Vincent Beck

Un tout petit peu d'homotopie

On note $\mathrm{I} = [\,0\,,1\,]$.

0.1 Homotopie

Définition 1 — Applications homotopes. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ deux applications continues. On dit que f et homotope à g s'il existe une application continue $\mathrm{H} : \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \mathrm{Y}$ telle que

$$\forall \in x \in \mathrm{X}, \qquad \mathrm{H}(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}(x, 1) = g(x)\,.$$

On dit alors que H une homotopie de f à g.

De manière imagée, en représentant le segment $[\,0\,,1\,]$ verticalement, la tranche inférieure donne f, la tranche supérieure donne g et les tranches intermédiaires des fonctions qui font passer continûment de f à g. On définit même une notion un peu plus générale : l'homotopie relative à un sous-espace que l'on étudie dans un premier temps. On se focalisera ensuite sur la notion d'homotopie (simple).

Définition 2 — Applications homotopes relativement à un sous-espace. Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ deux applications continues. On dit que f et homotope à g relativement à A s'il existe une application continue $\mathrm{H} : \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to \mathrm{Y}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathrm{X}, \qquad \mathrm{H}(x, 0) = f(x), \quad \mathrm{H}(x, 1) = g(x)\,,$$

et

$$\forall\, a \in \mathrm{A}, \quad \forall\, t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{H}(a, t) = f(a) = g(a)\,.$$

On dit alors que H une homotopie relative à A de f à g.

Remarque 3 — Égalité. La deuxième condition de la définition 2 montre que pour que f et g puissent être homotopes relativement à A, il faut que f et g coïncide sur A.

Remarque 4 — Lorsque $\mathrm{A} = \varnothing$. Si $\mathrm{A} = \varnothing$, la deuxième condition de la définition 2 est vide. Ainsi être homotope relativement à l'ensemble vide signifie simplement être homotope.

Remarque 5 — Sous-ensemble. Si $\mathrm{A}' \subset \mathrm{A}$ et f et g homotopes relativement à A alors f et g sont homotopes relativement à A'. En effet, une homotopie relative à A de f à g est une homotopie relative à A de f à g.

Remarque 6 — Réflexivité. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue. Alors f est homotope à elle-même relativement à X. En effet, considérons l'application $\mathrm{H} : (x, t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \mapsto f(x) \in \mathrm{Y}$. Elle est continue et pour $x \in \mathrm{X}$ et $t \in \mathrm{I}$, on a

$$\mathrm{H}(x, 0) = \mathrm{H}(x, 1) = f(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{H}(x, t) = f(x) = f(x)\,;$$

Autrement dit, c'est une homotopie relative à X de f à f.

Par ailleurs, la deuxième propriété de la définition 2 montre que sur $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ la relation être homotope relativement à X n'est rien d'autre que la relation d'égalité.

Proposition 7 — Relation d'équivalence. Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X. La relation d'homotopie relativement à A est une relation d'équivalence sur $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Preuve. Soient $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue. D'après les remarques 6 et 5, f est homotope à f relativement à A et la relation est réflexive.

Soient $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ deux applications continues et H une homotopie relative à A de f à g. L'application $\widetilde{\mathrm{H}} : (x, t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \mapsto \mathrm{H}(x, 1 - t) \in \mathrm{Y}$ est continue. Pour $x \in \mathrm{X}$, $a \in \mathrm{A}$ et $t \in \mathrm{I}$, on a

$$\widetilde{\mathrm{H}}(x, 0) = \mathrm{H}(x, 1) = g(x), \quad \widetilde{\mathrm{H}}(x, 1) = \mathrm{H}(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathrm{H}}(a, t) = \mathrm{H}(a, 1 - t) = f(a) = g(a)\,;$$

Autrement dit $\widetilde{\mathrm{H}}$ est une homotopie relative à A de g à f et la relation est symétrique.

Soient $f, g, h : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ trois applications continues, H une homotopie relative à A de f à g et H' une homotopie relative à A de g à h. L'application

$$\widetilde{\mathrm{H}} : \begin{cases} \mathrm{X} \times \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{Y} \\ (x, t) \longmapsto \begin{cases} \mathrm{H}(x, 2t) & \text{si } \ 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ \mathrm{H}'(x, 2t - 1) & \text{si } \ 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \end{cases}$$

est bien définie et continue. En effet, en chacun des points $(x, 1/2)$, l'application est définie de deux manières. Mais ces deux manières coïncident $\widetilde{\mathrm{H}}(x, 1/2) = \mathrm{H}(x, 1) = g(x) = \mathrm{H}'(x, 0) = \widetilde{\mathrm{H}}(x, 1/2)$. De plus, pour $x \in \mathrm{X}$, on a

$$\widetilde{\mathrm{H}}(x, 0) = \mathrm{H}(x, 0) = f(x), \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathrm{H}}(x, 1) = \mathrm{H}'(x, 1) = h(x)\,.$$

Par ailleurs, pour $t \in [\,0\,, 1/2\,]$, $u \in [\,1/2\,, 1\,]$ et $a \in \mathrm{A}$, on a

$$\widetilde{\mathrm{H}}(a, t) = \mathrm{H}(a, 2t) = f(a) = g(a) = h(a) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\mathrm{H}}(a, u) = \mathrm{H}'(a, 2u - 1) = h(a) = g(a) = f(a)\,;$$

Autrement dit $\widetilde{\mathrm{H}}$ est une homotopie relative à A de f à h et la relation est transitive.

