Corrigé

Corrigé – Espace euclidien de matrices.

a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Il s'agit de montrer que

$$\begin{aligned} &(i)\ \mathrm{tr}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) + \mathrm{tr}\,(\mathrm{B}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\,(\lambda\mathrm{A}) = \lambda\mathrm{tr}\,(\mathrm{A})\,; \\ &(ii)\ {}^t(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad {}^t(\lambda\mathrm{A}) = \lambda\,{}^t\mathrm{A}\,; \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ et $\lambda\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} &(i)\ \mathrm{tr}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = (a+e)+(d+h) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\,(\lambda\mathrm{A}) = (\lambda a + \lambda d)\,; \\ &(ii)\ {}^t(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad {}^t(\lambda\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} &(i)\ \mathrm{tr}\,\mathrm{A} + \mathrm{tr}\,\mathrm{B} = (a+d)+(e+h) \qquad \text{et} \qquad \lambda\mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = \lambda(a+d)\,; \\ &(ii)\ {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda\,{}^t\mathrm{A} = \lambda \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui donne bien les égalités voulues.

b) « Une méthode rapide ». L'application *produit* $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \mapsto \mathrm{AB}$ est bilinéaire et l'application tr est linéaire. Leur composée est $\langle\cdot,\cdot\rangle$ qui est donc bilinéaire.

« La méthode classique ». Il s'agit de montrer la linéarité par rapport à chacune des variables c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &(i)\ \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)\mathrm{B}) = \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A}_1)\mathrm{B}) + \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A}_2)\mathrm{B}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\,({}^t(\lambda\mathrm{A})\mathrm{B}) = \lambda\mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A})\mathrm{B})\,; \\ &(ii)\ \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A})(\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2)) = \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A})\mathrm{B}_1) + \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A})\mathrm{B}_2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A})(\lambda\mathrm{B})) = \lambda\mathrm{tr}\,({}^t\mathrm{A})\mathrm{B}\,; \end{aligned}$$

Or la linéarité de l'application Transposée assure que

$${}^t(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2)\mathrm{B} = ({}^t(\mathrm{A}_1) + {}^t(\mathrm{A}_2))\mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad {}^t(\lambda\mathrm{A})\mathrm{B} = \lambda\,{}^t(\mathrm{A})\mathrm{B}.$$

Par ailleurs, on a $$({}^t(\mathrm{A}_1) + {}^t(\mathrm{A}_2))\mathrm{B} = {}^t(\mathrm{A}_1)\mathrm{B} + {}^t(\mathrm{A}_2)\mathrm{B}.$$

La linéarité de l'application tr assure alors la linéarité de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par rapport à la première variable. De plus,

$${}^t(\mathrm{A})(\mathrm{B}_1+\mathrm{B}_2) = {}^t(\mathrm{A})\mathrm{B}_1 + {}^t(\mathrm{A})\mathrm{B}_2 \qquad \text{et} \qquad {}^t(\mathrm{A})(\lambda\mathrm{B}) = \lambda\,{}^t(\mathrm{A})\mathrm{B}\,;$$

ainsi la linéarité de tr assure que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire par rapport à la seconde variable. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire par rapport à chacune des variables donc bilinéaire.

c) Soit $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On a ${}^t\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et donc

$${}^{t\,t}\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\,({}^t\mathrm{A}) = a+d = \mathrm{tr}\,(\mathrm{A}).$$

Si $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, alors

$$\mathrm{AB} = \begin{bmatrix} ae+bg & ce+dg \\ af+bh & cf+dh \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad {}^t\mathrm{B}\,{}^t\mathrm{A} = \begin{bmatrix} ea+gb & fa+hb \\ ec+gd & fc+hd \end{bmatrix} = {}^t(\mathrm{AB}).$$

d) Il s'agit de montrer que $\mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A})\mathrm{B}) = \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{B})\mathrm{A})$. D'après la question **c**, on a

$$\mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A})\mathrm{B}) = \mathrm{tr}\,({}^t({}^t(\mathrm{A})\mathrm{B})) = \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{B})\,{}^{t\,t}(\mathrm{A})) = \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{B})\mathrm{A}).$$

e) D'après les questions **b** et **d**, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire symétrique. Il s'agit donc de montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est défini positif c'est-à-dire

(i) $\mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{A})\mathrm{A}) \geqslant 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$;

(ii) $\operatorname{tr}({}^t(\mathrm{A})\mathrm{A}) = 0 \iff \mathrm{A} = 0$.

