MT252. Année 2004/2005. Examen du 2/06/2005.

Les calculatrices et documents sont interdits.

Composer les parties "Mathématiques" et "Application à la physique" sur des copies à en-tête distinctes.

Partie Mathématique

Durée : 2 heures et 30 minutes.

Justifier chaque réponse
(les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte).

Barème indicatif : Ex. 1 : 4, Ex. 2 : 5, Ex. 3 : 2,5, Ex. 4 : 4.

Exercice 1. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des solutions à valeurs réelles du système différentiel linéaire :

$$\left[\begin{array}{l} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = \qquad\quad - y(t) \end{array}\right. \qquad (S)$$

1) Déterminer la solution générale à valeurs réelles du système (S). En déduire une base de l'espace E.

2) On considère la forme bilinéaire symétrique $(\,.\,|\,.\,) : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$(X|Y) = \langle X(0), Y(0)\rangle,$$

où $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ désigne le produit scalaire canonique de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que l'espace vectoriel E, muni de la forme $(\,.\,|\,.\,)$, est un espace euclidien de dimension 2.

b) Construire une base orthonormée de E.

Exercice 2. On se propose ici de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$ à partir de l'identité :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

On pourra utiliser cette égalité autant de fois que nécessaire dans l'exercice.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$ par :

$$f(x,t) = e^{-t^2}\cos(2xt)\,.$$

1) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[$. Montrer que f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

2) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ est dominée sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la relation $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt$ définit une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt\,.$$

4) Montrer que la fonction F définie à la question précédente est solution de l'équation différentielle :

$$y'(x) = -2x\,y(x)\,.$$

En déduire une expression sans intégrale de $F(x)$.

Exercice 3. Calculer l'intégrale :

$$\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)\,z\;dx\,dy\,dz\,,$$

où $\mathcal{D}$ désigne la demi-boule :

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;;\;x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\;\;z\geqslant 0\}\,.$$

Exercice 4. Déterminer la solution générale *à valeurs réelles* du système :

$$\left[\begin{array}{rcl} x''(t) &=& -x(t)+\;y(t)\;+x'(t) \\ y''(t) &=& \;\;\;x(t)-2y(t)-x'(t)-y'(t) \end{array}\right.$$