Notation 8 — Classe d'équivalence. Soient X, Y deux espaces topologiques. On note $[\,\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,]_{\mathrm{A}}$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ pour la relation être homotope relativement à A. Ainsi, $[\,\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,]_{\mathrm{A}}$ un quotient de $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Application 9 — Restriction. Soient X, Y deux espaces topologiques, A une partie de X et $f, g : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ deux applications continues. Si f et g sont homotopes relativement à A alors les restrictions à A de f et g coïncide. Autrement dit, l'application

$$\mathrm{Rest}\colon \begin{cases} \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathrm{A}, \mathrm{Y}) \\ \quad f \qquad \longmapsto f_{|\mathrm{A}} \end{cases}$$

passe au quotient par la relation d'homotopie. Grâce à la propriété universelle du quotient, elle définit une application $\overline{\mathrm{Rest}} : [\,\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,] \to \mathscr{C}(\mathrm{A}, \mathrm{Y})$ telle que $\mathrm{Rest} = \overline{\mathrm{Rest}} \circ \pi$. On en déduit que pour $h \in \mathscr{C}$ l'ensemble

$$\{f \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}), \quad \mathrm{Rest}(f) = h\} = \mathrm{Rest}^{-1}(h) = \pi^{-1}(\overline{\mathrm{Rest}}^{-1}(h))$$

est une réunion de classe d'homotopie relativement à A (c'est-à-dire un ensemble saturé pour la relation d'homotopie relative à A) puisqu'il est de la forme $\pi^{-1}(\mathrm{W})$. On note alors $[\,\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,]_{\mathrm{A},h}$ l'espace quotient de $\mathrm{Rest}^{-1}(h)$ par la relation d'homotopie relative à A. Ce sont les classes d'homotopies relativement à A des fonctions égales à h sur A. Il s'identifie à un sous ensemble de $[\,\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,]_{\mathrm{A}}$.

Exemple 10 — Chemins. Soit X un espace topologique. On dit que $c : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ est un chemin dans X si c est une application continue. Le point $c(0)$ s'appelle l'origine de c, $c(1)$ son extrémité de c.

Soient c et c' deux chemins dans X. On dit que c et c' sont des chemins homotopes s'ils sont homotopes dans $\mathscr{C}(\mathrm{I}, \mathrm{X})$ relativement à $\{0, 1\}$ c'est-à-dire s'il existe une application $\mathrm{H} : \mathrm{I} \times \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ telle que

$$\forall\, s \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{H}(s, 0) = c(s), \qquad \mathrm{H}(s, 1) = c'(s)\,,$$

$$\forall\, t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{H}(0, t) = c(0) = c'(0) \qquad \text{et} \qquad \forall\, t \in \mathrm{I}, \qquad \mathrm{H}(1, t) = c(1) = c'(1)\,.$$

La proposition 7 montre alors que cette relation est une relation d'équivalence.

Par ailleurs, se donner une application continue h de $\{0, 1\}$ dans X revient simplement à se donner les images de 0 et 1. Pour la fonction continue $h : \{0, 1\} \to \mathrm{X}$ définie par $h(0) = x$ et $h(1) = y$. On note plutôt $\pi_1(\mathrm{X}, x, y)$ l'ensemble $[\mathrm{I}, \mathrm{X}]_{\{0,1\},h}$ c'est-à-dire l'ensemble des classes d'homotopie de chemins d'origine x et d'extrémité y.

Corollaire 11 — L'homotopie est une relation d'équivalence. Soient X, Y deux espaces topologiques. La relation d'homotopie est une relation d'équivalence sur $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la remarque 4 et la proposition 7 à $\mathrm{A} = \varnothing$.

Notation 12 — Classe d'équivalence. Soient X, Y deux espaces topologiques. On note $[\,\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,]$ (plutôt que $[\,\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,]_{\varnothing}$) l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ pour la relation être homotope. Ainsi, $[\,\mathrm{X}\,, \mathrm{Y}\,]$ un quotient de $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

La proposition suivante permet de construire des homotopies entre applications.

Proposition 13 — Composition. Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, A une partie de X, B une partie de Y, $f_1, f_2 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ deux applications continues et $g_1, g_2 : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ deux applications continues. Si f_1 et f_2 sont homotopes relativement à A, g_1 et g_2 homotopes relativement à B et $f_1(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$ alors $g_1 \circ f_1$ est homotope à $g_2 \circ f_2$ relativement à A.

Preuve. Soient H une homotopie relative à A de f_1 à f_2 et H′ une homotopie relative à B de g_1 à g_2. On considère alors la fonction

$$\mathrm{H}''\colon \begin{cases} \mathrm{X} \times \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{Z} \\ (x, t) \longmapsto \mathrm{H}'(\mathrm{H}(x, t), t)\,. \end{cases}$$

Elle est continue par composition des fonctions H' et $(x,t) \mapsto (\mathrm{H}(x,t),t)$ (cette dernière étant continue car $(x,t) \mapsto t$ et $(x,t) \mapsto \mathrm{H}(x,t)$ le sont). De plus, pour $x \in \mathrm{X}$, on a

$$\mathrm{H}''(x,0) = \mathrm{H}'(\mathrm{H}(x,0),0) = g_1(\mathrm{H}(x,0)) = (g_1 \circ f_1)(x)$$

et

$$\mathrm{H}''(x,1) = \mathrm{H}'(\mathrm{H}(x,1),1) = g_2(\mathrm{H}(x,1)) = (g_2 \circ f_2)(x)\,.$$

Par ailleurs, pour $a \in \mathrm{A}$ et $t \in \mathrm{I}$, on a

$$\mathrm{H}''(a,t) = \mathrm{H}'(\mathrm{H}(a,t),t) = \mathrm{H}'(f_1(a),t) = \mathrm{H}'(f_2(a),t)\,.$$

Or $f_1(a) \in \mathrm{B}$ et H' est une homotopie relativement à B, on a $\mathrm{H}'(f_1(a),t) = g_1(f_1(a)) = g_2(f_1(a))$ et $\mathrm{H}'(f_2(a),t) = g_1(f_2(a)) = g_2(f_2(a))$. Finalement $\mathrm{H}''(a,t) = g_1(f_1(a)) = g_2(f_2(a))$. Ainsi H'' est bien une homotopie relativement à A de $g_1 \circ f_1$ à $g_2 \circ f_2$.

Remarque 14 Sous les hypothèses de la proposition 13, on a bien sûr $f_2(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$ puisque f_1 et f_2 coïncide sur A.

Exemple 15 – Chemin. Soient X un espace topologique et $c : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ un chemin. On définit le chemin inverse par $\overline{c} : t \mapsto c(1-t)$.