Or
$$ {}^t(\mathrm{A})\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a^2+c^2 & * \\ * & b^2+d^2 \end{bmatrix}. $$

Les $*$ désignent des coefficients que l'on a pas besoin de calculer puisque c'est $\operatorname{tr}({}^t(\mathrm{A})\mathrm{A})$ qui nous intéresse. Comme une somme de carrés est positive et ne s'annule que si chacun des carrés est nul, on a
$$ \operatorname{tr}({}^t(\mathrm{A})\mathrm{A}) = a^2+c^2+b^2+d^2 \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}({}^t(\mathrm{A})\mathrm{A}) = 0 \iff a=c=b=d=0 \iff \mathrm{A}=0. $$
Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est défini positif. De plus, on a $\|\mathrm{A}\| = \sqrt{\langle \mathrm{A},\mathrm{A}\rangle} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$.

f) D'après la définition de l'orthogonal, on a
$$ \mathfrak{sl}_2 = \Big\{\mathrm{A}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \qquad \operatorname{tr}({}^t(\mathrm{Id}_2)\mathrm{A}) = 0\Big\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{S}_2 = \Big\{\mathrm{A}\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \qquad \operatorname{tr}({}^t(\mathrm{C})\mathrm{A}) = 0\Big\}. $$
Ainsi $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}_2 \iff \operatorname{tr}(\mathrm{A}) = a+d = 0$, d'où
$$ \mathfrak{sl}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \qquad a,b,c\in\mathbb{R}\right\}. $$
Par ailleurs $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{S}_2 \iff \operatorname{tr}(\begin{bmatrix} -c & -d \\ a & b \end{bmatrix}) = -c+b = 0$, d'où
$$ \mathscr{S}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}, \qquad a,b,d\in\mathbb{R}\right\}. $$

g) Pour déterminer les projections orthogonales, on va appliquer la proposition 8. Il faut donc déterminer une base orthonormée de $\mathfrak{sl}_2$ et une de $\mathscr{S}_2$. Pour cela, on pense à l'algorithme de Gram-Schmidt.

On a besoin pour commencer d'une base (quelconque) de $\mathfrak{sl}_2$ que l'on va orthonormer grâce au processus de Gram-Schmidt. D'après la question **f**, la famille (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathfrak{sl}_2$ où
$$ e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. $$
On constate alors que $\langle e_1,e_2\rangle = \operatorname{tr}({}^t(e_1)e_2) = \langle e_1,e_3\rangle = \operatorname{tr}({}^t(e_1)e_3) = \langle e_2,e_3\rangle = \operatorname{tr}({}^t(e_2)e_3) = 0$. La famille (e_1,e_2,e_3) est donc orthogonale, il n'y a donc pas besoin d'appliquer le processus de Gram-Scmidt. Il suffit de normaliser la famille (e_1,e_2,e_3) pour obtenir une base orthonormée $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ de $\mathfrak{sl}_2$. Or, d'après le calcul de la norme de la question **e**, on a $\|e_2\| = \|e_3\| = 1$ et $\|e_1\| = \sqrt{2}$. Ainsi
$$ \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \qquad \varepsilon_2 = e_2, \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_3 = e_3. $$

On a alors
$$ q(\mathrm{A}) = \underbrace{\langle \mathrm{A},\varepsilon_1\rangle}_{\sqrt{2}^{-1}(a-d)}\,\varepsilon_1 + \underbrace{\langle \mathrm{A},\varepsilon_2\rangle}_{b}\,\varepsilon_2 + \underbrace{\langle \mathrm{A},\varepsilon_3\rangle}_{c}\,\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & \dfrac{d-a}{2} \end{bmatrix}. $$

On applique la même méthode pour $\mathscr{S}_2$. On a besoin pour commencer d'une base (quelconque) de $\mathscr{S}_2$. D'après la question **f**, la famille (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathscr{S}_2$ où
$$ e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. $$
On constate alors que $\langle e_1,e_2\rangle = \operatorname{tr}({}^t(e_1)e_2) = \langle e_1,e_3\rangle = \operatorname{tr}({}^t(e_1)e_3) = \langle e_2,e_3\rangle = \operatorname{tr}({}^t(e_2)e_3) = 0$. La famille (e_1,e_2,e_3) est donc orthogonale, il n'y a donc pas besoin d'appliquer le processus de Gram-Scmidt. Il suffit de normaliser la famille (e_1,e_2,e_3) pour obtenir une base orthonormée $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ de $\mathscr{S}_2$. Or, d'après le calcul de la norme de la question **e**, on a $\|e_2\| = \|e_3\| = 1$ et $\|e_1\| = \sqrt{2}$. Ainsi
$$ \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \qquad \varepsilon_2 = e_2, \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_3 = e_3. $$

