Correction

Corrigé – Exercice 1.

a) D'après l'énoncé, on sait déjà que B est une forme bilinéaire symétrique. Il s'agit donc de vérifier que B est définie positive c'est-à-dire que

$$\mathrm{B}(v,v) \geqslant 0 \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}(v,v) = 0 \iff v = 0.$$

Or,
$$\forall\, v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad \mathrm{B}(v,v) = (x+y+z)^2 + (y+z)^2 + z^2.$$

Ainsi $\mathrm{B}(v,v)$ est la somme de trois carrés. On en déduit que $\mathrm{B}(v,v) \geqslant 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$ et que $\mathrm{B}(v,v) = 0$ si et seulement si chacun de ses trois carrés est nul. D'où

$$\mathrm{B}(v,v) = 0 \qquad \iff \qquad \begin{cases} x+y+z = 0 \\ \quad\;\; y+z = 0 \\ \qquad\quad\; z = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système, on obtient $z = y = x = 0$, autrement dit $v = 0$. Ainsi $\mathrm{B}(v,v) = 0$ si et seulement si $v = 0$. La forme bilinéaire B est donc bien un produit scalaire.

b) Il s'agit de déterminer une base orthonormée et « qui dit base orthonormée, dit Gram-Schmidt ». On applique donc le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On a alors deux méthodes.

Première méthode. On connaît par cœur les formules pour obtenir la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) :

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} \\[2ex] e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} \qquad \text{où} \quad e_2' = \varepsilon_2 - \langle \varepsilon_2, e_1\rangle e_1 \\[2ex] e_3 = \dfrac{e_3'}{\|e_3'\|} \qquad \text{où} \quad e_3' = \varepsilon_3 - \langle \varepsilon_3, e_1\rangle e_1 - \langle \varepsilon_3, e_2\rangle e_2\,. \end{cases}$$

Il ne reste plus qu'à les appliquer en faisant attention que le produit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dont il est question dans les formules ci-dessus n'est pas le produit scalaire usuel (*i.e.* $xx' + yy' + zz'$) mais le produit scalaire B. De même, la norme d'un vecteur se calcule par la formule $\|v\| = \sqrt{\mathrm{B}(v,v)}$. On obtient alors

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{\mathrm{B}(\varepsilon_1,\varepsilon_1)}} \\[2ex] e_2 = \dfrac{e_2'}{\sqrt{\mathrm{B}(e_2',e_2')}} \qquad \text{où} \quad e_2' = \varepsilon_2 - \mathrm{B}(\varepsilon_2, e_1)e_1 \\[2ex] e_3 = \dfrac{e_3'}{\sqrt{\mathrm{B}(e_3',e'3)}} \qquad \text{où} \quad e_3' = \varepsilon_3 - \mathrm{B}(\varepsilon_3, e_1)e_1 - \mathrm{B}(\varepsilon_3, e_2)e_2\,. \end{cases}$$

On obtient alors successivement

$$\mathrm{B}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) = (1+0+0)^2 + (0+0)^2 + 0^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad e_1 = \varepsilon_1 = (1,0,0)\,;$$

puis $\mathrm{B}(\varepsilon_2, e_1) = (0+1+0)(1+0+0) + (1+0)(0+0) + 0\times 0 = 1$ et $e_2' = \varepsilon_2 - e_1 = (-1,1,0)\,;$

d'où
$$\mathrm{B}(e_2',e_2') = (-1+1+0)^2 + (1+0)^2 + 0^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad e_2 = e_2' = (-1,1,0)\,;$$

enfin
$$\begin{cases} \mathrm{B}(\varepsilon_3, e_1) = & (0+0+1)(1+0+0) + (0+1)(0+0) + 1\times 0 = 1 \\ \mathrm{B}(\varepsilon_3, e_2) = & (0+0+1)(-1+1+0) + (0+1)(1+0) + 1\times 0 = 1 \end{cases}$$

d'où $e_3' = \varepsilon_3 - e_1 - e_2 = (0,-1,1)$ et $\mathrm{B}(e_3',e_3') = (0-1+1)^2 + (-1+1)^2 + 1^2 = 1\,;$

et
$$e_3 = e_3' = (0,-1,1).$$

Finalement
$$e_1 = (1,0,0), \qquad e_2 = (-1,1,0) \qquad \text{et} \qquad e_3 = (0,-1,1)\,.$$