Si c et c' sont deus chemins dans X homotopes en tant que chemin alors $\overline{c}$ et $\overline{c'}$ sont deux chemins homotopes. En effet, l'application $t \in \mathrm{I} \mapsto 1-t \in \mathrm{I}$ est continue et homotope à elle-même relativment à $\{0,1\}$ d'après les remarques 6 et 5 Par ailleurs, elle envoie $\mathrm{A} = \{0,1\}$ dans l'ensemble $\mathrm{B} = \{0,1\}$. Comme c et c' sont homotopes relativement à B, la proposition 13 donne le résultat souhaité.

En suivant pas à pas les preuves de la remarque 6 et de la proposition 13, on constate que si H est un homotopie de c à c' alors $\overline{\mathrm{H}} : (s,t) \mapsto \mathrm{H}(1-s,t)$ est une homotopie est $\overline{c}$ à $\overline{c'}$ ce qui se vérifie bien sûr immédiatement.

Corollaire 16 – Composition. Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ trois espaces topologiques, A une partie de X, B une partie de Y, $f_1, f_2 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ deux applications continues et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ une application continue. Si f_1 et f_2 sont homotopes relativement à A alors $g \circ f_1$ et $g \circ f_2$ le sont aussi.

Preuve. L'application $(y,t) \in \mathrm{Y} \times \mathrm{I} \to g(y)$ est une homotopie de g à g relativement à Y. Comme $f_1(\mathrm{A}) \subset \mathrm{Y}$, la proposition 13 permet de conclure.

On se restreint à présent au cas de l'homotopie.

Corollaire 17 – Composition. Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ trois espaces topologiques, $f_1, f_2 : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ deux applications continues et $g_1, g_2 : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ deux applications continues. Si f_1 et f_2 sont homotopes et g_1 et g_2 sont homotopes alors $g_1 \circ f_1$ est homotope à $g_2 \circ f_2$.

Preuve. Comme $f_1(\varnothing) \subset \varnothing$, c'est une conséquence de la proposition 13 et de la remarque 4.

Application 18 – La catégorie Tophom. Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ trois espaces topologiques. Le corollaire 17 montre qu'il existe une application de composition notée $\circ$ de $[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \times [\mathrm{Y},\mathrm{Z}]$ dans $[\mathrm{X},\mathrm{Z}]$:

$$\circ : \begin{cases} [\mathrm{X},\mathrm{Y}] \times [\mathrm{Y},\mathrm{Z}] \longrightarrow [\mathrm{X},\mathrm{Z}] \\ \qquad (\varphi,\psi) \qquad \longmapsto \psi \circ \varphi\,. \end{cases}$$

En effet, si φ est la classe d'équivalence de $f_1 \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et ψ celle de $f_2 \in \mathscr{C}(\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ alors le corollaire 17 montre exactement que la classe d'homotopie que $g_1 \circ f_1 \in \mathscr{C}(\mathrm{X},\mathrm{Z})$ ne dépend ni du choix de f_1 dans φ ni du choix de g_1 dans ψ. Autrement dit, définir $\psi \circ \varphi$ comme la classe d'homotopie de $g_1 \circ f_1$ a bien un sens.

On note id_X l'identité de X mais aussi sa classe d'homotopie. Soient $\varphi \in [\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ et $f \in \varphi$. Comme $f \circ \mathrm{id}_\mathrm{X} = f$, on en déduit par définition de la composition sur $[\mathrm{X},\mathrm{X}] \times [\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ que $\varphi \circ \mathrm{id}_\mathrm{X} = \varphi$ pour tout $\varphi \in [\mathrm{X},\mathrm{Y}]$. De même $\mathrm{id}_\mathrm{Y} \circ f = f$, donc par définition de la composition sur $[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \times [\mathrm{Y},\mathrm{Y}]$ on a $\mathrm{id}_\mathrm{Y} \circ \varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in [\mathrm{X},\mathrm{Y}]$.

Soient T un quatrième espace topologique. On considère $\varphi_1 \in [\mathrm{X},\mathrm{Y}]$, $\varphi_2 \in [\mathrm{Y},\mathrm{Z}]$ et $\varphi_3 \in [\mathrm{Z},\mathrm{T}]$ et $f_i \in \varphi_i$ pour $i \in \{1,2,3\}$. Par définition de la composition, on a $f_2 \circ f_1 \in \varphi_2 \circ \varphi_1$. On en déduit que $\varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1)$ est la classe d'homotopie de $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$. De même, $f_3 \circ f_2 \in \varphi_3 \circ \varphi_2$ et donc $(\varphi_3 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1$ est la classe d'homotopie de $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$. On a donc $\varphi_3 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1) = (\varphi_3 \circ \varphi_2) \circ \varphi_1$.

Ainsi, on a montré que si l'on considère comme objet les espaces topologiques, comme morphisme de X dans Y l'ensemble $[\mathrm{X},\mathrm{Y}]$ et comme loi de composition $\circ$, on obtient une catégorie notée Tophom.

Définition 19 — Équivalence d'homotopie. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue. On dit que f est une équivalence d'homotopie s'il existe une application continue $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ telle que $g \circ f$ soit homotope à id_X et $f \circ g$ soit homotope à id_Y.

En terme catégorique, f est une équivalence d'homotopie si sa classe d'homotopie est un isomorphisme dans la catégorie Tophom.

Remarque 20 — Équivalence réciproque. On reprend les notations de la définition 19. L'application g est alors une équivalence d'homotopie.

Exemple 21 — Homéomorphisme. Soient X, Y deux espaces topologiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un homéomorphisme alors f est une équivalence d'homotopie. La réciproque est fausse (voir l'exemple 33)

Exemple 22 — Composition. Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ trois espaces topologiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ et $f' : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ deux équivalences d'homotopie. Montrons que $f' \circ f$ est une équivalence d'homotopie.

Par définition, il existe $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ (resp. $g' : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$) telle que $g \circ f$ et id_X (resp. $g' \circ f'$ et id_Y) soient homotopes et $f \circ g$ et id_Y (resp. $f' \circ g'$ et id_Z) soient homotopes. On considère alors $g'' = g \circ g' : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$. La propriété d'associativité (application 18) montre alors que la classe d'homotopie de $f' \circ f \circ g''$ est la composée des classes d'homotopie de f', de $f \circ g$ et de g'. Elle est donc homotope à $f' \circ \mathrm{id}_\mathrm{Y} \circ g'$ c'est-à-dire à $f' \circ g'$ ou encore à id_Z. De même, $g'' \circ f' \circ f$ est homotope à $g \circ \mathrm{id}_\mathrm{Y} \circ f$ c'est-à-dire à $g \circ f$ et donc à id_X.

