MT252. Année 2004/2005. Examen du 2/06/2005.

Partie Mathématique

Durée : 2 heures et 30 minutes.

Les calculatrices et documents sont interdits.
Justifier chaque réponse
(les réponses non justifiées non seront pas prises en compte).

Exercice 1. On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$\left[\begin{array}{l} x'(t) = -x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) - y(t) \end{array}\right. \qquad (S)$$

et on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions à valeurs réelles de (S).

1) Déterminer la solution générale à valeurs réelles de (S). En déduire une base de E.

2) On considère sur E la forme bilinéaire symétrique $(\,.\,|\,.\,)$ définie par :

$$(X|Y) = \int_0^{+\infty} \langle X(t), Y(t)\rangle \, dt \,,$$

où $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que l'espace vectoriel E, muni de la forme $(\,.\,|\,.\,)$, est un espace euclidien de dimension 2.

b) Construire une base de E.

Exercice 2. Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système :

$$\left[\begin{array}{rcl} x''(t) & = & x(t) - 4\,y(t) \\ y''(t) & = & -\,x(t) + \;\; y(t) \end{array}\right.$$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\,.$$

1) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Que signifie la phrase : "L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,dt$ est dominée sur $\mathbb{R}$." ? Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ est dominée sur $\mathbb{R}$.

3) Énoncer deux autres faits impliquant, avec ceux mentionnés dans les questions précédentes, que :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$$

définit bien une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontrer ces deux derniers faits.

4) Établir pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = -\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,dt\,.$$

Exercice 4. On considère les intégrales doubles :

$$I = \iint_T e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy, \qquad J = \iint_D (x+y)\,dx\,dy,$$

où T désigne l'intérieur du trapèze de sommets $(-2,2)$, $(2,2)$, $(1,1)$ et $(-1,1)$, et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

1) Dessiner les domaines d'intégration T et D.

2) Calculer I et J.