On a alors
$$ q(\mathrm{A}) = \underbrace{\langle \mathrm{A},\varepsilon_1\rangle}_{\sqrt{2}^{-1}(b+c)}\,\varepsilon_1 + \underbrace{\langle \mathrm{A},\varepsilon_2\rangle}_{a}\,\varepsilon_2 + \underbrace{\langle \mathrm{A},\varepsilon_3\rangle}_{d}\,\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} a & \dfrac{b+c}{2} \\ \dfrac{b+c}{2} & d \end{bmatrix}. $$

h) On a $\mathrm{F} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{Id}_2)\mathrm{A}) = \mathrm{tr}\,({}^t(\mathrm{C})\mathrm{A}) = 0 \right\}$. D'après les calculs de la question **f**, on a

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{F} \iff a + d = 0 \text{ et } -c + b = 0\,.$$

Ainsi
$$\mathrm{F} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

i) On applique la méthode de la question **g**. On a besoin pour commencer d'une base (quelconque) de F. D'après la question **f**, la famille (e_1, e_2) est une base de F où

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

On constate alors que $\langle e_1, e_2 \rangle = \mathrm{tr}\,({}^t(e_1)e_2) = 0$. La famille (e_1, e_2) est donc orthogonale, il n'y a donc pas besoin d'appliquer le processus de Gram-Scmidt. Il suffit de normaliser la famille (e_1, e_2) pour obtenir une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de F. Or, d'après le calcul de la norme de la question **e**, on a $\|e_1\| = \|e_2\| = 2$. Ainsi

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2.$$

On a alors
$$p(\mathrm{A}) = \underbrace{\langle \mathrm{A}, \varepsilon_1 \rangle}_{\sqrt{2}^{-1}(b+c)} \varepsilon_1 + \underbrace{\langle \mathrm{A}, \varepsilon_2 \rangle}_{\sqrt{2}^{-1}(a-d)} \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{a-d}{2} & \dfrac{b+c}{2} \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{d-a}{2} \end{bmatrix}.$$

j) En appliquant les formules des questions **g** et **i** pour le calcul de p, q et r, on obtient

$$p(q(\mathrm{A})) = p(r(\mathrm{A})) = p(\mathrm{A}) = q(r(\mathrm{A})) = r(q(\mathrm{A})) = \begin{bmatrix} \dfrac{a-d}{2} & \dfrac{b+c}{2} \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{d-a}{2} \end{bmatrix}.$$

k) D'après la proposition 8, il existe une unique matrice $\mathrm{D}_0 \in \mathrm{F}$ telle que $\|\mathrm{A} - \mathrm{D}_0\| = \min\limits_{\mathrm{D} \in \mathrm{F}} \|\mathrm{A} - \mathrm{D}\|$ et de plus on a $\mathrm{D}_0 = p(\mathrm{A})$. La matrice cherchée est donc

$$\begin{bmatrix} \dfrac{a-d}{2} & \dfrac{b+c}{2} \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{d-a}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

l) En appliquant les formules des questions **g** et **i** pour le calcul de p et q, on obtient

$$q(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{C} \qquad \text{et} \qquad r(\mathrm{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Id}_2.$$

De plus, on a $\|\mathrm{A}\| = \sqrt{4} = 2$ et $\|q(\mathrm{A})\| = \|r(\mathrm{A})\| = \sqrt{2}$.

Soit θ_1 l'angle entre A et $q(\mathrm{A})$. Par définition

$$\cos\theta_1 = \frac{\langle \mathrm{A}, q(\mathrm{A}) \rangle}{\|\mathrm{A}\| \|q(\mathrm{A})\|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \times 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'où $\theta_1 = 3\pi/4$.

Soit θ_2 l'angle entre A et $r(\mathrm{A})$. Par définition

$$\cos\theta_2 = \frac{\langle \mathrm{A}, r(\mathrm{A}) \rangle}{\|\mathrm{A}\| \|r(\mathrm{A})\|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'où $\theta_2 = \pi/4$.

Soit θ_3 l'angle entre $q(\mathrm{A})$ et $r(\mathrm{A})$. Par définition

$$\cos\theta_3 = \frac{\langle q(\mathrm{A}), r(\mathrm{A}) \rangle}{\|q(\mathrm{A})\| \|r(\mathrm{A})\|} = 0.$$

D'où $\theta_3 = \pi/2$: $q(\mathrm{A})$ et $r(\mathrm{A})$ sont orthogonaux.