En terme catégorique, c'est une conséquence du fait que la composée de deux isomorphismes soit un isomorphisme.

Définition 23 — Type d'homotopie. Soient X, Y deux espaces topologiques. On dit que X a le même type d'homotopie que Y s'il existe une équivalence d'homotopie $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.

En terme catégorie, X et Y ont le même type d'homotopie s'ils sont isomorphes dans Tophom.

Exemple 24 — Homéomorphisme. Soient X, Y deux espaces topologiques. L'exemple 21 montre que si X et Y sont homéomorphes alors X et Y ont même type d'homotopie. La réciproque est fausse (voir l'exemple 33).

En particulier, si X et Y sont deux singletons, ils ont même type d'homotopie.

Remarque 25 — Relation d'équivalence. Comme $\mathrm{Id}_\mathrm{X} : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ est un homéomorphisme, X a même type d'homotopie que X. D'après la remarque 20, si X a même type d'homotopie que Y alors Y a même type d'homotopie que X. Ce caractère symétrique incite à utiliser l'une des expressions X *et* Y *ont le même type d'homotopie* ou X *et* Y *sont homotopiquement équivalent* plutôt que X a le même type d'homotopie que Y. Enfin, l'exemple 22 montre que si X a même type d'homotopie que Y et Y même type d'homotopie que Z alors X a même type d'homotopie que Z.

On en conclut que la relation être homotopiquement équivalent est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques. Attention, pour des raisons logiques, on ne peut pas dire que la relation être homotopiquement équivalent est une relation d'équivalence puisque les ensembles ne forment pas un ensemble.

Exemple 26 — Ensemble vide. Une fonction à valeurs dans l'ensemble vide est nécessairement l'application vide dont l'espace de départ est l'ensemble vide. On en déduit que le seul espace topologique qui a même type d'homotopie que le vide est l'ensemble vide.

0.2 Espace contractile

Comme deux singletons ont le même type d'homotopie (exemple 24), l'expression « X a le même type d'homotopie qu'un point » a un sens. Ainsi dans cette sous-section, on s'intéresse aux espaces topologiques au type d'homotopie le plus simple : ceux qui ont le même type d'homotopie qu'un point.

Définition 27 — Espace contractile. Soient X un espace topologique. On dit que X est contractile s'il a le même type d'homotopie qu'un point.

Remarque 28 — Singleton. Soit X un singleton. Il existe sur X une unique topologie : c'est la topologie $\mathscr{T} = \{\varnothing, \mathrm{X}\}$ qui est à la fois la topologie grossière et la topologie discrète. Ainsi, toute application issue de X ou qui arrive dans X est continue. En particulier, si Y est un autre singleton, l'unique application de Y dans X est un homéomorphisme. L'exemple 24 et la remarque 25 montrent alors que si X a le même type qu'un point, il a le même type d'homotopie que tous les singletons.

La proposition suivante donne une caractérisation des espaces contractiles en terme de classe d'homotopie d'application.

Notation 29 — Applications constantes. Soient X, Y deux ensembles. Pour $y \in \mathrm{Y}$, on note $f_y : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ l'application constante égale à y.

Proposition 30 — Caractérisation des espaces contractiles. Soient X un espace topologique. Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) X est contractile ;
(ii) pour tout espace topologique Y, l'ensemble $[\mathrm{Y}, \mathrm{X}]$ est un singleton ;
(iii) X est non vide et $[\mathrm{X}, \mathrm{X}]$ possède un seul élément ;
(iv) X est non vide et pour tout $a \in \mathrm{X}$, l'application id_X est homotope à l'application constante f_a ;
(v) Il existe $a \in \mathrm{X}$ tel que id_X est homotope à l'application constante f_a.

Preuve. $(ii) \Rightarrow (iii)$. Avec $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, on obtient que $[\mathrm{X}, \mathrm{X}]$ est un singleton. Par ailleurs, comme $[\mathrm{Y}, \mathrm{X}] \neq \varnothing$ pour tout Y, on en déduit que $\mathscr{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) \neq \varnothing$ pour tout Y. En particulier, en prenant l'espace topologique $\mathrm{Y} = \{0\}$ réduit à un point (et donc muni de la topologie discrète). On en déduit que $\varnothing \neq \mathscr{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = \mathscr{F}(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = \mathrm{X}$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$. Soit $a \in \mathrm{X}$. Comme $[\mathrm{X}, \mathrm{X}]$ est un singleton, les images de id_X et f_a dans $[\,\mathrm{X}\,,\mathrm{X}\,]$ sont identiques. Autrement dit, id_X et f_a sont homotopes.
$(iv) \Rightarrow (v)$. Comme X est non vide, il existe $a \in \mathrm{X}$. L'application id_X et f_a sont alors homotopes.
$(v) \Rightarrow (i)$. Soient $a \in \mathrm{X}$ et $f_a : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ l'application constante égale à a. On considère alors l'application (continue) $g : \mathrm{X} \to \{a\}$ et l'inclusion (continue) $i : \{a\} \to \mathrm{X}$. Par définition, on a $f_a = i \circ g$. Ainsi, par hypothèse, $i \circ g$ est homotope à id_X. De plus, $g \circ i = \mathrm{id}_{\{a\}}$ est homotope à $\mathrm{id}_{\{a\}}$. Autrement dit, g est une équivalence d'homotopie entre X et $\{a\}$. On en déduit que X et $\{a\}$ ont le même type d'homotopie puis que X est contractile.
$(i) \Rightarrow (ii)$. Soit Y un espace topologique. On considère $\mathrm{P} = \{p\}$ un espace topologique réduit à un point tel que X soient homotope à P. Comme P est réduit à un point et que X est non vide (exemple 26), il existe une unique application f de X dans P : l'application constante égale à p. Comme X est homotope à P, l'application f est nécessairement une équivalence d'homotopie. On note alors $g : \mathrm{P} \to \mathrm{X}$ une application continue telle que $f \circ g$ et id_P soient homotopes et $g \circ f$ et id_X soient homotopes. Soit φ (resp. ψ) la classe d'homotopie de f (resp. g) dans $[\,\mathrm{X}\,,\mathrm{P}\,]$ (resp. $[\,\mathrm{P}\,,\mathrm{X}\,]$). L'application 18 montre alors que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_\mathrm{P}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_\mathrm{X}$ et que les applications