Deuxième méthode. La deuxième méthode se décompose en deux étapes : on construit d'abord une base orthogonale (v_1, v_2, v_3) puis on la normalise pour obtenir (e_1, e_2, e_3). On pose

$$\begin{cases} v_1 = & \varepsilon_1 \\ v_2 = & \varepsilon_2 - \alpha v_1 \\ v_3 = & \varepsilon_3 - \beta v_1 - \gamma v_2 \,. \end{cases}$$

On détermine alors α par la condition $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ puis β et γ par les conditions $\langle v_1, v_3\rangle = 0$ et $\langle v_2, v_3\rangle = 0$. On obtient alors les formules

$$\alpha = \frac{\langle \varepsilon_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle}, \qquad \beta = \frac{\langle \varepsilon_3, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\langle \varepsilon_3, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle}.$$

Comme précédemment, le produit scalaire de deux vecteurs se calcule à l'aide de B, ainsi

$$\alpha = \frac{\mathrm{B}(\varepsilon_2, v_1)}{\mathrm{B}(v_1, v_1)} = 1, \qquad \beta = \frac{\mathrm{B}(\varepsilon_3, v_1)}{\mathrm{B}(v_1, v_1)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \gamma = \frac{\mathrm{B}(\varepsilon_3, v_2)}{\mathrm{B}(v_2, v_2)} = 1,$$

et $\qquad v_1 = \varepsilon_1 = (1, 0, 0), \qquad v_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = (-1, 1, 0) \qquad$ et $\qquad v_3 = \varepsilon_3 - v_1 - v_2 = (0, -1, 1).$

Pour finir, on normalise les vecteurs pour obtenir

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{\mathrm{B}(v_1, v_1)}} = (1, 0, 0), \qquad e_2 = \frac{v_2}{\sqrt{\mathrm{B}(v_2, v_2)}} = (-1, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad e_3 = \frac{v_3}{\sqrt{\mathrm{B}(v_3, v_3)}} = (0, -1, 1)\,.$$

Corrigé — Exercice 2.

a) On cherche une base orthonormée. Encore une fois, « qui dit base orthonormée, dit Gram-Schmidt ». Voyons comment les deux méthodes de l'exercice précédent se transposent ici. Pour commencer, il faut choisir la base de F de laquelle on va partir pour appliquer le processus de Gram-Schmidt. On choisit la base la plus « simple » : $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = x$.

Première méthode. On applique les formules du cours pour obtenir la base orthonormée (e_1, e_2) de F

$$\begin{cases} e_1 = & \dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} \\ e_2 = & \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} \qquad \text{où} \quad e_2' = \varepsilon_2 - \langle \varepsilon_2, e_1\rangle e_1\,. \end{cases}$$

On commence par calculer

$$\|\varepsilon_1\| = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1 \times 1 \,\mathrm{d}t} = 1.$$

On obtient alors $e_1 = \varepsilon_1 = 1$. On calcule alors

$$\langle \varepsilon_2, e_1\rangle = \int_0^1 t \times 1 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}, \qquad e_2' = x - \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \|e_2'\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{\left[\frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{12}}.$$

Finalement, $e_1 = 1$ et $e_2 = \sqrt{12}(x - 1/2)$.

Deuxième méthode. La deuxième méthode se décompose en deux étapes : on construit d'abord une base orthogonale (v_1, v_2) de F puis on la normalise pour obtenir la base orthonormée (e_1, e_2) de F. On pose

$$\begin{cases} v_1 = & \varepsilon_1 \\ v_2 = & \varepsilon_2 - \lambda v_1 \end{cases}$$

On détermine alors λ par la condition $\langle v_2, v_1\rangle = 0$. Or $\langle v_2, v_1\rangle = \langle \varepsilon_2, v_1\rangle - \lambda\langle v_1, v_1\rangle$. Ainsi

$$\lambda = \frac{\langle \varepsilon_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} = \frac{\displaystyle\int_0^1 t \times 1 \,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^1 1 \times 1 \,\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $v_1 = 1$ et $v_2 = x - 1/2$. On normalise maintenant v_1 et v_2 en calculant

