et η^{U} sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.

Montrons que η^{U} est $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-linéaire. Soient $f, f' \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{U}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathbb{C}}, p)$, $\lambda \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$ et $x \in \mathrm{U}$, on a

$$\eta^{\mathrm{U}}(f + f') = (x \mapsto (f + f')(x, 1)) = (x \mapsto f(x, 1) + f'(x, 1)) = (x \mapsto f(x, 1)) + (x \mapsto f'(x, 1)) = \eta^{\mathrm{U}}(f) + \eta^{\mathrm{U}}(f') \,,$$

et
$$\eta^{\mathrm{U}}(\lambda \cdot f) = (x \mapsto (\lambda \cdot f)(x, 1)) = (x \mapsto \lambda(p_1(x, 1)) f(x, 1)) = (x \mapsto \lambda(x) f(x, 1)) = \lambda \cdot \eta^{\mathrm{U}}(f) \,.$$

Ainsi η^{U} est $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-linéaire et sa bijection réciproque δ^{U} l'est donc aussi.

Montrons que δ et η sont des morphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-modules. Comme, pour tout ouvert U de M, les applications δ^{U} et η^{U} sont des isomorphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-modules réciproques l'un de l'autres, il suffit de montrer que, pour tous ouverts $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ de M, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \Gamma(p, \mathrm{U}) \arrow[r, "\delta^{\mathrm{U}}"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(p)"'] & \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathbb{C}}, p) \arrow[d, "r_{\mathrm{U},\mathrm{V}}"] \\ \Gamma(p, \mathrm{V}) \arrow[r, "\delta^{\mathrm{V}}"] & \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{V}}^{\mathbb{C}}, p) \end{tikzcd}$$

Soit $s \in \Gamma(p, \mathrm{U})$. On a

$$r_{\mathrm{U},\mathrm{V}} \circ \delta^{\mathrm{U}}(s) = r_{\mathrm{U},\mathrm{V}}((x, \lambda) \mapsto \lambda s(x)) = ((x, \lambda) \in \mathrm{V} \times \mathbb{C} \mapsto \lambda s(x) \in p^{-1}(\mathrm{V}))$$

et
$$\delta^{\mathrm{V}} \circ \rho(\mathrm{M}, \mathrm{U})(s) = ((x, \lambda) \in \mathrm{V} \times \mathbb{C} \mapsto \lambda s_{|\mathrm{V}}(x)) = ((x, \lambda) \in \mathrm{V} \times \mathbb{C} \mapsto \lambda s(x)) \,.$$

Ainsi le diagramme est commutatif. ■

1.5.5 Construction de fibrés vectoriels

Dans cette sous-section, on donne des méthodes de construction de fibrés vectoriels et de morphismes de fibrés vectoriels. La proposition 1.182 est un préliminaire utile pour la construction des fibrés liée aux foncteurs holomorphes (voir la définition 1.183).

Recollement de fibrés vectoriels

La proposition qui suit est aux fibrés vectoriels ce que la proposition 1.128 est aux prévariétés. Elle montre comment construire, à partir de certaines données, une structure de prévariété holomorphe faisant d'une application un fibré vectoriel holomorphe. Pour accentuer la ressemblance avec la proposition 1.128, on aurait pu exprimer l'holomorphie de $g_{\beta\alpha}$ de la façon suivante : l'application

$$\psi_\beta \circ {\psi_\alpha}^{-1} : \begin{cases} \mathrm{U}_{\alpha\beta} \times \mathrm{F}_\alpha \longrightarrow \mathrm{U}_{\beta\alpha} \times \mathrm{F}_\beta \\ \quad (x, v) \quad \longmapsto (x, g_{\beta\alpha}(x)(v)) \end{cases}$$

est un isomorphisme de fibré vectoriel au-dessus de $\mathrm{U}_{\alpha\beta}$ (voir l'exemple 1.154 et la remarque 1.168).

Proposition 1.182 – Recollement de trivialisation. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété, E un ensemble et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ une application telle que $p^{-1}(x)$ soit muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, pour tout $x \in \mathrm{M}$.

On considère $\mathfrak{U} = (\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ un recouvrement ouvert de M et on suppose que, pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$, il existe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel F_α de dimension finie et une application $\psi_\alpha : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \to \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha$ vérifiant $p = p_1 \circ \psi_\alpha$ et $\psi_{\alpha x} : p^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathrm{F}_\alpha$ est une bijection linéaire, pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha$. On suppose, de plus, que, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A}^2$, l'application

$$g_{\beta\alpha} : \begin{cases} \mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta) \\ \qquad x \qquad\qquad \longmapsto (p_2 \circ \psi_{\beta x}) \circ (p_2 \circ \psi_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe.

Dans ces conditions, il existe une unique structure de prévariété holomorphe sur E telle que p soit un fibré vectoriel holomorphe et $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \psi_\alpha)$ une carte trivialisante pour p pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Preuve. Soit $x \in \mathrm{U}_\alpha$. Comme $p_1 \circ \psi_\alpha = p$, les prolégomènes 1.136 donnent un sens à l'application $\psi_{\alpha x}$. Comme p_2 réalise un isomorphisme linéaire entre $\{x\} \times \mathrm{F}_\alpha$ et F_α, l'application $(p_2 \circ \psi_{\alpha x})^{-1} : \mathrm{F}_\alpha \to p^{-1}(x)$ a bien un sens et est linéaire. On en déduit que, pour $x \in \mathrm{U}_{\alpha\beta}$, on a $(p_2 \circ \psi_{\beta x}) \circ (p_2 \circ \psi_{\alpha x})^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta)$. Enfin comme $\psi_{\alpha x}$ est bijective, pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha$, les prolégomènes 1.136 montrent que ψ_α est bijective.

Pour $\alpha \in \mathrm{A}$, on considère les prévariétés holomorphes $\mathrm{M}_\alpha = \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha$ et les applications injectives $\varphi_\alpha = {\psi_\alpha}^{-1} : \mathrm{M}_\alpha \to \mathrm{E}$. Montrons que l'on peut appliquer la proposition 1.128. Comme les U_α recouvrent M, on a

$$\mathrm{E} = p^{-1}(\mathrm{M}) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}} \varphi_\alpha(\mathrm{M}_\alpha)\,.$$

Par ailleurs, pour $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, on note $\mathrm{U}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap \mathrm{U}_\beta$. L'ensemble

$${\varphi_\alpha}^{-1} \circ \varphi_\beta(\mathrm{M}_\beta) = {\varphi_\alpha}^{-1}(p^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) = (p \circ \varphi_\alpha)^{-1}(\mathrm{U}_\beta) = {p_1}^{-1}(\mathrm{U}_\beta) = \mathrm{U}_{\alpha\beta} \times \mathrm{F}_\alpha$$

est bien un ouvert de M_α. Enfin, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}_{\alpha\beta} \times \mathrm{F}_\alpha \arrow[dr, "p_1"'] & p^{-1}(\mathrm{U}_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "p"] & p^{-1}(\mathrm{U}_{\beta\alpha}) \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "p"] & \mathrm{U}_{\beta\alpha} \times \mathrm{F}_\beta \arrow[dl, "p_1"] \\
& \mathrm{U}_{\alpha\beta} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{U}_{\beta\alpha} &
\end{tikzcd}$$

avec φ_α et φ_β bijective. Le lemme 1.158 assure que l'application $\psi_{\beta\alpha} = {\varphi_\beta}^{-1} \circ \varphi_\alpha : \mathrm{U}_{\alpha\beta} \times \mathrm{F}_\alpha \to \mathrm{U}_{\beta\alpha} \times \mathrm{F}_\beta$ est donnée par $(x, v) \mapsto (x, g_{\beta\alpha}(x)(v))$. Or la première composante de $\psi_{\beta\alpha}$ est la première projection donc est holomorphe et la deuxième composante de $\psi_{\beta\alpha}$ est holomorphe grâce à l'application 1.118 (*ii*). On en déduit, grâce à l'exemple 1.103, que $\psi_{\beta\alpha}$ est holomorphe.

La proposition 1.128 montre qu'il existe un unique atlas $\mathscr{B}$ sur E telle que $p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ soit un ouvert de E et $\psi_\alpha : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \to \mathrm{U}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha$ un biholomorphisme.

On en déduit alors que l'application $p : p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \to \mathrm{U}_\alpha$ est holomorphe comme composée des applications holomorphes ψ_α et p_1. Comme $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est un recouvrement de M, la proposition 1.101 (*vii*) montre que p est holomorphe. De plus, comme ψ_α est un biholomorphisme, $p \circ \psi_\alpha = p_1$ et $p_2 \circ \psi_{\alpha x}$ est linéaire (puisque $p_2 : \{x\} \times \mathrm{F}_\alpha \to \mathrm{F}_\alpha$ l'est), on en déduit que p est un fibré vectoriel et $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \psi_\alpha)$ une carte trivialisante pour p.

Montrons à présent l'unicité de l'atlas cherché. Si $\mathscr{B}'$ est un atlas sur E tel que $p : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ soit un vectoriel holomorphe et $(\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha, \psi_\alpha)$ une carte trivialisante pour p pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$. Alors, par continuité de p, l'ensemble $p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de E. De plus, comme ψ_α est biholomorphisme, la proposition 1.128 assure que $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$. ■

FIBRÉS ET FONCTEURS

L'objectif de ce qui suit est de généraliser les constructions et les (iso)-morphismes classiques de l'algèbre linéaire aux fibrés vectoriels holomorphes. À partir d'un « bon » foncteur (c'est-à-dire un foncteur holomorphe) et d'un fibré vectoriel, on va construire un nouveau fibré vectoriel dont les fibres sont les transformées par le foncteur des fibres du fibré vectoriel (c'est-à-dire $\mathrm{T}(\mathrm{E})_x = \mathrm{T}(\mathrm{E}_x)$). Ensuite, à partir des transformations naturelles entre « bons » foncteurs, on va construire des morphismes de fibrés vectoriels.

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers. On considère la catégorie produit $\mathbb{C}_{m,n} = \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}^m \times (\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}^{\mathrm{op}})^n$ et la catégorie $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$ qui n'est autre que la catégorie produit $(\mathrm{Iso}(\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}))^m \times (\mathrm{Iso}(\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev})^{\mathrm{op}})^n$. Pour tous espaces vectoriels complexes de dimension finie $\mathrm{V}_1^1, \mathrm{V}_1^2, \ldots, \mathrm{V}_{m+n}^1, \mathrm{V}_{m+n}^2$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}_{m,n}}((\mathrm{V}_1^1, \ldots, \mathrm{V}_{m+n}^1), (\mathrm{V}_1^2, \ldots, \mathrm{V}_{m+n}^2)) = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}_i^1, \mathrm{V}_i^2) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}_i^2, \mathrm{V}_i^1)$$

et $$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})}((\mathrm{V}_1^1,\dots,\mathrm{V}_{m+n}^1),(\mathrm{V}_1^2,\dots,\mathrm{V}_{m+n}^2)) = \prod_{i=1}^{m}\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}_i^1,\mathrm{V}_i^2)\times\prod_{i=m+1}^{m+n}\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}_i^2,\mathrm{V}_i^1)\,.$$

En particulier, ce sont des prévariétés holomorphes. Ces structures de prévariétés vont permettre de définir la notion de foncteur holomorphe.

Définition 1.183 — Foncteur holomorphe. Soient $\mathscr{D}$ l'une des deux catégories $\mathbb{C}_{m,n}$ ou $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$ et T un foncteur de la catégorie $\mathscr{D}$ dans la catégorie $\mathbb{C}$**-ev** des espaces vectoriels complexes de dimension finie. On dit que T est holomorphe si, pour tous $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie $\mathrm{V}_1^1,\mathrm{V}_1^2,\dots,\mathrm{V}_{m+n}^1,\mathrm{V}_{m+n}^2$, l'application

$$\mathrm{T}\colon\begin{cases}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}((\mathrm{V}_1^1,\dots,\mathrm{V}_{m+n}^1),(\mathrm{V}_1^2,\dots,\mathrm{V}_{m+n}^2)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{V}_1^1,\dots,\mathrm{V}_{m+n}^1),\mathrm{T}(\mathrm{V}_1^2,\dots,\mathrm{V}_{m+n}^2))\\ (f_1,\dots,f_{m+n}) \longmapsto \mathrm{T}(f_1,\dots,f_{m+n})\end{cases}$$

est holomorphe.

Remarque 1.184 — Restriction. Si $\mathrm{T}:\mathbb{C}_{m,n}\to\mathbb{C}$**-ev** est un foncteur holomorphe alors T induit par restriction à la catégorie $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$ un foncteur holomorphe $\mathrm{T}:\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})\to\mathbb{C}$**-ev** (voir l'application 1.98). ■

Donnons quelques exemples classiques de foncteurs holomorphes qui permettront, via la proposition 1.186, de construire de nouveaux fibrés vectoriels.

Exemple 1.185 — Quelques exemples de foncteurs holomorphes. On commence par des foncteurs de $\mathbb{C}_{m,n}$ dans $\mathbb{C}$**-ev**.

On considère $m=0$ et $n=1$ et le foncteur

$$\mathrm{D}\colon\begin{cases}\mathrm{V}\longmapsto\mathrm{V}^*\\ f\longmapsto {}^t f\,.\end{cases}$$

Le foncteur D est holomorphe puisque $f\mapsto {}^t f$ est linéaire donc holomorphe.

On considère $m=1$ et $n=0$ et le foncteur

$$\Lambda^\ell\colon\begin{cases}\mathrm{V}\longmapsto\lambda^\ell(\mathrm{V})\\ f\longmapsto f\wedge\cdots\wedge f\,.\end{cases}$$

Le foncteur Λ^ℓ est holomorphe puisque $f\mapsto f\wedge\ldots\wedge f$ est la composée de l'application linéaire (donc holomorphe) $f\mapsto(f,\dots,f)$ avec l'application multilinéaire (donc holomorphe) $(f_1,\dots,f_\ell)\mapsto(f_1\wedge\cdots\wedge f_\ell)$.

On considère $m=1$ et $n=1$ et le foncteur

$$\mathrm{Hom}\colon\begin{cases}(\mathrm{V},\mathrm{W})\longmapsto\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{W},\mathrm{V})\\ (f,g)\longmapsto(u\mapsto f\circ u\circ g)\,.\end{cases}$$

Le foncteur Hom est holomorphe puisque $(f,g)\mapsto(u\mapsto f\circ u\circ g)$ est bilinéaire donc holomorphe.

On considère $n=0$ et le foncteur

$$\mathrm{Somd}\colon\begin{cases}(\mathrm{V}_1,\dots,\mathrm{V}_m)\longmapsto\mathrm{V}_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{V}_m\\ (f_1,\dots,f_m)\longmapsto(f_1\oplus\cdots\oplus f_m)\,.\end{cases}$$

Le foncteur Somd est holomorphe puisque $(f_1,\dots,f_m)\mapsto(f_1\oplus\cdots\oplus f_m)$ est linéaire donc holomorphe.

On considère $n=0$ et, pour $j\in[\![1\,,m]\!]$, le foncteur j^{e} projection

$$\mathrm{P}_j\colon\begin{cases}(\mathrm{V}_1,\dots,\mathrm{V}_m)\longmapsto\mathrm{V}_j\\ (f_1,\dots,f_m)\longmapsto(f_j)\,.\end{cases}$$

Le foncteur P_j est holomorphe puisque $(f_1,\dots,f_m)\mapsto f_j$ est linéaire donc holomorphe.

On considère $n=0$ et le foncteur

$$\mathrm{Tens}\colon\begin{cases}(\mathrm{V}_1,\dots,\mathrm{V}_m)\longmapsto\mathrm{V}_1\otimes\cdots\otimes\mathrm{V}_m\\ (f_1,\dots,f_m)\longmapsto(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)\,.\end{cases}$$

Le foncteur Tens est holomorphe puisque $(f_1,\dots,f_m)\mapsto(f_1\otimes\cdots\otimes f_m)$ est multilinéaire donc holomorphe.

On considère $m=1,n=0$ (ou $m=0,n=1$) et V_0 un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Le foncteur constant

$$c_{\mathrm{M}}\colon\begin{cases}\mathrm{V}\longmapsto\mathrm{V}_0\\ f\longmapsto\mathrm{id}_{\mathrm{V}_0}\end{cases}$$

est holomorphe puisque l'application $f \mapsto \mathrm{id}_{\mathrm{V}_0}$ est constante.

On passe à présent aux foncteurs de $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$ dans $\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$.

On considère $m = 1$ et $n = 0$ et le foncteur

$$\mathrm{End}\colon \begin{cases} \mathrm{V} \longmapsto \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}) \\ f \longmapsto (u \mapsto f \circ u \circ f^{-1}) \,. \end{cases}$$

Le foncteur End est holomorphe puisque $f \mapsto (u \mapsto f \circ u \circ f^{-1})$ est la composée de l'application holomorphe $f \mapsto (f, f^{-1})$ avec l'application bilinéaire (donc holomorphe) $(f, g) \mapsto (u \mapsto f \circ u \circ g)$.

On considère le foncteur

$$\mathrm{T}_{m,n}\colon \begin{cases} \mathrm{V} \longmapsto \mathrm{V}^{\otimes m} \otimes (\mathrm{V}^*)^{\otimes n} \\ f \longmapsto (f^{\otimes m} \otimes ({}^t f^{-1})^{\otimes n}) \,. \end{cases}$$

Le foncteur $\mathrm{T}_{m,n}$ est holomorphe puisque $f \mapsto (f^{\otimes m} \otimes ({}^t f^{-1})^{\otimes n})$ est la composée de l'application holomorphe $f \mapsto (f, \dots, f, {}^t f^{-1}, \dots, {}^t f^{-1})$ avec l'application multilinéaire $(f_1, \dots, f_{m+n}) \mapsto (f_1 \otimes \cdots \otimes f_{m+n})$. ■

La proposition qui suit donne une méthode de construction de fibrés vectoriels. À partir d'un foncteur holomorphe de $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$ dans $\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ et de $m + n$ fibrés vectoriels, on construit un nouveau fibré vectoriel. En fait, on peut se restreindre effectivement aux foncteurs de $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$ dans $\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ et donc ne pas considérer seulement des foncteurs holomorphes de $\mathbb{C}_{m,n}$ dans $\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ car les trivialisations des fibrés vectoriels ne font intervenir que des applications linéaires bijectives (les φ_x).

Proposition 1.186 — Fibré et multifoncteur. Soient $\mathrm{T} : \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n}) \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ un foncteur holomorphe et $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. Pour $i \in [\![1 , m + n]\!]$, on considère un fibré vectoriel q_i au-dessus de M d'espace total E_i. On note $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_{n+m})$, $q = (q_1, \dots, q_{m+n})$ et, pour $x \in \mathrm{M}$, $\mathrm{E}_x = ((\mathrm{E}_1)_x, \dots, (\mathrm{E}_{m+n})_x)$. On définit alors l'ensemble

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_{m+n}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} (\mathrm{T}((\mathrm{E}_1)_x, \dots, (\mathrm{E}_{m+n})_x)) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_x)$$

et l'application
$$\mathrm{T}(q) = \mathrm{T}(q_1, \dots, q_{m+n})\colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_{m+n}) & \longrightarrow \mathrm{M} \\ y \in \mathrm{T}((\mathrm{E}_1)_x, \dots, (\mathrm{E}_{m+n})_x) & \longmapsto x \,. \end{cases}$$

Pour tout $i \in [\![1 , m + n]\!]$, on considère $\mathfrak{U}_i = (\mathrm{U}, \mathrm{F}_i, \varphi_i)$ une carte trivialisante pour q_i. On note alors $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m+n})$ et on définit l'application

$$\mathrm{T}(\varphi)\colon \begin{cases} \mathrm{T}(q)^{-1}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{U} \times \mathrm{T}(\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n}) \\ y \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \longmapsto (x, (\mathrm{T}(p_2 \circ \varphi_{1x}, \dots, p_2 \circ \varphi_{mx}, (p_2 \circ \varphi_{m+1x})^{-1}, \dots, p_2 \circ \varphi_{m+nx})^{-1})(y)) \end{cases}$$

et on note $\mathrm{T}(\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_{m+n}) = (\mathrm{U}, \mathrm{T}(\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n}), \mathrm{T}(\varphi))$.

Pour $i \in [\![1 , m + n]\!]$, on considère une famille $\mathscr{F}_i = (\mathfrak{U}^i_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}^i_\alpha, \varphi^i_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de cartes trivialisantes pour q_i. On note $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_{m+n})$. Si $(\mathrm{U}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ est un recouvrement (ouvert) de M, il existe sur $\mathrm{T}(\mathrm{E})$ un unique atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{F}}$ tel que $\mathrm{T}(q)$ soit un fibré vectoriel holomorphe et $\mathrm{T}(\mathfrak{U}^1_\alpha, \dots, \mathfrak{U}^{m+n}_\alpha)$ soit une carte trivialisante pour $\mathrm{T}(q)$ pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$.

Soit, pour $i \in [\![1 , n]\!]$, une famille $\mathscr{F}'_i = (\mathfrak{U}^i_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{F}^i_\beta, \varphi^i_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$ de cartes trivialisantes pour q_i. On note $\mathscr{F}' = (\mathscr{F}'_1, \dots, \mathscr{F}'_{m+n})$. Si $(\mathrm{U}_\beta)_{\beta \in \mathrm{B}}$ est un recouvrement (ouvert) de M, alors $\mathscr{B}_{\mathscr{F}'} = \mathscr{B}_{\mathscr{F}}$.

Enfin, pour tout famille $(\mathfrak{U}_i = (\mathrm{U}, \mathrm{F}_i, \varphi_i))_{i \in [\![1 , m+n]\!]}$ où $\mathfrak{U}_i$ est une carte trivialisante pour q_i, la carte $\mathrm{T}(\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_{m+n})$ est trivialisante pour $\mathrm{T}(q)$.

Preuve. On commence par montrer que $\mathrm{T}(q)$ est bien définie. Pour $x \in \mathrm{M}$, on considère l'application $q_x : \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \to \mathrm{M}$ constante égale à x. L'application $\mathrm{T}(q)$ n'est autre que l'application obtenue par la propriété universelle de la réunion disjointe d'ensembles.

Montrons que $\mathrm{T}(\varphi)$ est bien définie. On commence par remarquer que, grâce à la remarque 1.142, il existe bien des ouverts de M au-dessus desquels tous les q_i sont simultanément trivialisables. Par ailleurs, pour $i \in [\![1 , m+n]\!]$ et $x \in \mathrm{U}$, l'application $p_2 \circ (\varphi_i)_x$ est un bijection linéaire de $(\mathrm{E}_i)_x$ sur F_i. Ainsi, on obtient, par fonctorialité, une bijection linéaire

$$\delta_x = \mathrm{T}(p_2 \circ (\varphi_1)_x, \dots, p_2 \circ (\varphi_m)_x, (p_2 \circ (\varphi_{m+1})_x)^{-1}, \dots, (p_2 \circ (\varphi_{m+n})_x)^{-1}) : \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \to \mathrm{T}(\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n}) \,.$$

La structure naturelle d'espace vectoriel sur $\{x\} \times \mathrm{T}(\mathrm{F})$ donne une bijection linéaire

$$\psi_x\colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{E}_x) \longrightarrow \{x\} \times \mathrm{T}(\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n}) \\ y \longmapsto (x, \delta_x(y)) = (\mathrm{T}(q)(y), \delta_x(y)) \,. \end{cases}$$

Comme $\quad (\mathrm{T}(q))^{-1}(\mathrm{U}) = \bigsqcup_{x\in\mathrm{U}} (\mathrm{T}(\mathrm{E}_x)) \quad$ et $\quad \mathrm{U}\times\mathrm{T}(\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_{m+n}) = \bigsqcup_{x\in\mathrm{U}} (\{x\}\times\mathrm{T}(\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_{m+n}))\,,$

on en déduit que $\qquad \mathrm{T}(\varphi) = \bigsqcup_{x\in\mathrm{U}} \psi_x, \qquad p_1\circ\mathrm{T}(\varphi) = \mathrm{T}(q)_{|\mathrm{T}(q)^{-1}(\mathrm{U})}$

et que l'application induite par $\mathrm{T}(\varphi)$ entre $\mathrm{T}(\mathrm{E}_x)$ et $\{x\}\times\mathrm{T}(\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_{m+n})$ n'est autre que la bijection $\mathbb{C}$-linéaire δ_x.

Pour montrer que $\mathrm{T}(q)$ est un fibré vectoriel, on va utiliser la proposition 1.182 (qui a été mise en avant dans ce but). Remarquons que, grâce à la remarque 1.142, de telles familles $\mathscr{F}_i$ existent : tout point de M admet un voisinage ouvert trivialisant tous les q_i simultanément. Par ailleurs, pour tout $x\in\mathrm{M}$, l'ensemble $\mathrm{T}(q)^{-1}(x) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_x)$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Comme précédemment, pour $\alpha\in\mathrm{A}$, on note $\varphi_\alpha = (\varphi_\alpha^1,\dots,\varphi_\alpha^{m+n})$. On a alors $p_1\circ\mathrm{T}(\varphi_\alpha) = \mathrm{T}(q)_{|\mathrm{T}(q)^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)}$ et, pour tout $x\in\mathrm{U}_\alpha$, l'application $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x$ est $\mathbb{C}$-linéaire et bijective.