$$\mu_\varphi : \begin{cases} [\,\mathrm{Y}\,,\mathrm{X}\,] \longrightarrow [\,\mathrm{Y}\,,\mathrm{P}\,] \\ \quad \gamma \quad \longmapsto \varphi \circ \gamma \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mu_\psi : \begin{cases} [\,\mathrm{Y}\,,\mathrm{P}\,] \longrightarrow [\,\mathrm{Y}\,,\mathrm{X}\,] \\ \quad \gamma \quad \longmapsto \psi \circ \gamma \end{cases}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Comme P est un singleton, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathrm{Y}, \mathrm{P}) = \mathscr{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{P})$ est un singleton et donc en passant au quotient $[\,\mathrm{Y}\,,\mathrm{P}\,]$ est lui-aussi réduit à un point. Finalement $[\,\mathrm{Y}\,,\mathrm{X}\,]$ est un singleton.

Remarque 31 — Objet final. En terme catégorique, le (ii) est synonyme de X est un objet final dans la catégorie Tophom.

Remarque 32 — Singleton. La proposition 30 est à rapprocher de la caractérisation des singletons en terme topologique : soit X un espace topologique ; les propositions suivantes sont équivalentes

(i) X est un singleton ;
(ii) pour tout espace topologique Y, $\mathscr{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ est un singleton ;
(iii) X est non vide et $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ est réduit à un point ;
(iv) id_X est une application constante.

Exemple 33 — Quelques espaces contractiles. Soient E un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{R}$ (par exemple un espace vectoriel normé) et X un sous-ensemble de E étoilé par rapport à l'un de ses points $\{a\}$. L'ensemble X est contractile. En effet, l'application $\mathrm{F} : (x, t) \in \mathrm{X} \times \mathrm{I} \to x + t(a - x) \in \mathrm{X}$ est une homotopie de id_X à l'application constante égale à a. La proposition 30 donne alors le résultat. Remarquez que l'hypothèse géométrique sur X d'être étoilé sert à montrer que l'application F est à valeurs dans X. Ainsi, tous les convexes (non vides) de E sont contractiles (puisqu'étoilé par rapport à chacun de leur point). En particulier, si E est un espace vectoriel normé, les boules ouvertes et fermés sont contractiles. De même, un cône de E étant étoilé par rapport à son sommet est contractile.

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{R}^n$ est contractile car il est convexe. Ainsi, pour $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^n$ a le même type d'homotopie qu'un point alors qu'il n'est pas homéomorphe à un point. En particulier, il existe une équivalence d'homotopie de $\mathbb{R}^n$ sur $\{0\}$ qui n'est donc pas un homéomorphisme (voir les exemples 21 et 24).

Exemple 34 — Cône d'un espace topologique. Soit X un espace topologique. Alors son cône C(X) est contractile. Soient $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence sur $\mathrm{X}\times\mathrm{I}$ définissant C(X) et $\pi : \mathrm{X}\times\mathrm{I}\to\mathrm{C(X)}$ la surjection canonique. On note $\mathrm{S}=\pi(x,0)$ le sommet du cône. L'application

$$\mathrm{H}\colon \begin{cases} \mathrm{C(X)}\times\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{C(X)} \\ (\pi(x,t),s) \longmapsto \pi(x,st) \end{cases}$$

est une homotopie de $\mathrm{id_X}$ à l'application constante égale à S. Montrons qu'elle est bien définie. $\mathrm{C(X)}\times\mathrm{I}$ s'identifie à l'espace quotient $(\mathrm{X}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I})/(\mathscr{R}\times=)$ (vrai car I compact donc localement compact (cf. poly Audin exo II.10)). L'application $f : (x,t,s)\in\mathrm{X}\times\mathrm{I}\times\mathrm{I}\to\pi(x,st)$ est alors continue est passe au quotient par $\mathscr{R}'=\mathscr{R}\times=$ puisque $(x,t,s)\mathscr{R}'(x',t',s')$ implique $s=s'$ et $(x,t)\mathscr{R}(x',t')$ c'est-à-dire $t=t'=0$ ou ($t=t'$ et $x=x'$). Dans le premier cas, on a $f(x,t,s)=\pi(x,0)=\mathrm{S}=\pi(x',0)=f(x',t',s')$. Dans le deuxième cas, $x=x'$, $t=t'$ et $s=s'$. Ainsi, par passage au quotient, on obtient l'application continue H. On a $\mathrm{H}(\pi(x,t),1)=\pi(x,t)$ et $\mathrm{H}(\pi(x,t),0)=\pi(x,0)=\mathrm{S}$.

0.2.1 Propriété des espaces contractiles.

Lemme 35 — Homotopie et espace connexe par arcs. Soit X un espace topologique. Alors X est connexe par arcs si et seulement si pour tous $a,b\in\mathrm{X}$, les applications constantes $f_a:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ et $f_b:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ sont homotopes.

Preuve. **(⇒)** Soit H est un homotopie de f_a à $f_b$le. Pour $x\in\mathrm{X}$, l'application $t\mapsto\mathrm{H}(x,t)$ est un chemin de a à b (c'est la composée des applications continues $t\mapsto(x,t)$ et H).
(⇐) Soit $c:\mathrm{I}\to\mathrm{X}$ un chemin de a à b. L'application

$$\mathrm{H}\colon \begin{cases} \mathrm{X}\times\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{X} \\ (x,t) \longmapsto c(t) \end{cases}$$

est une application continue (c'est la composée de c et p_1). C'est une homotopie de f_a à f_b.

Proposition 36 — Espace contractile et simplement connexe. Soit X un espace contractile. L'espace X est simplement connexe, connexe par arcs et connexe.