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1\rangle} = \sqrt{\int_0^1 1 \times 1 \,\mathrm{d}t} = 1 \qquad \text{et} \qquad \|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2\rangle} = \sqrt{\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{12}}.$$

On a donc
$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = 1 \qquad \text{et} \qquad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

b) On remarque que

$$\int_0^1 (ax + b - x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \|ax + b - x^2\|^2.$$

Lorsque a et b parcourent $\mathbb{R}$, les polynômes $ax + b$ décrivent F. Ainsi, d'après la proposition 8 du polycopié de cours, cette quantité est minimale si $ax + b = p(\mathrm{R})$. On utilise alors la formule donnée dans cette même proposition pour calculer $p(\mathrm{R})$. Comme (e_1, e_2) est une base orthonormée de F, on a

$$p(\mathrm{R}) = \langle \mathrm{R}, e_1\rangle e_1 + \langle \mathrm{R}, e_2\rangle e_2 = \left(\int_0^1 t^2 \times 1 \,\mathrm{d}t\right) 1 + \left(\int_0^1 t^2 \sqrt{12}\left(t - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t\right) \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}).$$

Ainsi
$$p(\mathrm{R}) = x - \frac{1}{6}.$$

c) Comme $1 = \varepsilon_1 \in \mathrm{F}$, on a $p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 = 1$. De même, $x = \varepsilon_2 \in \mathrm{F}$, on a $p(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 = x$ (un vecteur du sous-espace sur lequel on projette n'est pas modifié par projection). On obtient donc comme matrice

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En effet, on rappelle que sur la première colonne de la matrice se trouve les coordonnés de $p(1) = 1$ dans la base $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$; sur la deuxième colonne de la matrice se trouve les coordonnés de $p(x) = x$ dans la base $\mathscr{B}$; sur la troisième colonne de la matrice se trouve les coordonnés de $p(x^2) = x - 1/6$ dans la base $\mathscr{B}$.

Une remarque à propos de la matrice A. Elle n'est pas symétrique bien que ce soit la matrice de l'endomorphisme p qui lui est symétrique (puisque c'est un projecteur orthogonal (voir l'exemple page 21)). Mais la matrice d'un endomorphisme symétrique n'est symétrique que si la base dans laquelle on l'écrit est une base orthonormée. Ici la base $(1, x, x^2)$ n'est pas orthonormée et donc il est normal que A ne soit pas symétrique.

Corrigé — Exercice 3.

a) L'application $(x, y) \mapsto xy^2$ est une application polynomiale donc elle est continue sur $\mathbb{R} \times]\,0\,, +\infty\,[$ (prop. 4(v)). L'application $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition (prop. 4(ii)), l'application $(x, y) \mapsto e^{xy^2}$ est continue sur $\mathbb{R} \times]\,0\,, +\infty\,[$. L'application $(x, y) \mapsto y$ est continue sur $\mathbb{R} \times]\,0\,, +\infty\,[$ puisque c'est la fonction deuxième coordonnée (prop. 4(i)). De plus, elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \times]\,0\,, +\infty\,[$. Par quotient (prop. 4($iv$)), l'application f est donc continue.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times [\,1\,, 2\,] \subset \mathbb{R} \times]\,0\,, +\infty\,[$, donc, d'après la proposition 2, F est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Il s'agit d'appliquer le théorème 5. Il faut donc en vérifier les hypothèses. Il y en a trois :

(i) La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times [\,1\,, 2\,]$.

(ii) La fonction $x \mapsto f(x, t)$ est dérivable c'est-à-dire $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe.

(iii) La fonction $(x, t) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue.