Soient $\alpha,\beta\in\mathrm{A}$. Il reste à montrer que l'application

$$\delta_{\beta\alpha}\colon \begin{cases} \mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}_\beta \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}_\alpha^1,\dots,\mathrm{T}(\mathrm{F}_\alpha^{m+n})),\mathrm{T}(\mathrm{F}_\beta^1,\dots,\mathrm{F}_\beta^{m+n})) \\ \quad x \qquad \longmapsto (p_2\circ\mathrm{T}(\varphi_\beta)_x)\circ(p_2\circ\mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. Or, par définition de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}(\varphi_\beta)$, on a

$$p_2\circ\mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x = \mathrm{T}(p_2\circ(\varphi_\alpha^1)_x,\dots,p_2\circ(\varphi_\alpha^m)_x,(p_2\circ(\varphi_\alpha^{m+1})_x)^{-1},\dots,(p_2\circ(\varphi_\alpha^{m+n})_x)^{-1}).$$

On obtient donc

$$\delta_{\beta\alpha}(x) = \mathrm{T}(((p_2\circ(\varphi_\beta^i)_x)\circ(p_2\circ(\varphi_\alpha^i)_x)^{-1})_{1\leqslant i\leqslant m},((p_2\circ(\varphi_\alpha^i)_x)\circ(p_2\circ(\varphi_\beta^i)_x)^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n})$$

L'application $\delta_{\beta\alpha}$ est donc la composée de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha\cap\mathrm{U}_\beta \longrightarrow \prod_{i=1}^{m}\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha^i,\mathrm{F}_\beta^i)\times\prod_{i=m+1}^{m+n}\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\beta^i,\mathrm{F}_\alpha^i) \\ \quad x \qquad \longmapsto (((p_2\circ(\varphi_\beta^i)_x)\circ(p_2\circ(\varphi_\alpha^i)_x)^{-1})_{1\leqslant i\leqslant m},((p_2\circ(\varphi_\alpha^i)_x)\circ(p_2\circ(\varphi_\beta^i)_x)^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n}) \end{cases}$$

qui est holomorphe (voir les exemples 1.173 et 1.103) avec l'application

$$\begin{cases} \prod_{i=1}^{m}\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha^i,\mathrm{F}_\beta^i)\times\prod_{i=m+1}^{m+n}\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\beta^i,\mathrm{F}_\alpha^i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}_\alpha^1,\dots,\mathrm{F}_\alpha^{m+n}),\mathrm{T}(\mathrm{F}_\beta^1,\dots,\mathrm{F}_\beta^{m+n})) \\ \quad (f_1,\dots,f_m,f_{m+1},\dots,f_{m+n}) \qquad \longmapsto \mathrm{T}(f_1,\dots,f_m,f_{m+1},\dots,f_{m+n}) \end{cases}$$

qui est holomorphe par hypothèse. Elle est donc holomorphe et la proposition 1.182 donne le résultat souhaité.

Si $\mathscr{F}'$ est une autre famille, en considérant $\mathscr{G}_i = \mathscr{F}_i\cup\mathscr{F}_i'$ et $\mathscr{G} = (\mathscr{G}_1,\dots,\mathscr{G}_{m+n})$, on obtient un atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{G}}$ tel que $\mathrm{T}(q)$ soit un fibré vectoriel holomorphe, $\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\alpha^1,\dots,\mathfrak{U}_\alpha^{m+n})$ soit une carte trivialisante de $\mathrm{T}(q)$ pour tout $\alpha\in\mathrm{A}$ et $\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\beta^1,\dots,\mathfrak{U}_\beta^{m+n})$ soit une carte trivialisante de $\mathrm{T}(q)$ pour tout $\beta\in\mathrm{B}$. Par unicité, on obtient $\mathscr{B}_{\mathscr{F}} = \mathscr{B}_{\mathscr{G}} = \mathscr{B}_{\mathscr{F}'}$.

Enfin, quitte à rajouter $\mathfrak{U}_i$ à la famille $\mathscr{F}_i$ pour tout $i\in[\![1\,,\,m+n]\!]$, on peut considérer que $\mathfrak{U}_i\in\mathscr{F}_i$. Ainsi $\mathrm{T}(\mathfrak{U}_1,\dots,\mathfrak{U}_{m+n})$ est un bien carte trivialisante pour $\mathrm{T}(q)$. ■

La remarque 1.184 montre que la proposition 1.186 s'applique aussi pour les foncteurs holomorphes de $\mathbb{C}_{m,n}$ dans $\mathbf{\mathbb{C}}$**-ev**. Par ailleurs l'application suivante explicite la proposition 1.186 correspondant aux foncteurs holomorphes de l'exemple 1.185.

Application 1.187 — Fibré vectoriel et foncteur. On reprend les notations de l'exemple 1.185.

Grâce au foncteur D, on peut construire, à partir d'un fibré vectoriel p d'espace total E, un nouveau fibré vectoriel p^* dont on note E^* l'espace total et dont les fibres sont les duaux des fibres de p. On dit que p^* est le *dual de* p.

Grâce au foncteur Λ^ℓ, on peut construire, à partir d'un fibré vectoriel p d'espace total E, un nouveau fibré vectoriel $\Lambda^\ell(p)$ dont on note $\Lambda^\ell(\mathrm{E})$ l'espace total et dont les fibres sont les puissances extérieures ℓ^{e} des fibres de p. On dit que p^* est la ℓ^e *puissance extérieure de* p.

Grâce au foncteur Hom, on peut construire, à partir de deux fibrés vectoriels p,p' d'espace total respectif E et E′, un nouveau fibré vectoriel $\underline{\mathrm{Hom}}(p,p')$ dont on note $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{E},\mathrm{E}')$ l'espace total et dont les fibres sont les $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}_x,\mathrm{E}'_x)$. On dit que $\underline{\mathrm{Hom}}(p,p')$ est *le fibré des homomorphismes de* p *dans* p'.

Grâce au foncteur Somd, on peut construire, à partir d'une famille $(q_1,\dots,q_m)$ de fibrés vectoriels d'espace total respectif E_i, un nouveau fibré vectoriel $q_1\oplus\dots\oplus q_m$ dont on note $\mathrm{E}_1\oplus\dots\oplus\mathrm{E}_m$ l'espace total et dont les fibres sont les $(\mathrm{E}_1)_x\oplus\dots\oplus(\mathrm{E}_m)_x$. On dit que $q_1\oplus\dots\oplus q_m$ est *le fibré somme directe des* q_i.

Grâce au foncteur P_j, on peut construire, à partir d'une famille $(q_1,\dots,q_m)$ de fibrés vectoriels au-dessus de M, un nouveau fibré vectoriel $\mathrm{P}_j(q_1,\dots,q_m)$. Les domaines des trivialisations $(\mathrm{U},\mathrm{F},\varphi)$ de q_j telle que U soit un

ouvert trivialisant pour tous les q_k forment un recouvrement de M (remarque 1.142). La proposition 1.182 et la construction de $\mathrm{P}_j(q_1,\dots,q_m)$ montrent alors que $\mathrm{P}_j(q_1,\dots,q_m)$ est en fait q_j.

Grâce au foncteur Tens, on peut construire, à partir d'une famille $(q_1,\dots,q_m)$ de fibrés vectoriels d'espace total respectif E_i, un nouveau fibré vectoriel $q_1\otimes\cdots\otimes q_m$ dont on note $\mathrm{E}_1\otimes\ldots\otimes\mathrm{E}_m$ l'espace total et dont les fibres sont les $(\mathrm{E}_1)_x\otimes\cdots\otimes(\mathrm{E}_m)_x$. On dit que $q_1\otimes\ldots\otimes q_m$ est *le produit tensoriel des* q_i.

Grâce au foncteur End, on peut construire, à partir d'un fibré vectoriel p d'espace total E, un nouveau fibré vectoriel $\underline{\mathrm{End}}(p)$ dont on note $\underline{\mathrm{End}}(\mathrm{E})$ l'espace total et dont les fibres sont les endomorphismes de fibres de p. On dit que $\underline{\mathrm{End}}(p)$ est *le fibré des endomorphismes de* p.

Grâce au foncteur $\mathrm{T}_{m,n}$, on peut construire, à partir d'un fibré vectoriel p d'espace total E, un nouveau fibré vectoriel $\mathrm{T}_{m,n}(p)$ dont on note $\mathrm{T}_{m,n}(\mathrm{E})$ l'espace total et dont les fibres sont les $(\mathrm{E}_x)^{\otimes m}\otimes({\mathrm{E}_x}^*)^{\otimes n}$. On dit que $\mathrm{T}_{m,n}(p)$ est *le fibré des* (m,n)*-tenseurs de* p. ■

Application 1.188 — Foncteur constant et fibré trivial. Soient M une prévariété holomorphe, F un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et c_{F} le foncteur holomorphe constant associé à F (voir l'exemple 1.185). Montrons que pour tout fibré vectoriel $q:\mathrm{E}\to\mathrm{M}$ au-dessus de M, l'application

$$\delta\colon\begin{cases}\bigsqcup\limits_{x\in\mathrm{M}}\mathrm{F} & \longrightarrow \mathrm{M}\times\mathrm{F}\\ f\in c_{\mathrm{F}}(q)_x & \longmapsto (x,f)\,.\end{cases}$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels entre $c_{\mathrm{F}}(q)$ et $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}}$.

Par construction de $c_{\mathrm{F}}(q)$, l'espace total de $c_{\mathrm{F}}(q)$ est donné par

$$\bigsqcup_{x\in\mathrm{M}}\mathrm{F}\,.$$

La première composante de δ n'est autre que $c_{\mathrm{F}}(q)$. Ainsi $p_1\circ\delta=c_{\mathrm{F}}(q)$. Par ailleurs, l'application induite par δ entre $c_{\mathrm{F}}(q)_x$ et $(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}})_x=\{x\}\times\mathrm{F}$ est linéaire est linéaire (par construction de la structure d'espace vectoriel sur $\{x\}\times\mathrm{F}$). Montrons que δ est un biholomorphisme. Il est clair que δ est bijective. Par ailleurs, si $(\mathrm{U},\mathrm{G},\varphi)$ est une carte trivialisante pour φ alors la trivialisation $c_{\mathrm{F}}(\varphi)$ de $c_{\mathrm{F}}(q)$ au-dessus de U est donnée par

$$c_q(\varphi)\colon\begin{cases}c_{\mathrm{F}}(q)^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U}\times\mathrm{F}\\ f\in c_{\mathrm{F}}(q)_x & \longmapsto (x,f)\,.\end{cases}$$

Cette application n'est autre que l'application induite par δ entre $c_{\mathrm{F}}(q)^{-1}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{U}\times\mathrm{F}$. Ainsi l'application δ induit un biholomorphisme entre $c_{\mathrm{F}}(q)^{-1}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{U}\times\mathrm{F}$ pour tout ouvert U trivialisant pour q. L'exemple 1.115 montre que δ est un biholomorphisme. La remarque 1.168 permet alors de conclure. ■

Dans la proposition qui suit, on démontre la fonctorialité de la construction de la proposition 1.186.

Proposition 1.189 — Fibré et multifoncteur 2. Soient $\mathscr{D}$ l'une des deux catégories $\mathbb{C}_{m,n}$ ou $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, $\mathrm{T}:\mathscr{D}\to\mathbf{\mathbb{C}\text{-ev}}$ un foncteur holomorphe et $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe.

Pour $i\in[\![1\,,\,m+n]\!]$, on considère q_1^i et q_2^i deux fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de M d'espace total respectif E_1^i et E_2^i. Pour $i\in[\![1\,,\,m]\!]$, on considère $f_i\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_1^i,q_2^i)$ et pour $i\in[\![m+1\,,\,m+n]\!]$, on considère $f_i\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_2^i,q_1^i)$. Si $\mathscr{D}=\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, on suppose de plus que $(f_i)_x$ est une bijection pour tout $x\in\mathrm{M}$ et tout $i\in[\![1\,,\,m+n]\!]$.

On pose $\mathrm{E}_1=(\mathrm{E}_1^1,\dots,\mathrm{E}_1^{m+n})$, $\mathrm{E}_2=(\mathrm{E}_2^1,\dots,\mathrm{E}_2^{m+n})$, $q_1=(q_1^1,\dots,q_1^{m+n})$ et $q_2=(q_2^1,\dots,q_2^{m+n})$ et on définit l'application

$$\mathrm{T}(f_1,\dots,f_{m+n})\colon\begin{cases}\mathrm{T}(\mathrm{E}_1) & \longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)\\ y\in\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x & \longmapsto \mathrm{T}((f_1)_x,\dots,(f_m)_x,(f_{m+1})_x,\dots,(f_{m+n})_x)(y)\end{cases}$$

On a $\mathrm{T}(f_1,\dots,f_{m+n})\in\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{T}(q_1),\mathrm{T}(q_2))$.

Pour $i\in[\![1\,,\,m]\!]$, on considère q_3^i un fibré vectoriel holomorphe de base M et d'espace total E_3^i et $f_i'\in\mathrm{Hom}(q_2^i,q_3^i)$. Pour $i\in[\![m+1\,,\,m+n]\!]$, on considère q_3^i un fibré vectoriel holomorphe de base M et d'espace total E_3^i et $f_i'\in\mathrm{Hom}(q_3^i,q_2^i)$. Si $\mathscr{D}=\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, on suppose de plus que $(f_i')_x$ est une bijection pour tout $x\in\mathrm{M}$ et tout $i\in[\![1\,,\,m+n]\!]$. On a alors

$$\mathrm{T}(f_1',\dots,f_{m+n}')\circ\mathrm{T}(f_1,\dots,f_{m+n})=\mathrm{T}(f_1'\circ f_1,f_m'\circ f_m,f_{m+1}\circ f_{m+1}',\dots,f_{m+n}\circ f_{m+n}')$$

et
$$\mathrm{T}(\mathrm{id}_{q_1^1},\dots,\mathrm{id}_{q_1^{m+n}})=\mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}\,.$$

Preuve. Montrons que $\mathrm{T}(f_1,\dots,f_{m+n})$ est bien définie. Pour tout $i\in[\![1\,,\,m]\!]$ et tout $x\in\mathrm{M}$, l'application $(f_i)_x:\mathrm{E}_{1x}^i\to\mathrm{E}_{2x}^i$ est $\mathbb{C}$-linéaire (resp. bijective linéaire si $\mathscr{D}=\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$) et pour $i\in[\![m+1\,,\,m+n]\!]$ et $x\in\mathrm{M}$,

l'application $(f_i)_x : \mathrm{E}^i_{2x} \to \mathrm{E}^i_{1x}$ est $\mathbb{C}$-linéaire (resp. bijective linéaire si $\mathscr{D} = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$). Par fonctorialité, on obtient une application linéaire

$$\mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_{m+n})_x) : \mathrm{T}((\mathrm{E}^1_1)_x, \dots, (\mathrm{E}^{m+n}_1)_x) \to \mathrm{T}((\mathrm{E}^1_2)_x, \dots, (\mathrm{E}^{m+n}_2)_x).$$

Or, par construction de $\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ et $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)$, on a $\mathrm{T}((\mathrm{E}^1_j)_x, \dots, (\mathrm{E}^{m+n}_j)_x) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_j)_x$ pour $j \in \{1, 2\}$. Comme

$$\bigsqcup_{x\in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x = \mathrm{T}(\mathrm{E}_1) \qquad \text{et} \qquad \bigsqcup_{x\in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_x = \mathrm{T}(\mathrm{E}_2),$$

l'application
$$\bigsqcup_{x\in \mathrm{M}} \mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_{m+n})_x) : \bigsqcup_{x\in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x \longrightarrow \bigsqcup_{x\in \mathrm{M}} \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_x$$

est une application de $\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ dans $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)$ qui est en fait l'application $\mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})$. Ainsi $\mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})$ est bien définie. De plus, par définition, on a $\mathrm{T}(q_2) \circ \mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n}) = \mathrm{T}(q_1)$ et l'application $\mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})_x$ n'est autre que l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_{m+n})_x)$.

Montrons que $\mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})$ est holomorphe. On utilise pour cela la proposition 1.172. On considère, pour $i \in [\![1\,,\, m+n]\!]$, une famille $(\mathfrak{U}^i_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}^i_\alpha, \varphi^i_\alpha))_{\alpha\in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}'^i_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}'^i_\alpha, \varphi'^i_\alpha))_{\alpha\in \mathrm{A}}$) de cartes trivialisantes pour q^i_1 (resp. q^i_2) dont les domaines recouvrent M (voir la remarque 1.142 pour l'existence de telles familles). La proposition 1.186 montre que $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}^1_\alpha, \dots, \mathfrak{U}^{m+n}_\alpha))_{\alpha\in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}'^1_\alpha, \dots, \mathfrak{U}'^{m+n}_\alpha))_{\alpha\in \mathrm{A}}$) est une famille de cartes trivialisantes pour $\mathrm{T}(q_1)$ (resp. $\mathrm{T}(q_2)$) dont les domaines recouvrent M.

Pour $\alpha \in \mathrm{A}$, on pose $\varphi_\alpha = (\varphi^1_\alpha, \dots, \varphi^{m+n}_\alpha)$ et $\varphi'_\alpha = (\varphi'^1_\alpha, \dots, \varphi'^{m+n}_\alpha)$. Il s'agit de montrer que l'application

$$\psi\colon \begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}^1_\alpha, \dots \mathrm{F}^{m+n}_\alpha), \mathrm{T}(\mathrm{F}'^1_\alpha, \dots, \mathrm{F}'^{m+n}_\alpha)) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi'_\alpha)_x) \circ \mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})_x \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} \end{cases}$$

Or, pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha$, on a, par définition de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}(\varphi'_\alpha)$ (voir la proposition 1.186),

$$p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x = \mathrm{T}((p_2 \circ (\varphi^i_\alpha)_x)_{1\leqslant i\leqslant m}, ((p_2 \circ (\varphi^i_\alpha)_x)^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n})$$

et
$$p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi'_\alpha)_x = \mathrm{T}((p_2 \circ (\varphi'^i_\alpha)_x)_{1\leqslant i\leqslant m}, ((p_2 \circ (\varphi'^i_\alpha)_x)^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi'_\alpha)_x) \circ \mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})_x \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} \quad &= \\ \mathrm{T}(((p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1})_{1\leqslant i\leqslant m}, &((p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x})^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n}).\end{aligned}$$

Le cas $\mathscr{D} = \mathbb{C}_{m,n}$. On déduit de l'égalité précédente que l'application ψ est la composée de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}'^i_\alpha) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}'^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\alpha) \\ x \longmapsto (((p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1})_{1\leqslant i\leqslant m}, ((p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x})^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n}) \end{cases}$$

qui, d'après la proposition 1.172 et l'exemple 1.103, est holomorphe avec l'application

$$\mathrm{T}\colon \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}'^i_\alpha) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}'^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}^1_\alpha, \dots \mathrm{F}^{m+n}_\alpha), \mathrm{T}(\mathrm{F}'^1_\alpha, \dots, \mathrm{F}'^{m+n}_\alpha)) \\ (u_1, \dots, u_{m+n}) \longmapsto \mathrm{T}(u_1, \dots, u_{m+n}) \end{cases}$$

qui est holomorphe par hypothèse. On en déduit que l'application ψ est holomorphe. La proposition 1.172 montre alors que $\mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n}) \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_2))$.

Le cas $\mathscr{D} = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$. Comme, pour $i \in [\![1\,,\, m]\!]$, l'application $(f_i)_x$ est une bijection linéaire, l'application $x \mapsto (p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1}$ est en fait à valeurs dans $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}'^i_\alpha)$. La proposition 1.159 et l'exemple 1.99 montrent alors que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}'^i_\alpha) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. De même, pour $i \in [\![m+1\,,\, m+n]\!]$, on obtient l'holomorphie de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}'^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\alpha) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x})^{-1}. \end{cases}$$

L'exemple 1.103 montre alors que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}'^i_\alpha) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}'^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\alpha) \\ x \longmapsto (((p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1})_{1\leqslant i\leqslant m}, ((p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ \varphi'^i_{\alpha x})^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n}) \end{cases}$$

est holomorphe. Par composition avec l'application holomorphe

$$\mathrm{T}\colon \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha^i, \mathrm{F}_\alpha'^i) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}_\alpha'^i, \mathrm{F}_\alpha^i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}_\alpha^1, \dots \mathrm{F}_\alpha^{m+n}), \mathrm{T}(\mathrm{F}_\alpha'^1, \dots, \mathrm{F}_\alpha'^{m+n})) \\ (u_1, \dots, u_{m+n}) \longmapsto \mathrm{T}(u_1, \dots, u_{m+n}), \end{cases}$$

on obtient l'holomorphie de ψ. La proposition 1.172 montre alors que $\mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n}) \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_2))$.

Soient $e \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ et $x = \mathrm{T}(q_1)(e)$. On pose $f = (f_1, \dots, f_{m+n})$ et $f' = (f'_1, \dots, f'_{m+n})$. On a alors $\mathrm{T}(f)(e) = \mathrm{T}(f)_x(e) = \mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_{m+n})_x)(e) \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_x$, d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(f')(\mathrm{T}(f)(e)) &= \mathrm{T}(f')_x \mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_{m+n})_x)(e) = \mathrm{T}((f'_1)_x, \dots, (f'_{m+n})_x) \circ \mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_{m+n})_x)(e) \\ &= \mathrm{T}((f'_1)_x \circ (f_1)_x, \dots, (f'_m)_x \circ (f_m)_x, (f_{m+1})_x \circ (f'_{m+1})_x, \dots, (f_{m+n})_x \circ (f'_{m+n})_x)(e) \\ &= \mathrm{T}(f'_1 \circ f_1, \dots, f'_m \circ f_m, f_{m+1} \circ f'_{m+1}, \dots, f_{m+n} \circ f'_{m+n})_x(e) \\ &= \mathrm{T}(f'_1 \circ f_1, \dots, f'_m \circ f_m, f_{m+1} \circ f'_{m+1}, \dots, f_{m+n} \circ f'_{m+n})(e). \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\mathrm{T}(f') \circ \mathrm{T}(f) = \mathrm{T}(f'_1 \circ f_1, \dots, f'_m \circ f_m, f_{m+1} \circ f'_{m+1}, \dots, f_{m+n} \circ f'_{m+n})$. De plus, on a

$$\mathrm{T}(\mathrm{id}_{q_1^1}, \dots, \mathrm{id}_{q_1^{m+n}})(e) = \mathrm{T}(\mathrm{id}_{q_1^1}, \dots, \mathrm{id}_{q_1^{m+n}})_x(e) = \mathrm{T}(\mathrm{id}_{(\mathrm{E}_1^1)_x}, \dots, \mathrm{id}_{(\mathrm{E}_1^{m+n})_x})(e) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x}(e) = e$$

et donc $\mathrm{T}(\mathrm{id}_{q_1^1}, \dots, \mathrm{id}_{q_1^{m+n}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}$. ■

La remarque qui suit résume les propositions 1.186 et 1.189 en utilisant le langage des catégories.

Remarque 1.190 – Fonctorialité. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, p, p' deux fibrés vectoriels au-dessus de M et $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p, p')$. D'après la remarque 1.168, f est un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de M si et seulement si f_x est bijective pour tout $x \in \mathrm{M}$.

On note $\mathbf{Fib}_{\mathbf{M}}(\mathbb{C}_{m,n}) = (\mathbf{Fib}_{\mathbf{M}})^m \times (\mathbf{Fib}_{\mathbf{M}}{}^{\mathrm{op}})^n$ et $\mathbf{Fib}_{\mathbf{M}}(\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})) = \mathrm{Iso}((\mathbf{Fib}_{\mathbf{M}})^m \times (\mathbf{Fib}_{\mathbf{M}}{}^{\mathrm{op}})^n)$. Les propositions 1.186 et 1.189 se résument ainsi. Soient $\mathscr{D}$ l'une des deux catégories $\mathbb{C}_{m,n}$ ou $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$ et $\mathrm{T} : \mathscr{D} \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ est un foncteur holomorphe alors on a un foncteur

$$\mathrm{T}\colon \begin{cases} \mathbf{Fib}_{\mathbf{M}}(\mathscr{D}) \longrightarrow \mathbf{Fib}_{\mathbf{M}} \\ (p_1, \dots, p_{m+n}) \longmapsto \mathrm{T}(p_1, \dots, p_{m+n}) \\ (f_1, \dots, f_{m+n}) \longmapsto \mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n}). \end{cases}$$

Finalement, on a pu étendre le foncteur T aux fibrés vectoriels au-dessus de n'importe quelle base alors qu'il n'était défini que sur les fibrés vectoriels au-dessus des prévariétés réduites à un point (voir les exemples 1.143 et 1.151) et illustrer une nouvelle fois le précepte « les fibrés vectoriels généralisent la notion d'espaces vectoriels ». ■

Application 1.191 – Foncteur holomorphe et fibré trivial. Soient $\mathscr{D}$ l'une des deux catégories $\mathbb{C}_{m,n}$ ou $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, $\mathrm{T} : \mathscr{D} \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ un foncteur holomorphe, $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n}$ des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Pour $x \in \mathrm{M}$ et $i \in [\![1, m+n]\!]$, on note $f_{i,x}$ la bijection linéaire canonique $f \mapsto (x, f)$ de F_i dans $\{x\} \times \mathrm{F}_i$. Montrons que l'application

$$\delta\colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}_1}, \dots, \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}_{m+n}}) \longrightarrow \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{T}(\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n})} \\ y \in \mathrm{T}(\{x\} \times \mathrm{F}_1, \dots, \{x\} \times \mathrm{F}_{m+n}) \longmapsto (x, \mathrm{T}(f_{1,x}, \dots, f_{m,x}, (f_{m+1,x})^{-1}, \dots, (f_{m+n,x})^{-1})(y)) \end{cases}$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes.