Preuve. Comme $\left[\mathbb{S}^1,\mathrm{X}\right]$ est réduit à un singleton (proposition 30(*iii*)), la proposition **??** assure que X est simplement connexe. Il est donc connexe par arcs et connexe.

Une « autre » démonstration de la connexité par arcs. Soient $a,b\in\mathrm{X}$. Les applications constantes f_a et f_b sont homotopes (proposition 30(*iii*)). Le lemme 35 montre que X est connexe par arcs et donc connexe. (En fait, cette démonstration se retrouve dans la démonstration de la proposition **??**).

Lemme 37 — Homotopie et composante connexe par arcs. Soit $\mathrm{P}=\{\mathrm{pt}\}$ un singleton et X un espace topologique. L'application

$$\begin{cases} [\mathrm{P},\mathrm{X}] \longrightarrow \pi_0^a(\mathrm{X}) \\ f_x \longmapsto \pi_x^a \end{cases}$$

est une bijection.

Preuve. En effet, l'application $x\mapsto f_x$ est une bijection de X sur $\mathscr{C}(\mathrm{P},\mathrm{X})=\mathscr{F}(\mathrm{P},\mathrm{X})$. De plus, il existe un chemin γ de x à y si et seulement si il existe une homotopie de f_x à f_y. On obtient ainsi le résultat voulu par passage au quotient de la bijection $x\mapsto f_x$.

Soit $c:\mathrm{I}\to\mathrm{X}$ tel que $c(0)=x$ et $\gamma(1)=y$. L'application

$$\mathrm{H}\colon \begin{cases} \mathrm{P}\times\mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{X} \\ (\mathrm{pt},t) \longmapsto c(t) \end{cases}$$

est continue (composé de p_1 et c). De plus, $\mathrm{H}(\mathrm{pt},0)=x$ et $\mathrm{H}(\mathrm{pt},1)=y$. Ainsi H est une homotopie de f_x à f_y.

Réciproquement, si H est une homotopie de f_x à f_y. L'application $c:t\mapsto\mathrm{H}(\mathrm{pt},t)$ est continue (composé de $t\mapsto(\mathrm{pt},t)$ et H) et vérifie $c(0)=x$ et $c(1)=y$.

Deuxième démonstration. L'application $p_1:\mathrm{P}\times\mathrm{I}\to\mathrm{I}$ est un homéomorphisme dont la bijection réciproque est $t\mapsto(\mathrm{pt},t)$ et envoie $(\mathrm{pt},0)$ sur 0 et $(\mathrm{pt},1)$. Ainsi se donner une application continue H de $\mathrm{P}\times\mathrm{I}$ dans X telle que $\mathrm{H}(\mathrm{pt},0)=x$ et $\mathrm{H}(\mathrm{pt},1)=y$ revient à se donner une application continue c de I dans X telle que $c(0)=x$ et $c(1)=y$.

Proposition 38 Soient X un espace topologique. Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) X est contractile ;

(ii) X est connexe par arc et, pour tout espace topologique Z non vide connexe par arcs, l'ensemble $[\mathrm{X}, \mathrm{Z}]$ est un singleton.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$. D'après la proposition 36, X est connexe par arcs. Soit Z un espace topologique. On considère $\mathrm{P} = \{p\}$ un espace topologique réduit à un point tel que X soient homotope à P. Comme P est réduit à un point et que X est non vide (exemple 26), il existe une unique application f de X dans P : l'application constante égale à p. Comme X est homotope à P, l'application f est nécessairement une équivalence d'homotopie. On note alors $g : \mathrm{P} \to \mathrm{X}$ une application continue telle que $f \circ g$ et id_P soient homotopes et $g \circ f$ et id_X soient homotopes. Soit φ (resp. ψ) la classe d'homotopie de f (resp. g) dans $[\,\mathrm{X}\,,\mathrm{P}\,]$ (resp. $[\,\mathrm{P}\,,\mathrm{X}\,]$). L'application 18 montre alors que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_\mathrm{P}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_\mathrm{X}$ et que les applications

$$\mu_\varphi : \begin{cases} [\,\mathrm{X}\,,\mathrm{Z}\,] \longrightarrow [\,\mathrm{P}\,,\mathrm{Z}\,] \\ \gamma \quad \longmapsto \gamma \circ \psi \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mu_\psi : \begin{cases} [\,\mathrm{P}\,,\mathrm{Z}\,] \longrightarrow [\,\mathrm{X}\,,\mathrm{Z}\,] \\ \gamma \quad \longmapsto \gamma \circ \varphi \end{cases}$$

sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Comme P est un singleton, l'ensemble $[\,\mathrm{P}\,,\mathrm{Z}\,]$ est en bijection avec les composantes connexes par arcs de X (lemme 37). Pour Z connexe par arcs et non vide, l'ensemble des composantes connexes par arcs de X est réduit à un point. Ainsi, si Z connexe par arcs et non vide, $[\,\mathrm{P}\,,\mathrm{Z}\,]$ est lui-aussi réduit à un point. Finalement $[\,\mathrm{X}\,,\mathrm{Z}\,]$ est un singleton.
$(ii) \Rightarrow (i)$. En prenant $\mathrm{Z} = \{p\}$ un singleton, on obtient que $[\mathrm{X}, \mathrm{Z}] \neq \varnothing$. D'où $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \neq \varnothing$ et $\mathrm{X} \neq \varnothing$. Avec $\mathrm{Z} = \mathrm{X}$ et la proposition 30(iii), on obtient le résultat souhaité.

Remarque 39 L'existence d'un espace topologique tel que $[\,\mathrm{Y}\,,\mathrm{X}\,]$ soit un singleton n'assure pas que X est contractile. En effet, pour tout espace topologique X non vide, $[\,\varnothing\,,\mathrm{X}\,]$ est un singleton. Mais X n'est pas forcément contractile puisqu'il existe des espaces qui ne sont pas connexe et donc pas contractile.

