

Partie Mathématique

Durée : 2 heures et 30 minutes.

*Les calculatrices et documents sont interdits.**Justifier chaque réponse**(les réponses non justifiées non seront pas prises en compte).*

Exercice 1. Soit B la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$ définie pour $v = (x, y, z)$ et $v' = (x', y', z')$ par :

$$B(v, v') = (x + y + z)(x' + y' + z') + (y + z)(y' + z') + zz'.$$

1. Montrer que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. On fait de $\mathbb{R}^3$ un espace euclidien en le munissant de ce produit scalaire. À partir de la base canonique, construire une base orthonormée par le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 2. On considère l'espace euclidien E des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x)Q(x) dx.$$

Soit F le sous-espace des polynômes de degré au plus 1 et p le projecteur orthogonal sur F .

1. Déterminer une base orthonormée de F .
2. Soit le polynôme $R(x) = x^2$. Justifier le fait que l'intégrale :

$$\int_0^1 (ax + b - x^2)^2 dx$$

est minimale lorsque $ax + b$ est le polynôme $p(R)$. Calculer $p(R)$.

3. Sans aucun calcul supplémentaire, écrire la matrice A de p dans la base $(1, x, x^2)$ de E .

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par :

$$f(x, y) = \frac{e^{xy^2}}{y}$$

et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_1^2 f(x, t) dt.$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Peut-on en déduire que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Établir pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \frac{e^x}{2x} (e^{3x} - 1).$$

Exercice 4. On définit une fonction $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ en posant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(t) = \frac{\text{Arctg } t}{t}$ si $t > 0$. On pose pour tout $x \geq 0$:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \varphi(xt)}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que φ est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que F est définie et continûment dérivable sur $[0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$F'(x) = \frac{\pi}{2(1+x)}.$$

(Indication. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on a :

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{(1+t^2)} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right)$$

4. Cette expression de $F'(x)$ est-elle encore valide pour $x = 1$? (On répondra *sans effectuer le moindre calcul.*)
5. Dédurre de ce qui précède une expression de $F(x)$ sans intégrale.