On considère q un fibré vectoriel au-dessus de M. Pour $i \in [\![1, m+n]\!]$, on note δ_i l'isomorphisme de fibrés vectoriels entre $c_{\mathrm{F}_i}(q)$ et $\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}_i}$ donné dans l'application 1.188. Par fonctorialité (proposition 1.189), on obtient un isomorphisme $\mathrm{T}(\delta_1, \dots, \delta_{m+n})$ entre $\mathrm{T}(c_{\mathrm{F}_1}(q), \dots, c_{\mathrm{F}_{m+n}}(q))$ et $\mathrm{T}(\mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}_1}, \dots, \mathrm{Triv}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{F}_{m+n}})$.

Par ailleurs, le composé du foncteur

$$(c_{\mathrm{F}_1}, \dots, c_{\mathrm{F}_{m+n}})\colon \begin{cases} \mathrm{V} \longmapsto (\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n}) \\ f \longmapsto (\mathrm{id}_{\mathrm{F}_1}, \dots, \mathrm{id}_{\mathrm{F}_{m+n}}) \end{cases}$$

avec le foncteur holomorphe T n'est autre que le foncteur $c_{\mathrm{T}(\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n})}$. On en déduit que

$$\mathrm{T}(c_{\mathrm{F}_1}(q), \dots, c_{\mathrm{F}_{m+n}}(q)) = c_{\mathrm{T}(\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_{m+n})}(q).$$

En appliquant une nouvelle fois l'application 1.188, on obtient le résultat souhaité. ■

On s'intéresse maintenant aux transformations naturelles entre deux foncteurs holomorphes. On montre dans la proposition qui suit qu'on peut étendre une transformation naturelle entre deux foncteurs holomorphes en une transformation naturelle entre les foncteurs étendus suivant la méthode de la proposition 1.189.

Proposition 1.192 — Fibré et multifoncteur 3. Soient $\mathscr{D}$ l'une des deux catégories $\mathbb{C}_{m,n}$ ou $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, $\mathrm{T} : \mathscr{D} \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-ev}}$ et $\mathrm{T}' : \mathscr{D} \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-ev}}$ deux foncteurs holomorphes, $\tau : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ une transformation naturelle et $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe.

Pour $i \in [\![1\,,\, m+n]\!]$, on considère q_1^i un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M d'espace total E_1^i et on pose $\mathrm{E}_1 = (\mathrm{E}_1^1, \ldots, \mathrm{E}_1^{m+n})$ et $q_1 = (q_1^1, \ldots, q_1^{m+n})$. On définit

$$\tau_{q_1} : \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{E}_1) & \longrightarrow \mathrm{T}'(\mathrm{E}_1) \\ y \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x = \mathrm{T}((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x) & \longmapsto \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}(y) \in \mathrm{T}'((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x) \end{cases}$$

On a $\tau_{q_1} \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}'(q_1))$.

Pour $i \in [\![1\,,\, m]\!]$, on considère q_1^i un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M d'espace total E_1^i et $f_i \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_1^i, q_2^i)$ (si $\mathscr{D} = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, on suppose de plus que $(f_i)_x$ est bijective pour tout $x \in \mathrm{M}$) et pour $i \in [\![m+1\,,\, m+n]\!]$, on considère q_1^i un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M d'espace total E_1^i et $f_i \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_2^i, q_1^i)$ (si $\mathscr{D} = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, on suppose de plus que $(f_i)_x$ est bijective pour tout $x \in \mathrm{M}$). On pose $f = (f_1, \ldots, f_{m+n})$ et $q_2 = (q_2^1, \ldots, q_2^{m+n})$. On a alors $\mathrm{T}'(f) \circ \tau_{q_1} = \tau_{q_2} \circ \mathrm{T}(f)$.

Soient $\mathrm{T}'' : \mathscr{D} \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-ev}}$ un foncteur holomorphe. On considère une transformation naturelle $\beta : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}''$. On a alors $\beta_{q_1} \circ \tau_{q_1} = (\beta \circ \tau)_{q_1}$. Si $\mathrm{T} = \mathrm{T}'$ et $\tau = \mathrm{id}_{\mathrm{T}}$ alors $\tau_{q_1} = \mathrm{id}_{q_1}$.

Preuve. Montrons que τ_{q_1} est bien définie. Comme

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}_1) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}'(\mathrm{E}_1) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}'((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)\,,$$

on a

$$\tau_{q_1} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}\,.$$

De plus, par construction, on a $\mathrm{T}'(q_1) \circ \tau_{q_1} = \mathrm{T}(q_1)$ et $(\tau_{q_1})_x = \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Montrons que τ_{q_1} est holomorphe. On utilise pour cela la proposition 1.172. On considère, pour $i \in [\![1\,,\, m+n]\!]$, une famille $(\mathfrak{U}_\alpha^i = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha^i, \varphi_\alpha^i))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de cartes trivialisantes pour q_i dont les domaines recouvrent M (voir la remarque 1.142 pour l'existence de telles familles). La proposition 1.186 montre que $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\alpha^1, \ldots, \mathfrak{U}_\alpha^{m+n}))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathrm{T}'(\mathfrak{U}_\alpha^1, \ldots, \mathfrak{U}_\alpha^{m+n}))_{\alpha \in \mathrm{A}}$) est une famille de cartes trivialisantes pour $\mathrm{T}(q_1)$ (resp. $\mathrm{T}'(q_1)$) dont les domaines recouvrent M.

Pour $\alpha \in \mathrm{A}$, on pose $\varphi_\alpha = (\varphi_\alpha^1, \ldots, \varphi_\alpha^{m+n})$. Pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha$, on a, par définition de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)$,

$$p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x = \mathrm{T}((p_2 \circ (\varphi_\alpha^i)_x)_{1 \leqslant i \leqslant m}, ((p_2 \circ (\varphi_\alpha^i)_x)^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n})$$

et

$$p_2 \circ \mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x = \mathrm{T}'((p_2 \circ (\varphi_\alpha^i)_x)_{1 \leqslant i \leqslant m}, ((p_2 \circ (\varphi_\alpha^i)_x)^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n})\,.$$

On en déduit que

$$(p_2 \circ \mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x) \circ (\tau_{q_1})_x \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} = (p_2 \circ \mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x) \circ (\tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}) \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} = \tau_{\mathrm{F}_\alpha^1, \ldots, \mathrm{F}_\alpha^{m+n}}\,.$$

Ainsi, l'application

$$\begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}_\alpha^1, \ldots, \mathrm{F}_\alpha^{m+n}), \mathrm{T}'(\mathrm{F}_\alpha^1, \ldots, \mathrm{F}_\alpha^{m+n})) \\ x \longmapsto (p_2 \circ \mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x) \circ (\tau_{q_1})_x \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} \end{cases}$$

est constante donc holomorphe. La proposition 1.172 (*iii*) montre alors que $\tau_{q_1} \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}'(q_1))$.

Soient $e \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ et $x = \mathrm{T}(q_1)(e)$. Comme $\mathrm{T}(f)(e) = \mathrm{T}(f)_x(e) = \mathrm{T}((f_1)_x, \ldots, (f_{m+n})_x)(e) \in \mathrm{E}_{2x}$, $(\tau_{q_1})_x(e) \in \mathrm{T}'(\mathrm{E}_1)_x$ $(\tau_{q_1})_x = \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}$, $(\tau_{q_2})_x = \tau_{((\mathrm{E}_2^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_2^{m+n})_x)}$ et

$$\tau_{((\mathrm{E}_2^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_2^{m+n})_x)} \circ \mathrm{T}((f_1)_x, \ldots, (f_{m+n})_x) = \mathrm{T}'((f_1)_x, \ldots, (f_{m+n})_x) \circ \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}\,,$$

on obtient

$$\tau_{q_2} \circ \mathrm{T}(f)(e) = (\tau_{q_2})_x \circ \mathrm{T}(f)_x(e) = \mathrm{T}'(f)_x \circ (\tau_{q_1})_x(e) = \mathrm{T}'(f) \circ \tau_{q_1}(e)\,.$$

Ainsi $\tau_{q_1} \circ \mathrm{T}(f) = \mathrm{T}'(f) \circ \tau_{q_2}$. Par ailleurs, on a

$$\beta_{q_1} \circ \tau_{q_1}(e) = \beta_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)} \circ \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}(e) = (\beta \circ \tau)_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}(e) = (\beta \circ \tau)_{q_1}(e)\,.$$

On obtient donc $\beta_{q_1} \circ \tau_{q_1} = (\beta \circ \tau)_{q_1}$. De plus, comme $\tau_{\mathrm{E}_{1x}} = \mathrm{id}_{\mathrm{E}_{1x}}$, on obtient

$$\tau_{q_1}(e) = \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}(e) = e = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}(e)\,.$$

On en déduit que $\tau_{q_1} = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}$. ■

La remarque qui suit résume la proposition 1.192 en utilisant le langage des catégories.

Remarque 1.193 — Fonctorialité et transformation naturelle. Soient $\mathscr{D}$ l'une des deux catégories $\mathbb{C}_{m,n}$ ou $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$. On note $\mathrm{Fonc}(\mathscr{D}, \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev})$ la catégorie des foncteurs de $\mathscr{D}$ dans $\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$, $\mathrm{Holo}(\mathscr{D}, \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev})$ la sous-catégorie pleine des foncteurs holomorphes et $\mathrm{Fonc}(\mathbf{Fib_M}(\mathscr{D}), \mathbf{Fib_M})$ la catégorie des foncteurs de $\mathbf{Fib_M}(\mathscr{D})$ dans $\mathbf{Fib_M}$. On a un foncteur

$$\begin{cases} \mathrm{Holo}(\mathscr{D}, \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}) & \longrightarrow & \mathrm{Fonc}(\mathbf{Fib_M}(\mathscr{D}), \mathbf{Fib_M}) \\ \mathrm{T} & \longmapsto & \mathrm{T} \\ \tau & \longmapsto & \tau\,. \end{cases}$$

En particulier, en reprenant les notations de la proposition 1.192, on obtient que si $\tau : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ est un isomorphisme de foncteurs alors τ_{q_1} est un isomorphisme de fibrés vectoriels au-dessus de M. ■

Exemple 1.194 — Fibré somme directe. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1\,,\, m]\!]$. On considère les foncteurs holomorphes $\mathrm{Somd} : \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}^m \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ et $\mathrm{P}_j : \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}^m \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ (voir l'exemple 1.185). On a alors les transformations naturelles $i_j : \mathrm{P}_j \to \mathrm{Somd}$ et $r_j : \mathrm{Somd} \to \mathrm{P}_j$ donnée, pour tous espaces vectoriels $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_m$ de dimension finie, par

$$i_j(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_m) \colon \begin{cases} \mathrm{V}_j & \longrightarrow & \mathrm{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_m \\ v_j & \longmapsto & (0, \dots, 0, v_j, 0, \dots, 0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad r_j(\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_m) \colon \begin{cases} \mathrm{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_m & \longrightarrow & \mathrm{V}_j \\ (v_1, \dots, v_m) & \longmapsto & v_j\,. \end{cases}$$

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $q_1, \dots, q_m$ des fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de M dont les espaces totaux respectifs sont $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_m$. On note $q_1 \oplus \cdots \oplus q_m$ le fibré somme directe des q_i (voir l'application 1.187) et $\mathrm{T(E)}$ son espace total.

Pour $j \in [\![1\,,\, m]\!]$, la proposition 1.192 appliquée aux deux transformations naturelles $i_j : \mathrm{P}_j \to \mathrm{Somd}$ et $r_j : \mathrm{Somd} \to \mathrm{P}_j$ permet de définir deux morphismes de fibrés vectoriels $i_j \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_j, q_1 \oplus \cdots \oplus q_m)$ et $r_j \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, q_j)$ donnés par

$$i_j \colon \begin{cases} \mathrm{E}_j & \longrightarrow & \mathrm{T(E)} \\ e_j \in (\mathrm{E}_j)_x & \longmapsto & (0, \dots, 0, e_j, 0, \dots, 0) \in \mathrm{T(E)}_x \end{cases} \qquad \text{et} \quad r_j \colon \begin{cases} \mathrm{T(E)} & \longrightarrow & \mathrm{E}_j \\ (e_1, \dots, e_m) \in \mathrm{T(E)}_x & \longmapsto & e_j \in (\mathrm{E}_j)_x\,. \end{cases}$$

Montrons que $(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, i_1, \dots, i_m, r_1, \dots r_m)$ est la somme directe des q_i dans la catégorie pré-$\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-linéaire $\mathbf{Fib_M}$. Soient $e \in \mathrm{T(E)}$ et $x = (q_1 \oplus \cdots \oplus q_m)(e)$. On a

$$(i_1 \circ r_1 + \cdots + i_m \circ r_m)(e) = ((i_1)_x \circ (r_1)_x + \cdots + (i_m)_x \circ (r_m)_x)(e) = e\,,$$

et donc $i_1 \circ r_1 + \cdots + i_m \circ r_m = \mathrm{id}_{q_1 \oplus \cdots \oplus q_m}$. Soient $j, k \in [\![1\,,\, m]\!]$ avec $j \neq k$, $e \in \mathrm{E}_j$ et $x = q_j(e)$. On a

$$(r_j \circ i_j)(e) = ((r_j)_x \circ (i_j)_x)(e) = e \qquad \text{et} \qquad (r_k \circ i_j)(e) = ((r_k)_x \circ (i_j)_x)(e) = 0\,,$$

et donc $r_j \circ i_j = \mathrm{id}_{q_j}$ et $r_k \circ i_j = 0$. Ainsi $(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, i_1, \dots, i_m, r_1, \dots r_m)$ est la somme directe des q_i dans $\mathbf{Fib_M}$. ■

Application 1.195 — Catégorie $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-linéaire. Soit M une prévariété holomorphe. Montrons que la catégorie $\mathbf{Fib_M}$ est une catégorie $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-linéaire.

D'après la remarque 1.166 et l'exemple 1.194, il suffit de montrer que $\mathbf{Fib_M}$ admet un objet nul. Montrons que $p = \mathrm{Triv}^0_{\mathrm{M}}$ le fibré vectoriel trivial de fibre réduite à 0 est un objet nul dans $\mathbf{Fib_M}$.

Soient p' un fibré vectoriel au-dessus de M et $f \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p, p')$ et $g \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p', p)$. Pour $x \in \mathrm{M}$, l'espace de départ (resp. d'arrivée) de f_x (de g_x) est un espace vectoriel nul. On a donc $f_x = 0$ et $g_x = 0$. Ainsi, en reprenant les notations de l'exemple 1.150, on a $f = f^0_{\mathrm{id}}$ et $g = f^0_{\mathrm{id}}$. On en déduit que $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p, p')$ et $\mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(p', p)$ sont réduits à des singletons et donc p est un objet nul. ■

Application 1.196 — Section du fibré somme directe. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $q_1, \dots, q_m$ des fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de M dont les espaces totaux respectifs sont $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_m$. On note $q_1 \oplus \cdots \oplus q_m$ le fibré somme directe des q_i (voir l'application 1.187) et $\mathrm{T(E)}$ son espace total.

On considère un ouvert U de M et, pour $j \in [\![1\,,\, m]\!]$, une section s_j de q_j au-dessus de U. Montrons que l'application

$$s_1 \oplus \cdots \oplus s_m \colon \begin{cases} \mathrm{U} & \longrightarrow & \mathrm{T(E)} \\ x & \longmapsto & (s_1(x), \dots, s_m(x))\,. \end{cases}$$

est une section de $q_1 \oplus \cdots \oplus q_m$.

Pour $j \in [\![1\,,\, m]\!]$, on considère les applications

$$i_j \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_j, q_1 \oplus \cdots \oplus q_m) \qquad \text{et} \qquad r_j \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, q_j)$$

définies dans l'exemple 1.194. La proposition 1.179 montre que $i_j \circ s_j \in \Gamma(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, \mathrm{U})$. Ainsi

$$i_1 \circ s_1 + \cdots + i_m \circ s_m \in \Gamma(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, \mathrm{U})\,.$$

Or, on a $i_1 \circ s_1 + \cdots + i_m \circ s_m = s_1 \oplus \cdots \oplus s_m$. Ainsi $s_1 \oplus \cdots \oplus s_m \in \Gamma(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, \mathrm{U})$.

Réciproquement, si $s \in \Gamma(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, \mathrm{U})$ alors $r_j \circ s \in \Gamma(q_j, \mathrm{U})$ pour tout $j \in [\![1\,,\, m]\!]$ (proposition 1.179).

On reprend alors les notations de la proposition 1.179. Les relations $r_j \circ i_j = \mathrm{id}_{q_j}$, $r_j \circ i_k = 0$ si $j \neq k$ et $i_1 \circ r_1 + \cdots + i_m \circ r_m = \mathrm{id}_{q_1 \oplus \cdots \oplus q_m}$ montrent que les applications

$$\gamma_{i_1,\mathrm{U}}, \ldots, \gamma_{i_m,\mathrm{U}} : \begin{cases} \Gamma(q_1, \mathrm{U}) \oplus \cdots \oplus \Gamma(q_m, \mathrm{U}) & \longrightarrow \Gamma(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, \mathrm{U}) \\ (s_1, \ldots, s_m) & \longmapsto i_1 \circ s_1 + \cdots + i_m \circ s_m = s_1 \oplus \cdots \oplus s_m \end{cases}$$

et

$$\gamma_{r_1,\mathrm{U}}, \ldots, \gamma_{r_m,\mathrm{U}} : \begin{cases} \Gamma(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m, \mathrm{U}) & \longrightarrow \Gamma(q_1, \mathrm{U}) \oplus \cdots \oplus \Gamma(q_m, \mathrm{U}) \\ s & \longmapsto (r_1 \circ s, \ldots, r_m \circ s)\,. \end{cases}$$

sont des isomorphismes $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-linéaire réciproques l'une de l'autre.

Ainsi les morphismes de $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-modules

$$(\gamma_{i_1}, \ldots, \gamma_{i_m}) : \Gamma(q_1) \oplus \cdots \oplus \Gamma(q_m) \longrightarrow \Gamma(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m)$$

et

$$(\gamma_{r_1}, \ldots, \gamma_{r_m}) : \Gamma(q_1 \oplus \cdots \oplus q_m) \longrightarrow \Gamma(q_1) \oplus \cdots \oplus \Gamma(q_m)\,.$$

sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. ■

Proposition 1.197 — Fibré, foncteur et transformation quasi-naturelle. Soient $\mathscr{D}$ l'une des deux catégories $\mathbb{C}_{m,n}$ ou $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, $\mathrm{T} : \mathscr{D} \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-ev}}$ et $\mathrm{T}' : \mathscr{D} \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-ev}}$ deux foncteurs holomorphes et $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe.

On suppose que, pour toute famille $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{m+n})$ d'espaces vectoriels de dimension finie, on dispose d'une application holomorphe

$$\tau_{\mathrm{V}_1,\ldots,\mathrm{V}_{m+n}} : \mathrm{T}(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{m+n}) \to \mathrm{T}'(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{m+n})$$

telle que pour toutes familles $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{m+n})$, $(\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_{m+n})$ d'espaces vectoriels de dimension finie et pour toutes familles $(u_1, \ldots, u_{m+n})$ d'applications linéaires avec $u_i : \mathrm{V}_i \to \mathrm{W}_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$ et $u_i : \mathrm{W}_i \to \mathrm{V}_i$ pour $m+1 \leqslant i \leqslant m+n$, on ait le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{m+n}) \arrow[r, "\tau_{\mathrm{V}_1,\ldots,\mathrm{V}_{m+n}}"] \arrow[d, "\mathrm{T}(u_1,\ldots,u_{m+n})"'] & \mathrm{T}'(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_{m+n}) \arrow[d, "\mathrm{T}'(u_1,\ldots,u_{m+n})"] \\ \mathrm{T}(\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_{m+n}) \arrow[r, "\tau_{\mathrm{W}_1,\ldots,\mathrm{W}_{m+n}}"] & \mathrm{T}'(\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_{m+n}) \end{tikzcd}$$

Pour $i \in [\![1\,,\, m+n]\!]$, on considère q_1^i un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M d'espace total E_1^i et on pose $\mathrm{E}_1 = (\mathrm{E}_1^1, \ldots, \mathrm{E}_1^{m+n})$ et $q_1 = (q_1^1, \ldots, q_1^{m+n})$. On définit

$$\tau_{q_1} : \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{E}_1) & \longrightarrow \mathrm{T}'(\mathrm{E}_1) \\ y \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x = \mathrm{T}((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x) & \longmapsto \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x,\ldots,(\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}(y) \in \mathrm{T}'((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x) \end{cases}$$

L'application τ_{q_1} est holomorphe et vérifie $\mathrm{T}'(q_1) \circ \tau_{q_1} = \mathrm{T}(q_1)$.

Pour $i \in [\![1\,,\, m]\!]$, on considère q_1^i un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M d'espace total E_1^i et $f_i \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_1^i, q_2^i)$ (si $\mathscr{D} = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, on suppose de plus que $(f_i)_x$ est bijective pour tout $x \in \mathrm{M}$) et pour $i \in [\![m+1\,,\, m+n]\!]$, on considère q_1^i un fibré vectoriel holomorphe au-dessus de M d'espace total E_1^i et $f_i \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{M}}(q_2^i, q_1^i)$ (si $\mathscr{D} = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, on suppose de plus que $(f_i)_x$ est bijective pour tout $x \in \mathrm{M}$). On pose $f = (f_1, \ldots, f_{m+n})$ et $q_2 = (q_2^1, \ldots, q_2^{m+n})$. On a alors $\mathrm{T}'(f) \circ \tau_{q_1} = \tau_{q_2} \circ \mathrm{T}(f)$.

Preuve. Montrons que τ_{q_1} est bien définie. Comme

$$\mathrm{T}(\mathrm{E}_1) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}'(\mathrm{E}_1) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}'((\mathrm{E}_1^1)_x, \ldots, (\mathrm{E}_1^{m+n})_x)\,,$$

on a

$$\tau_{q_1} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x,\ldots,(\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}\,.$$

De plus, par construction, on a $\mathrm{T}'(q_1) \circ \tau_{q_1} = \mathrm{T}(q_1)$.

On considère, pour $i \in [\![1\,,\, m+n]\!]$, une famille $(\mathfrak{U}_\alpha^i = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}_\alpha^i, \varphi_\alpha^i))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de cartes trivialisantes pour q_i dont les domaines recouvrent M (voir la remarque 1.142 pour l'existence de telles familles). La proposition 1.186

montre que $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}_\alpha^1,\dots,\mathfrak{U}_\alpha^{m+n}))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ (resp. $(\mathrm{T}'(\mathfrak{U}_\alpha^1,\dots,\mathfrak{U}_\alpha^{m+n}))_{\alpha\in\mathrm{A}}$) est une famille de cartes trivialisantes pour $\mathrm{T}(q_1)$ (resp. $\mathrm{T}'(q_1)$) dont les domaines recouvrent M.

Pour $\alpha\in\mathrm{A}$, on pose $\varphi_\alpha=(\varphi_\alpha^1,\dots,\varphi_\alpha^{m+n})$. Pour raccourcir les notations, on pose $u_x^i=p_2\circ(\varphi_\alpha^i)_x$ pour $1\leqslant i\leqslant m$ et $u_x^i=(p_2\circ(\varphi_\alpha^i)_x)^{-1}$ pour $m+1\leqslant i\leqslant m+n$. Par définition de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)$ (voir la proposition 1.186), on a

$$p_2\circ\mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x=\mathrm{T}(u_x^1,\dots,u_x^{m+n})\qquad\text{et}\qquad p_2\circ\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x=\mathrm{T}'(u_x^1,\dots,u_x^{m+n})\,.$$

Par ailleurs, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}_\alpha\times\mathrm{T}(\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_{m+n}) \arrow[dr, "p_1"'] & \mathrm{T}(q_1)^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \arrow[l, "\mathrm{T}(\varphi_\alpha)"'] \arrow[r, "\tau_{q_1}"] \arrow[d, "\mathrm{T}(q_1)"'] & \mathrm{T}'(q_1)^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) \arrow[r, "\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)"] \arrow[d, "\mathrm{T}'(q_1)"'] & \mathrm{U}_\alpha\times\mathrm{T}'(\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_{m+n}) \arrow[dl, "p_1"] \\
& \mathrm{U}_\alpha \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{U}_\alpha}"] & \mathrm{U}_\alpha &
\end{tikzcd}$$

Pour $(x,v)\in\mathrm{U}_\alpha\times\mathrm{T}(\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_{m+n})$, le lemme 1.158 et les définitions de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)$ montrent que

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)\circ\tau_{q_1}\circ\mathrm{T}(\varphi_\alpha)^{-1}(x,v)&=(x,(p_2\circ\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x)\circ(\tau_{q_1})_x\circ(p_2\circ\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)_x)^{-1}(v))\\
&=(x,\mathrm{T}'(u_x^1,\dots,u_x^{m+n})\circ(\tau_{(\mathrm{E}_{ix})_{1\leqslant i\leqslant m+n}})\circ\mathrm{T}(u_x^1,\dots,u_x^{m+n})^{-1}(v)\\
&=(x,\tau_{\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_{m+n}}(v))\,.
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)\circ\tau_{q_1}\circ\mathrm{T}(\varphi_\alpha)^{-1}=\mathrm{id}_{\mathrm{U}_\alpha}\times\tau_{\mathrm{F}_1,\dots,\mathrm{F}_{m+n}}$$
est holomorphe (application 1.104). Comme $\mathrm{T}'(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)^{-1}$ sont des biholomorphismes, on en déduit que $\tau_{q_1}:p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)\to p'^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ est holomorphe. Or $(p'^{-1}(\mathrm{U}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{B}}$ est un recouvrement ouvert de $\mathrm{T}'(\mathrm{E}_1)$ et $\tau_{q_1}^{-1}(p'^{-1}(\mathrm{U}_\alpha))=p^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)$ est un ouvert de $\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$. La proposition 1.101 (*vii*) montre que τ_{q_1} holomorphe.