Le (i) est déjà connu. Pour (ii), l'application

$$g : x \longmapsto \frac{e^{xt^2}}{t}$$

est bien dérivable et $g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = te^{xt^2}$. Enfin pour ($iii$), on sait déjà que les applications $(x, t) \mapsto t$ et $(x, t) \mapsto e^{xt^2}$ sont continues. Ainsi, par produit (prop. 4(iii)), $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [\,1\,, 2\,]$. L'application F est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après la proposition 5.

c) Toujours d'après la proposition 5, on sait que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_1^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t e^{xt^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x = 0$, on a
$$\mathrm{F}'(0) = \int_1^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}.$$

Pour $x \neq 0$, on a $\mathrm{F}'(x) = \displaystyle\int_1^2 t e^{xt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_1^2 2xte^{xt^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\left[e^{xt^2}\right]_{t=1}^{t=2} = \frac{1}{2x}(e^{4x} - e^x)\,.$

Et on trouve bien
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,, \qquad \mathrm{F}'(x) = \frac{e^x}{2x}(e^{3x} - 1)\,.$$

Pour calculer $\mathrm{F}'(x)$ pour $x \neq 0$, on aurait très bien pu poser le changement de variable $u = xt^2$ et obtenir

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{2x}\int_x^{4x} e^u\,\mathrm{d}u = \frac{e^{4x} - e^x}{2x} = \frac{e^x}{2x}(e^{3x} - 1)\,.$$

Corrigé — Exercice 4.

a) En $t \neq 0$, l'application φ est continue comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Regardons en $t = 0$,

$$\varphi(t) = \frac{\arctan t}{t} = \frac{\arctan t - \arctan 0}{t - 0}.$$

D'où
$$\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \arctan'(0) = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)(0) = 1 = \varphi(0).$$

Ainsi φ est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}_+$.

b) Il s'agit ici d'appliquer le théorème 8. Il y a 5 hypothèses à vérifier. Pour simplifier les notations, on pose

$$\psi : (x,t) \longmapsto \frac{x\varphi(xt)}{1+t^2}.$$

(i) L'application ψ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(ii) Il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto \psi(x_0, t)$ soit convergente.

(iii) La dérivée partielle $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(iv) L'application $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(v) L'hypothèse de domination sur $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$.

Vérifions point par point ces hypothèses.

(i) L'application $(x,t) \mapsto xt$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ car polynomiale (prop.4(v)). De plus, $xt \in \mathbb{R}_+$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Comme l'application $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ est continue d'après la question **a**. On en déduit, par composition (prop. 4(ii)), que $(x,t) \mapsto \varphi(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, l'application première coordonnée $(x,t) \mapsto x$ est continue (prop.4(i)). Ainsi, par produit (prop. 4(iii)), $(x,t) \mapsto x\varphi(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Pour finir, l'application $(x,t) \mapsto 1 + t^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ car polynomiale (prop.4(v)) et ne s'annule pas. Donc, par quotient (prop.4(iv)), l'application ψ est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(ii) Choisissons $x_0 = 0$, on a alors $\psi(0,t) = 0$ et

$$\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$$

est bien convergente.

(iii) On définit l'application

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,t) \quad \longmapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \end{cases}.$$

Il s'agit donc d'étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \psi(x,t)$ (attention, cette application n'est pas l'application ψ qui est une fonction de deux variables !) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Supposons $t = 0$. On a $\psi(x,0) = x\varphi(0) = x$. L'application $x \mapsto \psi(x,0)$ est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,0) = 1 = \gamma(x,0).$$

Supposons $t > 0$. Pour $x > 0$, on a alors

$$\psi(x,t) = \frac{\arctan xt}{t(1+t^2)}.$$

L'application $x \mapsto \psi(x,t)$ est alors dérivable sur $]\,0\,,+\infty\,[$ et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

Il reste à étudier la fonction dérivabilité en $x = 0$ de la fonction $x \mapsto \psi(x,t)$. On calcule donc

$$\frac{\psi(x,t) - \psi(0,t)}{x} = \frac{\arctan xt}{xt(1+t^2)} = \frac{\varphi(xt)}{1+t^2}.$$

En passant à la limite lorsque $x \to 0$, on obtient par continuité de φ en 0, l'existence de $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ au point $(0,t)$ et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0,t) = \lim_{x \to 0} \frac{\psi(x,t) - \psi(0,t)}{x} = \frac{1}{1+t^2} = \gamma(0,t).$$

Finalement, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)$ est bien défini pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ et

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = \gamma(x,t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

(iv) L'application $(x,t) \mapsto (1+t^2)(1+x^2t^2)$ est continue (car polynomiale) et ne s'annule pas. L'application constante $(x,t) \mapsto 1$ est continue. Donc, par quotient (prop.4(iv)), l'application $\gamma = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}$ est continue.