L'existence d'un espace Z non vide connexe par arcs tel que $[\,\mathrm{X}\,,\mathrm{Z}\,]$ soit un singleton ne suffit pas à assurer que X soit contractile. En effet, pour tout espace topologique X non vide, $[\,\mathrm{X}\,,\{p\}\,]$ est un singleton mais X n'est pas forcément contractile puisqu'il existe des espaces non vide qui ne sont pas connexe et donc pas contractile.

0.2.2 Rétraction

Définition 40 — Rétraction. Soient X un espace topologique, Y un sous-espace de X et $i : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ l'inclusion.

On dit qu'une application $r : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une rétraction de X sur Y si r est continue et $r \circ i = \mathrm{id}_\mathrm{Y}$.

On dit qu'une application $r : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une rétraction par déformation de X sur Y si r est une rétraction et $i \circ r$ homotope à id_X.

On dit qu'une application $r : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une rétraction par déformation forte de X sur Y si r est une rétraction et $i \circ r$ homotope à id_X relativement à Y.

On dit que Y est un rétracte de X s'il existe une rétraction de X sur Y.

On dit que Y est un rétracte par déformation de X s'il existe une rétraction par déformation de X sur Y.

On dit que Y est un rétracte par déformation forte de X s'il existe une rétraction par déformation forte de X sur Y.

Remarque 41 Si Y est un rétracte par déformation forte de X alors Y est un rétracte par déformation de X (remarque 5 et 4). Si Y est un rétracte par déformation de X alors Y est un rétracte de X.

Si Y est un rétracte par déformation de X alors i est une équivalence d'homotopie entre Y et X. En effet, si $r : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une rétraction par déformation de X sur Y alors $i \circ r$ est homotope à id_X et $r \circ i = \mathrm{id}_\mathrm{Y}$.

Proposition 42 — Prolongement d'une application. Soient $n \in \mathbb{N}$ et X un espace topologique. On note $\mathbb{S}^n$ (resp. $\mathbb{B}^{n+1}$) la sphère unité (resp. boule unité fermée) de $\mathbb{R}^{n+1}$. On considère une application $f : \mathbb{S}^n \to \mathrm{X}$.

L'application f se prolonge en une application continue $g : \mathbb{B}^{n+1} \to \mathrm{X}$ si et seulement si f est homotope à une application constante.

Preuve. **(⇒)** On considère l'application

$$\mathrm{H} : \begin{cases} \mathbb{S}^n \times \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{X} \\ (x,t) \longmapsto g(tx) \end{cases}$$

qui est continue (comme composée de $(x,t) \mapsto tx \in \mathbb{B}^{n+1}$ et de g). On a $\mathrm{H}(x,0) = g(0)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$ et $\mathrm{H}(x,1) = g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{S}^n$. Ainsi H est une homotopie de f à l'application constante $g(0)$.
(⇐) Soit H une homotopie de f à l'application constante f_a. On considère l'application

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{B}^{n+1} \longrightarrow \mathrm{X} \\ x \longmapsto \begin{cases} a & \text{si } 0 \leqslant \|x\| \leqslant 1/2 \\ \mathrm{H}(x/\|x\|,\, 2-2\|x\|) & \text{si } 1/2 \leqslant \|x\| \leqslant 1\,. \end{cases} \end{cases}$$

Montrons que g est bien définie et continue. Pour $\|x\| = 1/2$, on a bien $\mathrm{H}(2x, 1) = a$. Ainsi g est bien continue. Elle est évidemment continue (puisque constante) sur l'ensemble $0 \leqslant \|x\| \leqslant 1/2$. Elle l'est aussi sur l'ensemble $1/2 \leqslant \|x\| \leqslant 1$ puisque $x \mapsto x/\|x\| \in \mathbb{S}^n$ est continue et $x \mapsto 2 - 2\|x\| \in \mathrm{I}$ le sont. Ainsi $x \mapsto (x/\|x\|, 2-2\|x\|) \in \mathbb{S}^1 \times \mathrm{I}$ est continue et par composition g est continue sur l'ensemble $1/2 \leqslant \|x\| \leqslant 1$. Le théorème du prolongement donne alors la continuité de g. Enfin pour $x \in \mathbb{S}^n$, on a $g(x) = \mathrm{H}(x, 0) = f(x)$ et g est bien un prolongement de f.

0.3 Connexité, Locale connexité

Définition 43 — Application localement constante. Soient X un espace topologique et Y un ensemble et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application. On dit que f est localement constante si, pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe un voisinage V_x de x tel que $f_{|\mathrm{V}_x}$ est constante.

Lemme 44 — Continuité et application localement constante. Soient X un espace topologique et Y un ensemble et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application localement constante. Alors, pour toute topologie sur Y, l'application f est continue.

Soient X un espace topologique et Y un ensemble et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application. On note $\mathrm{Y}^{\mathrm{disc}}$ l'espace topologique obtenu en mettant sur Y la topologique discrète. L'application f est localement constante si et seulement si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}^{\mathrm{disc}}$ est continue.

Preuve. Soit $\mathscr{T}$ une topologie sur Y et $\mathrm{Z} \in \mathscr{T}$, on a

$$f^{-1}(\mathrm{Z}) = \bigcup_{z \in \mathrm{Z}} f^{-1}(z).$$

De plus, $f^{-1}(z)$ est ouvert. En effet, si $x \in f^{-1}(z)$, on a $f(x) = z$, il existe donc un voisinage V_x de x tel que pour tout $y \in \mathrm{V}_x$, on ait $f(y) = z$. Ainsi $\mathrm{V}_x \subset f^{-1}(z)$. On en déduit que $f^{-1}(z)$ est un voisinage de x. Finalement $f^{-1}(z)$ est voisinage de chacun de ses points donc $f^{-1}(z)$ est ouvert. Par réunion, $f^{-1}(\mathrm{Z})$ est ouvert. Ainsi f est continue.

(⇒) Il s'agit de ce qui précède.

(⇐) Soit $x \in \mathrm{X}$. L'ensemble $\{f(x)\}$ est ouvert dans Y. Donc, par continuité, $\mathrm{V}_x = f^{-1}(f(x))$ est un ouvert de X contenant x et $f_{|\mathrm{V}_x}$ est constante égale à $f(x)$. Ainsi f est localement constante.