Soient $e\in\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ et $x=\mathrm{T}(q_1)(e)$. Comme $\mathrm{T}(f)(e)=\mathrm{T}(f)_x(e)=\mathrm{T}((f_1)_x,\dots,(f_{m+n})_x)(e)\in\mathrm{E}_{2x}$, $(\tau_{q_1})_x(e)\in\mathrm{T}'(\mathrm{E}_1)_x$, $(\tau_{q_1})_x=\tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x,\dots,(\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}$, $(\tau_{q_2})_x=\tau_{((\mathrm{E}_2^1)_x,\dots,(\mathrm{E}_2^{m+n})_x)}$ et

$$\tau_{((\mathrm{E}_2^1)_x,\dots,(\mathrm{E}_2^{m+n})_x)}\circ\mathrm{T}((f_1)_x,\dots,(f_{m+n})_x)=\mathrm{T}'((f_1)_x,\dots,(f_{m+n})_x)\circ\tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x,\dots,(\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}\,,$$

on obtient
$$\tau_{q_2}\circ\mathrm{T}(f)(e)=(\tau_{q_2})_x\circ\mathrm{T}(f)_x(e)=\mathrm{T}'(f)_x\circ(\tau_{q_1})_x(e)=\mathrm{T}'(f)\circ\tau_{q_1}(e)\,.$$

Ainsi $\tau_{q_1}\circ\mathrm{T}(f)=\mathrm{T}'(f)\circ\tau_{q_2}$. ■

FIBRÉ, FONCTEUR ET CHANGEMENT DE BASE

Dans les propositions 1.189 et 1.192, la prévariété de base de tous les fibrés entrant en jeu est fixée. Mais, on a parfois besoin d'effectuer un changement de base. La situation est alors un peu plus complexe que celle décrite dans les propositions 1.189 et 1.192. En effet, on a besoin d'assurer une propriété de bijectivité sur les applications induites entre les fibres (au moins pour la partie contravariante) pour pouvoir obtenir des applications linéaires dans le bon sens et ainsi construire l'application $\overline{\mathrm{T}}(f_1,\dots,f_{m+n})$. On obtient alors des résultats de fonctorialité du même type que ceux des propositions 1.189 et 1.192.

Proposition 1.198 — Fibré et multifoncteur 4. Soient $\mathscr{D}$ l'une des deux catégories $\mathbb{C}_{m,n}$ ou $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, $\mathrm{T}:\mathscr{D}\to\mathbb{C}\text{-}\mathbf{ev}$ un foncteur holomorphe et $(\mathrm{M}_1,\mathscr{A}_1)$, $(\mathrm{M}_2,\mathscr{A}_2)$ deux prévariétés holomorphes et $g:\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2$ une application holomorphe.

Pour $i\in[\![1\,,\,m+n]\!]$, on considère un fibré vectoriel q_1^i au-dessus de M_1 d'espace total E_1^i, un fibré vectoriel q_2^i au-dessus de M_2 d'espace total E_2^i et $f_i\in\mathrm{Hom}^g(q_1^i,q_2^i)$.

On suppose que $(f_i)_x$ est bijective pour tout $i\in[\![m+1\,,\,m+n]\!]$ et tout $x\in\mathrm{M}_1$ et si $\mathscr{D}=\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, on suppose en plus que $(f_i)_x$ est bijective pour tout $i\in[\![1\,,\,m]\!]$ et tout $x\in\mathrm{M}_1$.

On pose $\mathrm{E}_1=(\mathrm{E}_1^1,\dots,\mathrm{E}_1^{m+n})$, $\mathrm{E}_2=(\mathrm{E}_2^1,\dots,\mathrm{E}_2^{m+n})$, $q_1=(q_1^1,\dots,q_1^{m+n})$ et $q_2=(q_2^1,\dots,q_2^{m+n})$ et on définit l'application

$$\overline{\mathrm{T}}(f_1,\dots,f_{m+n}):\begin{cases}\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)\longrightarrow\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)\\ y\in\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x\longmapsto\mathrm{T}((f_1)_x,\dots,(f_m)_x,((f_{m+1})_x)^{-1},\dots,((f_{m+n})_x)^{-1})(y)\end{cases}$$

On a $\overline{\mathrm{T}}(f_1,\dots,f_{m+n})\in\mathrm{Hom}^g(\mathrm{T}(q_1),\mathrm{T}(q_2))$.

Soient $(\mathrm{M}_3,\mathscr{A}_3)$ une prévariété holomorphe et $g':\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_3$ une application holomorphe. Pour tout $i\in[\![1\,,\,m+n]\!]$, on considère un fibré vectoriel q_3^i au-dessus de M_3 d'espace total E_3^i et $f_i'\in\mathrm{Hom}^g(q_2^i,q_3^i)$. On suppose que $(f_i)_x$ est bijective pour tout $i\in[\![m+1\,,\,m+n]\!]$ et tout $x\in\mathrm{M}_2$ et si $\mathscr{D}=\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$, on suppose en plus que $(f_i)_x$ est bijective pour tout $i\in[\![1\,,\,m]\!]$ et tout $x\in\mathrm{M}_2$.

On pose $f = (f_1, \dots, f_{m+n})$, $f' = (f'_1, \dots, f'_{m+n})$ et $q_3 = (q_3^1, \dots, q_3^{m+n})$. On a

$$\overline{\mathrm{T}}(f') \circ \overline{\mathrm{T}}(f) = \overline{\mathrm{T}}(f'_1 \circ f_1, \dots, f'_{m+n} \circ f_{m+n}) \in \mathrm{Hom}^{g' \circ g}(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_3)).$$

De plus, si $\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1$, $g = \mathrm{id}_{\mathrm{M}_1}$, $q_2^i = q_1^i$ et $f_i = \mathrm{id}_{q_1^i}$ alors $\overline{\mathrm{T}}(\mathrm{id}_{q_1^1}, \dots, q_1^{m+n}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}$.

On considère un foncteur holomorphe $\mathrm{T}' : \mathscr{D} \to \mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ et une transformation naturelle $\tau : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$. On a alors $\overline{\mathrm{T}'} \circ \tau_{q_1} = \tau_{q_2} \circ \overline{\mathrm{T}}$.

Preuve. Montrons que $\mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})$ est bien définie. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et tout $x \in \mathrm{M}_1$, l'application $(f_i)_x : \mathrm{E}^i_{1x} \to \mathrm{E}^i_{2g(x)}$ est $\mathbb{C}$-linéaire (resp. bijective linéaire si $\mathscr{D} = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$) et pour $i \in [\![m+1, m+n]\!]$ et $x \in \mathrm{M}_1$, l'application $((f_i)_x)^{-1} : \mathrm{E}^i_{2g(x)} \to \mathrm{E}^i_{1x}$ est une bijection linéaire. Par fonctorialité, on obtient une application linéaire

$$\mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_m)_x, {(f_{m+1})_x}^{-1}, \dots, {(f_{m+n})_x}^{-1}) : \mathrm{T}((\mathrm{E}^1_1)_x, \dots, (\mathrm{E}^{m+n}_1)_x) \to \mathrm{T}((\mathrm{E}^1_2)_{g(x)}, \dots, (\mathrm{E}^{m+n}_2)_{g(x)}).$$

Or, par construction de $\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ et $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)$, on a

$$\mathrm{T}((\mathrm{E}^1_1)_x, \dots, (\mathrm{E}^{m+n}_1)_x) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}((\mathrm{E}^1_2)_{g(x)}, \dots, (\mathrm{E}^{m+n}_2)_{g(x)}) = \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_{g(x)} \subset \mathrm{T}(\mathrm{E}_2).$$

On a donc une famille d'applications

$$\mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_m)_x, {(f_{m+1})_x}^{-1}, \dots, {(f_{m+n})_x}^{-1}) : \mathrm{T}((\mathrm{E}^1_1)_x, \dots, (\mathrm{E}^{m+n}_1)_x) \to \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)$$

indexée par $x \in \mathrm{M}_1$. Comme

$$\bigsqcup_{x \in \mathrm{M}_1} \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x = \mathrm{T}(\mathrm{E}_1),$$

la propriété universelle de la réunion disjointe fournit une application de $\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ dans $\mathrm{T}(\mathrm{E}_2)$ qui n'est autre que l'application $\overline{\mathrm{T}}(f_1, \dots, f_{m+n})$. Ainsi $\overline{\mathrm{T}}(f_1, \dots, f_{m+n})$ est bien définie. De plus, par définition, on a bien sûr $\mathrm{T}(q_2) \circ \overline{\mathrm{T}}(f_1, \dots, f_{m+n}) = g \circ \mathrm{T}(q_1)$ et l'application $\overline{\mathrm{T}}(f_1, \dots, f_{m+n})_x$ n'est autre que l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathrm{T}((f_1)_x, \dots, (f_m)_x, {(f_{m+1})_x}^{-1}, \dots, {(f_{m+n})_x}^{-1})$.

Montrons que $\overline{\mathrm{T}}(f_1, \dots, f_{m+n})$ est holomorphe. On utilise pour cela la proposition 1.159. On considère, pour $i \in [\![1, m+n]\!]$, une famille $(\mathfrak{U}^i_\alpha = (\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{F}^i_\alpha, \varphi^i_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathfrak{U}^i_\beta = (\mathrm{U}_\beta, \mathrm{F}^i_\beta, \varphi^i_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) de cartes trivialisantes pour q_1^i (resp. q_2^i) dont les domaines recouvrent M_1 (resp. M_2) (voir la remarque 1.142 pour l'existence de telles familles). La proposition 1.186 montre que $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}^1_\alpha, \dots, \mathfrak{U}^{m+n}_\alpha))_{\alpha \in \mathrm{A}}$ (resp. $(\mathrm{T}(\mathfrak{U}^1_\beta, \dots, \mathfrak{U}^{m+n}_\beta))_{\beta \in \mathrm{B}}$) est une famille de cartes trivialisantes pour $\mathrm{T}(q_1)$ (resp. $\mathrm{T}(q_2)$) dont les domaines recouvrent M_1 (resp. M_2).

Pour $\alpha \in \mathrm{A}$ (resp. $\beta \in \mathrm{B}$), on pose $\varphi_\alpha = (\varphi^1_\alpha, \dots, \varphi^{m+n}_\alpha)$ (resp. $\varphi'_\beta = (\varphi^1_\beta, \dots, \varphi^{m+n}_\beta)$). Il s'agit de montrer que l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}^1_\alpha, \dots \mathrm{F}^{m+n}_\alpha), \mathrm{T}(\mathrm{F}^1_\beta, \dots, \mathrm{F}^{m+n}_\beta)) \\ \qquad x \qquad \longmapsto (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_{g(x)}) \circ \mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})_x \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. Or, pour tout $x \in \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$, on a, par définition de $\mathrm{T}(\varphi_\alpha)$ et $\mathrm{T}(\varphi_\beta)$,

$$p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x = \mathrm{T}((p_2 \circ (\varphi^i_\alpha)_x)_{1 \leqslant i \leqslant m}, ((p_2 \circ (\varphi^i_\alpha)_x)^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n})$$

et
$$p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_{g(x)} = \mathrm{T}((p_2 \circ (\varphi^i_\beta)_{g(x)})_{1 \leqslant i \leqslant m}, ((p_2 \circ (\varphi^i_\beta)_{g(x)})^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n}).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} &(p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\beta)_{g(x)}) \circ \mathrm{T}(f_1, \dots, f_{m+n})_x \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\varphi_\alpha)_x)^{-1} \quad = \\ &\qquad \mathrm{T}(((p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}}) \circ (f_i)_x \circ (p_2 \circ (\varphi^i_\alpha)_x)^{-1})_{1 \leqslant i \leqslant m}, ((p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x}) \circ {(f_i)_x}^{-1} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}})^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n}). \end{aligned}$$

Le cas $\mathscr{D} = \mathbb{C}_{m,n}$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, on pose $\mathrm{V}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$. On déduit de l'égalité précédente que ψ est la composée des applications

$$\delta : \begin{cases} \mathrm{V}_{\alpha\beta} \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\beta, \mathrm{F}^i_\alpha) \\ x \longmapsto (((p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}}) \circ f_{i_x} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1})_{1 \leqslant i \leqslant m}, ((p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x}) \circ {f_{i_x}}^{-1} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}})^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n}) \end{cases}$$

et
$$\mathrm{T} : \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\beta, \mathrm{F}^i_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}^1_\alpha, \dots \mathrm{F}^{m+n}_\alpha), \mathrm{T}(\mathrm{F}^1_\beta, \dots, \mathrm{F}^{m+n}_\beta)) \\ (u_1, \dots, u_{m+n}) \longmapsto \mathrm{T}(u_1, \dots, u_{m+n}). \end{cases}$$

D'après la proposition 1.159, les m premières composantes de δ sont holomorphes. Par ailleurs, comme, pour $i \in [\![m+1\,,\, m+n]\!]$, l'application $(f_i)_x$ est une bijection linéaire, l'application

$$x \longmapsto (p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}}) \circ f_{i_x} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1}$$

est en fait à valeurs dans $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta)$. La proposition 1.159 et l'exemple 1.99 montrent alors que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{V}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \\ \quad x \quad \longmapsto (p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}}) \circ f_{i_x} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. Par composition avec l'application holomorphe

$$u \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \mapsto u^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\beta, \mathrm{F}^i_\alpha)$$

(application 1.91), on obtient l'holomorphie de la i^{e} composante de δ. L'exemple 1.103 donne alors l'holomorphie de δ. Comme l'application T est holomorphe, on en déduit, par composition, que ψ est holomorphe. Pour finir, la proposition 1.159 montre que $\overline{\mathrm{T}}(f_1, \ldots, f_{m+n}) \in \mathrm{Hom}^g(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_2))$.

Le cas $\mathscr{D} = \mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, on pose $\mathrm{V}_{\alpha\beta} = \mathrm{U}_\alpha \cap g^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$. Comme, pour $i \in [\![1\,,\, m+n]\!]$, l'application $(f_i)_x$ est une bijection linéaire, l'application

$$x \longmapsto (p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}}) \circ f_{i_x} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1}$$

est en fait à valeurs dans $\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta)$. La proposition 1.159 et l'exemple 1.99 montrent alors que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{V}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \\ \quad x \quad \longmapsto (p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}}) \circ f_{i_x} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. De plus, pour $i \in [\![m+1\,,\, m+n]\!]$, on obtient, par composition avec l'application holomorphe,

$$\mathrm{Inv} : u \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \longmapsto u^{-1} \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\beta, \mathrm{F}^i_\alpha)$$

l'holomorphie de l'application

$$\begin{cases} \mathrm{V}_{\alpha\beta} \longrightarrow \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \\ \quad x \quad \longmapsto (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1} \circ {f_{i_x}}^{-1} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}})^{-1}\,. \end{cases}$$

L'exemple 1.103 montre alors que l'application

$$\begin{cases} \mathrm{V}_{\alpha\beta} \longrightarrow \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\beta, \mathrm{F}^i_\alpha) \\ \quad x \quad \longmapsto (((p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}}) \circ f_{i_x} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x})^{-1})_{1 \leqslant i \leqslant m}, ((p_2 \circ \varphi^i_{\alpha x}) \circ {f_{i_x}}^{-1} \circ (p_2 \circ \varphi^i_{\beta_{g(x)}})^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n}) \end{cases}$$

est holomorphe. Par composition avec l'application holomorphe

$$\mathrm{T} : \begin{cases} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\alpha, \mathrm{F}^i_\beta) \times \prod_{i=m+1}^{m+n} \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{F}^i_\beta, \mathrm{F}^i_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{T}(\mathrm{F}^1_\alpha, \ldots \mathrm{F}^{m+n}_\alpha), \mathrm{T}(\mathrm{F}^1_\beta, \ldots, \mathrm{F}^{m+n}_\beta)) \\ \qquad (u_1, \ldots, u_{m+n}) \qquad\qquad \longmapsto \mathrm{T}(u_1, \ldots, u_{m+n})\,, \end{cases}$$

on obtient l'holomorphie de ψ. Pour finir, la proposition 1.159 donne $\overline{\mathrm{T}}(f_1, \ldots, f_{m+n}) \in \mathrm{Hom}^g(\mathrm{T}(q_1), \mathrm{T}(q_2))$.

Soient $e \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ et $x = \mathrm{T}(q_1)(e)$. On pose $f = (f_1, \ldots, f_{m+n})$ et $f' = (f'_1, \ldots, f'_{m+n})$. On a alors

$$\overline{\mathrm{T}}(f)(e) = \overline{\mathrm{T}}(f)_x(e) = \mathrm{T}((f_1)_x, \ldots, (f_m)_x, {(f_{m+1})_x}^{-1}, \ldots, {(f_{m+n})_x}^{-1})(e) \in \mathrm{T}(\mathrm{E}_2)_{g(x)}\,,$$

d'où
$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{T}}(f')(\overline{\mathrm{T}}(f)(e)) &= \overline{\mathrm{T}}(f')_{g(x)} \circ \mathrm{T}(f_{1_x}, \ldots, f_{m_x}, {f_{m+1}}_x^{-1}, \ldots, {f_{m+n}}_x^{-1})(e) \\ &= \mathrm{T}((f'_{i\,g(x)})_{1 \leqslant i \leqslant m}, ({f'_{i\,g(x)}}^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n}) \circ \mathrm{T}((f_{i_x})_{1 \leqslant i \leqslant m}, ({f_{i_x}}^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n})(e) \\ &= \mathrm{T}((f'_{i\,g(x)} \circ f_{i_x})_{1 \leqslant i \leqslant m}, ({f_{i_x}}^{-1} \circ {f'_{i\,g(x)}}^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n})(e) \\ &= \mathrm{T}((f'_{i\,g(x)} \circ f_{i_x})_{1 \leqslant i \leqslant m}, ((f'_{i\,g(x)} \circ f_{i_x})^{-1})_{m+1 \leqslant i \leqslant m+n})(e) \\ &= \overline{\mathrm{T}}(f'_1 \circ f_1, \ldots, f'_{m+n} \circ f_{m+n})_x(e) \\ &= \overline{\mathrm{T}}(f'_1 \circ f_1, \ldots, f'_{m+n} \circ f_{m+n})(e)\,. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\overline{\mathrm{T}}(f') \circ \overline{\mathrm{T}}(f) = \overline{\mathrm{T}}(f'_1 \circ f_1, \ldots, f'_{m+n} \circ f_{m+n})$. Par ailleurs, on a

$$\overline{\mathrm{T}}(\mathrm{id}_{q_1^1}, \ldots, \mathrm{id}_{q_1^{m+n}})(e) = \overline{\mathrm{T}}(\mathrm{id}_{q_1^1}, \ldots, \mathrm{id}_{q_1^{m+n}})_x(e) = \mathrm{T}(\mathrm{id}_{(\mathrm{E}_1^1)_x}, \ldots, \mathrm{id}_{(\mathrm{E}_1^{m+n})_x})(e) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)_x}(e) = e$$

et donc $\overline{\mathrm{T}}(\mathrm{id}_{q_1^1},\dots,\mathrm{id}_{q_1^{m+n}})=\mathrm{id}_{\mathrm{T}(q_1)}$.

Passons à l'étude de la transformation naturelle τ. Soient $e\in\mathrm{T}(\mathrm{E}_1)$ et $x=\mathrm{T}(q_1)(e)$. Comme

$$\overline{\mathrm{T}}(f)(e)=\overline{\mathrm{T}}(f)_x(e)=\mathrm{T}((f_1)_x,\dots,(f_m)_x,{(f_{m+1})_x}^{-1},\dots,{(f_{m+n})_x}^{-1})(e)\in\mathrm{E}_{2g(x)}\,,$$

on a
$$\begin{aligned}\tau_{q_2}\circ\overline{\mathrm{T}}(f)(e)&=(\tau_{q_2})_{g(x)}\circ\overline{\mathrm{T}}(f)_x(e)\\&=\tau_{((\mathrm{E}_2^1)_{g(x)},\dots,(\mathrm{E}_2^{m+n})_{g(x)})}\circ\mathrm{T}((f_{i_x})_{1\leqslant i\leqslant m},({f_{i_x}}^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n})(e)\\&=\mathrm{T}'((f_{i_x})_{1\leqslant i\leqslant m},({f_{i_x}}^{-1})_{m+1\leqslant i\leqslant m+n})\circ\tau_{((\mathrm{E}_1^1)_x,\dots,(\mathrm{E}_1^{m+n})_x)}(e)\\&=\overline{\mathrm{T}'}(f)_x\circ(\tau_{q_1})_x(e)=\overline{\mathrm{T}'}(f)\circ(\tau_{q_1})(e)\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\tau_{q_1}\circ\overline{\mathrm{T}}(f)=\overline{\mathrm{T}'}(f)\circ\tau_{q_2}$. ■

La remarque qui suit résume la proposition 1.198 dans le langage des catégories.

Remarque 1.199 — Résumé catégorique. Soient p (resp. p',p'') un fibré vectoriel de base M (resp. M',M'') d'espace total E (resp. E',E'') et $g:\mathrm{M}\to\mathrm{M}'$ (resp. $g':\mathrm{M}'\to\mathrm{M}''$) une application holomorphe. On définit

$$\mathrm{Hombij}^{\,g}(p,p')=\big\{f\in\mathrm{Hom}^g(p,p'),\qquad\forall\,x\in\mathrm{M},\quad f_x\in\mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{E}_x,{\mathrm{E}'}_{g(x)})\big\}\ .$$

Soient $f\in\mathrm{Hombij}^{\,g}(p,p')$ et $f'\in\mathrm{Hombij}^{\,g'}(p',p'')$. Comme $(f'\circ f)_x={f'}_{g(x)}\circ f_x$, la proposition 1.164 montre que $f'\circ f\in\mathrm{Hombij}^{\,g'\circ g}(p,p'')$. Par ailleurs, on a bien sûr $\mathrm{id}_{\mathrm{E}}\in\mathrm{Hombij}^{\,\mathrm{id}_{\mathrm{M}}}(p,p)$.

Étant donné un $(m+n)$-uplet $q_1=(q_1^1,\dots,q_1^{m+n})$ de fibrés vectoriels au-dessus d'une même base M, on note $\mathrm{base}(q_1)=\mathrm{M}$ et E_i l'espace total de q_1^i. Si $q_1=(q_1^1,\dots,q_1^{m+n})$ est un $(m+n)$-uplet de fibrés vectoriels au-dessus d'une même base M et $q_2=(q_2^1,\dots,q_2^{m+n})$ un $(m+n)$-uplet de fibrés vectoriels au-dessus d'une même base M', on définit

$$\begin{aligned}\mathrm{Hombij}\,(q_1,q_2)=\{\,(f_1,\dots,f_{m+n},g),\qquad&g\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{M}'),\quad\forall\,i\in[\![1\,,\,m]\!],\quad f_i\in\mathrm{Hom}^g(q_1^i,q_2^i),\\&\forall\,i\in[\![1\,,\,n]\!],\quad f_i\in\mathrm{Hombij}^{\,g}(q_1^{m+i},q_2^{m+i})\,\}\end{aligned}$$

et $\quad\mathrm{Hombij}'(q_1,q_2)=\{(f_1,\dots,f_{m+n},g),\qquad g\in\mathscr{H}(\mathrm{M},\mathrm{M}'),\quad\forall\,i\in[\![1\,,\,m+n]\!],\quad f_i\in\mathrm{Hombij}^{\,g}(q_1^i,q_2^i)\}\,.$

Soient q_3 un $(m+n)$-uplet de fibrés vectoriels au-dessus d'une même base M''. D'après ce qui précède, la composition composantes par composantes induit une application

$$\circ:\begin{cases}\mathrm{Hombij}\,(q_1,q_2)\times\mathrm{Hombij}\,(q_2,q_3)&\longrightarrow\mathrm{Hombij}\,(q_1,q_3)\\((f_1,\dots,f_{m+n},g),(f_1',\dots,f_{m+n}',g'))&\longmapsto(f_1'\circ f_1,\dots,f_{m+n}'\circ f_{m+n},g'\circ g)\end{cases}$$

et $(\mathrm{id}_{\mathrm{E}_1},\dots,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_{m+n}},\mathrm{id}_{\mathrm{base}(q_1)})\in\mathrm{Hombij}\,(q_1,q_1)$. De même, la composition composantes par composantes induit une application

$$\circ:\begin{cases}\mathrm{Hombij}'(q_1,q_2)\times\mathrm{Hombij}'(q_2,q_3)&\longrightarrow\mathrm{Hombij}'(q_1,q_3)\\((f_1,\dots,f_{m+n},g),(f_1',\dots,f_{m+n}',g'))&\longmapsto(f_1'\circ f_1,\dots,f_{m+n}'\circ f_{m+n},g'\circ g)\end{cases}$$

et $(\mathrm{id}_{\mathrm{E}_1},\dots,\mathrm{id}_{\mathrm{E}_{m+n}},\mathrm{id}_{\mathrm{base}(q_1)})\in\mathrm{Hombij}'(q_1,q_1)$.

