Espace euclidien de matrices

Soit $\mathrm{E} = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 à coefficients réels. On définit les applications

$$\mathrm{tr} : \begin{cases} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto \mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = a + d \end{cases}$$

$$\text{Transposée}: \begin{cases} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \\ \mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \longmapsto {}^t\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \end{cases}$$

et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) & \longmapsto \langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{tr}\left({}^t(\mathrm{A})\,\mathrm{B}\right). \end{cases}$$

a) Montrer que les applications tr et Transposée sont linéaires.

b) En déduire que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

c) Montrer que

$$\forall\, \mathrm{A} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{A} = {}^{t\,t}\mathrm{A}, \qquad \mathrm{tr}\,(\mathrm{A}) = \mathrm{tr}\,({}^t\mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \forall\, \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), \qquad {}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\ {}^t\mathrm{A}.$$

d) En déduire que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

e) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire. On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

f) Déterminer les sous-espaces ${\mathrm{Id}_2}^{\perp} := \mathfrak{sl}_2$ et $\mathrm{C}^{\perp} := \mathscr{S}_2$ où

$$\mathrm{Id}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

g) Déterminer les projections orthogonales $q(\mathrm{A})$ et $r(\mathrm{A})$ d'une matrice A sur chacun des sous-espaces $\mathfrak{sl}_2$ et $\mathscr{S}_2$.

h) Déterminer l'orthogonal F du sous-espace engendré par Id_2 et C.

i) Calculer la projection orthogonale $p(\mathrm{A})$ d'une matrice A sur F.

j) Comparer $p(q(\mathrm{A})), p(r(\mathrm{A})), p(\mathrm{A}), q(r(\mathrm{A})), r(q(\mathrm{A}))$.

k) Soit

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer la matrice $\mathrm{D} \in \mathrm{F}$ telle que $\|\mathrm{A} - \mathrm{D}\|$ soit minimal.

l) Déterminer les angles entre A et $q(\mathrm{A})$, entre A et $r(\mathrm{A})$ et entre $q(\mathrm{A})$ et $r(\mathrm{A})$.