Proposition-Définition 45 — Connexité. Soit X un espace topologique. Les propositions suivantes sont équivalentes

- (i) Pour tout couple (A, B) d'ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$, on a $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$.
- (ii) Pour tout couple (A, B) d'ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$, on a $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{X}$.
- (iii) Il n'existe pas de partition de X en des ensembles ouverts de X.
- (iv) Pour tout couple (A, B) de fermés de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$, on a $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$.
- (v) Pour tout couple (A, B) de fermés de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$, on a $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{X}$.
- (vi) Pour tout espace topologique discret Y et toute application continue $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, l'application f est constante.
- (vii) Il existe un espace topologique discret Y non réduit à un point telle que toute application continue $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est constante.
- $(viii)$ Pour tout ensemble Y et toute application localement constante $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, l'application f est constante.
- (ix) Il existe un ensemble Y non réduit à un point telle que toute application localement constante $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est constante.
- (x) Pour tout sous-ensemble A de X qui est à la fois ouvert et fermé dans X, on a $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{A} = \varnothing$.

Si X vérifie ces propriétés, on dit que X est connexe.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$. Soient A, B deux ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. on a $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$. Comme $\mathrm{B} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}$, on en déduit que $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{X}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Soient A, B deux ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. on a $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{B} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}$, on en déduit que $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$.

Rappel. Une partition d'un ensemble Z est un ensemble formé d'au moins deux éléments de sous-ensembles non vides de Z deux à deux disjoints dont la réunion est X.
$(i) \Rightarrow (iii)$. Soient P une partition de X en ensembles ouverts. Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{P}$ et $\mathrm{B} = \cup_{\mathrm{W}\in\mathrm{P},\, \mathrm{W}\neq\mathrm{U}}\mathrm{W}$. Comme P est une partition, A et B vérifient $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \varnothing$. Comme P est formé d'ensembles ouverts, on en déduit que V est ouvert. Ainsi $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$. Or P est une partition donc $\mathrm{A} \neq \varnothing$ et $\{\mathrm{W} \in \mathrm{P},\ \mathrm{W} \neq \mathrm{U}\} \neq \varnothing$, d'où $\mathrm{B} \neq \varnothing$. On aboutit donc à une contradiction.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Soient A, B deux ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. Si $\mathrm{A} \neq \varnothing$ et $\mathrm{B} \neq \varnothing$ alors $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ est une partition de X en ensembles ouverts. Donc $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$.
$(i) \Rightarrow (iv)$. Soient A, B deux fermés de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{B} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}$, on en déduit que A et B sont ouverts donc $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$.
$(iv) \Rightarrow (i)$. Soient A, B deux ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{B} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}$, on en déduit que A et B sont fermés donc $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$.
$(ii) \Rightarrow (v)$. Soient A, B deux fermés de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{B} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}$, on en déduit que A et B sont ouverts donc $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{X}$.
$(v) \Rightarrow (ii)$. Soient A, B deux ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{B} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{A}$ et $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}$, on en déduit que A et B sont ouverts donc $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{X}$.
$(iii) \Rightarrow (vi)$. Soit Y un espace topologique discret et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ continue. Pour $y \in \mathrm{Y}$, l'ensemble $\{y\}$ est donc ouvert dans Y. Ainsi $f^{-1}(y)$ est un ouvert de X. De plus, on a bien sûr, pour $y, z \in \mathrm{Y}$

$$y \neq z \implies f^{-1}(y) \cap f^{-1}(z) = f^{-1}(\{y\} \cap \{z\}) = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X} = \bigsqcup_{y\in\mathrm{Y}} f^{-1}(y)\,.$$

Ainsi si f n'est pas constante, il existe $y, z \in \mathrm{Y}$ tel que $f^{-1}(y) \neq \varnothing$ et $f^{-1}(z) \neq \varnothing$. L'ensemble

$$\left\{f^{-1}(y),\ y \in \mathrm{Y},\ f^{-1}(y) \neq \varnothing\right\}$$

est donc une partition de X en ensembles ouverts ce qui est une contradiction. Donc f est constante.
$(vii) \Rightarrow (vii)$. Il suffit de considérer l'ensemble $\mathrm{Y} = \{0, 1\}$ et de le munir de la topologie discrète.
$(vi) \Rightarrow (i)$. Soient A, B deux ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. On considère $y_1, y_2 \in \mathrm{Y}$ avec $y_1 \neq y_2$. On définit alors f par $f(x) = y_1$ si $x \in \mathrm{A}$ et $f(x) = y_2$ si $x \in \mathrm{B}$. Montrons que f est continue. Soit $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$, on a $f^{-1}(\mathrm{Z}) = \mathrm{A}$ si $y_1 \in \mathrm{Z}$ et $y_2 \notin \mathrm{Z}$; $f^{-1}(\mathrm{Z}) = \mathrm{B}$ si $y_1 \notin \mathrm{Z}$ et $y_2 \in \mathrm{Z}$; $f^{-1}(\mathrm{Z}) = \mathrm{X}$ si $y_1 \in \mathrm{Z}$ et $y_2 \in \mathrm{Z}$; $f^{-1}(\mathrm{Z}) = \varnothing$ si $y_1 \notin \mathrm{Z}$ et $y_2 \notin \mathrm{Z}$. Comme A et B sont ouverts, $f^{-1}(\mathrm{Z})$ est ouvert pour tout $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Y}$. Ainsi f est continue donc constante. D'où $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$.

$(vi) \Leftrightarrow (viii)$. et $(vii) \Leftrightarrow (ix)$. sont des conséquences directes du lemme 44.
$(i) \Rightarrow (x)$. . Si A est ouvert et fermé dans X alors $\mathrm{B} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{A}$ est aussi ouvert (et fermé) dans X et vérifie $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. On en déduit que $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$. Ainsi $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{A} = \mathrm{X}$.
$(x) \Rightarrow (i)$. Soient A, B deux ouverts de X vérifiant $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{X}$. on a $\mathrm{A} = {}^{\mathrm{c}}\mathrm{B}$. Donc A est ouvert et fermé. Donc $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{A} = \mathrm{X}$. Ainsi $\mathrm{A} = \varnothing$ ou $\mathrm{B} = \varnothing$.