Les propriétés d'associativité et d'identité sont évidemment vérifiées. On peut ainsi définir une catégorie $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{E}'$) dont les objets sont les $(m+n)$-uplets de fibrés vectoriels au-dessus d'une même base et dont les morphismes entre les objets q_1 et q_2 sont les éléments de $\mathrm{Hombij}\,(q_1,q_2)$ (resp. $\mathrm{Hombij}'(q_1,q_2)$).

On reprend les notations des remarques 1.193 et on note $\mathrm{Fonc}(\mathscr{E},\mathbf{Fib})$ la catégorie des foncteurs de $\mathscr{E}$ dans **Fib** (resp. $\mathrm{Fonc}(\mathscr{E}',\mathbf{Fib})$ la catégorie des foncteurs de $\mathscr{E}'$ dans **Fib**).

La proposition 1.198 s'écrit alors de la façon suivante. Soit $\mathrm{T}:\mathbb{C}_{m,n}\to\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ un foncteur holomorphe. On a les deux foncteurs

$$\mathrm{T}:\begin{cases}\mathscr{E}&\longrightarrow\mathbf{Fib}\\(p_1,\dots,p_{m+n})&\longmapsto\mathrm{T}(p_1,\dots,p_{m+n})\\(f_1,\dots,f_{m+n})&\longmapsto\overline{\mathrm{T}}(f_1,\dots,f_{m+n})\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\begin{cases}\mathrm{Holo}(\mathbb{C}_{m,n},\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev})&\longrightarrow\mathrm{Fonc}(\mathscr{E},\mathbf{Fib})\\\mathrm{T}&\longmapsto\mathrm{T}\\\tau&\longmapsto(\tau_{q_1},\mathrm{id}_{\mathrm{base}(q_1)})_{q_1\in\mathrm{Ob}(\mathscr{E})}\,.\end{cases}$$

De même, soit $\mathrm{T}:\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n})\to\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev}$ un foncteur holomorphe. On a les deux foncteurs

$$\mathrm{T}:\begin{cases}\mathscr{E}'&\longrightarrow\mathbf{Fib}\\(p_1,\dots,p_{m+n})&\longmapsto\mathrm{T}(p_1,\dots,p_{m+n})\\(f_1,\dots,f_{m+n})&\longmapsto\overline{\mathrm{T}}(f_1,\dots,f_{m+n})\end{cases}\qquad\text{et}\qquad\begin{cases}\mathrm{Holo}(\mathrm{Iso}(\mathbb{C}_{m,n}),\mathbf{\mathbb{C}\text{-}ev})&\longrightarrow\mathrm{Fonc}(\mathscr{E}',\mathbf{Fib})\\\mathrm{T}&\longmapsto\mathrm{T}\\\tau&\longmapsto(\tau_{q_1},\mathrm{id}_{\mathrm{base}(q_1)})_{q_1\in\mathrm{Ob}(\mathscr{E}')}.\end{cases}$$

On généralise ainsi les propositions 1.189 et 1.192 avec en plus la possibilité de changer de base. ■

1.6 CALCUL DIFFÉRENTIEL SUR LES PRÉVARIÉTÉS HOLOMORPHES

Dans cette sous-section, on transfert le calcul différentiel holomorphe sur les prévariétés holomorphes. On introduit la notion de vecteurs tangents, d'espace tangent à une prévariété, de différentielle d'une application... Contrairement au cas des ouverts de $\mathbb{C}^n$, l'espace tangent n'est pas l'espace vectoriel (ou un sous-espace) ambiant (puisqu'il n'y a pas forcément d'espace vectoriel ambiant). En fait, à chaque point $x \in \mathrm{M}$, on va associer un ensemble de vecteurs tangents qui forme l'espace vectoriel tangent en x à M. Lorsqu'on regroupe tous ces espaces, on obtient le fibré vectoriel tangent à M.

1.6.1 FIBRÉ TANGENT

ESPACE TANGENT

Proposition-Définition 1.200 — Espace tangent 1. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $x \in \mathrm{M}$. On pose

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{M}) = \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathscr{H}_x(\mathrm{M}), \mathbb{C}_{x,\mathrm{M}})$$

le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des dérivations $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ dans $\mathbb{C}_{x,\mathrm{M}}$ (voir la remarque 1.133 pour la définition de $\mathbb{C}_{x,\mathrm{M}}$). On dit que $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est *l'espace tangent à* M *en* x.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une prévariété holomorphe, $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ et $y = f(x) \in \mathrm{M}'$. On pose

$$\mathrm{T}_x(f) \colon \begin{cases} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{T}_y(\mathrm{M}') \\ \mathrm{D} & \longmapsto \mathrm{D} \circ f_x^* \end{cases}$$

On dit que $\mathrm{T}_x(f)$ est *la différentielle de* f *en* x.

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$, $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ et $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$ trois prévariétés holomorphes, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ et $g : \mathrm{M}' \to \mathrm{M}''$ deux applications holomorphes et $x \in \mathrm{M}$. On a alors

$$\mathrm{T}_x(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(\mathrm{M})} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_{f(x)}(g) \circ \mathrm{T}_x(f) = \mathrm{T}_x(g \circ f). \tag{3}$$

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes, $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ un biholomorphisme. Alors $\mathrm{T}_x(f)$ est inversible et

$$\mathrm{T}_x(f)^{-1} = \mathrm{T}_{f(x)}(f^{-1}). \tag{4}$$

Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ un prévariété holomorphe, U un ouvert de M et $x \in \mathrm{U}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Alors $\mathrm{T}_x(i) : \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) \to \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est un isomorphisme.

Preuve. Montrons que $\mathrm{T}_x(f)$ est bien définie. En appliquant la proposition 1.2 avec $k = \mathbb{C}$, $\mathrm{A} = \mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$, $\mathrm{B} = \mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ et $\varphi = f_x^*$, on obtient que l'application $\mathrm{T}_x(f)$ est à valeurs dans l'ensemble des $\mathbb{C}$-dérivations de $\mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$ dans $\mathbb{C}$ muni de la structure $\mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$-module obtenu par restriction des scalaires de celle de $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$ via f_x^*. D'après la remarque 1.133, ce structure de $\mathscr{H}_y(\mathrm{M}')$-module sur $\mathbb{C}$ est en fait $\mathbb{C}_{y,\mathrm{M}'}$. Ainsi $\mathrm{T}_x(f)$ est bien définie et est en fait l'application $\lambda_{f_x^*}$ de la proposition 1.2.

Les égalités (**3**) résultent de la proposition-définition 1.131 et précisément du fait que

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{M}})_x^* = \mathrm{id}_{\mathscr{H}_x(\mathrm{M})} \qquad \text{et} \qquad (g \circ f)_x^* = f_x^* \circ g_{f(x)}^* \,.$$

Passons à la démonstration de (**4**). On a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{M}'}$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$. Comme $f^{-1}(f(x)) = x$, on obtient, avec (**3**),

$$\mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_{f(x)}(f^{-1}) = \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}'}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M}')} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_{f(x)}(f^{-1}) \circ \mathrm{T}_x(f) = \mathrm{T}_x(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(\mathrm{M})}$$

Montrons la bijectivité de $\mathrm{T}_x(i)$. On reprend les notations de la proposition 1.2. On a $\mathrm{T}_x(i) = \lambda_{i_x^*}$. Comme i_x^* est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres (remarque 1.133), la deuxième partie de la proposition 1.2 assure que $\mathrm{T}_x(i)$ est un $\mathbb{C}$-isomorphisme. ∎

Remarque 1.201 — Application induite. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ et $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ deux prévariétés holomorphes, U un ouvert de M, V un ouvert de M′ et $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$ vérifiant $f(\mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$. On note $i_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ et $i_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{M}'$ les inclusions. L'application 1.100 assure que f induit une application holomorphe $f_{\mathrm{UV}} : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$. Montrons que

$$\mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i_{\mathrm{U}}) = \mathrm{T}_{(f(x))}(i_{\mathrm{V}}) \circ \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UV}}) \,. \tag{5}$$

Par définition, on a $f \circ i_{\mathrm{U}} = i_{\mathrm{V}} \circ f_{\mathrm{UV}}$. D'après (**3**), on obtient le résultat souhaité. ∎

Exemple 1.202 — Ouverts de $\mathbb{C}^n$. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ muni de sa structure naturelle de prévariété holomorphe et $x \in \mathrm{U}$. Pour $i \in [\![1 , n]\!]$, on note $p_i : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ la restriction de l'application i^{e} coordonnée et α_i l'image de $p_i - p_i(x)1 \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$.

On reprend les notations de la proposition-définition 1.131 Soit $v \in \mathbb{C}^n$. On va construire, à l'aide de la propriété universelle de la limite inductive une dérivation sur $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$ correspondant à la dérivation selon v. Pour V ouvert de U, on considère l'application linéaire

$$\partial^{\mathrm{V}}_{v,x} : \begin{cases} \mathscr{H}_{\mathrm{V}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad f \quad \longmapsto \partial_v(f)(x) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{f(x+zv) - f(x)}{z} = \mathrm{d}f_x(v) \,. \end{cases}$$

Pour $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ avec $\mathrm{W} \in \mathrm{Ouv}_x(\mathrm{U})$, on a $\partial^{\mathrm{W}}_{v,x} \circ \rho_{\mathrm{U},\mathrm{V}} = \partial^{\mathrm{V}}_{v,x}$. Ainsi, grâce à la propriété universelle de la limite inductive (d'espaces vectoriels), on obtient une unique application $\mathbb{C}$-linéaire $\partial_{v,x} : \mathscr{H}_x(\mathrm{U}) \to \mathbb{C}$ vérifiant $\partial_{v,x} \circ \lambda_{\mathrm{V},x} = \partial^{\mathrm{V}}_{v,x}$ pour tout ouvert V de U.

Montrons que $\partial_{v,x}$ est une dérivation. Soient $\gamma, \gamma' \in \mathscr{H}_x(\mathrm{U})$. On peut alors écrire $\gamma = \overline{f}$ et $\gamma' = \overline{f'}$ avec $f, f' \in \Xi_{\mathrm{U},x}$. On pose $\mathrm{V} = \mathrm{def}(f)$ et $\mathrm{V}' = \mathrm{def}(f')$. On a alors, par définition de $\mathscr{R}$,

$$\gamma = \overline{f_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}}, \qquad \gamma' = \overline{f'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}} \qquad \text{et} \qquad \gamma\gamma' = \overline{(ff')_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}}.$$

On a alors
$$\begin{aligned} \partial_{v,x}(\gamma\gamma') &= \partial^{\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}_{v,x}(f_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'} f'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}) \\ &= f_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}(x)\, \partial^{\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}_{v,x}(f'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}) + f'_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}(x) \partial^{\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}_{v,x}(f_{|\mathrm{V}\cap\mathrm{V}'}) \\ &= \mathrm{ev}^{\mathrm{U}}_x(\gamma)\partial_{v,x}(\gamma') + \mathrm{ev}^{\mathrm{U}}_x(\gamma')\partial_{v,x}(\gamma) \\ &= \gamma \cdot \partial_{v,x}(\gamma') + \gamma' \cdot \partial_{v,x}(\gamma) \,. \end{aligned}$$

Ainsi $\partial_{v,x}$ est un dérivation de $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$.

Montrons que les applications

$$\Delta^{\mathrm{U}}_x : \begin{cases} \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \quad \mathrm{D} \quad \longmapsto (\mathrm{D}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{D}(\alpha_n)) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \Theta^{\mathrm{U}}_x : \begin{cases} \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) \\ \quad v \quad \longmapsto \partial_{v,x} \end{cases}$$

sont des isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires réciproques l'un de l'autre.

La structure d'espace vectoriel sur $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$ assure que Δ^{U}_x est $\mathbb{C}$-linéaire. Par ailleurs, pour $\mathrm{V} \in \mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}}(x)$, l'application $v \mapsto \partial^{\mathrm{V}}_{v,x}$ est $\mathbb{C}$-linéaire. L'application $v \mapsto (\partial^{\mathrm{V}}_{v,x})_{\mathrm{V}\in\mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}}(x)}$ est donc $\mathbb{C}$-linéaire. La propriété universelle de la limite inductive assure alors que $v \mapsto \partial_{v,x}$ est linéaire.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note alors $\partial_{i,x}$ plutôt que $\partial_{e_i,x}$. On remarque que

$$\partial_{i,x}(\alpha_j) = \partial_{i,x}(\rho_{\mathrm{U},x}(p_j - p_j(x)1)) = \partial^{\mathrm{U}}_{i,x}(p_j - p_j(x)1) = \delta_{i,j} \,. \tag{$*$}$$

Soient $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors $\Delta^{\mathrm{U}}_x \circ \Theta^{\mathrm{U}}_x(v) = (\partial_{v,x}(\alpha_1), \ldots, \partial_{v,x}(\alpha_n))$. Par linéarité de Θ^{U}_x et grâce à la remarque $(*)$, on obtient

$$\partial_{v,x}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} v_j \partial_{j,x}(\alpha_i) = v_i \,.$$

Ainsi $\Delta^{\mathrm{U}}_x \circ \Theta^{\mathrm{U}}_x(v) = v$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n$.

Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$. Calculons $\Theta^{\mathrm{U}}_x \circ \Delta^{\mathrm{U}}_x(\mathrm{D})$. On pose $v = (\mathrm{D}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{D}(\alpha_n))$. On a alors $\Theta^{\mathrm{U}}_x \circ \Delta^{\mathrm{U}}_x(\mathrm{D}) = \partial_{v,x}$. Montrons que $\mathrm{D} = \partial_{v,x}$. Soient $\gamma \in \mathscr{H}_x(\mathrm{U})$ et $g \in \Xi_{\mathrm{M},x}$ tels que $\overline{g} = \gamma$. Il existe une boule ouverte B centrée en x et contenue dans U telle que, sur B, la fonction g coïncide avec la somme f d'une série entière en x :

$$g_{|\mathrm{B}} = f = f(x)1 + \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n \smallsetminus \{(0,\ldots,0)\}} a_{i_1,\ldots,i_n}((p_1 - p_1(x)1)_{|\mathrm{B}})^{i_1} \cdots ((p_n - p_n(x)1)_{|\mathrm{B}})^{i_n} \,.$$

En regroupant convenablement les termes, on peut écrire

$$g_{|\mathrm{B}} = f = f(x)1 + \sum_{i=1}^{n} (p_i - p_i(x))_{|\mathrm{B}}\, g_i$$

avec $g_i \in \mathscr{H}(\mathrm{B}, \mathbb{C})$. Pour $i \in [\![1 , n]\!]$, on pose $\gamma_i = \overline{g_i}$. Comme

$$\overline{(p_i - p_i(x)1)_{|\mathrm{B}}} = \alpha_i \qquad \text{et} \qquad \gamma = \overline{g} = \overline{g_{|\mathrm{B}}} = \overline{f} \,.$$

on en déduit que
$$\gamma = f(x)1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i \,.$$

Ainsi, puisque D et $\partial_{v,x}$ sont des dérivations et que $\mathrm{ev}_x^{\mathrm{M}}(\alpha_i) = 0$, on a

$$\mathrm{D}(\gamma) = f(x)\mathrm{D}(1) + \sum_{i=1}^{n}\big(g_i(x)\mathrm{D}(\alpha_i) + \mathrm{ev}_x^{\mathrm{U}}(\alpha_i)\mathrm{D}(g_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\mathrm{D}(\alpha_i) \qquad \text{et} \qquad \partial_{v,x}(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\partial_{v,x}(\alpha_i)\,.$$

Or $v = (\mathrm{D}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{D}(\alpha_n))$. La linéarité de Θ_x^{U} et l'égalité $(*)$ donnent alors

$$\partial_{v,x}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}(\alpha_j)\partial_{j,x}(\alpha_i) = \mathrm{D}(\alpha_i)$$

et donc

$$\partial_{v,x}(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\mathrm{D}(\alpha_i) = \mathrm{D}(\gamma)\,.$$

Finalement $\partial_{v,x} = \mathrm{D}$ et $\Theta_x^{\mathrm{U}} \circ \Delta_x^{\mathrm{U}}(\mathrm{D}) = \mathrm{D}$ pour tout $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$.

On considère à présent un ouvert V de $\mathbb{C}^m$ (muni de sa structure naturelle de prévariété holomorphe) et $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une application de classe holomorphe. Montrons que, pour tout $x \in \mathrm{U}$, on a

$$\Delta_{f(x)}^{\mathrm{V}} \circ \mathrm{T}(f)_x \circ (\Delta_x^{\mathrm{U}})^{-1} = \mathrm{d}f_x\,. \tag{6}$$

On note $q_i : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ l'application i^{e} coordonnée ainsi que sa restriction à V et β_i l'image de $q_i - q_i(f(x))1$ dans $\mathscr{H}_{f(x)}(\mathrm{V})$. Soit $v \in \mathbb{C}^n$. Par définition, on a

$$(\Delta_{f(x)}^{\mathrm{V}} \circ \mathrm{T}(f)_x \circ (\Delta_x^{\mathrm{U}})^{-1})(v) = (\partial_{x,v} \circ f_x^*(\beta_i))_{i \in [\![1\,,\, m]\!]}\,.$$

Pour $i \in [\![1\,,\, m]\!]$, l'égalité (**1**) de la proposition-définition 1.131 montre que

$$(f)_x^*(\beta_i) = \overline{(q_i \circ f - q_i \circ f(x)1)}\,.$$

Finalement, par construction de $\partial_{x,v}$, on a

$$\begin{aligned} \partial_{x,v} \circ (f)_x^*(\beta_i) &= \mathrm{d}(q_i \circ f - q_i \circ f(x)1)_x(v) \\ &= q_i \circ \mathrm{d}f_x(v)\,. \end{aligned}$$

Les i^{e} composantes de $(\Delta_{f(x)}^{\mathrm{V}} \circ \mathrm{T}(f)_x \circ (\Delta_x^{\mathrm{U}})^{-1})$ et $\mathrm{d}f_x(v)$ sont donc égales, pour tout $i \in [\![1\,,\, m]\!]$ ce qui donne l'égalité voulue.

En particulier, si V est un ouvert de U et $f = i : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ est l'inclusion, on obtient l'égalité

$$\Delta_x^{\mathrm{U}} \circ \mathrm{T}(i)_x = \Delta_x^{\mathrm{V}}\,. \tag{7}$$

Finalement l'isomorphisme Δ_x^{U} permet d'identifier $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$ à $\mathbb{C}^n$. L'égalité (**6**) montre qu'au travers de cette identification la différentielle d'une application holomorphe (au sens des prévariété) n'est rien d'autre que la différentielle usuelle. ■

Proposition 1.203 — Dimension finie. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $x \in \mathrm{M}$. L'espace vectoriel $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est de dimension finie égale à $\dim_x(\mathrm{M})$.

Preuve. La proposition 1.55 montre qu'il existe un ouvert $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}_{\mathrm{M}}(x)$ qui est le domaine d'une carte $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$. D'après la proposition-définition 1.200 et l'exemple 1.112, $\mathrm{T}_x(\varphi)$ et $\mathrm{T}_{\varphi(x)}(\varphi^{-1})$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Comme $\mathrm{T}_x(i)$ réalise un isomorphisme, on en déduit que $\mathrm{T}_{\varphi(x)}(\mathrm{V})$ et $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ sont isomorphes. Grâce à l'exemple 1.202, on en déduit que $\mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est de dimension $n = \dim_x(\mathrm{M})$. ■

FIBRÉ TANGENT

Proposition-Définition 1.204 — Fibré tangent. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. On considère l'ensemble

$$\mathrm{T}(\mathrm{M}) = \bigsqcup_{x \in \mathrm{M}} \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$$

et l'application

$$p_{\mathrm{M}} : \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{M} \\ \mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longmapsto x\,. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi)$ une carte de $\mathscr{A}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. On définit l'application

$$\mathrm{T}(\psi) : \begin{cases} {p_{\mathrm{M}}}^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times \mathbb{C}^n \\ \mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longmapsto (x, \Delta_{\psi(x)}^{\mathrm{V}} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1}(\mathrm{D})) \end{cases}$$

et on note $\mathrm{T}(\mathcal{U}) = (\mathrm{U}, \mathbb{C}^n, \mathrm{T}(\psi))$.

Soit $\mathscr{A}' = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un atlas sur M contenu dans $\mathscr{A}$. Il existe sur T(M) un unique atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$ tel que p_M soit un fibré vectoriel holomorphe et $(\mathrm{T}(\mathcal{U}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ soit une famille de cartes trivialisantes pour p_M. De plus, on a $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$. En particulier, $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ est une carte trivialisante pour p_M, pour tout $\mathfrak{U} \in \mathscr{A}$.

Soient $(\mathrm{M}', \mathscr{A}')$ une prévariété holomorphe et $f \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathrm{M}')$. On considère l'application

$$\mathrm{T}(f)\colon \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{M}') \\ y \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longmapsto \mathrm{T}_x(f)(y) \in \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M}')\,. \end{cases}$$

Alors $(\mathrm{T}(f), f)$ est un morphisme de fibré vectoriel holomorphe.

Soient $(\mathrm{M}'', \mathscr{A}'')$ une prévariété holomorphe et $f' \in \mathscr{H}(\mathrm{M}', \mathrm{M}'')$. On a

$$(\mathrm{T}(f'), f') \circ (\mathrm{T}(f), f) = (\mathrm{T}(f' \circ f), f' \circ f) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{T}(\mathrm{id}_\mathrm{M}), \mathrm{id}_\mathrm{M}) = \mathrm{id}_{p_\mathrm{M}}\,.$$

Preuve. Montrons que p_M est bien définie. Pour $x \in \mathrm{M}$, on considère l'application $p_x : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ constante égale à x. L'application p_M n'est autre que l'application obtenue par la propriété universelle de la réunion disjointe d'ensembles.

Montrons que $\mathrm{T}(\psi)$ est bien définie. On reprend les notations de l'exemple 1.202. Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi) \in \mathscr{A}$. Pour $x \in \mathrm{U}$, on considère alors l'isomorphisme linéaire

$$\delta_{\mathcal{U}x} = \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1} : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathbb{C}^n\,.$$

Avec la structure naturelle d'espace vectoriel sur $\{x\} \times \mathbb{C}^n$, on en déduit une bijection $\mathbb{C}$-linéaire

$$\varphi_{\mathcal{U}x}\colon \begin{cases} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n \\ \mathrm{D} & \longmapsto (x, \delta_{\mathcal{U}x}(\mathrm{D}))\,. \end{cases}$$

On définit alors la bijection

$$\varphi_\mathcal{U} = \bigsqcup_{x\in\mathrm{U}} \varphi_{\mathcal{U}x}\colon \begin{cases} \bigsqcup_{x\in\mathrm{U}} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longrightarrow \bigsqcup_{x\in\mathrm{U}} (\{x\} \times \mathbb{C}^n) \\ \mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) & \longmapsto (x, \delta_{\mathcal{U}x}(\mathrm{D})) = (p_\mathrm{M}(\mathrm{D}), \delta_{\mathcal{U}x}(\mathrm{D}))\,. \end{cases}$$

Comme
$$p_\mathrm{M}{}^{-1}(\mathrm{U}) = \bigsqcup_{x\in\mathrm{U}} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \qquad \text{et} \qquad \bigsqcup_{x\in\mathrm{U}} (\{x\} \times \mathbb{C}^n) = \mathrm{U} \times \mathbb{C}^n\,,$$

l'application $\varphi_\mathcal{U}$ n'est autre que $\mathrm{T}(\psi)$. Ainsi $\mathrm{T}(\psi)$ est bien définie et vérifie $p_1 \circ \mathrm{T}(\psi) = p_\mathrm{M}$. De plus, l'application induite par $\mathrm{T}(\psi)$ entre $p_\mathrm{M}{}^{-1}(x) = \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ et $\{x\} \times \mathbb{C}^n$ n'est autre que $\delta_{\mathcal{U}x}$ qui est une bijection $\mathbb{C}$-linéaire.

Montrons que les conditions de la proposition 1.182 sont vérifiées. D'après la proposition 1.203, l'ensemble $p_\mathrm{M}{}^{-1}(x) = \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Comme $\mathscr{A}'$ est un atlas sur M, les domaines des cartes de $\mathscr{A}'$ recouvrent M.