(v) Il s'agit de majorer $\left|\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right|$ par une fonction de t qui ne dépend pas de x et telle que l'intégrale de cette fonction soit convergente. Or

$$\forall\,(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t) = \left|\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc la fonction $t \mapsto (1+t^2)^{-1}$ ne dépend pas de x et son intégrale entre 0 et $+\infty$ est convergente.

La proposition 8 s'applique donc et F est bien définie et continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c) Commençons par démontrer l'indication. En réduisant au même dénominateur, on trouve

$$\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1+x^2t^2-x^2-t^2x^2}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\right) = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

On « invente » cette formule grâce à la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles.

D'après la proposition 8, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

Ainsi, pour $x \in\,]\,0\,,1\,[\, \cup\,]\,1\,,+\infty\,[$, on obtient

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - x^2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t^2}\right) = \frac{1}{1-x^2}\left([\arctan t]_0^{+\infty} - x^2\left[\frac{\arctan xt}{x}\right]_0^{+\infty}\right).$$

D'où
$$\mathrm{F}'(x) = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - x\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1-x}{1-x^2} = \frac{\pi}{2(1+x)}.$$

d) D'après la proposition 8, F' est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \pi(2(1+x))^{-1}$ est elle aussi continue sur $\mathbb{R}_+$ (c'est l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas). Ces deux fonctions coïncident sur $x \in \,]\,0\,,1\,[\,\cup\,]\,1\,,+\infty\,[$ et donc par continuité aussi en 0 et 1. Ainsi la formule

$$\mathrm{F}'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

est valable sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

e) On en déduit alors en intégrant,

$$\mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(0) = \int_0^x \mathrm{F}'(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{\pi}{2}(\ln(1+x) - \ln 1).$$

Or $\psi(0,t) = 0$, d'où $\mathrm{F}(0) = 0$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \qquad \mathrm{F}(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x).$$

Corrigé — Exercice 5.

a) Voir la figure **??**

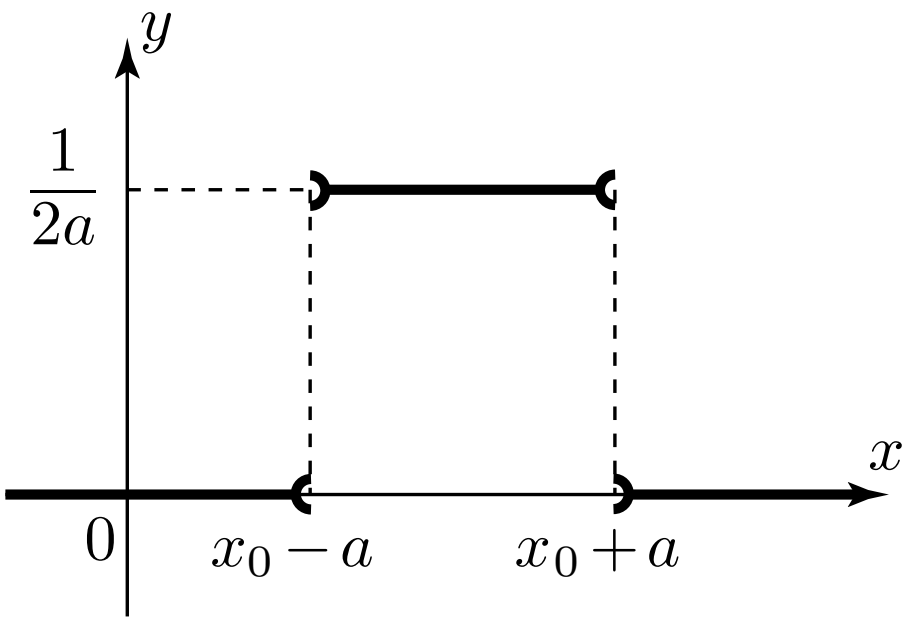

Fig. 1 La fonction f

b) Il s'agit de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1\,.$$

Comme f est nulle en dehors de $]\,x_0 - a\,, x_0 + a\,[$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{x_0-a}^{x_0+a} 1\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{2a} = 1\,.$$