Il suffit donc de montrer que, pour $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}'$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \psi') \in \mathscr{A}'$, l'application

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}\colon \begin{cases} \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' & \longrightarrow \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n'}) \\ x & \longmapsto (p_2 \circ \mathrm{T}(\psi')_x)^{-1} \circ (p_2 \circ \mathrm{T}(\psi)_x)^{-1} \end{cases}$$

est holomorphe. On va montrer que, pour $x \in \mathrm{U} \cap \mathrm{U}'$, on a

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(x) = \mathrm{d}(\psi' \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}\,.$$

Pour cela, on note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$, $i' : \mathrm{U}' \to \mathrm{M}$, $i_1 : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$, $i_2 : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \mathrm{U}'$, $j_1 : \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \to \mathrm{V}$ et $j_2 : \psi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \to \mathrm{V}'$ les inclusions. Par définition, on a

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(x) = \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi'(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi') \circ \mathrm{T}_x(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ {\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)}}^{-1}\,.$$

Grâce à (**7**), on en déduit que

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(x) = \Delta^{\psi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')}_{\psi'(x)} \circ \mathrm{T}_{\psi'(x)}(j_2)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(\psi') \circ \mathrm{T}_x(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) \circ (\Delta^{\psi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')}_{\psi(x)})^{-1}\,.$$

On note $\psi_{\mathrm{U}\mathrm{U}'} : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ et $\psi'_{\mathrm{U}\mathrm{U}'} : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \psi'(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}')$ les applications induites respectivement par ψ et ψ' et $\Psi = \psi'_{\mathrm{U}\mathrm{U}'} \circ {\psi_{\mathrm{U}\mathrm{U}'}}^{-1}$. On va montrer que

$$(\mathrm{T}_{\psi'(x)}(j_2))^{-1} \circ \mathrm{T}_x(\psi') \circ \mathrm{T}_x(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) = \mathrm{T}(\Psi)_{\psi(x)}\,.$$

L'égalité (**3**) appliquée à $\psi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \subset \mathrm{U}$ et $\psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}') \subset \mathrm{V}$ donne

$$\mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) = \mathrm{T}_x(i_1) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{U}\mathrm{U}'})^{-1}\,.$$

De même, pour ψ', on obtient

$$\mathrm{T}_{\psi'(x)}(j_2)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(\psi') = \mathrm{T}_x(\psi'_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(i_2)^{-1}\,.$$

On pose $j : \mathrm{U} \cap \mathrm{U}' \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Comme $j = i \circ i_1 = i' \circ i_2$, on obtient grâce à (**3**)

$$\mathrm{T}_x(i_1)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1} = \mathrm{T}_x(j)^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(i_1) = \mathrm{T}_x(j)$$

Ainsi, on obtient

$$(\mathrm{T}_{\psi'(x)}(j_2))^{-1} \circ \mathrm{T}_x(\psi') \circ \mathrm{T}_x(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) \;=\; \mathrm{T}_x(\psi'_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1}\,.$$

D'après (**4**) et (**3**), on a donc

$$\mathrm{T}_x(\psi'_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1} = \mathrm{T}_x(\psi'_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}({\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}) = \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi'_{\mathrm{UU}'} \circ {\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}) = \mathrm{T}_{\psi(x)}(\Psi)\,.$$

Finalement, grâce à (**4**), on obtient

$$\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}(x) = \Delta^{\psi'(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')}_{\psi'(x)} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(\Psi) \circ (\Delta^{\psi(\mathrm{U}\cap\mathrm{U}')}_{\psi(x)})^{-1} = \mathrm{d}(\Psi)_{\psi(x)} = \mathrm{d}(\psi' \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}\,.$$

Comme $\mathscr{A}'$ est un atlas, l'application $\delta_{\mathcal{U}\mathcal{U}'}$ est holomorphe comme composée de ψ avec l'application holomorphe $\mathrm{d}(\psi' \circ \psi^{-1})$. La proposition 1.182 montre qu'il existe une unique structure de prévariété holomorphe sur $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ telle que p_{M} soit un fibré vectoriel holomorphe sur M et $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ une carte trivialisante pour p_{M} pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}'$.

Comme $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$ et que l'atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{A}}$ est tel que p_{M} soit un fibré vectoriel holomorphe, $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ une carte trivialisante de p_{M} pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}'$, on obtient $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$ par unicité. En particulier, la structure de prévariété sur $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ ne dépend pas du choix du sous-atlas de $\mathscr{A}$. Ainsi, pour $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$, on obtient que $\mathrm{T}(\mathcal{U})$ est un carte trivialisante pour p_{M}.

Montrons que $\mathrm{T}(f)$ est bien définie. Pour tout $x \in \mathrm{M}$, l'application $\mathrm{T}_x(f) : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M}')$ est $\mathbb{C}$-linéaire. Comme

$$\bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) = \mathrm{T}(\mathrm{M}) \qquad \text{et} \qquad \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M}') \subset \mathrm{T}(\mathrm{M}'),$$

l'application

$$\bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{T}_x(f) : \mathrm{T}(\mathrm{M}) \longrightarrow \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M}')$$

induit une application de $\mathrm{T}(\mathrm{M})$ dans $\mathrm{T}(\mathrm{M}')$ qui n'est autre que $\mathrm{T}(f)$ qui est donc bien définie. De plus, par définition, on a bien sûr $p_{\mathrm{M}'} \circ \mathrm{T}(f) = f \circ p_{\mathrm{M}}$ et l'application $\mathrm{T}(f)_x$ n'est autre que $\mathrm{T}_x(f)$ qui est $\mathbb{C}$-linéaire.

Montrons que $\mathrm{T}(f)$ est holomorphe. On utilise pour cela la proposition 1.159. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U}', \mathrm{V}', n', \psi') \in \mathscr{A}'$. On note $\mathrm{W} = \psi(\mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}'))$ et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$, $i_1 : \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \to \mathrm{U}$, $i' : \mathrm{U}' \to \mathrm{M}'$ et $j_1 : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ les inclusions. Pour tout $x \in \mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}')$, on a, par définition de $\mathrm{T}(\psi)$ et $\mathrm{T}(\psi')$,

$$p_2 \circ \mathrm{T}(\psi)_x = \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1} \qquad \text{et} \qquad p_2 \circ \mathrm{T}(\psi')_{f(x)} = \Delta^{\mathrm{V}'}_{\psi'(f(x))} \circ \mathrm{T}_{(f(x))}(\psi') \circ \mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1}$$

Il s'agit donc de montrer que l'application

$$\delta : x \mapsto \Delta^{\mathrm{V}'}_{\psi'(f(x))} \circ \mathrm{T}_{(f(x))}(\psi') \circ \mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ {\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)}}^{-1}$$

est holomorphe. Grâce à (**7**), on a

$$\delta(x) = \Delta^{\mathrm{V}'}_{\psi'(f(x))} \circ \mathrm{T}_{(f(x))}(\psi') \circ \mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) \circ (\Delta^{\mathrm{W}}_{\psi(x)})^{-1}\,.$$

On note $f_{\mathrm{UU}'} : \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \to \mathrm{U}'$ et $\psi_{\mathrm{UU}'} : \mathrm{U} \cap f^{-1}(\mathrm{U}') \to \mathrm{W}$ les applications induites par f et ψ. L'égalité (**5**) appliquée à $\psi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$, $\mathrm{U} \cap g^{-1}(\mathrm{U}') \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ donne alors

$$\mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) = \mathrm{T}_x(i_1) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1}\,.$$

De même, pour f, on obtient

$$\mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(f) = \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(i_1)^{-1}\,.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= \Delta^{\mathrm{V}'}_{\psi'(f(x))} \circ \mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_{f(x)}(i')^{-1} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(j_1) \circ (\Delta^{\mathrm{W}}_{\psi(x)})^{-1} \\
&= \Delta^{\mathrm{V}'}_{\psi'(f(x))} \circ \mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(i_1)^{-1} \circ \mathrm{T}_x(i_1) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{W}}_{\psi(x)})^{-1} \\
&= \Delta^{\mathrm{V}'}_{\psi'(f(x))} \circ \mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{W}}_{\psi(x)})^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Comme l'application $\widetilde{f} = \psi' \circ f_{\mathrm{UU}'} \circ {\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}$ qui est l'application f lue dans les cartes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}'$ est holomorphe, on obtient, grâce à (**4**) et (**3**),

$$\mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_x(f_{\mathrm{UU}'}) \circ \mathrm{T}_x(\psi_{\mathrm{UU}'})^{-1} = \mathrm{T}_{f(x)}(\psi') \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}({\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1}) = \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi' \circ f \circ {\psi_{\mathrm{UU}'}}^{-1})\,.$$

Finalement, on obtient grâce à (**6**),

$$\delta(x) = \Delta^{\mathrm{V}'}_{\psi'(f(x))} \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi' \circ f \circ \psi_{\mathrm{UU}'}{}^{-1}) \circ (\Delta^{\mathrm{W}}_{\psi(x)})^{-1} = \mathrm{d}(\psi' \circ f \circ \psi^{-1})_{\psi(x)}\,.$$

L'application δ est donc holomorphe comme composée de l'application ψ avec l'application $\mathrm{d}(\psi' \circ f \circ \psi^{-1})$.

Or $(\mathrm{T}(\mathcal{U}))_{\mathcal{U}\in\mathscr{A}}$ (resp. $(\mathrm{T}(\mathcal{U}'))_{\mathcal{U}'\in\mathscr{A}'}$) est une famille de cartes trivialisantes pour p_{M} (resp. $p_{\mathrm{M}'}$) dont les domaines recouvrent M (resp. M′), la proposition 1.159 montre alors que $(\mathrm{T}(f), f) \in \mathrm{Hom}(p_{\mathrm{M}}, p_{\mathrm{M}'})$.

Soient $e \in \mathrm{T}(\mathrm{M})$ et $x = p_{\mathrm{M}}(e)$. On a alors $\mathrm{T}(f)(e) = \mathrm{T}_x(e) \in \mathrm{T}_{f(x)}(\mathrm{M}')$, d'où, avec (**3**), on obtient

$$\mathrm{T}(f')(\mathrm{T}(f)(e)) = \mathrm{T}_{f(x)}(f') \circ \mathrm{T}_x(f)(e) = \mathrm{T}_x(f' \circ f)(e) = \mathrm{T}(f' \circ f)(e)\,.$$

On obtient ainsi $\mathrm{T}(f') \circ \mathrm{T}(f) = \mathrm{T}(f' \circ f)$ et donc $(\mathrm{T}(f'), f') \circ (\mathrm{T}(f), f) = (\mathrm{T}(f' \circ f), f' \circ f)$. De plus, avec (**3**), on a

$$\mathrm{T}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}})(e) = \mathrm{T}_x(\mathrm{id}_{\mathrm{M}})(e) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x(\mathrm{M})}(e) = e = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(\mathrm{M})}(e)\,.$$

et donc $\mathrm{T}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(\mathrm{M})}$. Ainsi $(\mathrm{T}(\mathrm{id}_{\mathrm{M}}), \mathrm{id}_{\mathrm{M}}) = \mathrm{id}_{p_{\mathrm{M}}}$.

Exemple 1.205 — Le cas d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$ qu'on munit de sa structure canonique de prévariété holomorphe. Comme le domaine de la carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id})$ recouvre U, on obtient en reprenant les notations de la démonstration de la proposition-définition 1.204 (avec $i = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$ et $\psi = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$) que l'application

$$\varphi_{\mathcal{U}} : \begin{cases} \mathrm{T}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times \mathbb{C}^n \\ \mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) & \longmapsto (x, \Delta^{\mathrm{U}}_x(\mathrm{D})) \end{cases}$$

est une trivialisation de T(U) au-dessus et donc un isomorphisme de fibré vectoriel au-dessus de U (voir la remarque 1.169).

Exemple 1.206 — Le cas d'un ouvert de M. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, U un ouvert de M qu'on munit de sa structure canonique de prévariété holomorphe (exemple 1.61) et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. On note p_{U} le fibré tangent de U et p_{M} le fibré tangent de M. Montrons que l'application $\mathrm{T}(i)$ induit un isomorphisme de fibré vectoriel holomorphe au-dessus de U entre p_{U} et $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$ le fibré induit par p_{M} au-dessus de U.

D'après la proposition-définition 1.204, $\mathrm{T}(i) \in \mathrm{Hom}^i(p_{\mathrm{U}}, p_{\mathrm{M}})$. L'exemple 1.152 montre que $\mathrm{T}(i)$ se factorise en un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de U (encore noté $\mathrm{T}(i)$) entre p_{U} et $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$. De plus, l'application induite par $\mathrm{T}(i)$ entre les fibres de p_{U} et $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$ au-dessus de x n'est autre que $\mathrm{T}_x(i)$. Comme $\mathrm{T}_x(i)$ est isomorphisme, pour tout $x \in \mathrm{U}$ (proposition-définition 1.200), la remarque 1.168 montre que $\mathrm{T}(i)$ réalise un isomorphisme de fibré vectoriel holomorphe au-dessus de U entre p_{U} et $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$. En particulier, la proposition 1.179 montre que la composition par $\mathrm{T}(i)$ réalise un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-modules entre $\Gamma(p_{\mathrm{U}}, \mathrm{U})$ et $\Gamma((p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}, \mathrm{U}) = \Gamma(p_{\mathrm{M}}, \mathrm{U})$. ■

CHAMP DE VECTEURS

Définition 1.207 — Champ de vecteurs. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et p_{M} son fibré tangent. Une section globale de p_{M} est appelée un *champ de vecteurs au-dessus de* M. On note X(M) (plutôt que $\Gamma(p_{\mathrm{M}}, \mathrm{M})$) le $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module des champs de vecteur au-dessus de M.

Remarque 1.208 — Champ de vecteurs et restriction. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, p_{M} son fibré tangent, U un ouvert de M et s un champ de vecteurs au-dessus de M.

Comme la restriction $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$ de p_{M} à U n'est pas p_{U}, la restriction de s à U n'est pas un champ de vecteurs au-dessus de U mais simplement une section de $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$. Cependant, si $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ est l'inclusion, alors $\mathrm{T}(i)$ réalise un isomorphisme de fibré vectoriel holomorphe au-dessus de U entre p_{U} et $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$ (exemple 1.206). En reprenant les notations de la proposition 1.179, on obtient que

$$\gamma_{\mathrm{T}(i)^{-1},\mathrm{U}}(s_{|\mathrm{U}}) = \mathrm{T}(i)^{-1} \circ s_{|\mathrm{U}}\,.$$

est une section de p_{U} c'est-à-dire un champ de vecteur au-dessus de U.

Pour $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ deux ouverts de M, on note $i_{\mathrm{UV}} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$. Montrons qu'en posant

$$\mathrm{X}_{\mathrm{M}} : \begin{cases} \mathrm{U} & \longmapsto \mathrm{X}(\mathrm{U}) \\ \mathrm{V} \subset \mathrm{U} & \longmapsto (s \in \mathrm{X}(\mathrm{U}) \mapsto \mathrm{T}(i_{\mathrm{UV}})^{-1} \circ s_{|\mathrm{V}} \in \mathrm{X}(\mathrm{V}))\,, \end{cases}$$

on obtient un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module localement libre isomorphe à $\Gamma(p_{\mathrm{M}})$.

Par construction X(U) est un $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-module (proposition 1.177). De plus, d'après ce qui précède, l'application

$$\rho_{\mathrm{U,V}}\colon \begin{cases} \mathrm{X(U)} \longrightarrow \mathrm{X(V)} \\ s \longmapsto \mathrm{T}(i_{\mathrm{UV}})^{-1} \circ s_{|\mathrm{V}} \end{cases}$$

est bien définie et est un isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire. De plus, si $\mathrm{W} \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ sont trois ouverts de M, on a $i_{\mathrm{UW}} = i_{\mathrm{UV}} \circ i_{\mathrm{VW}}$. On en déduit que $\mathrm{T}(i_{\mathrm{UW}}) = \mathrm{T}(i_{\mathrm{UV}}) \circ \mathrm{T}(i_{\mathrm{VW}})$ (proposition 1.200) et donc $\rho_{\mathrm{U,W}} = \rho_{\mathrm{W,V}} \circ \rho_{\mathrm{U,V}}$. De plus, $i_{\mathrm{UU}} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$ et donc $\mathrm{T}(i_{\mathrm{UU}}) = \mathrm{id}_{p_{\mathrm{U}}}$ et $\rho_{\mathrm{U,U}} = \mathrm{id}_{\mathrm{X(U)}}$. Ainsi $\mathrm{X_M}$ est un préfaisceau au-dessus de M. Montrons que $\mathrm{X_M}$ est un préfaisceau isomorphe à $\Gamma(p_{\mathrm{M}})$. Pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv(M)}$, on note $\gamma_{\mathrm{U}} : \mathrm{X(U)} \to \Gamma(p_{\mathrm{M}}, \mathrm{U})$ la composition par $\mathrm{T}(i_{\mathrm{MU}})$ qui d'après l'exemple 1.206 est un isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire. Pour $s \in \mathrm{X(U)}$, on a

$$\gamma_{\mathrm{V}} \circ \rho_{\mathrm{U,V}}(s) = \mathrm{T}(i_{\mathrm{MV}}) \circ \mathrm{T}(i_{\mathrm{UV}})^{-1} \circ s_{|\mathrm{V}} = \mathrm{T}(i_{\mathrm{MU}}) \circ \mathrm{T}(i_{\mathrm{UV}}) \circ \mathrm{T}(i_{\mathrm{UV}})^{-1} \circ s_{|\mathrm{V}} = \mathrm{T}(i_{\mathrm{MU}}) \circ s \circ i_{\mathrm{UV}} = \gamma_{\mathrm{U}}(s)_{|\mathrm{V}}\,.$$

Ainsi $(\gamma_{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv(M)}}$ est un isomorphisme de préfaisceaux. Finalement $\mathrm{X_M}$ est bien un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module localement libre isomorphe à $\Gamma(p_{\mathrm{M}})$. On dit que $\mathrm{X_M}$ est *le faisceau des champs de vecteurs de* M. ■

Lemme 1.209 — Écriture d'un champ de vecteur au-dessus d'une carte. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, $\mathcal{U} = (\mathrm{U},\mathrm{V},n,\psi) \in \mathscr{A}$ une carte de $\mathscr{A}$ et p_{U} le fibré tangent de U. On note $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Pour $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, l'application

$$\partial_i^{\mathcal{U}}\colon \begin{cases} \mathrm{U} \longrightarrow p_{\mathrm{U}} \\ x \longmapsto \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}(\varepsilon_i) \end{cases}$$

est un champ de vecteur au-dessus de U.

L'application

$$\delta_{\mathcal{U}}\colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^n \longrightarrow \mathrm{X(U)} \\ (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\,\partial_i^{\mathcal{U}} \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-modules. Ainsi $(\partial_i^{\mathcal{U}})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-base de $\mathrm{X(U)}$.

Par ailleurs, soient $f \in \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$ et $x \in \mathrm{U}$. On note $\overline{f}$ l'image de f dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$. On a alors

$$\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f}) = \partial_i(f \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial z_i}(\psi(x))\,.$$

Enfin, si U′ est un ouvert de M contenu dans U, on pose $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}'}$ et le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^n \arrow[r, "\delta_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\rho^n_{\mathrm{U,U}'}"'] & \mathrm{X(U)} \arrow[d, "\rho_{\mathrm{U,U}'}"] \\ \mathscr{H}(\mathrm{U}',\mathbb{C})^n \arrow[r, "\delta_{\mathcal{U}'}"] & \mathrm{X(U')} \end{tikzcd}$$

Preuve. La famille $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}^n$. L'exemple 1.106 montre que l'application

$$\Psi_{\mathrm{U}}\colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^n \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C}^n) \\ (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} f_i\varepsilon_i \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-modules. En composant avec l'isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire

$$\Delta'_{\mathrm{U}}\colon \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C}^n) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathbb{C}^n}, \mathrm{U}) \\ f \longmapsto (\, x \mapsto (x, f(x))\,) \end{cases}$$

de l'exemple 1.178, on obtient que l'application

$$\begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^n \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\mathbb{C}^n}, \mathrm{U}) \\ (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \longmapsto \left(x \mapsto \left(x, \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)\varepsilon_i\right)\right) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-modules. Par ailleurs, par construction du fibré vectoriel holomorphe p_{U}, on a la trivialisation

$$\mathrm{T}(\psi)\colon \begin{cases} {p_{\mathrm{U}}}^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U}\times\mathbb{C}^n \\ y\in \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) & \longmapsto (x, \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)}\circ \mathrm{T}_x(\psi)(y))\,. \end{cases}$$

En reprenant les notations de la proposition 1.179, on obtient, grâce à la remarque 1.180 et à l'exemple 1.169, que l'application

$$\gamma_{\mathrm{T}(\psi),\mathrm{U}}\colon \begin{cases} \mathrm{X}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Triv}^{\mathbb{C}^n}_{\mathrm{U}}, \mathrm{U}) \\ s & \longmapsto \mathrm{T}(\psi)\circ s \end{cases}$$

est un isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire. Ainsi l'application

$$\begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^n & \longrightarrow \mathrm{X}(\mathrm{U}) \\ (f_i)_{1\leqslant i\leqslant n} & \longmapsto \sum\limits_{i=1}^n f_i\,(\gamma_{\mathrm{T}(\psi),\mathrm{U}})^{-1}(x\mapsto (x,\varepsilon_i))\,. \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-modules.

Soit $i\in[\![1\,,\,n]\!]$. Montrons que $(\gamma_{\mathrm{T}(\psi),\mathrm{U}})^{-1}(x\mapsto(x,\varepsilon_i)) = \partial_i^{\mathcal{U}}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned}(\gamma_{\mathrm{T}(\psi),\mathrm{U}})^{-1}(x\mapsto(x,\varepsilon_i))(x) &= \mathrm{T}(\psi)^{-1}(x,\varepsilon_i) = (\mathrm{T}(\psi)_x)^{-1}(x,\varepsilon_i)\\ &= \mathrm{T}_x(\psi)^{-1}\circ(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}(\varepsilon_i)\\ &= \partial_i^{\mathcal{U}}(x)\,.\end{aligned}$$

L'application $\partial_i^{\mathcal{U}}$ est donc bien un champ de vecteur (celui qui correspond au champ de vecteurs constants sur V égal à ε_i via la trivialisation $\mathrm{T}(\psi)$). De plus, on a bien l'isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire souhaité.

Soient $x\in\mathrm{U}$ et $i\in[\![1\,,\,n]\!]$. Calculons $\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f})$. Par définition, on a

$$\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f}) = \mathrm{T}_x(\psi)^{-1}\circ(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}(\varepsilon_i)(\overline{f})\,.$$

La construction de l'exemple 1.202 assure que $(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}(\varepsilon_i) = \partial_{i,\psi(x)}$. De plus, on a $\mathrm{T}_x(\psi)^{-1} = \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi^{-1})$ (égalité (**4**) de la proposition-définition 1.200), donc

$$\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f}) = \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi^{-1})(\partial_{i,\psi(x)})(\overline{f})\,.$$

Par définition de $\mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi^{-1})$, on obtient

$$\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f}) = \partial_{i,\psi(x)}\circ(\psi^{-1})^*_{\psi(x)}(\overline{f})\,.$$

On note $\overline{f\circ\psi^{-1}}$ l'image $f\circ\psi^{-1}\in\mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}_{\psi(x)}(\mathrm{V})$. Par définition de $(\psi^{-1})^*_{\psi(x)}$ (voir l'égalité (**1**) de la proposition-définition 1.131), on a $(\psi^{-1})^*_{\psi(x)}(\overline{f}) = \overline{f\circ\psi^{-1}}$. On obtient ainsi

$$\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f}) = \partial_{i,\psi(x)}(\overline{f\circ\psi^{-1}})\,.$$

Finalement la définition de $\partial_{i,\psi(x)}$ (voir exemple 1.202) donne

$$\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f}) = \partial_i(f\circ\psi^{-1})(\psi(x))\,.$$

Au passage, on a montré que l'image de la base canonique $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{C}^n$ par l'isomorphisme linéaire $(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)}\circ\mathrm{T}_x(\psi))^{-1}$ est la base $(\partial_i^{\mathcal{U}}(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$. En particulier, pour tout $v\in\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathbb{C}^n$ telle que

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i\partial_i^{\mathcal{U}}(x)\,.$$

On en déduit que pour toute section ensembliste X de p_{U} au-dessus-de U, il existe une unique famille $(f_{\mathrm{I}})_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{F}(\mathrm{U},\mathbb{C})^n$ telle que

$$\forall\, x\in\mathrm{U},\qquad \mathrm{X}(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)\partial_i^{\mathcal{U}}(x)\,. \tag{$*$}$$

De plus, X est holomorphe si et seulement si tous les f_i le sont. En effet, si tous les f_i sont holomorphes alors X est l'image de la famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ par l'application $\delta_{\mathcal{U}}$. Réciproquement si X est holomorphe, on note $(g_{\mathrm{I}})_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^n$ l'antécédent de X par l'application $\delta_{\mathcal{U}}$. L'unicité de la décomposition $(*)$ assure que $f_i = g_i$ pour tout $i\in[\![1\,,\,n]\!]$ et donc f_i est holomorphe.

Montrons la commutativité du diagramme. Pour cela, on note $\psi'\colon\mathrm{U}'\to\psi(\mathrm{U}')$ l'application induite par ψ. On pose $j\colon\mathrm{U}'\to\mathrm{U}$ et $j'\colon\psi(\mathrm{U}')\to\mathrm{V}$ les inclusions. Par définition de $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}\colon\mathrm{X}(\mathrm{U})\to\mathrm{X}(\mathrm{U}')$, on a, pour tout $x\in\mathrm{U}'$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}(\partial_i^{\mathcal{U}})(x) &= \mathrm{T}(j)^{-1}\circ\partial_i^{\mathcal{U}}(x) = \mathrm{T}(j)_x{}^{-1}\circ\partial_i^{\mathcal{U}}(x) = \mathrm{T}_x(j)^{-1}\circ\partial_i^{\mathcal{U}}(x)\\ &= \mathrm{T}_x(j)^{-1}\circ\mathrm{T}_x(\psi)^{-1}\circ(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}(\varepsilon_i)\,.\end{aligned}$$

Les égalités (**5**) et (**7**) donnent alors

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}(\partial_i^{\mathcal{U}})(x) &= \mathrm{T}_x(\psi')^{-1}\circ\mathrm{T}_{\psi(x)}(j')^{-1}\circ(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}(\varepsilon_i)\\ &= \mathrm{T}_x(\psi')^{-1}\circ(\Delta^{\psi(\mathrm{U}')}_{\psi(x)})^{-1}(\varepsilon_i) = \partial_i^{\mathcal{U}'}(x)\,.\end{aligned}$$

Ainsi $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}(\partial_i^{\mathcal{U}}) = \partial_i^{\mathcal{U}'}$. Passons à la commutativité du diagramme. Soit $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^n$. Par $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéarité de $\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}:\mathrm{X}(\mathrm{U})\to\mathrm{X}(\mathrm{U}')$ et $\mathscr{H}(\mathrm{U}',\mathbb{C})$-linéarité de $\delta_{\mathcal{U}'}$, on a

$$\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}\circ\Phi_{\mathcal{U}}((f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}) = \sum_{i=1}^n f_i\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}(\partial_i^{\mathcal{U}}) = \sum_{i=1}^n f_i\,\partial_i^{\mathcal{U}'}$$

et

$$\rho^n_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}\circ\delta_{\mathcal{U}'}((f_i)_{1\leqslant i\leqslant n}) = \sum_{i=1}^n (f_i)_{|\mathrm{U}'}\,\partial_i^{\mathcal{U}'}\,.$$

Par définition de la structure de $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-module sur $\mathrm{X}(\mathrm{U}')$, l'action de $f_i\in\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$ coïncide avec l'action de $(f_i)_{|\mathrm{U}'}\in\mathscr{H}(\mathrm{U}',\mathbb{C})$. On obtient alors la commutativité du diagramme. ■

Remarque 1.210 — Décomposition d'un vecteur tangent. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, $\mathcal{U}=(\mathrm{U},\mathrm{V},n,\psi)\in\mathscr{A}$ une carte de $\mathscr{A}$ et $x\in\mathrm{U}$. On reprend les notations et les résultats du lemme 1.209. La famille $(\partial_i^{\mathcal{U}}(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$. Pour $i\in[\![1\,,\,n]\!]$, on note $p_i:\mathrm{V}\to\mathbb{C}$ la restriction à V de l'application i^{e} coordonnée, $\psi_i=p_i\circ\psi$ et $\overline{\psi_i}$ l'image de $\psi_i\in\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$. Montrons que la décomposition de $\mathrm{D}\in\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$ dans la base $(\partial_i^{\mathcal{U}}(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est donnée par

$$\mathrm{D} = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}(\overline{\psi_i})\partial_i^{\mathcal{U}}(x)\,.$$

Soient $i,j\in[\![1\,,\,n]\!]$, on a

$$\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{\psi_j}) = \partial_i(\psi_j\circ\psi^{-1})(\psi(x)) = \partial_i(p_j)(\psi(x)) = \delta_{ij}\,.$$

Ainsi si

$$\mathrm{D} = \sum_{i=1}^n \lambda_i\partial_i^{\mathcal{U}}(x)$$

alors

$$\mathrm{D}(\overline{\psi_j}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{\psi_j}) = \lambda_j\,,$$

ce qui donne l'égalité voulue.

En particulier, si $\mathcal{U}'=(\mathrm{U},\mathrm{V}',n,\psi')$ est une carte de $\mathscr{A}$ de domaine U, on obtient

$$\partial_i^{\mathcal{U}'}(x) = \sum_{j=1}^n \partial_i^{\mathcal{U}'}(x)(\overline{\psi_j})\partial_j^{\mathcal{U}}(x)\,.$$

Le lemme 1.209 montre alors que

$$\begin{aligned}\partial_i^{\mathcal{U}'}(x) &= \sum_{j=1}^n \partial_i(\psi_j\circ\psi'^{-1})(\psi'(x))\partial_j^{\mathcal{U}}(x)\\ &= \sum_{j=1}^n \partial_i(p_j\circ(\psi\circ\psi'^{-1}))(\psi'(x))\partial_j^{\mathcal{U}}(x)\\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi\circ\psi'^{-1})_j}{\partial z_i}(\psi'(x))\partial_j^{\mathcal{U}}(x)\,.\end{aligned}$$

Finalement, la matrice de passage de la base $(\partial_i^{\mathcal{U}})_{1\leqslant i\leqslant n}$ à la base $(\partial_i^{\mathcal{U}'})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$ n'est autre que la matrice de $\mathrm{d}(\psi\circ\psi'^{-1})_{\psi(x)}$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$. ■

1.6.2 Fibre cotangent

Proposition-Définition 1.211 — Fibré cotangent. Soit $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. On considère l'ensemble

$$\mathrm{T}^*(\mathrm{M}) = \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}}(\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^*$$

et l'application
$$p_{\mathrm{M}}^*\colon \begin{cases} \mathrm{T}^*(\mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{M} \\ y \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^* & \longmapsto x\,. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi)$ une carte de $\mathscr{A}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. On définit l'application
$$\mathrm{T}^*(\psi)\colon \begin{cases} {p_{\mathrm{M}}^*}^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times (\mathbb{C}^n)^* \\ y \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^* & \longmapsto (x, {}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1})^{-1}) \end{cases}$$
et on note $\mathrm{T}^*(\mathcal{U}) = (\mathrm{U}, (\mathbb{C}^n)^*, \mathrm{T}^*(\psi))$.

Soit $\mathscr{A}' = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un atlas sur M contenu dans $\mathscr{A}$. Il existe sur $\mathrm{T}^*(\mathrm{M})$ un unique atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$ tel que p_{M}^* soit un fibré vectoriel holomorphe et $(\mathrm{T}^*(\mathcal{U}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ soit une famille de cartes trivialisantes pour p_{M}^*. De plus, on a $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$. En particulier, $\mathrm{T}^*(\mathcal{U})$ est une carte trivialisante pour p_{M}^* pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$.

Preuve. Il s'agit de l'application de la proposition 1.186 au fibré T(M) et au foncteur contravariant « dual » (voir l'exemple 1.185). ■

Proposition-Définition 1.212 — Puissance extérieure du fibré cotangent. Soit $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $\ell \in \mathbb{N}$. On considère l'ensemble
$$\Lambda^{\ell,*}(\mathrm{M}) = \bigsqcup_{x\in\mathrm{M}} \Lambda^\ell(\mathrm{T}_x(\mathrm{M})^*)$$
et l'application
$$\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})\colon \begin{cases} \Lambda^{\ell,*}(\mathrm{M}) & \longrightarrow \mathrm{M} \\ y \in \Lambda^\ell(\mathrm{T}_x(\mathrm{M})^*) & \longmapsto x\,. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi)$ une carte de $\mathscr{A}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. On définit l'application
$$\Lambda^{\ell,*}(\psi)\colon \begin{cases} \Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times \Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*) \\ y \in \Lambda^\ell((\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^*) & \longmapsto (x, \Lambda^\ell({}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) \circ \mathrm{T}_x(i)^{-1})^{-1})(y)) \end{cases}$$
et on note $\Lambda^{\ell,*}(\mathcal{U}) = (\mathrm{U}, \Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*), \Lambda^{\ell,*}(\psi))$.

Soit $\mathscr{A}' = (\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{A}}$ un atlas sur M contenu dans $\mathscr{A}$. Il existe sur $\Lambda^{\ell,*}(\mathrm{M})$ un unique atlas $\mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$ tel que $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})$ soit un fibré vectoriel holomorphe et $(\Lambda^{\ell,*}(\mathcal{U}_\alpha))_{\alpha\in\mathrm{A}}$ soit une famille de cartes trivialisantes pour p_{M}^*. De plus, on a $\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \mathscr{B}_{\mathscr{A}'}$. En particulier, $\mathrm{T}^*(\mathcal{U})$ est une carte trivialisante pour p_{M}^* pour tout $\mathcal{U} \in \mathscr{A}$.

Preuve. Il s'agit de l'application de la proposition 1.186 au fibré p_{M}^* et au foncteur Λ^ℓ (voir l'exemple 1.185) ou de l'application de la proposition 1.186 au fibré tangent p_{M} et au foncteur composé du foncteur « dual » et Λ^ℓ. ■

Remarque 1.213 — Ouvert d'une prévariété. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété, $\ell \in \mathbb{N}$, U un ouvert de M et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Comme, pour tout $x \in \mathrm{U}$, l'application $\mathrm{T}_x(i) = \mathrm{T}(i)_x$ est bijective (remarque 1.200), on peut appliquer la proposition 1.198 au foncteur contravariant $\Lambda^\ell \circ$« dual », au fibré tangent p_{U} au-dessus de U, au fibré tangent p_{M} au-dessus de M et à l'application $\mathrm{T}(i) \in \mathrm{Hom}^i(p_{\mathrm{U}}, p_{\mathrm{M}})$. On construit ainsi une application $\Lambda^{\ell,*}(i) \in \mathrm{Hom}^i(\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}}), \Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}}))$ donnée par
$$\Lambda^{\ell,*}(i)\colon \begin{cases} \Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}}) & \longrightarrow \Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}}) \\ v \in \Lambda^\ell(\mathrm{T}_x(\mathrm{U})^*) & \longmapsto \Lambda^\ell({}^t\mathrm{T}_x(i)^{-1})(v)\,. \end{cases}$$
Lorsque $\ell = 1$, on note $\mathrm{T}^*(i)$ plutôt que $\Lambda^{1,*}(i)$. L'exemple 1.152 montre que $\Lambda^{\ell,*}(i)$ se factorise en un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de U (encore noté $\Lambda^{\ell,*}(i)$) entre $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})$ et $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$. De plus, l'application induite par $\Lambda^{\ell,*}(i)$ entre les fibres de p_{U} et $(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$ au-dessus de x n'est autre que $\Lambda^\ell({}^t\mathrm{T}_x(i)^{-1})$. Comme $\Lambda^\ell({}^t\mathrm{T}_x(i)^{-1})$ est un isomorphisme, pour tout $x \in \mathrm{U}$ (grâce à la proposition-définition 1.200 et à la fonctorialité), la remarque 1.168 montre que $\Lambda^{\ell,*}(i)$ réalise un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de U entre $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})$ et $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$. En particulier, la proposition 1.179 montre que la composition par $\Lambda^{\ell,*}(i)$ réalise un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-modules entre $\Gamma(\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}}), \mathrm{U})$ et $\Gamma(\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}, \mathrm{U}) = \Gamma(\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}}), \mathrm{U})$. ■

Définition 1.214 — Forme différentielle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $\ell \in \mathbb{N}$ son fibré tangent. Une section globale de $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})$ est appelée une *ℓ-forme différentielle au-dessus de* M. On note $\Omega^\ell(\mathrm{M})$ (plutôt que $\Gamma(\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}}), \mathrm{M})$) le $\mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$-module des ℓ-formes différentielles au-dessus de M.

Remarque 1.215 — Forme différentielle et restriction. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, $\ell \in \mathbb{N}$, $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})$ la puissance extérieure ℓ^{e} du fibré cotangent de M, U un ouvert de M, $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion et s une ℓ-forme différentielle au-dessus de M.

Comme la restriction $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$ de $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})$ à U n'est pas $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})$ (puisque $\mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \neq \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$), la restriction de s à U n'est pas une ℓ-forme différentielle au-dessus de U mais simplement une section de $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$. Cependant, si $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ est l'inclusion, alors $\Lambda^{\ell,*}(i)$ réalise un isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes au-dessus de U entre $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})$ et $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}})_{\mathrm{U}}$. (remarque 1.213). En reprenant les notations de la proposition 1.179, on obtient que

$$\gamma_{\Lambda^{\ell,*}(i),\mathrm{U}}(s_{|\mathrm{U}}) = \Lambda^{\ell,*}(i)^{-1} \circ s_{|\mathrm{U}} \,.$$

est une section de $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})$ c'est-à-dire une ℓ-forme différentielle au-dessus de U.

Pour $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ deux ouverts de M, on note $i_{\mathrm{UV}} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$. Montrons qu'en posant

$$\Omega^{\ell}_{\mathrm{M}} : \begin{cases} \mathrm{U} & \longmapsto \Omega^{\ell}(\mathrm{U}) \\ \mathrm{V} \subset \mathrm{U} & \longmapsto (s \in \Omega^{\ell}(\mathrm{U}) \mapsto \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{UV}})^{-1} \circ s_{|\mathrm{V}} \in \Omega^{\ell}(\mathrm{V}))\,, \end{cases}$$

on obtient un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module localement libre isomorphe à $\Gamma(\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}}))$.

Par construction $\Omega^{\ell}(\mathrm{U})$ est un $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-module (proposition 1.177). De plus, d'après ce qui précède, l'application

$$\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U,V}} : \begin{cases} \Omega^{\ell}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \Omega^{\ell}(\mathrm{V}) \\ s & \longmapsto \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{UV}})^{-1} \circ s_{|\mathrm{V}} \end{cases}$$

est bien définie et est un isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire. De plus, si $\mathrm{W} \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ sont trois ouverts de M, on a $i_{\mathrm{UW}} = i_{\mathrm{UV}} \circ i_{\mathrm{VW}}$. On en déduit que $\mathrm{T}(i_{\mathrm{UW}}) = \mathrm{T}(i_{\mathrm{UV}}) \circ \mathrm{T}(i_{\mathrm{VW}})$ (proposition 1.200) et donc par la proposition 1.198, on obtient $\Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{UW}}) = \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{UV}}) \circ \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{VW}})$. Finalement, on a $\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U,W}} = \rho^{(\ell)}_{\mathrm{W,V}} \circ \rho^{(\ell)}_{\mathrm{U,V}}$. Par ailleurs, on a $i_{\mathrm{UU}} = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$. On en déduit successivement $\mathrm{T}(i_{\mathrm{UU}}) = \mathrm{id}_{p_{\mathrm{U}}}$, $\Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{UU}}) = \mathrm{id}_{\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})}$ et $\rho_{\mathrm{U,U}} = \mathrm{id}_{\Omega^{\ell}(\mathrm{U})}$. Ainsi $\Omega^{\ell}_{\mathrm{M}}$ est un préfaisceau au-dessus de M. Montrons que $\Omega^{\ell}_{\mathrm{M}}$ est un préfaisceau isomorphe à $\Gamma(\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{M}}))$. Pour $\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})$, on note $\gamma_{\mathrm{U}} : \Omega^{\ell}(\mathrm{U}) \to \Gamma(p_{\mathrm{M}}, \mathrm{U})$ la composition par $\Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{MU}})$ qui, d'après la remarque 1.213, est un isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire. Pour $s \in \Omega^{\ell}(\mathrm{U})$, on a

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathrm{V}} \circ \rho^{(\ell)}_{\mathrm{U,V}}(s) &= \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{MV}}) \circ \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{UV}})^{-1} \circ s_{|\mathrm{V}} \\ &= \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{MU}}) \circ \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{UV}}) \circ \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{UV}})^{-1} \circ s_{|\mathrm{V}} \\ &= \Lambda^{\ell,*}(i_{\mathrm{MU}}) \circ s \circ i_{\mathrm{UV}} = \gamma_{\mathrm{U}}(s)_{|\mathrm{V}} \,. \end{aligned}$$

Ainsi $(\gamma_{\mathrm{U}})_{\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv}(\mathrm{M})}$ est un isomorphisme de préfaisceaux. Finalement $\Omega^{\ell}_{\mathrm{M}}$ est bien un $\mathscr{H}(\mathrm{M})$-module localement libre isomorphe à $\Gamma(p_{\mathrm{M}})$. On dit que $\Omega^{\ell}_{\mathrm{M}}$ est *le faisceau des ℓ-formes différentielles de* M. ■

1.6.3 DIFFÉRENTIELLE

Proposition-Définition 1.216 — Différentielle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe et $f : \mathrm{M} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On note $\varphi : \mathrm{T}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes de l'exemple 1.205 appliqué à $\mathrm{U} = \mathbb{C}$. Pour $x \in \mathrm{M}$, on considère l'application linéaire

$$p_2 \circ \varphi \circ \mathrm{T}_x(f) = \Delta^{\mathbb{C}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f) : \mathrm{T}_x(\mathrm{M}) \to \mathbb{C}$$

que l'on note $\mathrm{d}f(x)$ (ou $\mathrm{d}_{\mathrm{M}}f(x)$ si on veut indiquer la prévariété sur laquelle on travaille). On dit que $\mathrm{d}f(x)$ est *la différentielle de f en x.*

Pour tout $x \in \mathrm{M}$, $\mathrm{d}f(x) \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^*$. De plus, pour $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$, on a $\mathrm{d}f(x)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\overline{f})$ où $\overline{f}$ désigne l'image de f dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$. L'application $\mathrm{d}f : x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ appartient à $\Gamma(p^*_{\mathrm{M}}, \mathrm{M}) = \Omega^1(\mathrm{M})$. On dit que $\mathrm{d}f$ est *la différentielle de f*. De plus l'application

$$\mathrm{d}_{\mathrm{M}} : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{M},\mathbb{C}) & \longrightarrow \Omega^1(\mathrm{M}) \\ f & \longmapsto \mathrm{d}f \end{cases}$$

est une $\mathbb{C}$-dérivation.

Preuve. Les applications $\mathrm{T}_x(f)$ et $\Delta^{\mathbb{C}}_{f(x)}$ sont linéaires donc $\mathrm{d}f(x)$ l'est aussi. Par ailleurs, par définition de $\mathrm{T}_x(f)$ et $\Delta^{\mathbb{C}}_{f(x)}$, on a, pour $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$,

$$\mathrm{d}f(x)(\mathrm{D}) = \Delta^{\mathbb{C}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(f^*_x(\alpha))\,.$$

où α désigne l'image de id_{V} dans $\mathscr{H}_{f(x)}(\mathbb{C})$. L'égalité (**1**) de la proposition-définition 1.131 montre alors que $f_x^*(\alpha)$ est l'image de $\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \circ f = f$ dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$. Ainsi, $\mathrm{d}f(x)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\overline{f})$.

Comme $\mathrm{d}f(x) \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M}))^*$, on a $p_{\mathrm{M}}^* \circ \mathrm{d}f = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{d}f$ est holomorphe. On considère pour cela une carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \varphi) \in \mathscr{A}$. On note $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. Par construction de la structure de prévariété sur $\mathrm{T}(\mathrm{M})^*$ (voir la proposition-définition 1.211), on dispose de la trivialisation

$$\mathrm{T}^*(\psi)\colon \begin{cases} (p_{\mathrm{M}}^*)^{-1}(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times (\mathbb{C}^n)^* \\ \omega \in (\mathrm{T}_x(\mathrm{M})^*) & \longmapsto (x, \omega \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}) \,. \end{cases}$$

Par définition de $\mathrm{d}f_x$, on obtient, pour $x \in \mathrm{U}$,

$$(\mathrm{T}^*(\psi) \circ \mathrm{d}f)(x) = \mathrm{T}^*(\psi)(\mathrm{d}f_x) = (x, \Delta^{\mathbb{C}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)})^{-1}) \,.$$

Les égalités (**4**) et (**3**) montrent que

$$\mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\psi)^{-1} = \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_{\psi(x)}(\psi^{-1}) = \mathrm{T}_{\psi(x)}(f \circ i \circ \psi^{-1}) \,.$$

L'égalité (**6**) donne alors $$(\mathrm{T}^*(\psi) \circ \mathrm{d}f)(x) = \mathrm{d}(f \circ \psi^{-1})_{\psi(x)} \,.$$

Cette dernière égalité se justifie aussi directement grâce au calcul de la preuve de la proposition-définition 1.200 appliquée à la carte $\mathcal{U}$ de $\mathscr{A}$ et à la carte $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, 1, \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$. Finalement, comme $f \circ \psi^{-1}$ et ψ sont holomorphes, on en déduit que $\mathrm{T}^*(\psi) \circ (\mathrm{d}f)_{|\mathrm{U}}$ est holomorphe. Or $\mathrm{T}^*(\psi)$ est un biholomorphisme, on déduit que $(\mathrm{d}f)_{|\mathrm{U}}$ est holomorphe. Ainsi la restriction de $\mathrm{d}f$ à tout ouvert qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$ est holomorphe. La proposition 1.101 donne alors l'holomorphie de $\mathrm{d}f$.

Soient $f, g \in \mathscr{H}(\mathrm{M}, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathrm{M}$. On note $\overline{f}, \overline{g}, \overline{fg}, \overline{\lambda f}$ et $\overline{f+g}$ les images respectives de $f, g, fg, \lambda f$ et $(f+g)$ dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{M})$. Pour $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{M})$, on a

$$\mathrm{d}(f+g)(x)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\overline{f+g}) = \mathrm{D}(\overline{f} + \overline{g}) = \mathrm{D}(\overline{f}) + \mathrm{D}(\overline{g}) = \mathrm{d}f(x)(\mathrm{D}) + \mathrm{d}g(x)(\mathrm{D}) \,,$$

$$\mathrm{d}(\lambda f)(x)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\overline{\lambda f}) = \mathrm{D}(\lambda \overline{f}) = \lambda \mathrm{D}(\overline{f}) = \lambda \mathrm{d}f(x)(\mathrm{D})$$

et $$\mathrm{d}(fg)(x)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\overline{fg}) = \mathrm{D}(\overline{f}\,\overline{g}) = f(x)\mathrm{D}(\overline{g}) + g(x)\mathrm{D}(\overline{f}) = f(x)\mathrm{d}g(x)(\mathrm{D}) + g(x)\mathrm{d}f(x)(\mathrm{D}) \,.$$

La dernière égalité donne $\mathrm{d}(fg) = f\mathrm{d}g + g\mathrm{d}f$ et on obtient ainsi le résultat souhaité. ■

Exemple 1.217 — Si U est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On considère la structure naturelle de prévariété holomorphe sur U donnée par la carte $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{U}, n, \mathrm{id})$. L'application

$$\mathrm{T}^*(\mathrm{id})\colon \begin{cases} \mathrm{T}^*(\mathrm{U}) & \longrightarrow \mathrm{U} \times (\mathbb{C}^n)^* \\ \omega \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) & \longmapsto (x, \omega \circ \mathrm{T}_x(i) \circ \mathrm{T}_x(\mathrm{id})^{-1} \circ (\Delta^{\mathrm{V}}_x)^{-1}) \end{cases}$$

réalise un isomorphisme de fibré vectoriel holomorphe au-dessus de U. Soit $f \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$, le calcul de la preuve de la proposition-définition 1.216 appliqué à la carte $\mathcal{U}$ montre que $\mathrm{T}^*(\mathrm{id}) \circ \mathrm{d}f(x) = (x, \mathrm{d}f_x)$. Ainsi $p_2 \circ \mathrm{T}^*(\mathrm{id}) \circ \mathrm{d}f$ n'est autre que la différentielle usuelle de f.

Finalement, le fibré cotangent p_{U}^* de U s'identifie grâce à $\mathrm{T}^*(\mathrm{id})$ au fibré trivial de fibre $(\mathbb{C}^n)^*$. La section $\mathrm{d}f$ s'identifie alors à la section $\mathrm{T}^*(\mathrm{id}) \circ \mathrm{d}f$ du fibré trivial de fibre $(\mathbb{C}^n)^*$ (voir la remarque 1.180). Le calcul précédent montre que la fonction de U dans $\mathbb{C}$ qui correspond à $\mathrm{d}f$ via l'isomorphisme Δ_{U} de l'exemple 1.178 n'est autre que la différentielle usuelle.