c) Comme f est nulle en dehors de $]\,x_0-a\,,x_0+a\,[$, on a

$$\langle x^n\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0-a}^{x_0+a} x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{x_0-a}^{x_0+a} x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a(n+1)}\Big((x_0+a)^{n+1}-(x_0-a)^{n+1}\Big).$$

En particulier, pour $n=1$, on trouve

$$\langle x\rangle = \frac{1}{4a}\Big((x_0+a)^2-(x_0-a)^2\Big) = \frac{1}{4a}\,2a\cdot 2x_0 = x_0\,,$$

grâce à l'égalité $\mathrm{X}^2-\mathrm{Y}^2=(\mathrm{X}-\mathrm{Y})(\mathrm{X}+\mathrm{Y})$. Pour $n=2$, la relation $\mathrm{X}^3-\mathrm{Y}^3=(\mathrm{X}-\mathrm{Y})(\mathrm{X}^2+\mathrm{XY}+\mathrm{Y}^2)$ fournit

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{6a}\Big((x_0+a)^3-(x_0-a)^3\Big) = \frac{1}{6a}\,2a\,\big((x_0+a)^2+(x_0+a)(x_0-a)+(x_0-a)^2\big)\ .$$

D'où, en développant, on a $\qquad \langle x^2\rangle = \dfrac{1}{3}(3{x_0}^2+a^2) \qquad$ et $\qquad (\Delta x)^2 = \dfrac{a^2}{3}\,.$

d)
$$\langle x^n\rangle = \frac{1}{2a(n+1)}\Big((x_0+a)^{n+1}-(x_0-a)^{n+1}\Big)\,.$$

e) Grâce à l'identité $\mathrm{X}^{n+1}-\mathrm{Y}^{n+1}=(\mathrm{X}-\mathrm{Y})(\mathrm{X}^n+\mathrm{X}^{n-1}\mathrm{Y}+\cdots+\mathrm{XY}^{n-1}+\mathrm{Y}^n)$, on obtient

$$\langle x^n\rangle = \frac{1}{2a(n+1)}\big(2a\,\big((x_0+a)^n+(x_0+a)^{n-1}(x_0-a)+\cdots+(x_0+a)(x_0-a)^{n-1}+(x_0-a)^n\big)\big)\,.$$

D'où, $\qquad \langle x^n\rangle = \dfrac{1}{n+1}\big((x_0+a)^n+(x_0+a)^{n-1}(x_0-a)+\cdots+(x_0+a)(x_0-a)^{n-1}+(x_0-a)^n\big)\,.$

Lorsque $a\to 0$, chacun des termes de la somme tend vers ${x_0}^n$. Il y a $n+1$ termes. D'où

$$\lim_{a\to 0}\langle x^n\rangle = {x_0}^n\,; \qquad \lim_{a\to 0}\langle x\rangle = x_0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{a\to 0}(\Delta x)^2 = \lim_{a\to 0}\frac{a^2}{3} = 0\,.$$

La limite se comporte comme la variable aléatoire constante x_0 (*i.e.* comme le résultat d'un dé dont toutes les faces sont des x_0).

f)
$$\mathrm{F}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)e^{ikx}\mathrm{d}x = \frac{1}{4a\pi}\int_{x_0-a}^{x_0+a} e^{ikx}\mathrm{d}x\,.$$

Comme $x_0=0$, on trouve pour $k\neq 0$,

$$\mathrm{F}(k) = \frac{1}{4a\pi}\left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{4aik\pi}\left(e^{ika}-e^{-ika}\right) = \frac{\sin ka}{2\pi ka}\,,$$

et
$$\mathrm{F}(0) = \frac{1}{2\pi a}\int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}.$$