Par ailleurs, soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. L'application

$$\varphi\colon \begin{cases} (\mathbb{C}^n)^* & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ f & \longmapsto (f(\varepsilon_1), \ldots, f(\varepsilon_n)) \,. \end{cases}$$

correspondant à l'écriture de f en coordonnée dans la base duale de la base canonique. La remarque 1.140 montre alors qu'en composant $\mathrm{T}^*(\mathrm{id})$ avec $\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times \varphi$, on obtient une nouvelle trivialisation du fibré cotangent p_{U} de U. La fonction de U dans $\mathbb{C}$ correspondant à la section $\mathrm{d}f$ est alors

$$x \longmapsto (\mathrm{d}f_x(\varepsilon_1), \ldots, \mathrm{d}f_x(\varepsilon_n)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(x)\right) \,.$$ ■

Exemple 1.218 — Si U est un ouvert de M. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, $f : \mathrm{M} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe, U un ouvert de M et $i : \mathrm{U} \to \mathrm{M}$ l'inclusion. L'ouvert U est muni d'une structure de prévariété de façon canonique. On peut donc définir $\mathrm{d}_{\mathrm{U}} : \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}) \to \Omega^1(\mathrm{U})$. Montrons que,

$$\forall\, x \in \mathrm{U}, \quad \mathrm{d_M}(f)(x) \circ \mathrm{T}_x(i) = \mathrm{d_U}(f_{|\mathrm{U}})(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}^*(i)^{-1} \circ (\mathrm{d_M} f)_{|\mathrm{U}} = \mathrm{d_U}(f_{|\mathrm{U}})\,. \tag{8}$$

Comme $f_{|\mathrm{U}} = f \circ i$, la proposition-définition 1.200 montre que, pour $x \in \mathrm{U}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d_U}(f_{|\mathrm{U}})(x) &= \Delta^{\mathbb{C}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f_{|\mathrm{U}}) = \Delta^{\mathbb{C}}_{f(x)} \circ \mathrm{T}_x(f) \circ \mathrm{T}_x(i) \\ &= \mathrm{d_M} f(x) \circ \mathrm{T}_x(i) = {}^t\mathrm{T}_x(i)(\mathrm{d_M} f(x)) = \mathrm{T}^*(i)^{-1} \circ (\mathrm{d_M} f)(x)\,, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat souhaité. En appliquant ce qui précède à la prévariété U et un ouvert V de la prévariété U, l'égalité (**8**) assure que $\mathrm{d}_0 = (\mathrm{d_U})_{\mathrm{U} \in \mathrm{Ouv(M)}}$ est un morphisme de faisceaux abéliens de $\mathscr{H}(\mathrm{M})$ dans $\Omega^1(\mathrm{M})$. ■

Lemme 1.219 — Écriture d'une forme différentielle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, $\ell \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi) \in \mathscr{A}$. Pour $i \in [\![1\,, n]\!]$, on note $p_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ l'application i^{e} coordonnée, $p_i : \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ la restriction à V de l'application i^{e} coordonnée et $\psi_i = p_i \circ \psi$. On note $\mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])$ l'ensemble des parties à ℓ éléments de $[\![1\,, n]\!]$ et pour $\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])$,

$$\psi_{\mathrm{I}} = \mathrm{d}\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi_{i_\ell}$$

où $\mathrm{I} = \{i_1, \ldots, i_\ell\}$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$.

L'application

$$\Phi_{\mathcal{U}} : \begin{cases} (\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}))^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} \longrightarrow \Omega^\ell(\mathrm{U}) \\ (f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} \longmapsto \displaystyle\sum_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} f_{\mathrm{I}}\, \psi_{\mathrm{I}} \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-modules. Ainsi $(\psi_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])}$ est une $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-base de $\Omega^\ell(\mathrm{U})$.

Par ailleurs, si U′ est un ouvert de M contenu dans U, on pose $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_{|\mathrm{U}'}$. On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}))^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}{}^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])}"'] & \Omega^\ell(\mathrm{U}) \arrow[d, "\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}"] \\ (\mathscr{H}(\mathrm{U}', \mathbb{C}))^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{U}'}"] & \Omega^\ell(\mathrm{U}') \end{tikzcd}$$

Enfin, si $f \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$ et $x \in \mathrm{U}$, la décomposition de $\mathrm{d}f(x) \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})^*$ dans la base $(\mathrm{d}\psi_i(x))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est donnée par

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f})\mathrm{d}\psi_i(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i(f \circ \psi^{-1})(\psi(x))\mathrm{d}\psi_i(x)\,.$$

où $\overline{f}$ désigne l'image de f dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$.

Preuve. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, l'application p_i est une forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$. De plus, la famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $(\mathbb{C}^n)^*$. Pour $\mathrm{I} = \{i_1, \ldots, i_\ell\} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$, on pose $p_{\mathrm{I}} = p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_\ell}$. La famille $(p_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])}$ est une base de $\Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*)$. L'exemple 1.106 montre que l'application

$$\Psi_{\mathrm{U}} : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} \longrightarrow \mathscr{H}(\mathrm{U}, \Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*)) \\ (f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} \longmapsto \displaystyle\sum_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} f_{\mathrm{I}} p_{\mathrm{I}} \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-modules. En composant avec l'isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-linéaire

$$\Delta'_{\mathrm{U}} : \begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U}, \Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*)}, \mathrm{U}) \\ f \longmapsto (\, x \mapsto (x, f(x))\,) \end{cases}$$

de l'exemple 1.178, on obtient que l'application

$$\begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*)}, \mathrm{U}) \\ (f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} \longmapsto \left(x \mapsto \left(x, \displaystyle\sum_{\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,, n]\!])} f_{\mathrm{I}}(x) p_{\mathrm{I}} \right) \right) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-modules. Par ailleurs, par construction du fibré vectoriel holomorphe $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})$, on a la trivialisation

$$\Lambda^{\ell,*}(\psi) : \begin{cases} \Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})^{-1}(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathrm{U} \times \Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*) \\ y \in (\Lambda^\ell(\mathrm{T}_x(\mathrm{U})^*)) \longmapsto (x, \Lambda^\ell({}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi))^{-1})(y)) \end{cases}$$

En reprenant les notations de la proposition 1.179, on obtient grâce à la remarque 1.180 et à l'exemple 1.169 que l'application

$$\gamma_{\Lambda^{\ell,*}(\psi),\mathrm{U}} : \begin{cases} \Omega^\ell(\mathrm{U}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{Triv}_{\mathrm{U}}^{\Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*)}, \mathrm{U}) \\ \quad s \quad \longmapsto \Lambda^{\ell,*}(\psi) \circ s \end{cases}$$

est un isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire. Ainsi l'application

$$\begin{cases} \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])} \longrightarrow \Omega^\ell(\mathrm{U}) \\ (f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])} \quad \longmapsto \sum\limits_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])} f_{\mathrm{I}}\, {\gamma_{\Lambda^{\ell,*}(\psi),\mathrm{U}}}^{-1}(x \mapsto (x,p_{\mathrm{I}}))\,. \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-modules.

Soit $\mathrm{I} = \{i_1,\dots,i_\ell\}$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$ une partie à ℓ éléments de $[\![1\,,n]\!]$. Montrons à présent que ${\gamma_{\Lambda^{\ell,*}(\psi),\mathrm{U}}}^{-1}(x \mapsto (x,p_{\mathrm{I}})) = \psi_{\mathrm{I}}$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} {\gamma_{\Lambda^{\ell,*}(\psi),\mathrm{U}}}^{-1}(x \mapsto (x,p_{\mathrm{I}}))(x) &= \Lambda^{\ell,*}(i)^{-1}((x,p_{\mathrm{I}})) = \Lambda^{\ell,*}(i)^{-1}(x,p_{\mathrm{I}}) = {\Lambda^{\ell,*}(i)_x}^{-1}(x,p_{\mathrm{I}}) \\ &= \Lambda^\ell({}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)))(p_{\mathrm{I}}) \\ &= \Lambda^\ell({}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)))(p_{i_1} \wedge \cdots \wedge p_{i_\ell}) \\ &= {}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi))(p_{i_1}) \wedge \cdots \wedge {}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi))(p_{i_\ell}) \\ &= (p_{i_1} \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)) \wedge \cdots \wedge (p_{i_\ell} \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi))\,. \end{aligned}$$

Montrons que $p_i \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi) = \Delta^{\mathbb{C}}_{\psi_i(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi_i) = \mathrm{d}\psi_i(x)$ pour tout $x \in \mathrm{U}$ et tout $i \in [\![1\,,n]\!]$. Soit $i \in [\![1\,,n]\!]$, on note α_i (resp. β_i) l'image de $p_i \in \mathscr{H}(\mathrm{V},\mathbb{C})$ (resp. $\psi_i \in \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$) dans $\mathscr{H}_{\psi(x)}(\mathrm{V})$ (resp. $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$). Par définition (proposition-définition 1.200 et exemple 1.202), on a, pour $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$,

$$p_i \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\psi_x^*(\alpha_i))$$

L'égalité (**1**) de la proposition-définition 1.131 montre que $\psi_x^*(\alpha_i)$ est en fait l'image de $p_i \circ \psi = \psi_i \in \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$ dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$. On obtient alors, par définition de la différentielle de ψ_i (proposition-définition 1.216)

$$p_i \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)(\mathrm{D}) = \mathrm{D}(\beta_i) = \mathrm{d}\psi_i(x)(\mathrm{D})\,.$$

On en déduit que $\qquad {\gamma_{\Lambda^{\ell,*}(\psi),\mathrm{U}}}^{-1}(x \mapsto (x,p_{\mathrm{I}}))(x) = \mathrm{d}\psi_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi_{i_\ell}(x) = \mathrm{d}\psi_{\mathrm{I}}(x)\,.$

On obtient ainsi l'isomorphisme $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéaire souhaité.

Au passage, on a montré que l'image de la base $(p_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])}$ de $\Lambda^\ell((\mathbb{C}^n)^*)$ par l'isomorphisme linéaire $\Lambda^{\ell,*}({}^t(\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)))$ est la base $(\psi_{\mathrm{I}}(x))_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])}$ de $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$. En particulier, pour tout $v \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$, il existe une unique famille $(\lambda_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])} \in \mathbb{C}_\ell^{\mathscr{P}}([\![1\,,n]\!])$ telle que

$$v = \sum_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])} \lambda_{\mathrm{I}}\psi_{\mathrm{I}}(x)$$

On en déduit que pour toute section ensembliste ω de $\Lambda^{\ell,*}(p_{\mathrm{U}})$ au-dessus-de U, il existe une unique famille $(f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])} \in \mathscr{F}(\mathrm{U},\mathbb{C})^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathrm{U}, \qquad \omega(x) = \sum_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])} f_{\mathrm{I}}(x)\psi_{\mathrm{I}}(x)\,. \tag{$*$}$$

De plus, ω est holomorphe si et seulement si tous les f_{I} le sont. En effet, si tous les f_{I} sont holomorphes alors ω est l'image de la famille $(f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])}$ par l'application $\Phi_{\mathcal{U}}$. Réciproquement si ω est holomorphe, on note $(g_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])} \in \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])}$ l'antécédent de ω par l'application $\Phi_{\mathcal{U}}$. L'unicité de la décomposition $(*)$ assure que $f_{\mathrm{I}} = g_{\mathrm{I}}$ pour tout $\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,,n]\!])$ et donc f_{I} est holomorphe.

En particulier, pour $\ell = 1$ et $x \in \mathrm{U}$, on obtient que la famille de formes linéaires $(\mathrm{d}\psi_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})^*$. De plus, pour $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$, on a

$$\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)(\mathrm{D}) = (p_1 \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)(\mathrm{D}),\dots,p_n \circ \Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)(\mathrm{D})) = (\mathrm{d}\psi_1(x)(\mathrm{D}),\dots,\mathrm{d}\psi_n(x)(\mathrm{D}))$$

et l'application
$$\begin{cases} \mathrm{T}_x(\mathrm{U}) \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \quad \mathrm{D} \quad \longmapsto (\mathrm{d}\psi_1(x)(\mathrm{D}),\dots,\mathrm{d}\psi_n(x)(\mathrm{D})) \end{cases}$$

n'est autre que la bijection $\mathbb{C}$-linéaire $\Delta^{\mathrm{V}}_{\psi(x)} \circ \mathrm{T}_x(\psi)$.

Montrons la commutativité du diagramme. Pour cela, on note $\psi' : \mathrm{U}' \to \psi(\mathrm{U}')$ l'application induite par ψ et, pour $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, $p_i : \psi(\mathrm{U}') \to \mathbb{C}$ la restriction à $\psi(\mathrm{U}')$ de l'application i^{e} coordonnée et $\psi'_i = p_i \circ \psi'$. Pour une partie $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$ à ℓ éléments de $[\![1\,,\, n]\!]$, on pose

$$\psi'_{\mathrm{I}} = \mathrm{d}\psi'_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi'_{i_\ell}\,.$$

Soit $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$ une partie à ℓ éléments de $[\![1\,,\, n]\!]$. Commençons par montrer, à l'aide de (**8**), que $\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}(\psi_{\mathrm{I}}) = \psi'_{\mathrm{I}}$. On pose $j : \mathrm{U}' \to \mathrm{U}$ l'inclusion. Par définition de $\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}$, on a, pour tout $x \in \mathrm{U}'$

$$\begin{aligned}
\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}(\psi_{\mathrm{I}})(x) &= \Lambda^{\ell,*}(j)^{-1} \circ \psi_{\mathrm{I}}(x) = \Lambda^{\ell,*}(j)_x{}^{-1} \circ \psi_{\mathrm{I}}(x) = \Lambda^{\ell}({}^t\mathrm{T}_x(j))(\psi_{\mathrm{I}}(x)) \\
&= \Lambda^{\ell}({}^t\mathrm{T}_x(j))(\mathrm{d}\psi_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi_{i_\ell}(x)) \\
&= {}^t\mathrm{T}_x(j)(\mathrm{d}\psi_{i_1}(x)) \wedge \cdots \wedge {}^t\mathrm{T}_x(j)(\mathrm{d}\psi_{i_\ell}(x)) \\
&= (\mathrm{d}\psi_{i_1}(x) \circ \mathrm{T}_x(j)) \wedge \cdots \wedge (\mathrm{d}\psi_{i_\ell}(x) \circ \mathrm{T}_x(j))\,.
\end{aligned}$$

Comme $\psi'_i = \psi_i{}_{|\mathrm{U}'}$, l'égalité (**8**) nous donne

$$\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}(\psi_{\mathrm{I}})(x) = \mathrm{d}\psi'_{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi'_{i_\ell}(x) = \mathrm{d}\psi'_{\mathrm{I}}(x)\,.$$

Passons à la commutativité du diagramme. Soit $(f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])} \in \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])}$. Par $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-linéarité de $\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}$ et $\mathscr{H}(\mathrm{U}',\mathbb{C})$-linéarité de $\Phi_{\mathcal{U}'}$, on a

$$\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U},\mathrm{U}'} \circ \Phi_{\mathcal{U}}((f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])}) = \sum_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])} f_{\mathrm{I}}\rho^{(\ell)}_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}(\Psi_{\mathrm{I}}) = \sum_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])} f_{\mathrm{I}}\Psi'_{\mathrm{I}}$$

et
$$\rho_{\mathrm{U},\mathrm{U}'}{}^{\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])} \circ \Phi_{\mathcal{U}'}((f_{\mathrm{I}})_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])}) = \sum_{\mathrm{I}\in\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])} (f_{\mathrm{I}})_{|\mathrm{U}'}\,\psi'_{\mathrm{I}}\,.$$

Par définition de la structure de $\mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$-module sur $\Omega(\mathrm{U}')$, l'action de $f_{\mathrm{I}} \in \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$ coïncide avec l'action de $(f_{\mathrm{I}})_{|\mathrm{U}'} \in \mathscr{H}(\mathrm{U}',\mathbb{C})$. On obtient alors la commutativité du diagramme.

Comme $(\mathrm{d}\psi_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})^*$, on peut écrire

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{d}\psi_i(x) \qquad \text{avec} \quad \lambda_i \in \mathbb{C}\,.$$

Mais
$$\mathrm{d}\psi_i(x)(\partial_j^{\mathcal{U}}(x)) = \partial_j\psi_i \circ \psi^{-1}(\psi(x)) = \partial_j p_i = \delta_{ij}\,.$$

On en déduit que
$$\mathrm{d}f(x)(\partial_j^{\mathcal{U}}(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{d}\psi_i(x)(\partial_j^{\mathcal{U}}(x)) = \lambda_j\,.$$

ce qui donne la décomposition souhaitée. ■

Remarque 1.220 — Dualité. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, $\ell \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} = (\mathrm{U},\mathrm{V},n,\psi) \in \mathscr{A}$ et $x \in \mathrm{U}$ Pour $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, on note ε_i le i^{e} vecteur de la base canonique, $p_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ l'application i^{e} coordonnée, $p_i : \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ la restriction à V de l'application i^{e} coordonnée et $\psi_i = p_i \circ \psi$. Pour $f \in \mathscr{H}(\mathrm{U},\mathbb{C})$, on note $\overline{f}$ l'image f dans $\mathscr{H}_x(\mathrm{U})$.

La décomposition de la remarque 1.210 d'un vecteur tangent $\mathrm{D} \in \mathrm{T}_x(\mathrm{U})$ dans la base $(\partial_i^{\mathcal{U}}(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathrm{T}_x(\mathrm{U})$ et la décomposition, donnée dans le lemme 1.219, du vecteur cotangent $\mathrm{d}f(x)$ dans la base $(\mathrm{d}\psi_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ s'écrivent

$$\mathrm{D} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}(\overline{\psi_i})\partial_i^{\mathcal{U}}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\psi_i(x)(\mathrm{D})\partial_i^{\mathcal{U}}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i^{\mathcal{U}}(x)(\overline{f})\mathrm{d}\psi_i(x)\,.$$

Ces égalités n'ont rien d'étonnant puisque les familles $(\partial_i^{\mathcal{U}}(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(\mathrm{d}\psi_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des bases duales l'une de l'autre. En effet, par construction $(\partial_i^{\mathcal{U}}(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est l'image de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ par l'isomorphisme $(\Delta_x^{\mathrm{V}} \circ \mathrm{T}_x(\psi))^{-1}$ et $(\mathrm{d}\psi_i(x))_{1\leqslant i\leqslant n}$ est l'image de la base duale de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ par l'isomorphisme ${}^t(\Delta_x^{\mathrm{V}} \circ \mathrm{T}_x(\psi))$. ■

On reprend les notations de la sous-section 1.1.2 pour la signature d'une application injective de $[\![1\,,\, \ell]\!]$ dans $[\![1\,,\, n]\!]$ (définition 1.4), l'ensemble des applications injectives de $[\![1\,,\, \ell]\!]$ dans $[\![1\,,\, n]\!]$ (notation 1.3).

Lemme 1.221 — Forme différentielle et changement de cartes. Soient $(\mathrm{M},\mathscr{A})$ une prévariété holomorphe, $\ell \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} = (\mathrm{U},\mathrm{V},n,\psi) \in \mathscr{A}$ et $\mathcal{U}' = (\mathrm{U},\mathrm{V}',n,\psi') \in \mathscr{A}$ deux cartes de $\mathscr{A}$. Pour $i \in [\![1\,,\, n]\!]$, on note $p_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ l'application i^{e} coordonnée ainsi que ses restrictions à V et V′ et on pose $\psi_i = p_i \circ \psi$ et $\psi'_i = p_i \circ \psi'$. On note $\mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])$ l'ensemble des parties à ℓ éléments de $[\![1\,,\, n]\!]$ et pour $\mathrm{I} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])$,

$$\psi_{\mathrm{I}} = \mathrm{d}\psi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi_{i_\ell} \qquad \text{et} \qquad \psi'_{\mathrm{I}} = \mathrm{d}\psi'_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\psi'_{i_\ell}$$

où $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_\ell\}$ avec $i_1 < \cdots < i_\ell$.

On peut écrire

$$\mathrm{d}\psi'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{d}\psi_j \qquad \text{avec} \quad a_{ij} \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}).$$

On pose $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathrm{M}_n(\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}))$ et pour $\mathrm{I}, \mathrm{J} \in \mathscr{P}_\ell([\![1\,,\, n]\!])$ on note a_{IJ} le mineur de A dont les lignes (resp. les colonnes) sont celles dont l'indice appartient à I (resp. J).

Preuve. Soit $i \in [\![1\,,\, n]\!]$. D'après le lemme 1.219, la forme différentielle $\mathrm{d}\psi'_i \in \Omega^1(\mathrm{U})$ se décompose dans la $\mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C})$-base $(\mathrm{d}\psi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\Omega^1(\mathrm{U})$ sous la forme

$$\mathrm{d}\psi'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{d}\psi_j \qquad \text{avec} \quad a_{ij} \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}).$$

Comme l'application

$$\begin{cases} \Omega^1(\mathrm{U})^\ell & \longrightarrow \Omega^\ell(\mathrm{U}) \\ (\omega_1, \dots, \omega_\ell) & \longmapsto \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_\ell \end{cases}$$

est alternée, le lemme 1.12 donne le résultat.

Proposition-Définition 1.222 — Différentielle. Soient $(\mathrm{M}, \mathscr{A})$ une prévariété holomorphe. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe un unique morphisme de faisceaux abéliens $\mathrm{d}_\ell = (\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}})_{\mathrm{U}\in\mathrm{Ouv}(\mathrm{M})} : \Omega_{\mathrm{M}}^\ell \to \Omega_{\mathrm{M}}^{\ell+1}$ vérifiant les propriétés suivantes

(*i*) $\mathrm{d}_0 : \Omega_{\mathrm{M}}^0 \to \Omega_{\mathrm{M}}^1$ est la différentielle ;

(*ii*) Pour tout ouvert U de M, tout $f \in \Omega^0(\mathrm{U})$ et $\alpha \in \Omega^\ell(\mathrm{U})$, on a

$$\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(f\alpha) = \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(f) \wedge_{\mathrm{U}} \beta + f\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\alpha) \ ;$$

(*iii*) Pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, tout ouvert U de M, tout $\alpha \in \Omega^1(\mathrm{U})$ et $\beta \in \Omega^\ell(\mathrm{U})$, on a

$$\mathrm{d}_{\ell+1}^{\mathrm{U}}(\alpha \wedge_{\mathrm{U}} \beta) = \mathrm{d}_1^{\mathrm{U}}(\alpha) \wedge_{\mathrm{U}} \beta + \alpha \wedge_{\mathrm{U}} \mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\beta) \ ;$$

(*iv*) $d_1 \circ d_0 = 0$.

De plus, pour tout $\ell, m \in \mathbb{N}$, tout ouvert U de M et tout $\alpha \in \Omega^\ell(\mathrm{U})$ et $\beta \in \Omega^m(\mathrm{U})$, on a

$$\mathrm{d}_{\ell+m}(\alpha \wedge_{\mathrm{U}} \beta) = \mathrm{d}_\ell(\alpha) \wedge_{\mathrm{U}} \beta + (-1)^\ell \alpha \wedge_{\mathrm{U}} \mathrm{d}_m(\beta)\,,$$

et

$$\mathrm{d}_{\ell+1} \circ \mathrm{d}_\ell = 0\,.$$

Preuve. Supposons qu'une telle famille de morphismes de faisceaux abéliens existe et montrons qu'elle est unique. Soient $\mathcal{U} = (\mathrm{U}, \mathrm{V}, n, \psi)$ une carte de $\mathscr{A}$ et $\alpha \in \Omega^\ell(\mathrm{U})$. D'après le lemme 1.219, on peut écrire α comme une somme (finie) de termes de la forme

$$\beta = f\,\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell) \qquad \text{avec} \quad f, g_i \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}).$$

L'image de α par d_ℓ^{U} est alors la somme des images par $\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}$ de chacun des termes de la somme définissant α. Ainsi, pour montrer que $\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}$ est uniquement déterminé, il suffit de montrer que $\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}$ est entièrement déterminé sur les éléments de la forme

$$\beta = f\,\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell) \qquad \text{avec} \quad f, g_i \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \mathbb{C}).$$

Calculons donc $\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\beta)$. Le point (*ii*) donne

$$\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\beta) = \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(f) \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell) + f \cdot d_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell))\,.$$

Montrons que

$$\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) = 0. \tag{$*$}$$

Pour cela, on raisonne par récurrence. De façon précise, on va montrer par récurrence sur i que, pour tout $i \in [\![0\,,\, \ell-1]\!]$, on a

$$\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) = (-1)^i \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_i) \wedge \mathrm{d}_{\ell-i}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell))$$

Pour $i = 0$, le résultat est trivial. Supposons l'égalité vrai au rang $i < \ell - 1$. Comme $\ell - 1 - i > 0$, on peut appliquer le point (*iii*) pour obtenir

$$\mathrm{d}_{\ell-i}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) = \mathrm{d}_1^{\mathrm{U}}\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+2}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell) - \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \mathrm{d}_{\ell-i-1}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+2}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell))\,.$$

Comme $\mathrm{d}_1^{\mathrm{U}} \circ \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}} = 0$, on obtient bien

$$\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) = (-1)^{i+1}\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_i) \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+1}) \wedge \mathrm{d}_{\ell-i-1}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_{i+2}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell))\,.$$

En particulier, avec $i = \ell - 1$, on obtient, grâce à l'égalité $\mathrm{d}_1 \circ \mathrm{d}_0 = 0$,

$$\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) = (-1)^{\ell-1}\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_1^{\mathrm{U}}(\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)) = 0.$$

Ainsi $\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\beta) = \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(f) \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}(g_\ell)$. Ainsi, on obtient que $\mathrm{d}_\ell^{\mathrm{U}}(\beta)$ s'écrit uniquement à l'aide de $\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}$. Ainsi $\mathrm{d}_0^{\mathrm{U}}$ est uniquement déterminé pour tout ouvert U qui est le domaine d'une carte de $\mathscr{A}$. Comme les domaines des cartes de $\mathscr{A}$ recouvrent M, on obtient l'unicité cherchée.

On définit ensuite au-dessus d'une carte et on vérifie que c'est compatible puis on utilise le critère de recollement...